

Aufgabe 2

(Cormen 25-2)

a. For d-ary min heap

Insert: ~~$O(\log_d(n))$~~ $O(\log_d(n))$

Extract-min: $O(d \cdot \log_d(n))$

Decrease-key: $O(\log_d(n))$

$\rightarrow d = \Theta(n^\alpha) : \text{ mit } 0 < \alpha \leq 1$

Insert:

$$O(\log_{d(n)}(n)) = O\left(\frac{\log(n)}{\log(n^\alpha)}\right)$$

$$= O\left(\frac{\log(n)}{\alpha \cdot \log(n)}\right) = O\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Extract-min:

$$O(d \cdot \log_d(n)) = O(n^\alpha \cdot \frac{1}{\alpha})$$

Decrease-key:

$$O\left(\frac{1}{\alpha}\right) \leftarrow \text{same as insert}$$

For Fibonacci heap:

Insert: $O(1)$

\rightarrow auch konstant wie bei $d = \Theta(n^\alpha)$

Extract-min: $O(\log(n))$

\rightarrow Fibonacci heap schneller
kommt auf d drauf an!

Decrease-key: $O(1)$

b. (Compute shortest paths from a single source on an ϵ -dense directed graph $G = (V, E)$ with no negative-weight edges in $O(E)$ time)

Benutze Dijkstra mit einem d -ary min-heap!

Setze $d = n^\epsilon$

$n \rightarrow$ Anzahl Knoten

Dann ist die Laufzeit:

$$\begin{aligned} & O\left(\underbrace{n \cdot \log_d(n)}_{\text{insert}} + \underbrace{n \cdot d \cdot \log_d(n)}_{\text{Extract-min}} + \underbrace{|E| \cdot \log_d(n)}_{\text{Decrease-key}}\right) \\ &= O\left(n \cdot \frac{1}{\epsilon} + n \cdot n^\epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon} + |E| \cdot \frac{1}{\epsilon}\right) \quad \left[\begin{array}{l} \text{aus Aufgabe} \\ a. \end{array} \right] \\ &= O\left(\frac{1}{\epsilon} (n + n^{1+\epsilon} + n^{1+\epsilon})\right) \\ &= O\left(\frac{1}{\epsilon} (3 \cdot n^{1+\epsilon})\right) \\ &= O(n^{1+\epsilon}) = O(|E|) \end{aligned}$$

c. Führe den Algo. aus b. für jeden Knoten aus
 $\rightarrow O(VE)$

d. ~~Diagram~~

Unterschied zu c.: "negative-weight edges"

→ Nutze Idee, die in dem Kapitel beschrieben wurde:
(25.3)

"Reweighting"
↑

Dieses Preprocessing dauert $O(VE)$

→ Also hat Preprocessing (Reweighting) und wiederholtes Dijkstra wie in c. und b. beschreiben eine Laufzeit von $O(VE)$

→ Anschließendes Rückwandeln der Kantengewichte ist ~~nat~~ natürlich auch noch nötig für die korrekten Distanzen!