IUT de Montpellier **TD1**
M3103 Algorithmique avancée

Pour tous les exercices, on détaillera la spécification des algorithmes (action, prérequis), et on vérifiera que les appels respectent les prérequis.

1 Exercices de base sur les entiers

Exercice 1. Factorielle Ecrire un algorithme récursif `int factorielle(int n)` qui pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ calcule $n!$.

Exercice 2. Pair Ecrire un algorithme récursif `boolean pair(int n)` qui pour tout $n \in \mathbb{N}$ retourne vrai ssi n est pair.

Exercice 3. Somme impairs Ecrire un algorithme récursif `int sommeImpairs(int n)` qui pour tout $n \geq 1$, n impair, calcule $\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (2i+1)$.

Exercice 4. Puissance Ecrire un algorithme récursif `int puiss(int x, int n)` qui pour tout entier x et pour tout $n \in \mathbb{N}$ calcule x^n. Nous écrirons une autre version de cet algorithme de type "diviser pour régner" plus tard.

2 Exercices de base sur les tableaux

Exercice 5. Nombre d'occurences

Question 5.1.
Ecrire un algorithme récursif `int nbOccAux(int x, int []t, int i)` qui pour tout entier x, tableau t non vide et pour tout i **tel que** $0 \leq i < t.length$ calcule le nombre d'occurences de x dans le sous tableau $t[i..(t.length-1)]$.

Question 5.2.
En déduire un algorithme (non récursif .. mais sans boucle !) `int nbOcc(int x, int []t)` qui calcule le nombre d'occurences de x dans t. Indication : appelez nbOccAux.

Question 5.3.
On remarque que pour l'instant nbOccAux ne supporte pas les tableaux vides (car il faudrait donner i tel que $0 \leq i < 0$). On va donc changer la spécification de nbOccAux. Ecrire un algorithme `int nbOccAux2(int x, int []t, int i)` qui pour tout entier x, tableau t et pour tout i **tel que** $0 \leq i \leq t.length$ calcule le nombre d'occurences de x dans le sous tableau $t[i..(t.length-1)]$. Conclusion : nbOccAux2 supporte maintenant les tableaux vides, et on s'aperçoit que le cas de base était plus court, on est gagnant des deux côtés ! Il faudra donc s'habituder à ces spécifications où les indices ont le droit de sortir du tableau.

Exercice 6. Palindrome En s'inspirant de la démarche de l'exercice précédent (c'est à dire en écrivant un estPalindromeAux(.....) POUR LEQUEL VOUS INDIQUEREZ VOS PREREQUIS), écrire un algorithme `boolean estPalindrome(char []t)` qui détermine si t est un palindrome. Par exemple, $t = ['a','b','c','b','a']$ est un palindrome, $t = ['a','b','b','a']$ est un palindrome, mais $t = ['a','b','c','e','a']$ n'est pas un palindrome.

Exercice 7. Croissants En s'inspirant de la démarche de l'exercice précédent, écrire un algorithme `boolean croissants(int []t)` qui détermine si les éléments de t sont rangés par ordre croissant.

Exercices bonus

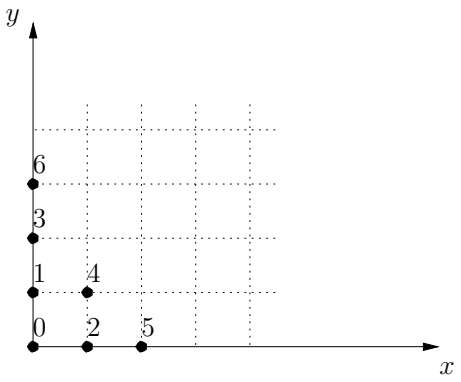
Exercice 8. Pavage avec des dominos On considère une grille de 2 cases de haut et $n \geq 1$ cases de large, ainsi que des dominos de taille 2×1 (que l'on peut placer horizontalement ou verticalement sur le damier). On appelle **paver** une grille le fait de disposer des dominos pour couvrir toutes les cases, sans laisser de trous, sans que deux dominos se chevauchent, et sans qu'un domino soit à moitié sur la grille et à moitié dehors.

Question 8.1.
Dessinez les 3 façons de paver une grille de 2 cases de hauteur 3 de largeur.

Question 8.2.
Ecrire un algorithme récursif `int f(int n)` qui pour tout entier $n \geq 1$ calcule le nombre de façons de paver une grille de 2 cases de haut et de n cases de large. Par exemple, pour $n = 3$, $f(3)$ doit retouner 3.

Question 8.3.
Et f .. vous la reconnaissez ?

Exercice 9. Numérotation du plan On considère la fonction C qui à tout couple d'entiers (x, y) associe un entier comme indiqué sur le schéma.



Question 9.1.
Ecrire un algorithme récursif `int C(int x, int y)` qui pour tout $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ calcule $C(x, y)$

Question 9.2.
On admettra (voir dessin!) que C est une bijection, et donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe unique couple (x, y) tel que $C(x, y) = n$. Un tel couple sera noté $C^{-1}(n)$. Ecrire un algorithme récursif `int[] invC(int n)` qui pour tout $n \in \mathbb{N}$ calcule le couple $C^{-1}(n)$ (sous la forme d'un tableau de taille 2 de la forme $[x, y]$)

Exercice 10. PGCD Nous allons écrire l'algorithme récursif d'Euclide pour calculer le PGCD de deux entiers naturels.

Question 10.1.
Soient a et b dans $\mathbb{N}$, avec $b > 0$. Soient q et r dans $\mathbb{N}$ tels que $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$. Montrer que pour tout x, (x divise a et x divise b) $\Leftrightarrow$ (x divise b et x divise r).

Question 10.2.
Soient a et b dans $\mathbb{N}$, avec $b > 0$. Montrer que $PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$.

Question 10.3.
En déduire un algorithme récursif `int PGCD(int a,int b)` qui pour tout a et b dans $\mathbb{N}$ calcule le pgcd de a et b.