

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных методов

# ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

# Содержание

<b>Лекция 1</b>	<b>3</b>
1.1 Исторический экскурс . . . . .	3
1.2 Метод Дирихле . . . . .	3
1.3 Контрпример Вейерштрасса. . . . .	3
1.4 Контрпример Адамара . . . . .	3
1.5 Метод Ритца . . . . .	4
<b>Лекция 2</b>	<b>7</b>
2.1 Метод Бубнова – Галеркина . . . . .	7
2.2 Повторение . . . . .	8
<b>Лекция 3</b>	<b>11</b>
3.1 Формулы Грина . . . . .	11
3.2 Положительные операторы . . . . .	13
3.3 Положительно определенные операторы . . . . .	14
3.4 Энергетическая норма . . . . .	15
<b>Лекция 4</b>	<b>16</b>
4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2) . . . . .	16
4.2 Пример . . . . .	16
4.3 Пример 3 . . . . .	17
4.4 Энергетический метод . . . . .	17
4.5 Обобщение решения задачи о $\min$ для ф.э. . . . .	17
<b>Лекция</b>	<b>18</b>
5.1 Применение энергетического метода для краевых задач . . . . .	18
5.1.1 Теорема . . . . .	20
5.1.2 Теорема . . . . .	20
5.2 Основные кр задачи для ур-я Пуассона . . . . .	21

# Лекция 1

## 1.1 Исторический экскурс

Лекции с 9:30 два часа.

Вариационная постановка для задачи мат физики. задача - условие на границе + начальное. (Экстремум функционала энергии, поэтому энергетические пространства).

Соболев - прямые методы решения задач. позволяют найти решение с помощью СЛАУ. Наиболее известен метод Рунге.

## 1.2 Метод Дирихле

Дана область  $\omega \in \mathbb{R}^2$ .

$$M = u : u_0(x, y), (x, y) \in \partial\Omega$$

$$\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \rightarrow \min$$

Интеграл Дирихле  $\Rightarrow \bar{u}$  - гармонический в  $\Omega$

## 1.3 Контрпример Вейерштрасса.

$$M = y; y(x) \in C'[-1; 1], y(-1) = -1, y(1) = 1$$

$$J(y) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, J(y) \geq 0$$

$$y_{\varepsilon}(x) = \frac{\arctg(\frac{x}{\varepsilon})}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$y'_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_{\varepsilon}) = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \varepsilon^2}{\arctg^2(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{2\varepsilon \arctg(\frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$J(\bar{y}) = \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Противоречие:  $y(-1) = -1, y(1) = 1$

## 1.4 Контрпример Адамара

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^2}{2^n} \cos(2^n \Theta), x = \rho \cos \Theta, y = \rho \sin \Theta$$

$$\rho \leq 1$$

Непрерывны и гармоничны. Интеграл Дирихле в круге  $\rho \leq r \leq 1$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n+1}} \rightarrow_{r \rightarrow 1} \inf$$

## 1.5 Метод Ритца

$$J(\omega) = \int_a^b f(x, \omega, \omega', \dots, \omega^{(k)}) dx \rightarrow \inf$$

$\omega \in M$  класс допустимых функций

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$  ( координатные функции )

Св-ва:

$$1) \forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}, \forall_n$$

$$\omega_n = \omega_0 + \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \in M$$

$$2) \forall \omega \in M \exists \forall \epsilon > 0$$

\*Уравнение полноты\*

$$H(\omega_n) = F(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \inf$$

$$\|\omega - \psi_0 - \sum_{i=1}^n a_i \psi_i\| < \epsilon$$

Рассмотрим:

$$J(\omega_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow \inf$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}(\omega_n) = 0, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_n}(\omega_n) = 0 - \text{альтернативная система уравнений}$$

$$\Rightarrow a_1, \dots, a_n - \text{решение}$$

Насколько хорошо приближает метод искомое решение? На примере задачи об упругой пластине.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 - \text{обл}, S = \partial\Omega$$

изгиб  $\omega(x, y)$  удовлетворяет ур-ю Сори Жульен

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(xy)}{\mathcal{D}}; (x, y) \in \Omega$$

$\mathcal{D}$  — жесткость пластины при упругом изгибе

$q(x, y)$ , - Интенсивность давления

$$\omega(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \mathcal{D}} = 0 \leftarrow \text{Производная по нормали к } S$$

$$J(\omega) = \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{2} (\Delta \omega)^2 - f(\omega) \right) d\Omega \rightarrow \inf$$

$$f = \frac{q(x, y)}{\mathcal{D}} \in C'(\bar{\Omega})$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Рассмотрим без доказательства ограниченности снизу.

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$(x, y)(\xi, \eta)$  — точки из  $\Omega$   $r$  — расстояние между  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$

$$J(\omega) = J_0 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega_2)^2 dx dy$$

$$j(\omega) \geq J_0 \Rightarrow \exists \inf J(\omega)$$

Введем  $\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)$  - координатные ф-ции

$$1) \psi_n(x, y), \frac{\partial^{k+l} \psi_n}{\partial x^k \partial y^l} \in C(\overline{\Omega}), k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon$$

2)  $\psi_n(x, y)$  удовлетворяет краевым условиям

3)  $\forall$  ф-ии  $\zeta(x, y)$  :

а) удовлетворяет пункту 1

б)  $\zeta(x, y) \equiv 0(x, y) \in \Omega_\rho$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} :$$

$$|\zeta(x, y) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi_i(x_i, y_i)| < \varepsilon$$

$$|\frac{\partial^{k+l} \zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^{k+l} \psi_i(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}| < \varepsilon$$

Условие полноты  $k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon \Rightarrow$   
приближенное решение :

$$\omega_n = \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_n \psi_n \rightarrow J(\omega)$$

$$J_n = \iint_{\Omega} (\frac{1}{2} (\Delta \omega_n)^2 - f(\omega_n)) dx dy$$

$\alpha_i$  выбираем :  $J(\omega_n) \rightarrow J(\omega)$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k = B_i, i = \overline{1, n}$$

$$A_{ik} = \iint_{\Omega} \Delta \psi_i \Delta \psi_k dx dy \Rightarrow$$

$\exists!$  решение  $a_1, \dots, a_n$  в  $\omega_n = \dots$  приближение решение

$$B_i = \iint_{\Omega} f \psi_i dx dy$$

$\rightarrow$  Сущ ед решения  $a_1, \dots, a_n$  в  $\omega_n = \dots$  (приближенное решение)

Рассмотрим  $\forall b_1, \dots, b_n$

$$\zeta_n = b_1 \psi_n + \dots + b_n \xi_n$$

$$?? b_i \text{ и } \sum_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n n A_{ik} a_k b_i = \sum_{i=1}^n b_i B_i$$

$$\sum_{i=x}^n \sum_{k=1}^n n \iint_{\Omega} b_i \Delta \psi_i \Delta \psi_k a_k dx dy - \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[ \iint_{\omega} b_i \Delta \psi_i \sum_{k=1}^n a_k \Delta \xi_k dx dy - \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy \right] = 0$$

...

$$\int_O mega(\Delta \omega_n \sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) - f(\sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) dx dy = 0$$

$$\iint_O mega(\Delta \Omega_n \zeta_n - f \zeta) dx dy = 0$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega_u)^2 dx dy \text{ не возрастает у } \geq inf$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ по критерию Коши } \Rightarrow N(\varepsilon) \forall_n > N(\varepsilon)$$

## Лекция 2

$\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$  — координатные функции,  $w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta w_n)^2 dx dy$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m : 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x, y)$$

$$\iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx dy < 1$$

Обозначим  $S = \partial\Omega$  — границу области  $\Omega$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \varphi \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta \varphi \ln r \, d\xi d\eta$$

$$\left| \int_x f(x) \bar{g}(x) dx \right|^2 \leq \left( \int_x |f(x)|^2 dx \right) \left( \int_x |g(x)|^2 dx \right)$$

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2\pi} \left( \iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \left( \iint_{\Omega} \ln^2 r \, d\xi d\eta \right)^{1/2}$$

$$|\varphi(x, y)| \leq C_1$$

$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}$$

$$\omega_n \rightrightarrows_{\Omega} w_n(x, y) \in C(\Omega)$$

### 2.1 Метод Бубнова — Галеркина

$$w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$$

$$Lw - \lambda Mw = 0$$

$L, M$  — дифференциальные операторы

$$\sum_{i=1}^n (A_{ik} - \lambda B_{ik}) a_k = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \dots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \dots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$N(x, y) = Lw_n - \lambda Mw_n \text{ — невязка}$$

$$N(x, y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}$$

## 2.2 Повторение

1.  $f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = 0$
2.  $\int_{\Omega} f(x) dx = 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0$
3.  $|f(x)| < \varphi(x), \varphi - \text{суммируема по Лебегу} \Rightarrow f(x) - \text{суммируема по Лебегу}$
4.  $\{\varphi_n(x)\} - \text{суммируемы с квадратами по Лебегу}$

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$$

Обозначим  $V$  – линейное пространство

$(\varphi, \psi)$  – скалярное произведение:  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

1.  $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2.  $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$
3.  $(\varphi, \varphi) \geq 0$
4.  $(\varphi, \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

- Неравенство Коши-Буняковского

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

- Неравенство треугольника

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$$

$$L_2(\Omega) : (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

$$L_2(\Omega, \sigma) : (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} \sigma(x) dx$$

$$L_2(\Omega^m) : (\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(x)} dx$$



## Критерий линейной зависимости системы функций

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно зависима (ЛЗ) в  $H$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \left| \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \right| = 0 \end{array}$$

**Опр.**  $M$  — плотно в  $H$ , если  $\forall p \in H$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_n \in M : \|\varphi_n - p\| < \varepsilon$ .

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$  плотно в  $L_2(\Omega)$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \forall \varepsilon > 0 : \quad \forall \varphi \in H \quad \begin{array}{l} \exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ \exists \varphi_n^2 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \\ \dots \end{array} \end{array}$$

$C_0^{(k)}(\Omega)$  плотно в  $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$  — ортонормированная система (ОНС)

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$$

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2 + \dots$$

$\{\varphi_n\}$  полная в  $H$ , если из  $(\varphi, \varphi_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$\forall \varphi \in H : \quad a_k = (\varphi, \varphi_k)$  — коэффициенты Фурье

**Теор.**  $H$  — гильбертово,  $\{\varphi_k\}$  — полная ортонормированная система (ПОНС)

$$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2 \text{ — равенство Парсеваля}$$

**Теор.**  $\exists a_k : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$  сходится,  $\{\varphi_n\}$  — ПОНС в  $H$ , тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \text{ сходится по } \|\cdot\| \text{ к } \varphi \in H, \text{ при этом } \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

**Опр.**  $H$  сепарабельно если  $\exists M$  — счетное мн-во плотное в  $H$ .

**Теор.**  $H$  сепарабельно  $\Leftrightarrow \exists$  ПОНС (счетная или конечная) в  $H$ .

$\{u : \int_{\Omega} u dx = 0\}$  — пример подпространства в  $L_2(\Omega)$ .

Пусть  $H_1$  — подпространство в  $H$

$\forall \varphi \in H \quad \exists! \varphi_1 \in H_1 : \|\varphi - \varphi_1\| = \min_{\psi \in H_1} \|\varphi - \psi\|$  — проекция  $\varphi$  на  $H_1$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad H_2 = \varphi \perp H_1$  — ортогональное дополнение

$l$  — линейный функционал :  $M \subset H \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$$|l_\varphi| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|_H$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi} l_\psi = l_\varphi \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \|\psi - \varphi\| < \delta : |l_\psi - l_\varphi| < \varepsilon$$

**Теор. (Рисса)**  $\forall l$  — непрерывного линейного функционала в  $H \exists! \psi \in H : l_\varphi = (\varphi, \psi)$

Пусть  $M$  — плотно в  $H$ ,  $\Phi : M \times M \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$\Phi(\varphi, \psi) : \Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$$

$\Phi(\varphi, \varphi)$  — квадратичная форма

$H : D_A \subset H$  — область определения некоторого оператора  $A$

Линейный оператор  $A$  ограничен  $\Leftrightarrow A$  непрерывен

$\varphi \in D_A, \quad A\varphi \in R_A$  — область значений оператора  $A$

$\varphi \in D_A \rightarrow! A\varphi \in R_A$

## Лекция 3

$$\left. \begin{array}{l} Au = f \\ u, f \in H \end{array} \right| \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad H = L_2(\Omega)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in C(\overline{\Omega}) \\ u|_S = 0 \end{cases}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}); \quad u|_S = 0\}$$

$$A = -\Delta u$$

### Формула Остроградского

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) d\Omega = \int_S \left( \varphi \cos(\overline{n} \cdot x) + \psi \cos(\overline{n} \cdot y) + \omega \cos(\overline{n} \cdot z) \right) dS$$

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix} \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} W d\Omega = \int_S W_n dS$$

Пусть  $\varphi = uv, \quad \psi = \omega = 0$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uv \cos(\overline{n} \cdot x) dS$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv \cos(\overline{n} \cdot x_i) dS \quad \text{в } \mathbb{R}^m \quad (0)$$

### 3.1 Формулы Грина

$$Lu = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ik}(P) \frac{\partial u(P)}{\partial x_k} \right) + C(P)u(P)$$

$$D_L = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad C(P) \in C(\overline{\Omega})$$

$$A_{ik}(P) \in C(\overline{\Omega}), \quad A_{ik}(P) = A_{ki}(P) \quad \forall P, \quad i, k = \overline{1, n}$$

$$\int_{\Omega} v L u d\Omega = - \sum_{i,k=1}^m \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) d\Omega + \int_{\Omega} C u v d\Omega$$

в (0) подставим  $u \rightarrow v, v \rightarrow A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$

$$\int_{\Omega} v L u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} C u v d\Omega - \int_S v \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) dS \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} u L u d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C u^2 \right] d\Omega - \int_S u \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) dS \quad (2)$$

из (1) вычитаем ее же, но поменяв местами  $u$  и  $v$ :  $(1) - (1)_{u \rightleftharpoons v}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v L u - u L v) d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right] d\Omega - \\ &\quad - \int_S \left[ v \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) - u \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_k) \right] dS \end{aligned}$$

$$N \cdot := \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial \cdot}{\partial x_i} \cos(\bar{n} \cdot x_i)$$

$$\int_{\Omega} (v L u - u L v) d\Omega = \int_S (u N v - v N u) dS \quad (3)$$

Частный случай формул Грина, это оператор Лапласа:

$$L u = -\Delta u; \quad A_{ii} = 1; \quad A_{ik} = 0, i \neq k; \quad C = 0$$

$$- \int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (4)$$

$$- \int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (5)$$

$$- \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_S \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad (6)$$

### 3.2 Положительные операторы

Пусть оператор  $A$  симметричен в  $H$

**Опр.** Оператор называется положительным, если  $\forall u \in D_A \subset H, \quad (Au, u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

**Пр. 1**

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u \quad \text{в } L_2(0, 1); \quad D_B = \{u \in C_0^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$(Bu, v) = -\int_0^1 v \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - v \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = -\int_0^1 u \frac{d^2 v}{dx^2} dx = (u, Bv) \quad \forall u, v \in D_B$$

$$(Bu, u) = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = \text{const}, u(0) = 0 \Rightarrow u = 0$$

**Пр. 2**

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \quad D_C = \left\{ u \in C^2(0, 1), \begin{cases} u'(0) + \alpha u(0) = 0 \\ u'(1) + \beta u(1) = 0 \end{cases} \quad \alpha, \beta = \text{const} \right\}$$

$$(Cu, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1) = (u, Cv)$$

$$\alpha > 0, \beta \geq 0$$

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geq 0$$

$$\alpha = \beta = 0, \quad u \equiv 1 \Rightarrow (Cu, u) = 0 \Rightarrow C \text{ не является положительным}$$

**Пр. 3**

$$Au = -\Delta u, \quad D_A = \{u \in C^2(\Omega) : u|_S = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, S = \partial\Omega, H = L_2(\Omega)\}$$

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = -\int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \text{const}, \quad u|_S = 0 \Rightarrow u = 0$$

Рассмотрим мембрану

$\Omega$  в плоскости  $(x, y)$ ,  $u(x, y)$  — изгиб мембраны

$$-\Delta u = \frac{q}{T}$$

$q$  — поперечная нагрузка на единицу площади

$T$  — натяжение мембраны

$u|_S = 0$  — мембрана закреплена на краях

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

### 3.3 Положительно определенные операторы

**Опр.** Симметричный оператор  $A$  называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \quad (7)$$

**Пр. 1 (продолжение)**

$$B : u(0) = 0, u \in D_B$$

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

$$u^2(x) \leq \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x (u'(t))^2 dt = x \int_0^x (u'(t))^2 dt \leq x \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\gamma^2 \|u\|^2 \leq (Bu, u), \quad \gamma = \sqrt{2} \Rightarrow B \text{ является положительно определенным}$$

**Пр. 4**

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left( x^3 \frac{du}{dx} \right) \quad \text{в } L_2(0, 1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1], u(1) = 0\}$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[ x^3 \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] dx = \left[ x^3 \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] \Big|_0^1 = 0$$

$$(Lu, u) = \int_0^1 x^3 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \Rightarrow L \text{ является положительно определенным}$$

$$\frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2, \quad u_{\delta}(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad u_{\delta} \in \mathcal{D}_L$$

$$\frac{(Lu_{\delta}, u_{\delta})}{\|u_{\delta}\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 \left( \frac{du_{\delta}}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^{\delta} (\delta - x)^3 dx} = \frac{9 \int_0^1 x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int_0^{\delta} (\delta - x)^6 dx} = \frac{9}{40} \delta \Rightarrow L \text{ не явл. положительно опр.}$$

### 3.4 Энергетическая норма

Пусть  $A$  — положительно определен в  $H$  (гильберт.)

На  $D_A$ :  $[u, v]_A = (Au, v)_H$

Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1.  $[u, v]_A = \overline{[v, u]_A}$   
 $(Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]}$
2.  $[a_1u + a_2u, v] = a_1[u, v] + a_2[u, v]$
3.  $(Au, u) = [u, u] \geq \gamma \|u\|^2 \geq 0$
4.  $[u, u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$|u| = [u, u]$  — энергетическая норма

$D_A$  предгильбертово, дополним его по  $|\cdot|_A \Rightarrow$  гильбертово пр-во  $H_A$

$$u \in H_A \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} u \in D_A \\ \exists u : \{u_n\} \in D_A : |u_n - u| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right]$$

## Лекция 4

### 4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2)

$H_A$  — энергетическое пр-во

(0)

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A$$

$$u \in H_A \Rightarrow u \in \mathcal{D}_A$$

$$\Rightarrow \exists \{u_n\} \in \mathcal{D}_A \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_A$$

Теорема

$$\forall \exists u \in H_A \Rightarrow \text{злем из } H \text{ различным } u_1, u_2 \in H_A \text{ отв разн. злем из } H$$

Доказательство

...

2)

$$u_{1,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_n; u_{2,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_2$$

$$u_1 \text{ и } u_2 \rightarrow u \text{ из } H; u = u_1 - u_2$$

...

$$r \in H_A \in \{\in u_n \mathcal{D}_A \mid \|u_n - n\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0\}$$

$$\|u_n\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \|u\|_A$$

### 4.2 Пример

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2} u; D_B = u \in C^2(0, 1], u(0) = u(1) = 0$$

$$H = {}_2(0, 1);$$

$$u \in H_B; \exists \{u_n\} \in D_B \mid \|u_n - u\| \rightarrow_{B \rightarrow \infty} 0$$

...

$A$  - положительно, но не положительно определено.

Теорема

$$u \in H_A : u \in H \Leftrightarrow \exists \{u_n\} \in D_A$$

$$\|u = u_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|u_k - u_n\|_H \rightarrow_{u, k \rightarrow +\infty} 0$$



### 4.3 Пример 3

### 4.4 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f$$

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H;$$

Теорема

$A$  положителен в  $H$  уравнению  $Au = f$   $\exists$  не более одного решения.

Доказательство

$$u_1, u_2 - \text{Решения } Au = f \dots$$

Теорема о функциональной энергии

$A$  - положительный в  $H$ ;  $u$  - решение  $Au = f \Leftrightarrow$  доставляет минимум функционала

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H$$

Доказательство

...

Пример 4

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \omega + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$$

$$\mathcal{D}_A = \{\omega \in C^4(\bar{\Omega}); \omega|_S = 0; \frac{\partial \omega}{\partial n}|_S = 0\}$$

$$A - \omega = \frac{a(x, y)}{\mathcal{D}}$$

### 4.5 Обобщение решения задачи о min для ф.э.

$A$  - Положительно определено в  $H$   $Au = f, f \in H$

Фикс  $f \in H \forall u \in H_A(u, f)_H : \Phi_A : H_A \rightarrow \mathcal{R}$

$$|(u, f)_H| \leq \|f\|_H \|u\|_H \leq \|f\|_H \frac{1}{\gamma} \|u\|_A; \gamma \|f\|_H - const$$

Опр  $(f, u) \Rightarrow$  по Т Рисса  $\exists u_0 \in H_A(f, u)_H = [u, u_0]_A$

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0] - [u_0, u]_A$$

$$+ - [u_0, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

$$\operatorname{argmin}_{u \in H_A} F(u) = u_0 \text{ Обобщенное решение } Au = f$$

Если  $H$  сепарабельно, энергетическое про-во тоже сепарабельно,  $\exists \{\omega_n\}$  ПОНС

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \omega_n ??$$

$$u = \omega_n [u_0 \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H \omega_n$$

## Лекция

### 5.1 Применение энергетического метода для краевых задач

1. Немного опаздал, пример часть примера пропустил ...

$$(Lu, u)_H = \sum_{k=0}^m \int_{x_1}^{x_2} p_k(x) \left( \frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \geq \int_{x_1}^{x_2} p_{n_1}(x) \left( \frac{d^m u}{dx^n} \right)^2 dx \geq p_0 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d^m u}{dx^m} \right)^2 dx = p_0 \|u^{(m)}\|_H^2$$

...

$$(Lu_M) \geq \partial^2 \|u\|_H^2, \gamma = \sqrt{p_0} \left( \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \right)^m$$

...

$$\|u\|_A \leq \sqrt{p_0} \|u\|^{(m)}_H \exists \{u_N(x)\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = 0; u_0 - \text{точное решение}$$

$$\|u_n - u_k\|_A \leq \|u_n - u_0\|_A + \|u_k - u_0\|_A \rightarrow 0$$

$$u_n^{(l)}(x_1) = u_k^{(l)}(x_1) = 0, l = \overline{0, m-1}$$

...

## 2. Изгиб балки

$$L\omega = \frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}] + K\omega = q(x)$$

$\omega$  — Прогиб балки

$E$  — модуль Юнга

$I(x)$  — момент инерции

$q(x)$  — интенсивность нагрузки на балку

$K$  — коэф податливости основания

$$\omega(0) = \omega(l) = 0$$

$$\omega'(0) = \omega'(l) = 0; A - \text{Положительно определен}$$

Аналогично задачи минимизации функционала

$$F(\omega) = \int_0^l (EI(x)\omega''^2 + K\omega^2 - 2q(x\omega))dx = (L\omega, \omega) - 2(\omega, q)$$

Воспользуемся методом Рунца

$$u_n(x)_{n=1}^\infty, \phi_n(x) = (x-l)^2 x^{n+1}, \text{ Полная система в } H_A$$

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(x) = (x-l)^2 \sum_{k=1}^n a_k x^{k+1}$$

$$\sum_n^{k=1} a_k A_{1k} = b_{ij}; i = \overline{1, n}$$

$$b_j = (q, \phi_j)_H = \int_0^l a(x)(x-l)x dx$$

$$A_{ik} = (L\phi_i, \phi_k)_H = \int_0^l (EI(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_k}{dx^2} + k\phi_i\phi_k)dx$$

...

$$\omega(0) = 0; \omega''(l) = 0$$

$$\omega'(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2})_{x=0}^{x=l} = 0$$

Тут тоже можно доказать положительную определенность

### 3. Краевая задача для систем ОДУ

$$-\sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dx} (p_{jk}(x) \frac{du_k(x)}{dx}) - q_{jk}(x) u_k(x) \right] = f_j(x)$$

краевые ...

$$-\frac{d}{dx} [P(x) \frac{du}{dx}] + Q(x) u(x) = f(x)$$

$$u(x_1) = u(x_2) = 0$$

$$(u, v)_{H=L_2(x_1, x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} u(x) \cdot v(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^s u_k(x) v_k(x) dx$$

#### 5.1.1 Теорема

$P(x), Q(x)$  симметр.  $x \in [x_1, x_2] \Rightarrow A$  Симметричный

Доказательство

$$\begin{aligned} (Au, v)_H &= - \int_{x_1}^{x_2} v(x) \cdot \frac{d}{dx} [P(x) \frac{du}{dx}] dx + \int_{x_1}^{x_2} v(x) \cdot Q(x) u(x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} P \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + v(x \cdot Q(x) u(x)) dx \\ Qu \cdot v &= \sum_{j,k=1}^s q_{jk} u_k \cdot v_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^s q_{k,j} v_j \cdot v_k \end{aligned}$$

Следовательно оператор симметричен

#### 5.1.2 Теорема

$P(x), Q(x)$  симметрич на  $[x_1, x_2]$

$P(x)$  положит. опр.  $Q(x)$  неотр на  $(x_1, x_2] \Rightarrow A$  положительно определен

доказательство

$P(x)$  пол. опр  $\forall x \Rightarrow$  пусть  $\lambda_1(x) > 0$

$\exists \lambda > 0 = const; \lambda_1(x) > \hat{\lambda} > 0 \in [x_1, x_2]$

$\forall t = (t, ..., s)$

$$P(x)t \cdot t = \sum_{j,k=1}^s P_{jk}(x)t_j t_k \geq \lambda_1(x) \sum_{k=1}^s t_k^2 \geq$$

$$\geq \hat{\lambda} \sum_{k=1}^s t_k^2$$

$$Q(x)t \cdot t = \sum_{k,k=1}^s q_{jk}t_j t_k \geq 0$$

$$(u, u)_H = \int_{x_1}^{x_2} (P \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx}) dx \geq \hat{\lambda} \int_{k=1}^s (\frac{du_k}{dx})^2 dx$$

$$(Au, u)_H \geq \frac{2\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} (\sum_{k=1}^s u_k^2) dx = \frac{2\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} dx = \frac{\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} \|u\|_H^2$$

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

...

## 5.2 Основные кр задачи для ур-я Пуассона

$$-\Delta u = f(p) \text{ в } \Omega \in \mathcal{R}^m$$

3. Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$Au = -\Delta u = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

$$P_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}_1) | u|_{2\Omega} = 0\}$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$(-\Delta, u)_h = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\frac{\partial n}{\partial x_i})^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H$$

$$F(u) = \int_{\Omega} ((gradu)^2 - 2uf) d\Omega$$

$$[\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma(P)u]|_{\partial\Omega} = 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_{\Gamma} (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial u^2} dS \geq 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Rightarrow u = cond t \int_{\partial \xi} \gamma c^2 dS = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$F(u) = \int_{\Omega} ((gradu)^2 - 2uf) d\Omega + \int_{\gamma\Omega} \gamma n^2 dS$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

з Неймана  
5.2, 5.2

$$(-\Delta, u)_H = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} (gradu)^2 d\Omega \geq$$

$$u == 1(-\Delta u, u)_H = 0$$

при  $V == 1$

$$\int_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int_{\partial\bar{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

$$S_{\Omega} f d\Omega = 0$$

Условие разрешимости 5.2 5.2

## Лекция 6