

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Содержание

Лекция 1	3
1.1 Исторический экскурс	3
1.2 Метод Дирихле	3
1.3 Контрпример Вейерштрасса.	3
1.4 Контрпример Адамара	3
1.5 Метод Ритца	4
Лекция 2	7
2.1 Метод Бубнова – Галеркина	7
2.2 Повторение	8
Лекция 3	11
3.1 Формулы Грина	11
3.2 Положительные операторы	13
3.3 Положительно определенные операторы	14
3.4 Энергетическая норма	15
Лекция 4	16
4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2)	16
4.2 Пример	16
4.3 Пример 3	17
4.4 Энергетический метод	17
4.5 Обобщение решения задачи о \min для ф.э.	17
Лекция	18
5.1 Применение энергетического метода для краевых задач	18
5.1.1 Теорема	20
5.1.2 Теорема	20
5.2 Основные кр задачи для ур-я Пуассона	21
Лекция 6	22
Лекция 7	24
7.1 Не-во Пуанкаре	24
7.2 Неоднородные краевые условия	26
7.3 ур-е с переменным коэф	27
Лекция 8	29
8.1 Энергетический метод для положительных операторов	30
8.2 Эллиптические уравнения в бесконечной области	31
8.2.1 Эллиптическое уравнение в бесконечной области	31
Лекция 8	33
9.1 Метод Бубнова-Галеркина	33
9.2 Применение метода Б-Г к интегральному уравнению Фредгольма	33
9.3 Элементы теории приближение	34
9.4 Введение в теорию степенных сплайнов	36
Лекция	36
10.1 Степенные сплайны	36

Лекция	39
11.1 Билинейные базисные функции в \mathcal{R}	39
11.2 Построение проекционно сеточной схемы для ОДУ 2-го порядка	41

Лекция 1

1.1 Исторический экскурс

Лекции с 9:30 два часа.

Вариационная постановка для задачи мат физики. задача - условие на границе + начальное. (Экстремум функционала энергии, поэтому энергетические пространства).

Соболев - прямые методы решения задач. позволяют найти решение с помощью СЛАУ. Наиболее известен метод Рунге.

1.2 Метод Дирихле

Дана область $\omega \in \mathbb{R}^2$.

$$M = u : u_0(x, y), (x, y) \in \partial\Omega$$

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \rightarrow \min$$

Интеграл Дирихле $\Rightarrow \bar{u}$ - гармонический в Ω

1.3 Контрпример Вейерштрасса.

$$M = y; y(x) \in C'[-1; 1], y(-1) = -1, y(1) = 1$$

$$J(y) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, J(y) \geq 0$$

$$y_{\varepsilon}(x) = \frac{\arctg(\frac{x}{\varepsilon})}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$y'_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_{\varepsilon}) = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \varepsilon^2}{\arctg^2(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{2\varepsilon \arctg(\frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$J(\bar{y}) = \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Противоречие: $y(-1) = -1, y(1) = 1$

1.4 Контрпример Адамара

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^2}{2^n} \cos(2^n \Theta), x = \rho \cos \Theta, y = \rho \sin \Theta$$

$$\rho \leq 1$$

Непрерывны и гармоничны. Интеграл Дирихле в круге $\rho \leq r \leq 1$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n+1}} \rightarrow_{r \rightarrow 1} \inf$$

1.5 Метод Ритца

$$J(\omega) = \int_a^b f(x, \omega, \omega', \dots, \omega^{(k)}) dx \rightarrow \inf$$

$\omega \in M$ класс допустимых функций

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$ (координатные функции)

Св-ва:

$$1) \forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}, \forall_n$$

$$\omega_n = \omega_0 + \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \in M$$

$$2) \forall \omega \in M \text{ и } \forall \varepsilon > 0$$

Уравнение полноты

$$H(\omega_n) = F(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \inf$$

$$\|\omega - \psi_0 - \sum_{i=1}^n a_i \psi_i\| < \varepsilon$$

Рассмотрим:

$$J(\omega_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow \inf$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}(\omega_n) = 0, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_n}(\omega_n) = 0 - \text{альтернативная система уравнений}$$

$$\Rightarrow a_1, \dots, a_n - \text{решение}$$

Насколько хорошо приближает метод искомое решение? На примере задачи об упругой пластине.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 - \text{обл}, S = \partial\Omega$$

изгиб $\omega(x, y)$ удовлетворяет ур-ю Сори Жульен

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(xy)}{\mathcal{D}}; (x, y) \in \Omega$$

\mathcal{D} — жесткость пластины при упругом изгибе

$q(x, y)$, - Интенсивность давления

$$\omega(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \mathcal{D}} = 0 \leftarrow \text{Производная по нормали к } S$$

$$J(\omega) = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta \omega)^2 - f(\omega) \right) d\Omega \rightarrow \inf$$

$$f = \frac{q(x, y)}{\mathcal{D}} \in C'(\bar{\Omega})$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Рассмотрим без доказательства ограниченности снизу.

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$(x, y)(\xi, \eta)$ — точки из Ω r — расстояние между (x, y) и (ξ, η)

$$J(\omega) = J_0 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega_2)^2 dx dy$$

$$j(\omega) \geq J_0 \Rightarrow \exists \inf J(\omega)$$

Введем $\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)$ - координатные ф-ции

$$1) \psi_n(x, y), \frac{\partial^{k+l} \psi_n}{\partial x^k \partial y^l} \in C(\overline{\Omega}), k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon$$

2) $\psi_n(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

3) \forall ф-ии $\zeta(x, y)$:

а) удовлетворяет пункту 1

б) $\zeta(x, y) \equiv 0(x, y) \in \Omega_\rho$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} :$$

$$|\zeta(x, y) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi_i(x_i, y_i)| < \varepsilon$$

$$|\frac{\partial^{k+l} \zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^{k+l} \psi_i(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}| < \varepsilon$$

Условие полноты $k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon \Rightarrow$
приближенное решение :

$$\omega_n = \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_n \psi_n \rightarrow J(\omega)$$

$$J_n = \iint_{\Omega} (\frac{1}{2} (\Delta \omega_n)^2 - f(\omega_n)) dx dy$$

α_i выбираем : $J(\omega_n) \rightarrow J(\omega)$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k = B_i, i = \overline{1, n}$$

$$A_{ik} = \iint_{\Omega} \Delta \psi_i \Delta \psi_k dx dy \Rightarrow$$

$\exists!$ решение a_1, \dots, a_n в $\omega_n = \dots$ приближение решение

$$B_i = \iint_{\Omega} f \psi_i dx dy$$

\rightarrow Сущ ед решения a_1, \dots, a_n в $\omega_n = \dots$ (приближенное решение)

Рассмотрим $\forall b_1, \dots, b_n$

$$\zeta_n = b_1 \psi_n + \dots + b_n \xi_n$$

$$?? b_i \text{ и } \sum_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n n A_{ik} a_k b_i = \sum_{i=1}^n b_i B_i$$

$$\sum_{i=x}^n \sum_{k=1}^n n \iint_{\Omega} b_i \Delta \psi_i \Delta \psi_k a_k dx dy - \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\omega} b_i \Delta \psi_i \sum_{k=1}^n a_k \Delta \xi_k dx dy - \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy \right] = 0$$

...

$$\int_O mega(\Delta \omega_n \sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) - f(\sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) dx dy = 0$$

$$\iint_O mega(\Delta \Omega_n \zeta_n - f \zeta) dx dy = 0$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega_u)^2 dx dy \text{ не возрастает у } \geq inf$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ по критерию Коши } \Rightarrow N(\varepsilon) \forall_n > N(\varepsilon)$$

Лекция 2

$\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$ — координатные функции, $w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta w_n)^2 dx dy$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m : 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x, y)$$

$$\iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx dy < 1$$

Обозначим $S = \partial\Omega$ — границу области Ω

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\varphi \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta \varphi \ln r \, d\xi d\eta$$

$$\left| \int_x f(x) \bar{g}(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_x |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_x |g(x)|^2 dx \right)$$

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega} \ln^2 r \, d\xi d\eta \right)^{1/2}$$

$$|\varphi(x, y)| \leq C_1$$

$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}$$

$$\omega_n \rightrightarrows_{\Omega} w_n(x, y) \in C(\Omega)$$

2.1 Метод Бубнова — Галеркина

$$w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$$

$$Lw - \lambda Mw = 0$$

L, M — дифференциальные операторы

$$\sum_{i=1}^n (A_{ik} - \lambda B_{ik}) a_k = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \dots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \dots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$N(x, y) = Lw_n - \lambda Mw_n \text{ — невязка}$$

$$N(x, y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}$$

2.2 Повторение

1. $f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = 0$
2. $\int_{\Omega} f(x) dx = 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0$
3. $|f(x)| < \varphi(x), \varphi - \text{суммируема по Лебегу} \Rightarrow f(x) - \text{суммируема по Лебегу}$
4. $\{\varphi_n(x)\} - \text{суммируемы с квадратами по Лебегу}$

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$$

Обозначим V – линейное пространство

(φ, ψ) – скалярное произведение: $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

1. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$
3. $(\varphi, \varphi) \geq 0$
4. $(\varphi, \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

- Неравенство Коши-Буняковского

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

- Неравенство треугольника

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$$

$$L_2(\Omega) : (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

$$L_2(\Omega, \sigma) : (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} \sigma(x) dx$$

$$L_2(\Omega^m) : (\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(x)} dx$$

Критерий линейной зависимости системы функций

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно зависима (ЛЗ) в H

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \left| \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \right| = 0 \end{array}$$

Опр. M — плотно в H , если $\forall p \in H$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_n \in M : \|\varphi_n - p\| < \varepsilon$.

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \forall \varepsilon > 0 : \quad \forall \varphi \in H \quad \begin{array}{l} \exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ \exists \varphi_n^2 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \\ \dots \end{array} \end{array}$$

$C_0^{(k)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система (ОНС)

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$$

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2 + \dots$$

$\{\varphi_n\}$ полная в H , если из $(\varphi, \varphi_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$\forall \varphi \in H : \quad a_k = (\varphi, \varphi_k)$ — коэффициенты Фурье

Теор. H — гильбертово, $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система (ПОНС)

$$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2 \text{ — равенство Парсеваля}$$

Теор. $\exists a_k : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, $\{\varphi_n\}$ — ПОНС в H , тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \text{ сходится по } \|\cdot\| \text{ к } \varphi \in H, \text{ при этом } \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Опр. H сепарабельно если $\exists M$ — счетное мн-во плотное в H .

Теор. H сепарабельно $\Leftrightarrow \exists$ ПОНС (счетная или конечная) в H .

$\{u : \int_{\Omega} u dx = 0\}$ — пример подпространства в $L_2(\Omega)$.

Пусть H_1 — подпространство в H

$\forall \varphi \in H \quad \exists! \varphi_1 \in H_1 : \|\varphi - \varphi_1\| = \min_{\psi \in H_1} \|\varphi - \psi\|$ — проекция φ на H_1

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad H_2 = \varphi \perp H_1$ — ортогональное дополнение

l — линейный функционал : $M \subset H \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$$|l_\varphi| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|_H$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi} l_\psi = l_\varphi \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \|\psi - \varphi\| < \delta : |l_\psi - l_\varphi| < \varepsilon$$

Теор. (Рисса) $\forall l$ — непрерывного линейного функционала в $H \exists! \psi \in H : l_\varphi = (\varphi, \psi)$

Пусть M — плотно в H , $\Phi : M \times M \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$\Phi(\varphi, \psi) : \Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$$

$\Phi(\varphi, \varphi)$ — квадратичная форма

$H : D_A \subset H$ — область определения некоторого оператора A

Линейный оператор A ограничен $\Leftrightarrow A$ непрерывен

$\varphi \in D_A, \quad A\varphi \in R_A$ — область значений оператора A

$\varphi \in D_A \rightarrow! A\varphi \in R_A$

Лекция 3

$$\left. \begin{array}{l} Au = f \\ u, f \in H \end{array} \right| \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad H = L_2(\Omega)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in C(\overline{\Omega}) \\ u|_s = 0 \end{cases}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}); \quad u|_s = 0\}$$

$$A = -\Delta u$$

Формула Остроградского

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) d\Omega = \int_S \left(\varphi \cos(\overline{n} \cdot x) + \psi \cos(\overline{n} \cdot y) + \omega \cos(\overline{n} \cdot z) \right) dS$$

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix} \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} W d\Omega = \int_S W_n dS$$

Пусть $\varphi = uv, \quad \psi = \omega = 0$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uv \cos(\overline{n} \cdot x) dS$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv \cos(\overline{n} \cdot x_i) dS \quad \text{в } \mathbb{R}^m \quad (0)$$

3.1 Формулы Грина

$$Lu = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik}(P) \frac{\partial u(P)}{\partial x_k} \right) + C(P)u(P)$$

$$D_L = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad C(P) \in C(\overline{\Omega})$$

$$A_{ik}(P) \in C(\overline{\Omega}), \quad A_{ik}(P) = A_{ki}(P) \quad \forall P, \quad i, k = \overline{1, n}$$

$$\int_{\Omega} v L u d\Omega = - \sum_{i,k=1}^m \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) d\Omega + \int_{\Omega} C u v d\Omega$$

в (0) подставим $u \rightarrow v, v \rightarrow A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$

$$\int_{\Omega} v L u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} C u v d\Omega - \int_S v \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) dS \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} u L u d\Omega = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C u^2 \right] d\Omega - \int_S u \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) dS \quad (2)$$

из (1) вычитаем ее же, но поменяв местами u и v : $(1) - (1)_{u \rightleftharpoons v}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v L u - u L v) d\Omega &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] d\Omega - \\ &\quad - \int_S \left[v \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) - u \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_k) \right] dS \end{aligned}$$

$$N \cdot := \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} \cos(\bar{n} \cdot x_i)$$

$$\int_{\Omega} (v L u - u L v) d\Omega = \int_S (u N v - v N u) dS \quad (3)$$

Частный случай формул Грина, это оператор Лапласа:

$$L u = -\Delta u; \quad A_{ii} = 1; \quad A_{ik} = 0, i \neq k; \quad C = 0$$

$$- \int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (4)$$

$$- \int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (5)$$

$$- \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad (6)$$

3.2 Положительные операторы

Пусть оператор A симметричен в H

Опр. Оператор называется положительным, если $\forall u \in D_A \subset H, \quad (Au, u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

Пр. 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u \quad \text{в } L_2(0, 1); \quad D_B = \{u \in C_0^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$(Bu, v) = -\int_0^1 v \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - v \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = -\int_0^1 u \frac{d^2 v}{dx^2} dx = (u, Bv) \quad \forall u, v \in D_B$$

$$(Bu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = \text{const}, u(0) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Пр. 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \quad D_C = \left\{ u \in C^2(0, 1), \begin{cases} u'(0) + \alpha u(0) = 0 \\ u'(1) + \beta u(1) = 0 \end{cases} \quad \alpha, \beta = \text{const} \right\}$$

$$(Cu, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1) = (u, Cv)$$

$$\alpha > 0, \beta \geq 0$$

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geq 0$$

$$\alpha = \beta = 0, \quad u \equiv 1 \Rightarrow (Cu, u) = 0 \Rightarrow C \text{ не является положительным}$$

Пр. 3

$$Au = -\Delta u, \quad D_A = \{u \in C^2(\Omega) : u|_S = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, S = \partial\Omega, H = L_2(\Omega)\}$$

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = -\int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \text{const}, \quad u|_S = 0 \Rightarrow u = 0$$

Рассмотрим мембрану

Ω в плоскости (x, y) , $u(x, y)$ — изгиб мембраны

$$-\Delta u = \frac{q}{T}$$

q — поперечная нагрузка на единицу площади

T — натяжение мембраны

$u|_S = 0$ — мембрана закреплена на краях

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

3.3 Положительно определенные операторы

Опр. Симметричный оператор A называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \quad (7)$$

Пр. 1 (продолжение)

$$B : u(0) = 0, u \in D_B$$

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

$$u^2(x) \leq \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x (u'(t))^2 dt = x \int_0^x (u'(t))^2 dt \leq x \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\gamma^2 \|u\|^2 \leq (Bu, u), \quad \gamma = \sqrt{2} \Rightarrow B \text{ является положительно определенным}$$

Пр. 4

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{du}{dx} \right) \quad \text{в } L_2(0, 1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1], u(1) = 0\}$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[x^3 \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] dx = \left[x^3 \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] \Big|_0^1 = 0$$

$$(Lu, u) = \int_0^1 x^3 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \Rightarrow L \text{ является положительно определенным}$$

$$\frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2, \quad u_{\delta}(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad u_{\delta} \in \mathcal{D}_L$$

$$\frac{(Lu_{\delta}, u_{\delta})}{\|u_{\delta}\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 \left(\frac{du_{\delta}}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^{\delta} (\delta - x)^3 dx} = \frac{9 \int_0^1 x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int_0^{\delta} (\delta - x)^6 dx} = \frac{9}{40} \delta \Rightarrow L \text{ не явл. положительно опр.}$$

3.4 Энергетическая норма

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)

На D_A : $[u, v]_A = (Au, v)_H$

Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1. $[u, v]_A = \overline{[v, u]_A}$
 $(Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]}$
2. $[a_1u + a_2u, v] = a_1[u, v] + a_2[u, v]$
3. $(Au, u) = [u, u] \geq \gamma \|u\|^2 \geq 0$
4. $[u, u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$|u| = [u, u]$ — энергетическая норма

D_A предгильбертово, дополним его по $|\cdot|_A \Rightarrow$ гильбертово пр-во H_A

$$u \in H_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u \in D_A \\ \exists u : \{u_n\} \in D_A : |u_n - u| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right.$$

Лекция 4

4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2)

H_A — энергетическое пр-во

(0)

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A$$

$$u \in H_A \Rightarrow u \in \mathcal{D}_A$$

$$\Rightarrow \exists \{u_n\} \in \mathcal{D}_A \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_A = 0$$

Теорема

$\forall \exists u \in H_A \Rightarrow$ злем из H различным $u_1, u_2 \in H_A$ отв разн. злем из H

Доказательство

...

2)

$$u_{1,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_n; u_{2,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_2$$

$$u_1 \text{ и } u_2 \rightarrow u \text{ из } H; u = u_1 - u_2$$

...

$$r \in H_A \in \{u_n \in \mathcal{D}_A \mid \|u_n - r\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0\}$$

$$\|u_n\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \|u\|_A$$

4.2 Пример

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2} u; D_B = u \in C^2(0, 1], u(0) = u(1) = 0$$

$$H = {}_2(0, 1);$$

$$u \in H_B; \exists \{u_n\} \in D_B \|\|u_n - u\| \rightarrow_{B \rightarrow \infty} 0$$

...

A - положительно, но не положительно определено.

Теорема

$$u \in H_A : u \in H \Leftrightarrow \exists \{u_n\} \in D_A$$

$$\|u - u_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|u_k - u_n\|_H \rightarrow_{k, n \rightarrow +\infty} 0$$

4.3 Пример 3

4.4 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f$$

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H;$$

Теорема

A положителен в H уравнению $Au = f$ \exists не более одного решения.

Доказательство

$$u_1, u_2 - \text{Решения } Au = f \dots$$

Теорема о функциональной энергии

A - положительный в H ; u - решение $Au = f \Leftrightarrow$ доставляет минимум функционала

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - \frac{1}{2}(u, f)_H$$

Доказательство

...

Пример 4

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \omega + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$$

$$\mathcal{D}_A = \{\omega \in C^4(\bar{\Omega}); \omega|_S = 0; \frac{\partial \omega}{\partial n}|_S = 0\}$$

$$A - \omega = \frac{a(x, y)}{\mathcal{D}}$$

4.5 Обобщение решения задачи о min для ф.э.

$$A - \text{Положительно определено в } H \quad Au = f \quad f \in H$$

фикс $f \in H \forall u \in H_A(u, f)_H : \Phi_A : H_A \rightarrow \mathcal{R}$

$$|(u, f)_H| \leq \|f\|_H \|u\|_H \leq \|f\|_H \frac{1}{\gamma} \|u\|_A; \gamma \|f\|_H - const$$

Опр $(f, u) \Rightarrow$ по Т Рисса $\exists u_0 \in H_A(f, u)_H = [u, u_0]_A$

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0] - [u_0, u]_A$$

$$+ - [u_0, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

$$\operatorname{argmin}_{u \in H_A} F(u) = u_0 \text{ Обобщенное решение } Au = f$$

Если H сепарабельно, энергетическое про-во тоже сепарабельно, $\exists \{\omega_n\}$ ПОНС

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \omega_n ??$$

$$u = \omega_n [u_0 \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H \omega_n$$

Лекция

5.1 Применение энергетического метода для краевых задач

1. Немного опаздал, пример часть примера пропустил ...

$$(Lu, u)_H = \sum_{k=0}^m \int_{x_1}^{x_2} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \geq \int_{x_1}^{x_2} p_{n_1}(x) \left(\frac{d^m u}{dx^n} \right)^2 dx \geq p_0 \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^m u}{dx^m} \right)^2 dx = p_0 \|u^{(m)}\|_H^2$$

...

$$(Lu_M) \geq \partial^2 \|u\|_H^2, \gamma = \sqrt{p_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \right)^m$$

...

$$\|u\|_A \leq \sqrt{p_0} \|u\|^{(m)}_H \exists \{u_N(x)\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = 0; u_0 - \text{точное решение}$$

$$\|u_n - u_k\|_A \leq \|u_n - u_0\|_A + \|u_k - u_0\|_A \rightarrow 0$$

$$u_n^{(l)}(x_1) = u_k^{(l)}(x_1) = 0, l = \overline{0, m-1}$$

...

2. Изгиб балки

$$L\omega = \frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}] + K\omega = q(x)$$

ω — Прогиб балки

E — модуль Юнга

$I(x)$ — момент инерции

$q(x)$ — интенсивность нагрузки на балку

K — коэф податливости основания

$$\omega(0) = \omega(l) = 0$$

$$\omega'(0) = \omega'(l) = 0; A - \text{Положительно определен}$$

Аналогично задачи минимизации функционала

$$F(\omega) = \int_0^l (EI(x)\omega''^2 + K\omega^2 - 2q(x\omega))dx = (L\omega, \omega) - 2(\omega, q)$$

Воспользуемся методом Рунца

$$u_n(x)_{n=1}^\infty, \phi_n(x) = (x-l)^2 x^{n+1}, \text{ Полная система в } H_A$$

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x) = (x-l)^2 \sum_{k=1}^n a_k x^{k+1}$$

$$\sum_n^{k=1} a_k A_{1k} = b_{ij}; i = \overline{1, n}$$

$$b_j = (q, \phi_j)_H = \int_0^l a(x)(x-l)x dx$$

$$A_{ik} = (L\phi_i, \phi_k)_H = \int_0^l (EI(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_k}{dx^2} + k\phi_i\phi_k)dx$$

...

$$\omega(0) = 0; \omega''(l) = 0$$

$$\omega'(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2})_{x=0}^{x=l} = 0$$

Тут тоже можно доказать положительную определенность

3. Краевая задача для систем ОДУ

$$-\sum_{k=1}^s \left[\frac{d}{dx} (p_{jk}(x) \frac{du_k(x)}{dx}) - q_{jk}(x) u_k(x) \right] = f_j(x)$$

краевые ...

$$-\frac{d}{dx} [P(x) \frac{du}{dx}] + Q(x) u(x) = f(x)$$

$$u(x_1) = u(x_2) = 0$$

$$(u, v)_{H=L_2(x_1, x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} u(x) \cdot v(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^s u_k(x) v_k(x) dx$$

5.1.1 Теорема

$P(x), Q(x)$ симметр. $x \in [x_1, x_2] \Rightarrow A$ Симметричный

Доказательство

$$\begin{aligned} (Au, v)_H &= - \int_{x_1}^{x_2} v(x) \cdot \frac{d}{dx} [P(x) \frac{du}{dx}] dx + \int_{x_1}^{x_2} v(x) \cdot Q(x) u(x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} P \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + v(x \cdot Q(x) u(x)) dx \\ Qu \cdot v &= \sum_{j,k=1}^s q_{jk} u_k \cdot v_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^s q_{k,j} v_j \cdot v_k \end{aligned}$$

Следовательно оператор симметричен

5.1.2 Теорема

$P(x), Q(x)$ симметрич на $[x_1, x_2]$

$P(x)$ положит. опр. $Q(x)$ неотр на $(x_1, x_2] \Rightarrow A$ положительно определен

доказательство

$P(x)$ пол. опр $\forall x \Rightarrow$ пусть $\lambda_1(x) > 0$

$\exists \lambda > 0 = const; \lambda_1(x) > \hat{\lambda} > 0 x \in [x_1, x_2]$

$\forall t = (t, ..., s)$

$$P(x)t \cdot t = \sum_{j,k=1}^s P_{jk}(x)t_j t_k \geq \lambda_1(x) \sum_{k=1}^s t_k^2 \geq$$

$$\geq \hat{\lambda} \sum_{k=1}^s t_k^2$$

$$Q(x)t \cdot t = \sum_{k,k=1}^s q_{jk}t_j t_k \geq 0$$

$$(u, u)_H = \int_{x_1}^{x_2} (P \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx}) dx \geq \hat{\lambda} \int_{k=1}^s (\frac{du_k}{dx})^2 dx$$

$$(Au, u)_H \geq \frac{2\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} (\sum_{k=1}^s u_k^2) dx = \frac{2\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} \|u\|_H^2$$

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

...

5.2 Основные кр задачи для ур-я Пуассона

$$-\Delta u = f(p) \text{ в } \Omega \in \mathcal{R}^m$$

3. Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$Au = -\Delta u = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

$$P_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}_1) | u|_{2\Omega} = 0\}$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$(-\Delta, u)_h = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\frac{\partial n}{\partial x_i})^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega \geq 0$$

\Leftrightarrow

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H$$

$$F(u) = \int_{\Omega} ((gradu)^2 - 2uf) d\Omega$$

$$[\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma(P)u]|_{\partial\Omega} = 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_{\Gamma} (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial u^2} dS \geq 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Rightarrow u = \text{const} \int_{\partial\xi} \gamma c^2 dS = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$F(u) = \int_{\Omega} ((gradu)^2 - 2uf) d\Omega + \int_{\gamma\Omega} \gamma n^2 dS$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

з Неймана
5.2, 5.2

$$(-\Delta, u)_H = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega \geq$$

$$u == 1(-\Delta u, u)_H = 0$$

при $V == 1$

$$\int_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int_{\partial\bar{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

$$S_{\Omega} f d\Omega = 0$$

Условие разрешимости 5.2 5.2

Лекция 6

**пропустил начало (почти треть) **

Уравнение Фридрикса в общем виде:

$$\int_{\omega} \sum_{k=1}^m (\frac{\partial n}{\partial x_k})^2 d\Omega \geq x^2 \int_{\Omega} u^2 dx$$

$$u|_S = 0$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq c \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial n}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} u^2 dS \right\}$$

$$\left(\frac{\partial(fv)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(fv)}{\partial y} \right)^2 = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right] - vf\Delta f + \frac{\partial}{\partial x} \left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Преобразуем правую и левую части

$$v^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) + f^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + 23 \frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2v \frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 f \frac{\partial^2 f^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} - v^2 f \Delta f + f \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Это предполагается очевидным XD

$$\begin{aligned} \int \left(\left(\frac{\partial(fv)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(fv)}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega &\geq + \int_{\Omega} vf\Delta f d\Omega + \int_{\partial\Omega} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS \\ - \int_{\Omega} vf\Delta f d\Omega &\leq \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS \end{aligned}$$

$$f = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\Delta f = -\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cdot f - \int_{\Omega} v^2 f \Delta u^2 = \int_{\Omega} u^2 s \Omega \pi^2 ()$$

$$\left| \int_{\partial u} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS \right| \leq \int_{\partial\Omega} v^2 f \left| \frac{\partial f}{\partial n} \right| dS \leq c_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\Omega$$

$$\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_{\Omega} y^2 d\Omega \leq \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx + c_1 \int_{\partial\Omega} v^2 dS$$

$$c = \min \left\{ \frac{c_1}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}; \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right\}$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega + \sigma \int_{\partial\Omega u^2 dS} \geq \sigma \{ (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS \}$$

$$\frac{1}{c} \|u\|_H^2 \leq \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\frac{\sigma_1}{c} \|u\|_H^2 \leq \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma}{c}}$$

Лекция 7

$$-(\Delta u, u)_H \geq \frac{\sigma_1}{c} \|u\|_H^2$$

$$\Delta u = f \text{ в } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Omega} = 0$$

7.1 Не-во Пуанкаре

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega$$

$$\Omega u^2 d\Omega \in A \int_{\Omega} (grad u)^2 d\Omega + B \left(\int_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + B \left(\int_{\Omega} d\Omega \right)^2$$

$$u^2(x_2, y_2) + u^2(x_1, y_1) - 2u(x_2, y_2)u(x_1, y_1) = \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \right)^2 + \left(\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy \right)^2 + 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_1) dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy$$

$$\iiint u^2(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = ab \int_{\Omega} u^2 d\Omega$$

$$ab \int_{\Omega} u^2 d\Omega$$

$$\iiint u(x_2, y_2) u(x_1, y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \left(\int_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b a \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_1) \right)^2 dx dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ & = a^2 b \dots \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right)^2 d\Omega \end{aligned}$$

$$2ab \int_{\Omega} u^2 d\Omega - 2 \left(\int_{\Omega} u d\Omega \right)^2 \leq 2ab \left\{ a^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\Omega + b^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 d\Omega \right\}$$

$$A = \max\{a^2, b^2\}, B = \frac{1}{ab} : ab$$

$$D_N = D(A_N) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0; \int_{\Omega} u d\Omega = 0\}$$

$$\|u\|_H^2 \leq A \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m (\frac{\partial u}{\partial x_k})^2 d\Omega = \overline{A} (Lu, u)_H \omega = \frac{2}{\sqrt{\overline{A}}} (A_N u, u) \geq \omega^2 \|u\|_H^2$$

$$\text{Даже } A : A_n \text{ или } A_D \ [u, V]_A = \int_{\Omega} gradu \cdot fradV d\Omega, \|u\|_A = \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega$$

$$u, V \in L_2(\Omega); \psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$$

$$\text{Если } \forall \psi \in c_0^\infty \int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega V \psi d\Omega$$

$$\text{Пусть } u \in H_{A_D} \exists \{u_N\} \in D_{A_D}$$

$$\|u_n - u\|_H \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|u_n - u\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{(gradu_n=gradu_0)^2}^2 d\Omega = \sum_{k=1}^m \int (\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{u_l}{\partial x_k})^2 d\Omega \rightarrow 0$$

$$\|\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - V\|_H \rightarrow 0 \text{ покажем, что } \Omega \rightarrow 0$$

$$\text{Пусть } \psi \in c_0^\infty(\overline{\Omega})$$

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi \frac{\partial u_n}{\partial x_j} d\Omega$$

$$(u_n, \frac{\psi}{\partial x_k})_H = (\frac{\partial u_n}{\partial x_k}; \psi)_H \rightarrow (u, \frac{\partial \psi}{\partial x_k})_H; = -(\psi, V)_H$$

7.2 Неоднородные краевые условия

$$\Delta u = 0 \quad \Omega \in \mathcal{R}^\dagger$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi$$

$$\text{Пусть } \exists \psi(P); \psi \in c(\overline{\Omega}),$$

$$\psi(P) = \phi(P)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} \in C(\Omega), k = \overline{1, m}$$

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega$$

$$D_{\Phi} = \{u : ref7_*\} \Phi(P) + \eta(P),$$

$$\eta : ?? + \eta|_{\partial\Omega} = 0$$

Пусть Φ -ии $u_0(P)$ достигает $\min \Phi(u) : u_0(P)$ реш. $??, ??$

** 1-3 и еще на границе ноль

$$u_0 + t\eta \in D_{\Phi}, \forall t \in \mathcal{R}, \eta : 7.2$$

$\Phi(u_0 + th)$ достигает \min при $t = 0$ как скал функция t

$$\frac{d}{dt} \{ \Phi(u_0 + t\eta) \} |_{t=0} = \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial(u_0 + t\eta)}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \right\} |_{t=0} = \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) \cdot t \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + t^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)^2 \right] d\Omega \right\} |_{t=0}$$

...

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \eta \Delta u_0 d\Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\eta 7.2 \text{ ПЛОТНОСТЬ В } L_2(\Omega) = H$$

$$\Rightarrow \Delta u_0 = 0$$

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega$$

$$\psi : ?? u = \psi - V$$

$$\Phi(u) = \Phi(\psi - V) = \int_{\Omega} (grad(u = V))^2 d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} (\text{grad}\psi)^2 d\Omega - 2 \int \text{grad}V \cdot \text{grad}\psi d\Omega + \int_{\Omega} (\text{grad}V)^2 d\Omega$$

$$F(V) = \|V\|_{A_D}^2 - 2 \int \text{grad}V \text{grad}\psi d\Omega; V \in H_D = H_{A_D}$$

$$lV = \int_{\Omega} \text{grad}\psi \text{grad}V d\Omega; |lV| \leq \int_{\Omega} (\text{grad}\psi)^2 d\Omega \int_{\Omega} (\text{grad}V)^2 d\Omega = c \|V\|_{H_{A_D}} \Rightarrow l - \text{ограничение}$$

lV ограничение Ω

$\psi \in H'(\Omega) : \exists!$ Обобщен. реш Дирихле

$u \in H(\Omega)$

7.3 ур-е с переменным коэф

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x} (A_{jk}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k}) + c(P)u; Lu = f \Omega \in \mathcal{R}^{\sharp}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$(N[u] + \partial(P)u)|_{\partial\Omega} = 0$$

$$N(u)|_{\partial\Omega} = u$$

Формула Грина

$$\int_{\Omega} (V Lu - u LV) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} (VN(u) - uN(V)) dS$$

При условиях ?? и ?? интеграл сокращается к 0, поэтому останется только ??.

$$N(u) + \sigma u = 0$$

$$N(v) + \sigma v = 0$$

$$VN(u) + \sigma uV - bN(V) - \partial uV = 0$$

$$\text{на } \partial\Omega \quad VN(u) - uN(V) = 0$$

$$\Rightarrow \text{гр. у. } ??, ??, ??$$

Опр L элементт в $\overline{\Omega}$, если $A_{jk}(P) :$

$$\exists_{\mu_0} = \text{const} > 0 \forall t_1, \dots, t_m \in \mathcal{R}; \forall P \in \overline{\Omega}$$

$$\sum_{j,k=0}^m A_j k(P) t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{j,k=1}^m t_k^2$$

Пример оператор Триколи

$$Ly=y\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}$$

$$A_H=y, A_{22}=1A_{21}=A_{12}=0$$

$$yt_1^2+1\cdot t_2^2\geq Bt_1^2+t_2^2\geq \hat{B}(t_1^2+t_2^2)$$

$$\forall \Omega: \overline{\Omega} \in \mathcal{R}x(x,+\infty)L \text{ эллиптич в } \Omega$$

$$L \text{ эллентический в } \overline{\Omega}$$

$$C(P)\geq 0 \text{ ф-ла Грина}$$

$$(Lu,u)_H=\int uLud\Omega=\int_{\Omega}(\sum_{j,k=1}^mA_jk\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+Cu^2)d\Omega-\int_{\partial}uN(u)dS$$

$$??/?? \text{ Дир Лейли } \int_{\partial\Omega}(\cdot)dS=0\gamma=\sqrt{c_0}$$

$$(Lu,u)_H\geq a_1^2d\Omega\geq c_0\int_{\Omega}u^2d\Omega=$$

$$=\Omega^2||u||_H^2$$

$$?? \text{ Смен кр з } N(u)=-\sigma u \text{ на } \partial\Omega \sigma(P)\geq \sigma_0>0$$

$$(Lu,u)_H\geq \sigma\int_{\partial\Omega}u^2dS\geq c_0||u||_H^2$$

Лекция 8

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (J_{jk}(P) \frac{\partial n}{\partial x_k} + c(P)u = f(P))$$

1. з Дирихле

$$(Lu, u) = \mu \sum_{j=1}^m \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial n}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega \geq \Sigma^2 \|u\|_H^2; \sigma = \sqrt{ae\mu_0}$$

2. з Робэна

$$(Lu, u) \geq (\alpha \left(\int_{\Sigma} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} n^2 dS); \Rightarrow (Lu, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

3. з Неймана

$$C(P) = 0$$

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_k} l) = f(P)$$

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega + \text{Ф-ла Остроградского}$$

$$- \int_S \sum_{j,k=1}^m A_j \frac{\partial n}{\partial x_k} \cos(\bar{n}, x) dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(P) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} u d\Omega = 0$$

$$D_{L_N} = \{u \in C^2(\bar{\Omega}), N(u)|_{\partial\Omega} = 0, \int_{\Omega} u d\Omega = 0\}$$

$$(L_N u, n) = - \int_{\Omega} u \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_k}) d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_j} \frac{\partial n}{\partial x_k} d\Omega \geq \mu_0 \int_{k=1}^m \left(\frac{\partial n}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq A \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial n}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega + B \left(\int_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

8.1 Энергетический метод для положительных операторов

$$Au = f$$

Все еще работает теорема о функциональной энергии

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

Энергетическое пространство порожденное оператором H_A , вообще говоря его элементам нельзя сопоставить элементы из Гильбертова.

H_A — Энергетическое пр-во

(u, f) на D_A — плотно в H и в H_A

$(u, f) = lu$ Функционал \rightarrow может быть ограничен или не ограничен

Если ограничен в H_A продолжим на H_A

в H_A по теореме Рисса $\exists u_0 \in H_A (u, f) = [u, u_0]_A$

$$[u - u_0, u - u_0] = \|u\|_A^2 + \|u_0\|_A^2 - 2[u, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u\|_A^2 - 2[u, u_0]_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

Минимум достигается на элементе $F(u) = u_0$. Но u_0 может не лежать в энергетическом пр-ве. Обобщенное решение с конечной энергией.

Если H сепарабельно $\Rightarrow H_A$ сепарабельно $\Rightarrow \{\phi_n\}$ в H_A

$$u_o = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \phi]_A \phi$$

$$[\phi_n, u_0] = l\phi_n$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$$

$$u_k \sum_{n=1}^k (f, \phi_n) \|u_k - u_0\|_A \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$$

8.2 Эллиптические уравнения в бесконечной области

$$\Omega = \infty \text{ обл} ; \partial\Omega$$

$$-\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{kj}^{(P)} \frac{\partial u}{\partial x_k}) = f(P)$$

з Дирихле

$$U|_{\partial\Omega} = 0; A_{jk} \text{ отр } A$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0, b(P=0), |P| \gg 1\}$$

A — положительно определен

$HuD\exists u_0$ об реш с кон энергией

$$\exists g(P) : f(P = \text{div} g(P))$$

$$\int_{\Omega} |g(P)|^2 d\Omega < \infty$$

$h(P)l$ обобщенная $\div g(P)$. Если $\forall \phi(P) \in c_0^\infty(\Omega)$

$$\|u_0\|_A^2 \leq C \int_{\Omega} (g(P))^2 d\Omega$$

Дост усл - я

$$m \geq 3 \int_{\Omega} |P|^2 f^2(P) d\Omega < \infty \Rightarrow \|u_0\|_A^2 \leq C^2 \int_{\Omega} |P|^2 f(\beta) d\Omega$$

$$m \geq 2 \int_{\Omega} f^2(P) d\Omega < \infty \text{ и } f(P) = 0|P| \Rightarrow 1$$

8.2.1 Эллиптическое уравнение в бесконечной области

$$H_{A_D} = \{u \in H'(\Omega) \text{ и } u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_{A_H} = \{\exists 0 \delta \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)\}$$

$$F(u) = \int_{k,j=1}^m A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial x_n} d\Omega - 2lu$$

$$l_N n = - \int_{\Omega} grubug d\Omega + \int_{\partial u} ug_{\overline{n}} dS$$

$$l_D u = - \int_{\Omega} grubug d\Omega$$

$$lu = \int_{\Omega} u(P)f(P)d\Omega$$

$$Au=f$$

$$B_j u=0; j=1,q$$

$$H>D_A$$

знак принадлежит в обратную сторону

$$H_A$$

При условии $u \in D_A$, но не обязательно $u \in H_A$ естественные $B_j : u \in H_A$ главные гр условия для A .

$$-\Delta u=f$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\partial u=0,\sigma>0$$

$$(-\Delta u,V)_H=-\int V\Delta u d\Omega$$

$$\int grudugradVd\Omega-\int_{\partial\Omega}V\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

$$F(u,u)=||u||_A^2-2(f,u)=\int_{\Omega}(grud^2u-2u)d\Omega+\int_{\partial\Omega}\partial u^2dS$$

$$u_0 = argmin F;$$

$$\frac{d}{dt}(F(u_0+t\eta))|'_{t=0}=0$$

$$-\int_{\Omega}\eta(\Delta u_0+f)d\Omega+\int_{\partial\Omega}\eta(\frac{\partial u_0}{\partial\eta}+\partial u_0)dS=0$$

Лекция 8

9.1 Метод Бубнова-Галеркина

$$Lu = f, D_2 \text{ плотность в } H$$

Оператор L не обязательно положительный.

$$Bu = 0$$

$$\{\phi_n\} \in D_A \text{ координатные функции}$$

Удовлетворяет (??)

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(P)$$

$$a_k \text{ выбирается из условия, что } Au_n - f = \perp \phi_1, \dots, \phi_n$$

$$\sum_{k=1}^n (L\phi_k, \phi) a_k = (f, \phi_j) j = \overline{1, n}$$

9.2 Применение метода Б-Г к интегральному уравнению Фредгольма

$$u(P) - \int_{\Omega} K(P, Q) u(Q) d\Omega f(P) p \in p \in \Omega$$

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(P, Q) d\Omega_p d\Omega; : \Theta$$

$$\int f^2(P) < \infty \exists \text{ решение } u(P) \text{ в } H$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$\{\widetilde{\phi_n}\} \text{ ПОНС ; } (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$$

$$u_n = \sum_{k=2}^n a_k \phi_k(P)$$

$$a_m - \sum_{k=1}^n \omega_m a_k = f_m$$

$$f_m = (f_1, \phi_m)$$

$$\Omega_{mk} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} k(P, Q) \phi_m(P) \phi(Q) d\Omega_P d\Omega_Q$$

$$f_n(P) = \sum_{k=1}^n f_k \phi_k(P)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} (K_n(P, Q) - K(P, Q))^2 d\Omega_P d\Omega_Q = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (f_n f^2) d\Omega$$

Вспомогательное уравнение

$$u_n(P) - \int_{\Omega} K_n(P, Q) u_n(Q) d\Omega = f_n$$

Из + ИУ при дос большом

$$u(n) \exists! \text{ реш и } \|m_n - u\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n A_k \phi_K(P)$$

$$A_k = \sum_{l=1}^n \omega_{kl} \int_{\Omega} u_l(Q) u_k(Q) d\Omega + (f, \phi_k)$$

$$A_k - \sum_{l=1}^n \omega A_k = f_k$$

9.3 Элементы теории приближение

$H_A \supset H_N$ - конечномерное

\exists норм про-во X : \exists элемент наилучшего приближения

$$\forall u \in X : \rho(u, H_N) = \inf_{V \in H_N} \rho(u, V) X = C[a, b]$$

$$1, x, x^2, \dots, x^N, \dots$$

$$|C[a, b] \rightarrow P_{N-1}(x)$$

$$L_N(x) = \sum_{n=1}^n f(x_k) l_k(x)$$

$\{l_k(x)\}$ – система фундаментальных многочленов

$$l_k(x) = \frac{(x - x^1) \dots (x - x_N)}{(x_k - x_1) \dots (x_k - x_N)} = \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_K)}$$

$$l_k(x_m) = \delta_{km}; \omega(x) = \prod_{k=1}^m (x - x_k)$$

$$\|f - L_N(x)\|_C \leq (1 + \|P\|) \rho_N(f, H_N)$$

$$\|P\| = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=1}^n |l_k(x)| = \Lambda_N - \text{построение Лебега}$$

Λ_N – неогр возрастает при $n \rightarrow \infty$ для всего $C[a, b]$ и сущ зависит от выбора сетки x_1, \dots, x_N

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{2}{b-a} t_k; t_K = -\cos\{\frac{\pi}{2N}(2k-1)\}$$

$$\Lambda_N \approx \frac{2}{\pi} \ln N + 1 - q_N, 0 << q_N < \frac{1}{4}$$

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u$$

$$Lu = f \text{ и } u(a) = u(b) + 0$$

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k l_k(x); a_k = u_N(x_k)$$

$$\sum_{p=1}^n a_p (Ll_p, l_K) = (f, l_K) = \int_a^b f(x) l_K(x) dx = f_K$$

$$l_k(x_m) = \delta_{km}, \omega(x) = \sum_{k=1}^m (x - x_k) \text{ СЛАУ с уравнениями}$$

$$a_{kl} = (Ll_k, l_p) = \int_a^b p(x) \frac{dl_k(x)}{dx} \frac{dl_p(x)}{dx} + \int_a^b a(x) q(x) l_k(x) f(x) dx$$

$$x_1 = a; x_N = b \Rightarrow$$

$$l_1(x_1) = 0; l_N(x_N) = 0$$

$$u_n(x) = \sum_{k=2}^{N-1} u(x_k) l_N(x)$$

$$\sum_{p=1}^{N-1} u_k a_{Kp} = f_k$$

$$p = w$$

Пример

$$p \equiv 1, a \equiv 0$$

$$f(x) = \{1, x \geq 0; -1, x < 0\}$$

$$N = 5; x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = 1$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 - \frac{3}{2}}$$

$$l_3(x) = (x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$$

$$l_4(x) = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})x(x-1)}{\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}$$

$$u_N - u_2 l_2(x) + u_3 l_3(x) + u_4 l_4(x)$$

$$a_{kp} = \int_{-1}^1 \frac{dl_k}{dx} \frac{dl_p}{dx} dx$$

период гр у

$$[a, b] = [0, 2\pi]$$

$$u_N = \frac{a}{2} + \sum_{k=1} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$x_k = \frac{2\pi}{x} (k-1) a_0, a_k, b_k \text{ Упр.}$$

$$\dim H_N - 2N - 1$$

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$\Lambda_N \frac{1}{\pi} \ln N + \delta(2 - \frac{2}{\pi}), 0 < \delta < 1$$

9.4 Введение в теорию степенных сплайнов

$$[a, b] a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b, h_K = s_k - x_{k-1} k = \overline{0, N-1} h_k = x + 1 - x_k$$

Определение

Сплайн степени n , дефекта ν :

$$S_{n\nu} = P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_p^{(k)}(x - x_k)^P = \sum_{p=0}^n b'_P(x_{k+1} - x)^P$$

$$(x - x_K)_t^P = \{(x - x_k)^P, x \geq x_k; 0, x \leq x_k\}$$

Лекция

10.1 Степенные сплайны

$$\Omega = [a, b] \text{ Разбиение } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$h_I = x_i - x_{i-1}$$

$$h = \max_{i=1, N} h_i$$

1. кусочнопостоянные сплайны

задаются многочленами степени 0.

$$\phi_i(x) = 1, x \in (x_{i-1}, x_i); 0, x \notin (x_{i-1}, x_i)$$

$$H_N = \lambda(\phi_1, \dots, \phi_N)$$

(a) Система линейно независима

(b) $(\phi_i, \phi_j) = (h_i), i = j$

Теорема:

$$\forall u \in W'_p(a, b) \exists V(x) \in H_N :$$

$$\|u - v\|_{L_2(a, b)} \leq c \cdot h \|u\|_{W'_p(a, b)}$$

$$\|u\|_{W'_p(a, b)} = \|u\|_{L_p(a, b)} + \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L_p(a, b)}$$

Д

$$\begin{aligned}
&= \int_{i=1}^N u_i \phi_i(x) \\
u_i &= \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i-1}} u u(\xi) d\xi \\
\|u - v\|_{L^p(a,b)}^p &= \int_a^b |u - v|^p dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u(x) - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi) d\xi| \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u(x) - u(\xi)) d\xi \right| dx = \\
&\sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{\xi}^x \frac{du}{d\eta} d\eta \right|^p dx \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right|^p d\eta \right| dx = \\
&= h_i \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{du}{d\eta} \right)^p d\eta \right)
\end{aligned}$$

Неравенство Гелдера

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} (u(x))^P dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \cdot \left| \frac{du}{d\eta} \right| d\eta \right| &\leq \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right|^P dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right| d\eta \right)^P &\leq h_i^{\frac{p}{q}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right|^P d\eta \\
\|u - v\|_{L^p(a,b)}^P &\leq \sum_{i=1}^N h_i^{q+\frac{p}{q}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right|^P d\eta \leq h^{1+\frac{p}{q}} \int_a^b \left| \frac{du}{d\eta} \right|^P d\eta \leq h^P \|u\|_{W'_P}^P \\
|x(x) - V(x)| &= \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u(x) - u(\xi)) s\xi \right| = \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{\xi}^x \frac{du}{d\eta} d\eta \right| \leq \\
&\leq h_i \sup_{(x_{i-1}, x_i)} |u| \|u\|_{W'(a,b)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|u - v\|_{L_{\infty}(a,b)} \leq h \|u\|_{W'_{\infty}(a,b)}
\end{aligned}$$

Для устойчивости нам нужно чтобы матрица грамма $\widetilde{M} = ((\phi_i, \phi_j))$ а с.н. были отр $a_1 < |\Lambda| < a_2$ a_1, a_2 не зав от N

$$wave\phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h_i}} \{1, x \in (\phi_{i-1}, \phi_i); 0, x \notin (\phi_{i-1}, \phi_i)\}$$

$$\Omega \subset \mathcal{R}^m, \Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$$

$$max_{i=\overline{1,N}} \sup_{x_{ij} \leq \Omega_i} |x - y| \leq h$$

2. Кусочно линейные базисные функции

$$0 < x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

$$\forall \text{ узлы сетки } x_i \Rightarrow \phi_i(x) = \left\{ \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, x \in (x_{i-1}, x_i); \frac{x_i-x}{h_{i+1}}, x \in (x_i, x_{i+1}); 0, x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \right\} i = \overline{1, N-1}$$

$$\phi_0(x) = \left\{ \frac{x_1-x}{h_1}, x \in (x_0, x_1); 0, x \notin (x_{N-1}, \dots, x_N) \right\}$$

$$(\phi_i, \phi_j)_{L_2(\Omega)} = \{ \delta_{ij}, |i-j| \leq 1; 0, |i-j| > 1 \}$$

$$\nu = \sum_{a_i}^{\phi_i(x)} \in H_N$$

Теорема

$$u \in W_2^2(\Omega) \Rightarrow \exists V \in H_N = W_2^{1,n}(\Omega)$$

$$\|u - v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$\|u - v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_2 \cdot h \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$v(x) = \sum_{i=0}^N u(x_i) \psi_i(x)$$

$$\forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$u(x) - v(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i} x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$u(x) - v(x) = \int_{x_{i-1}}^x \frac{d}{d\xi} (u - v) d\xi =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^x \left[\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{\phi(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i} \right] d\xi$$

$$= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{du(\eta)}{d\eta} \right) d\eta =$$

$$= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\eta \int_{\eta}^{\xi} \frac{d^2 u}{dt^2}(t) dt$$

$$\Rightarrow |u(x) - v(x)|^2 \leq h_i^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^2 dt, x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$\sum_{i=1}^N (\cdot) \|u - v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

Лекция

Получение нормы в 0v21

Теорема:

Если $n(x) \in W_\infty^2(\Omega)$, то $\|u - v\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_3 h^2 \|u\|_{W_\infty^2}$

$$\|u - v\|_{W_\infty} \leq c_4 h \|u\|_{W_\infty^2}(\Omega)$$

Если $u \in C^2(\Omega)$

$$\|u - V\|_{C(\omega)} \leq c_5 h^2 \|u\|_{C^2(\Omega)}$$

Доказательство - Упражнение

$$\phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{x-x_i}{h_i}, x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, x \in (x_i - 1, x_i + 1) \end{cases}$$

$$V = \sum_{i=0}^N \sqrt{h} u(x_i) \phi_i(x)$$

Пример:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u = f(x), x \in (a, b) \\ u(a) = 0; \frac{du}{dx}(a) = 0, f \in L_2(a, b) \end{cases}$$

$$H_A : \|u\|_A = \sqrt{\int_a^b (p(\frac{du}{dx})^2 + qu^2) dx}$$

$$H_N - L_{in}(\phi_0, \dots, \phi_N);$$

11.1 Билинейные базисные функции в \mathcal{R}

Все рассматривается для прямоугольной области.

Ω — прямоугольная в \mathcal{R}^ϵ

$$A_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N < A_1, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta x = \max_{i=1, N} \Delta x_i$$

$$B_0 = y_0 < y_1 < \dots < y_N = B, \Delta y_1 = y_i - y_{i-1}, \Delta y = \max_{i=1, N} \Delta y_i$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta x_i}, x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_{i+1}}, x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} u \end{cases}$$

$$Q_{ij}(x, y) = \phi_i(x) \phi_j(y)$$

$$y(x, y) = \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} Q_{ij}(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}$$

$$L(Q_{ij}) = W_2^{1,h} \ni W'_2$$

Теорема

Если $uu \in C^2(\Omega) \Rightarrow \exists u^h \in W_2^{1,h}$

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} \leq c \cdot h^2 \|u\|_{C^2(\Omega)}$$

$$\|u - u^h\|_{W'_2(\Omega)} \leq c \cdot h \|u\|_{C^2(\Omega)}$$

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= (x - x_l) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) + (u - y_k) \frac{\partial \xi}{\partial y}(x_k, y_k) + \int_{x_l}^x dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x'^2}(x'', y_n) dx'' + \\ &+ \int_{y_k}^y dy' \int_{y_k}^{y'} dy'' \frac{\partial^2 \xi}{\partial y''^2}(x_l, y'') dy'' + \int_{x_l}^x \int_{y_k}^y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dx' dy' \\ \dots \end{aligned}$$

$$(x - x_l) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) =$$

$$= \frac{x - x_l}{\Delta x_l H} \int_{x_{l+1}}^{x_l} dx' \int_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx''$$

$$\int_{x_l}^x dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''^2} dx' \int_{y_k}^y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dx' dy' =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_{l+1}, \Delta y_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \cdot \int_{x_l}^x dx' \int_{y_k}^y dy' \left(\frac{\partial u}{\partial x' \partial y'} \left(\frac{\partial u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''} \right) \right) dy'$$

... здесь была получена первая оценка

Получить вторую оценку это второе упражнение.

Более сильная оценка. Упр со *.

$$x \|u - y^h\|_{C(\Omega)} \leq C(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sum_{i=2} \|D^{(1)} u_\Omega$$

$$F(u) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 - 2uf \right) dx dy$$

$$H_A - \overset{0}{W}'_2(\Omega)$$

Теорема

$$\forall u \in W'_2(\Omega) \cup C^2(\Omega)$$

$$\exists u^h \in W_2^{1,h} : \text{оценить } (T^1)$$

11.2 Построение проекционно сеточной схемы для ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})\frac{du}{dx} + q(x)u(x) = f(x), f \in L_2(a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \\ Au = f, 0 < p_0 \leq p(x) \leq p, 0 \leq (x) \leq q \end{cases}$$

$$H = L_2(a, b) \Rightarrow A \text{ положительно определена} \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \text{! реш } u(3)$$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c \|f\|_H$$

$$H_A = \overset{0}{W}_2(\Omega); c_0 \|u\|_{W_2'} \leq \|n\|_A \leq c_1 \|u\|_{W_2'}$$

$$F(u) = [u, u] - 2(u, f) \rightarrow \min \text{ на } \overset{0}{W}_2' = H_A; u_i = \frac{1}{\sqrt{h}} \text{ далее тоже самое что и раньше}$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \phi_i(x)$$

$$\overset{0}{W}_2^{i,h} = \{v = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \phi_I(x)\}$$

$$\text{Минимизируем } F(v) \text{ на } \overset{0}{W}_2^{1,h};$$

$$a_i \text{ из } \frac{\partial F}{\partial a}(u_n) = 0, i = 1, N-1$$

$$\hat{A}a = f; \hat{A} = (A_{ij}) = ([[\phi_I, \phi_j]])$$

$$a = (a_i, \dots, a_{N-1})^T$$

$$f = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$$

$$f_i = \int_{\Omega_i} f \phi_i dx$$

$$\phi_i = \int_{\Omega} (p \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} + q \phi_i \phi_j)$$

$$\exists! \text{ реш } (a_1, \dots, a_{N-1})^T$$

кот однозначно определяется $u^h \leftarrow \operatorname{argmin} F(Vq)$

Упр Найдти $A_{ij}pq$

$$p_{i-\frac{1}{2}} = p(x)$$

$$x \in (x_{i-1}, x_i) i = \overline{1, N}$$

$$q_{i-\frac{1}{2}} = -\dots \text{аналогично}$$