Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАННИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Москва, 2024

Содержание

Лекция 1

1.1 Уравнение конвекции с диффузией

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}); t > 0; x \in [-L, L]$$

Уравнение конвекции с диффузией.

$$Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}}$$

- число Пекле

$$\frac{L}{U} = t_{\text{конв}}$$

$$\frac{L^2}{\mathcal{D}} = t_{\text{дифузионная}}$$

$$\frac{t_{\text{диф}}}{t_{\text{конв}}} = \frac{LU}{\mathcal{D}}$$

$$Re << 1$$

почти дифф процесс

$$Re >> 1$$

почти конв процесс

Сначала будем рассматривать стационарное уравнение.

$$\frac{d}{dx}(uQ) - \frac{d}{dx}(\mathcal{D}\frac{dQ}{dx}) = 0$$

На отрезке вводится разностная сетка

$$\Omega_n(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

.

Потоковые точки - точки с полуцелые точки

$$xi + \frac{1}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- потоковые узлы

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$$

$$h_i = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

Вводим сеточные функции.

$$Q_i = (x_{i+\frac{1}{2}}; x_{i-\frac{1}{2}})$$

константа на отрезке

$$[x_{i+\frac{1}{2}} \text{до} x_{i-\frac{1}{2}}]$$

D - константа в полуцелых точках (от x_i до x_{i+1} константа)
Считаем скорость и тепло в потоковых точках, где диффузия постоянна

$$Q_x = \frac{Q_{i+1}i = Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\overline{x}} = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\widehat{x}} = \frac{Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}$$

Между потоковыми точками интегрируем получаем формулу.

$$\int_{x_i+\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}[uQ - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}]dx =$$

$$= [uQ - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}]|_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} =$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^{tot}$$

$$W_{i-\frac{1}{2}}^{tot} = U_{i+\frac{1}{2}}Q_{i+\frac{1}{2}} = W_{i+\frac{1}{2}}^D - W_{i-\frac{1}{2}}^D$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^D = -D_{i+\frac{1}{2}}\frac{dQ}{dx}|_{i+\frac{1}{2}}$$

$$U_i i + 1/2 Q_{i+1/2} - D_{i+1/2}\frac{Q_{i+1} - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} -$$

$$-[U_i i - 1/2 Q_{i-1/2} - D_{i-1/2}Q_{\overline{x}_{i-1/2}}] = 0$$

$$\frac{U_{i+1/2}Q_{i+1/2} - U_{i-1/2}Q_{i-1/2}}{\overline{h_i}} -$$

$$-\frac{D_{i+1/2}Q_x - D_{i-1/2}Q_{\overline{x}}}{\overline{h_i}} = 0$$

Интерполируем Q в полуцелые точки.

$$Q_{i+1/2} = \Theta_{i+1/2}Q_i + (1 - Q_{i+1/2})\Theta_{i+1}$$

1.

$$\Theta = 1/2$$

$$W = ...$$

Получится схема с центральными разностями

$$uQ_x - DQ_{xwithlintx} = 0$$

2.

$$\Theta_{i+1/2} = 1/2(1 + \frac{|u_{i+1/2}|}{U_{i+1/2}})$$

$$W_{i+1/2} = u^+_{i+1/2}Q_i - \overline{U}_{i+1/2}Q_{i+1}$$

$$U'_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} + |U_{i+1/2}|)$$

$$Uwithlin_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} - |U_{i+1/2}|)$$

$$(u^+_{i+1/2}Q_i + \overline{u}^+_{i+1/2}Q_i + 1) - DQ_{\overline{x}\widehat{x}} = 0$$

1.2 Модельная задача

$$\frac{d(UQ)}{dx} - D\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

При увеличении числа Пекле график прижимается к координатам снизу.

1.3 Решение разностной задачи (центральные разности).

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_i = a + bq^i$$

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

Подставляем

$$\frac{U}{2h}b(q^{i+1} - q^{i-1}) - Db\frac{q^{i+1} - 2q^i + q^{i-1}}{h^2} = 0$$

$$\frac{u}{2}(q^2 - 1) - \frac{D}{h}(q^2 - 2q + 1) = 0$$

Лекция 2

Точное решение

$$Q(x) = \frac{1 - e^{\frac{Ux}{\mathcal{D}}}}{1 - e^{\frac{U}{\mathcal{D}}}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - e^{Pe \cdot i}}{1 - e^{Pe_n N}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - \overline{q}^i}{1 - \overline{q}^N}$$

$$\overline{q} = e^{Pe_N} = 1 + \frac{Pe_n + Pe_n^2}{2}$$

Сеточная функция (Центральные разности)

$$q = \frac{1 + \frac{Pe}{2}}{1 - \frac{Pe}{2}} =$$

$$(1 + \frac{Pe_N}{2}(1 + \frac{1}{2}Pe_n + \frac{1}{4}Pe_n^2 + ...)) =$$

$$1 + Pe_n + \frac{Pe_n^2}{2}$$

Но число пекре должно быть меньше 2
Направленные разности

$$q + Pe_n$$

Для схемы с центральными разностями

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i+1}(\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) + Q_i(\frac{2\lceil}{h^2}) + Q_{i-1}(-\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i+1}(1 - \frac{1}{2}\mathcal{D}) + 2Q_i - Q_{i-1}(1 - \frac{1}{2}Pe_n) = 0$$

Для схеммы с направленными разностями

$$U\frac{Q_i - Q_{i-1}}{h} - \mathcal{D}\frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i-1}(-\frac{u}{h} - \frac{\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(\frac{u}{h} - \frac{2\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(-\frac{\mathcal{D}}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i-1}(1 + Pe_n)...$$

Попробуем предсказать поведение вышеописанных схем

$$Q_{i-1} = Q_i - h\frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 q}{\partial x} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + ...$$

$$Q_{i+1} = Q_i + h\frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 q}{\partial x} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + ...$$

Первое слагаемое:

$$\frac{U}{h}(\frac{\partial Q}{\partial x})_i - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}...$$

$$U\frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \frac{1}{2}Uh\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|_i/... = 0$$

$$U\frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \mathcal{D}(1 + \frac{1}{2}Pe_n)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}|_i$$

ДЛя того чтобы коэф диффузии был похож на то что было в исходном уравнении $\frac{Pe_n}{2}$ « 1

2.1 Схема А.А.Самарского

$$U^+Q_{\overline{x}} + U^-Q_x - \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}}Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$\overline{D} = \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}} = \mathcal{D}(\infty - \frac{|\mathcal{P}]_\backslash|/\in}{\infty + \frac{|\mathcal{P}]_\backslash|}{\in}})$$

$$u^+Q_{\overline{x}} - u^-Q_x = uQ_{x0} - \frac{|U|_h}{2}Q_{\overline{x}x}$$

$$UQ_{x0} - \mathcal{D}[\frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}]Q_{\overline{x}x} = 0$$

- Коэфф диффузии

$$\mathcal{D}[\frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}] = \mathcal{D}^*$$

$Pe_n^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}}$ - эффективное число Пикле

$$f = Pe^*(Pe)$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}\frac{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2}}$$

$$Pe^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \frac{1 + \frac{|Pe_n}{2}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}$$

$$Pe_n \to 0; Pe_n^* \to Pe_n$$

$$Pe_n \to \inf; Pe_n^* \to 2$$

$$|Pe * n| = \frac{Pe_n^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{|Pe_n|})}{Pe_n^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{2|Pe_n|} + \frac{1}{|Pe_n|^2})}$$

2.2 Экспоненциальная схема

$$u\frac{dQ}{dx} - \mathcal{D}\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$Q(x) = Q_i + (Q_{i+1} - Q_i)\frac{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}\frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}})}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$W^{tot} = u_{i+\frac{1}{2}}Q_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}|_{i+\frac{1}{2}} =$$

$$= u_{i+\frac{1}{2}}Q_i + u_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+\frac{1}{2}}Q_i)\frac{exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2} - 1)}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1)} -$$

$$-u_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+1} - Q_i)\frac{exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2})}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = uQ_{\overline{x}} + uh\frac{e^{P\frac{Pe_N}{2}} - 1}{e^{Pe_N} - 1}Q_{\overline{x}x} - uh\frac{e^{P\frac{Pe_n}{2}}}{e^{Pe_n} - 1}Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$uQ_{\overline{x}} = uQ_{x0} - \mathcal{D}\frac{Pe}{2}Q_{\overline{x}x}$$

$$uQ_{x0} - \mathcal{D}^2Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}(\frac{Pe_N}{2}\frac{e^{Pe} + 1}{e^{Pe} - 1}) = \mathcal{D}\frac{Pe_n}{2}coth\frac{Pe}{2}$$

$$Pe_n = \frac{Uh}{\mathcal{D}} = 2th\frac{Pn_n}{2}$$

2.3 Схема Сполдинга

$$Pe^*_{h,i+\frac{1}{2}} = Pe_{h,i+\frac{1}{2}}, Pe_h \le 2$$
$$= 2, Pe_h > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \Theta_{i+\frac{1}{2}} Q_i + (1 - \Theta_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+1})$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_n, i+\frac{1}{2}} [Pe_{n,\frac{1}{2}} - 1 + max(-Pe_{n,i+\frac{1}{2}}, 1 - \frac{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}{2}, 0)]$$

1.
$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| \le 2$$
$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
буквально схема с центральными разностями.

2.
$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| > 2$$

(a)
$$Pe_n > 2$$
$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 + 0] = 1 - \frac{1}{Pe}$$

(b)
$$Pe_n < -2$$
$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 - Pe_n] = -\frac{1}{Pe_n}$$

Или оба варианта в одной формуле

$$\frac{1}{2}(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) - \frac{1}{Pe_n}$$

Подставляем Θ

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2}(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) = \frac{1}{Pe_n}] Q_i + [\frac{1}{2}(1 - \frac{|Pe_n|}{Pe_n} + \frac{1}{Pe_n})] Q_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} = uQ_{i+\frac{1}{2}} = U^+_{i+\frac{1}{2}} Q_i + U^-_{i+\frac{1}{2}} Q_i + 1 + DQ_x$$

$$\frac{d}{dx} uQ - D\frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$
$$W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} = U^+ Q_{\overline{x}} + \overline{u} Q_x + DQ_{\overline{x}x}$$

Таких схем множество, но суть такова, что до определенного момента рассматривается направленные разности, а потом переходят на константу

2.4 Схема Патанкара

Надо разобрать к экзамену! Есть в презентации.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i\frac{1}{2}}}[Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + max(0, Pe_n) + max(0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5)]$$

Теперь нужно определить в полуцелых точках.

2.5 Разностная схема на расширенных шаблонах

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i+1} + Q_i) - \eta(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})$$

1.

$$u\frac{d}{dx} = uQ_{x^0} - \frac{Uh}{2}(Q_x\overline{x} - Q_{xx})\frac{1}{2}h^2Q_{\overline{xx}}$$

2.

$$\eta = \frac{1}{2} \text{ - схема с направленными разностями}$$

3.

$$\eta = \frac{1}{4} - \text{ схема Фрома}$$

4.

$$\eta = \frac{1}{6} - \text{ схема с искуственной дисперсией}$$

5.

$$\eta = \frac{1}{8} - \text{ схема QUICK}$$

Лекция 3

3.1 Нестационарные задачи

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$u = const, Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}} >> 1$$

Сетка вводится аналогично стационарной задаче.

$t_k = \tau_k$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial Q}{\partial t} dxdt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(uQ) dxdt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}) dxdt$$

По слагаемым

1. Выносим, так как не зависит от t, по x константа на отрезке интегрирования

   $$h_i \cdot (Q_i^{k=1} - Q_i^k)$$

2. $$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} dt)$$

   Воспользуемся квадратурной формулой

   $$= \tau(W^\sigma_{i+\frac{1}{2}} + W^\sigma_{i-\frac{1}{2}})$$

   $$f^{(\sigma)} = \sigma f^{t_k+1} + (1-\sigma) f^{t_k} = \sigma \hat{f} + (1-\sigma) f$$

   Возникает ровно та же проблема определения W в полуцелых точках

3. $$\int_{t_k}^{t_{k+1}} [\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}|_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}|_{i-\frac{1}{2}}] dt =$$

   $$\tau[(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x})^{(\sigma)}_{i+\frac{1}{2}} - (\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x})^{(\sigma)}_{i-\frac{1}{2}}]$$

3.2 Решение модельной задачи

Отрезок от -L до L. Начальные данные: 1 при отрицательных значений, 0 при положительных.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$S = t, y = x - ut$$

$$Q(x,t) = Q(y(x,t), S(t))$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S}\frac{Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{dS} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - u\frac{\partial Q}{i\partial y} + u\frac{\partial Q}{\partial y}\mathcal{D}\frac{\partial^Q}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \Rightarrow$$

интеграл Пуассона

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{y}{2sqrt\mathcal{D}S}} e^{-z^2} dz] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x-ut}{2\sqrt{\mathcal{D}t}}} e^{-z^2} dz]$$

Подставить это дома и убедиться, что оно является решением уравнения.

3.2.1 Направленные разности.

рисунок фронта
Самое большое размытие при использовании чисто неявной схемы ($\sigma = 1$)
Меньше всего размывается явная схема ($\sigma = 0$).
То есть неявная схема ухудшает проблемы направленных разностей

3.2.2 Центральные разности

**рисунок фронта
Чисто неявная схема снова размывает сильнее.
($\sigma = 0.5$)

3.3 Диффузия и дисперсия

Дисперсия - скорость убывания волны зависит от амплитуды.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

$$Q(t,x) = e^{-P(m)t}e^{im(x-q(m)t)}$$

m - волновое число, P(m) - скорость убывания амплитуды, q(m) - скорость распространения волны, $i^2 = -1$.

$$Q = e^{-Pt}e^{im(x-qt)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

Подставим Q и посмотрим каими должны быть P и m, для того чтобы оно удовлетворяло уравнениям.

$$-P - imq + Uim = -\mathcal{D}m^2 - im^3p + \gamma m^4$$

$$P = \mathcal{D}m^2 - \gamma m^4$$

- скорость убывания

$$q = u + M^2\beta$$

- скорость волны

На амплитуду влияют четные производные (но они чередуются уменьшает-увеличивает-уменьшает-...)

скорость движения от третьей производной (нечетныепроизводные) проверить с каким знаком.

3.4 Дифференциальное представление разностных схем

$L(Q) = 0$ Дифференциальное уравнение

$L_h^\tau(Q, \tau, h) = 0$ - Разностная схема

$L_H^\tau(Q) = L(Q) + \epsilon(Q, \tau, h) = 0$ - Погрешность аппроксимации

Не будем убирать погрешность и будем его рассматривать как бесконечный ряд.

$$L_h^\tau(Q) = L(Q) + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial Q}{\partial x^i} = 0$$

Процедура по созданию подобного представления (в общих чертах):

3.5 Дифференциально приближение для схемы с направленными разностями.

$$Q_t + uQ_{\overline{x}}^{(\sigma)} - \mathcal{D}Q_{\overline{x}}^{(\sigma)}x = 0$$

$$Q^{(\sigma)} = Q^{0.5} + (\sigma - 0.5)\tau Q_t = \frac{\hat{Q} + Q}{2} + (\sigma - 0.5)(\hat{Q}Q)$$

$$Q_t + uQ_{\overline{x}}^{(0.5)} - \mathcal{D}Q_{\overline{x}x}^{(0.5)} + u(\sigma - 0.5)\tau Q_{t\overline{x}} - \mathcal{D}(\sigma - 0.5)Q_{t\overline{x}x}$$

Разложим в точке $(t_k + \frac{\tau}{2}, x_i Q(t_k + \frac{\tau}{2})Q^(0.5))$

$$Q_t = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \frac{t^2}{2}\frac{\partial^3 \overline{Q}}{\partial t^3} + \dots$$

$$Q^{(0.5)} = \overline{Q} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dots$$

и тд.

Как избавиться от высоких производных и смешанных производных по t и x. Метод дифференциального представления.

Лекция 4

4.1 Устойчивость разностных схем. Метод Неймана (Метод гармоник.)

$Q(t, x) = e^{-p(m)t}e^{Im(x-qt)}$ - Бегущая волна $= a(t)e^{Imx}$

$a(t) = e^{-t[p(m)+Iqm]}$ Комплексная амплитуда

$p(m) = \mathcal{D}m^2, q = u$ Для нашего конкретного уравнения

$Q(t+\tau, x) = e^{-t+\tau}[\mathcal{D}m^2 + (Imq)]e^{Imx} = GQ(t, x)$

G - Множитель перехода

$G = e^{-\tau(\mathcal{D}m^2 = Imu)}$

4.1.1 Явная схема с направленными разностями

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - c(Q_i^k - Q_{i-1}^k) + S(Q_{i+1}^k - 2Q_i^k + Q_{i-1}^k)$$

$c = \dfrac{u\tau}{h}$ - число Куррента , $S = \dfrac{\mathcal{D}\tau}{h^2}$ - Тепловое число Куррента

$$Q_i^k = Q(t_k, x_i) = e^{-pt_k}e^{Im[x_i - qt_k]} =$$
$$= e^{\tau k[p - Imq]}e^{Imhi} =$$
$$= a_k e^{I\Theta i}$$

$\tau k = t_k, ih = x_i, \Theta = mh$

Надо выяснить при каких P и Q при подстановке бегущей волны данное уравнение является решением нашего уравнения.

$$a_{k+1}e^{I\Theta i} = a_k e^{I\Theta i} - ca_k(e^{I\Theta(i-1)}) + Sa_k(e^{I\Theta(i-1)} - 2e^{I\Theta i}) + e^{I\Theta(i+1)}$$

$e^{emi}; a_{k+1} = a_k G$

$$G = 1 - c(1 - e^{-I\Theta}) + S(e^{I\Theta} - 2 + e^{-I\Theta})$$

$$c(1 - e^{-I\Theta}) = 1 - cos\Theta + isin\Theta$$

$(e^{I\Theta} - 2 + e^{-I\Theta}) = 2cos\Theta - 2$

Напоминание:

$e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$

$e^{-i\phi} = cos\phi - isin\phi$

———————————————

?? $= 1 - (c + 2S)(1 - cos\Theta) + Icsin\Theta$ Множитель перехода со слоя на слой

Схема устойчива тогда, когда $|G| > 1$

$\Theta = mh$

$\lambda_{min} = 2h = \frac{2\pi}{m}$ - минимальная длинна волны

$\Rightarrow mh = \pi$ Короткие волны

$mh \to 0$ - Длинные волны

$1 - (c + 2S)(1 - cos\Theta) - Icsin\Theta$

$$|G|^2 = 1 - 4(c + 2S)sim^2\frac{\Theta}{2} + (c + 2S)^2 \cdot 4sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-(c + 2S) + (c + 2S)^2sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$-(c + 2S)(sin^2\frac{\Theta}{2} + cos^2\frac{\Theta}{2}) + (c + 2S)^2sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$(c + 2S)[(c + 2S) - 1]sin^2\frac{\Theta}{2} + [c^2 - (c + 2S)]cos^2\frac{\Theta}{2} < 0; \forall\Theta \in [0, \pi]$$

$c + 2S - 1 < 0; c^2 - (c + 2S) < 0$ - Условия устойчивости

Метод Неймана дает необходимое условие устойчивости, но вообще говоря не достаточное.

4.2 Изменение амплитуды волны.

$$|G|^2 = 1 + 4(c+2S)sin^2\frac{\Theta}{2} = 4(c+2S)^2 sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2}$$

Для волны $\Theta = mh \to 0$

$$|G|^2 = 1 - 4(c+2S)\frac{(mh)^2}{4} + 4(c+2S)^2\frac{{(mh)^4}^4}{2} + 4c^2\frac{(mh)^2}{4} = 1 + (mh)^2[c^2 - (c+2S)] =$$

$$= 1 - (mh)^2[c + 2S - c^2]$$

$$|G| = 1 - (mh)^2(S + \frac{1}{2}c(1-c))$$

$$|G| = 1 - (m^2h^2)(\frac{\mathcal{D}\tau}{h^2} + \frac{1}{2}c(1-c)) =$$

$$= 1 - m^2\tau\mathcal{D} - \frac{1}{2}m^2h^2c(1-c)$$

$1 - m^2\tau\mathcal{D}$ То как убывает волна в исх уравнении

$\frac{1}{2}m^2h^2c(1-c)$ Добавка разностной схемы

$$|G| = e^{-\tau\mathcal{D}m^2} = 1 - \tau\mathcal{D}m^2$$

4.2.1 Коротко про устойчивость схемы с центральными разностями

$$Q_t + uQ_{x^0\mathcal{D}Q_{\overline{x}x}}$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - \frac{1}{2}c(Q_{i_k}^k - Q_{i-1}^k) + S(Q_{i-1}^k - 2Q_i^k + Q_{i+1}^k)$$

$$G = 1 - \frac{c}{2}(e^{I\Theta} - e^{-I\Theta}) + S(e^{-I\Theta} - 2 + e^{I\Theta}) =$$

$$= 1 - 4Ssin^2\frac{\Theta}{2} - 2cIsin\frac{\Theta}{2}cos\frac{\Theta}{2}$$

$$|G|^2 = 1 - 8Ssin^2\frac{\Theta}{2} + 16S^2sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-2S + 4S^2sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$sin^2\frac{\Theta}{2}[4S^2-2S]+cos^2\frac{\Theta}{2}[c^2-2S]<0$$

$2S^2-S<0; c^2-2S<0$ - Условие устойчивости

Рассмотрим для длинных волн

$$|G|^2=1-8Ssin^2\frac{\Theta}{2}+16S^2sin^4\frac{\Theta}{2}+4c^2sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2}<1$$

$$\approx=1-8S\frac{(mh)^2}{4}+4c^2\frac{(mh)^2}{4}=$$

$$=1-(mh)^2(2S-c^2)$$

$$|G|\approx 1-(mh)^2S+(mh)^2\frac{c^2}{2}=$$

$$1-\frac{m^2h^2\mathcal{D}\tau}{h^2}+m^2h^2\frac{c^2}{2}$$

Длинные волны убывают медленнее чем в дифференциальном случае. (В прошом примере было наоборот)

дз решить задачи из таблицы (хотя бы некоторые), позже возможно следует ей прислать.

Лекция 5

5.1 Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho[\frac{\partial V}{\partial t}+(v\cdot\triangledown)v]=-\triangledown p+\chi\triangle V=g\rho \tag{1}$$

$$divV=(\triangledown\cdot v)=0 \tag{2}$$

$$\rho=\rho(p,t)=\rho_0(1+\beta T) \tag{3}$$

V - вектор скорости p - Давление χ - коэффициент вязкости

$$\frac{D\rho}{Dx}=\{\text{ Полная производная }\}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+V_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+V_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+V_z\frac{\partial\rho}{\partial z}$$

$$\frac{D\rho}{Dx}+\rho divV=0$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho divV = 0$$

Жидкость несжимаема тоже самое, что полная производная равна 0, это одновременно означает что дивергенция равна 0.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow divV = 0$$

Перепишем уравнение 1 в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \triangledown)V = -\triangledown \frac{p}{\rho_0} + \nu \triangle V + F$$

$$\eta = \frac{\chi}{\rho_0} - \text{ Кинетическая вязкость} \tag{4}$$

Из 4 Исключаем давление.

$$\Delta V = -rotrotV;$$

$$(V \cdot \triangledown)V = rotV \times V + \triangledown(\frac{V^2 2}{2}) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rotV \times V = -\triangledown(\frac{p}{\rho_0} + \frac{V^2}{2}) - \nu rotrotV + F \tag{5}$$

Применим ротор к 5

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (V \cdot \triangledown)V = \nu u \triangle + rotF \tag{6}$$

пусть $V = (V_x(t, x, y))$

Лекция 5

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(V\omega) = \nu \Delta \omega$$

$$(u\omega) = W^x$$

$$(V\omega) = W^y$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$divV = 0$$

$$\triangle \psi = -\omega$$

$$\psi, \omega \text{ в узлах сетки } , u(i, j+\frac{1}{2}), V(i+\frac{1}{2}, j)$$

Тогда дивергенция по ячейке автоматически равна нулю. Ячейки называются нулю.

$$divV|_{S_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}$$

Ячейка с центром в U $S(i,j+\frac{1}{2})$ Ячейка с центром в V $S(i+\frac{1}{2},j)$
Аппроксимация производной по ω

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

$$\int_{S_{i,j}} \frac{\partial\omega}{\partial t}dxdy + \int_{S_{ij}} (W^x + \frac{\partial}{\partial y}W^y)dxdy = \mu\int_{S_{ij}} \triangle\omega dxdy$$

$\overline{S}$ означает площадь

$$\frac{\partial}{\partial t}[\omega_{ij}]\overline{S_{ij}} = \frac{\partial}{\partial t}\omega_{ij}\overline{h_i^x h_i^y}$$

$$W = (W^x, W^y)$$

$$I_2 = \int_{S_{ij}} (\frac{\partial}{\partial x}W^x + \frac{\partial}{\partial y}W^y)dxdy = \int_{\partial S_{ij}} (w,n)dl =$$

$$= W^x_{i+\frac{1}{2},j}\overline{h}_i^y + W^y_{ij+\frac{1}{2}\overline{\overline{h}_i^x}} - W^x_{i-\frac{1}{2},j}\overline{h}_i^y - W^y_{ij-\frac{1}{2}\overline{\overline{h}_i^x}}$$

Делим на $\frac{1}{\overline{h_i^x h_i^y}}$

$$\frac{W^x_{i+\frac{1}{2}} - W^y_{i-\frac{1}{2}}}{\overline{h_i}}$$

$$u_i j = \frac{h^y_{i,j+\frac{1}{2}}u_{ij+\frac{1}{2}} + h^y_{ij-\frac{1}{2}}u_i, j-\frac{1}{2}}{2h_j^y}$$

$$V_i j = \frac{h^x_{i+\frac{1}{2},j}V_{i+\frac{1}{2},j} + h^x_{i-\frac{1}{2},j}V_{i,j-\frac{1}{2}}}{2h_j^y}$$

$$u_{ij} = \psi_{y^0} = \frac{\psi_{i,j+1-\psi_{i,j-1}}}{2\overline{h}_j^y}, V_{ij} = \psi_{x^0} = \frac{\psi_{i+1,j-\psi_{i-1,j}}}{2\overline{h}_j^x}$$

$$W^x_{i+\frac{1}{2},j} = (u\omega)_{i\frac{1}{2},j}$$

6.1 Переинтерполяции

6.1.1 Переинтерполяция 1

$$W^x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}\omega_{i+1j} + u_{ij} + \omega_{ij})$$

$$W^y_{ij+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V_{ij+1}\omega_{ij+1} + V_{ij}\omega_{ij})$$

6.1.2 Переинтерполяция 2

$$W^x_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{u_{i+1,j} + u_{ij}}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}\omega_{ij}}{2}$$

$$W^y_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{V_{i,j+1} + V_{ij}}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}\omega_{ij}}{2}$$

6.1.3 Первый способ применение

Начнем с первого способа.

$$\mathcal{K}_h(\psi,\omega)\overline{h}^x_i\overline{h}^y_j = (W^x_{i+\frac{1}{2}} - W^x_{i-\frac{1}{2},j})\overline{h}^y_i + (W^y_{ij+\frac{1}{2}} - W^y_{i,j-\frac{1}{2}})\overline{h}^x_i$$

$$u_{i+1,j} = \psi_{y^0}(+1_x); u_{ij} = \psi_{y^0}$$

$$W^x_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}[\psi_{y^0}(+1_x)\omega_{i+1j} + \psi_{y^0}\omega_{ij}]$$

$$W^x_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}[\psi_{y^0}\omega_{i+1j} + \psi_{y^0}(-1_x)\omega_{i-1,j}]$$

$$W^x_{i+\frac{1}{2},j} - W^x_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\mathcal{K}_h(\psi,\omega)\overline{h}^x_i\overline{h}^y_j = (W^x_{i+\frac{1}{2}} - W^x_{i-\frac{1}{2},j})\overline{h}^y_i + (W^y_{ij+\frac{1}{2}} - W^y_{i,j-\frac{1}{2}})\overline{h}^x_i =$$

$$\frac{1}{2}[\psi_{y_0}(+1+x)\omega_{i+1j} - \psi_{y^0}\omega_{i-1,j}]\overline{h^y_i} - \frac{1}{2}[\psi_{x^0}(+1_y)\omega_{ij+1} - \psi_{x^0} - \psi_{x^0}(-1_y)\omega_{ij-1}]\overline{h}^x_i$$

$$\mathcal{K}_h(\psi,\omega) = (\psi_{y^0}\omega)_{x^0} - (\psi^0_x\omega)_{y^0}$$

Теперь осталось проинтегрировать оператор лапласа.

$$I = \nu \int (\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}) dxdy = \int_{\partial S_{ij}} ((grad\omega, n)dl)$$

Еще есть условие, его тоже надо аппроксимировать

$$\omega = -\Delta \psi$$

$$\int_{S_{ij}} \omega dxdy = - \int_{S_{ij}} (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2})(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}) dxdy = - \int_{\partial S_{ij}} (grad\psi, n)dl$$

$$= -[(\frac{\partial \psi}{\partial x})^{y}_{i+\frac{1}{2}} + (\frac{\partial \psi}{\partial y}_{ij+\frac{1}{2}\overline{h}_i^x}) - (\frac{\partial \psi}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}j} \overline{h}_i^y - (\frac{\partial \psi}{\partial y})_{i,j-\frac{1}{2}} \overline{h}_i^x]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{h^x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}}{h^y_{j+\frac{1}{2}}}$$

Но что происходит на границе?

$$\omega_{ij} S_{i0} = [(\frac{\partial \psi}{\partial x})_{i+\frac{1}{2},0} \overline{h}_0^y + \frac{\partial \psi}{\partial y}_{i\frac{1}{2}} \overline{h}_i^2 - \frac{\partial \psi}{\partial x}_{i-\frac{1}{2},0} \overline{h}_0^h - (\frac{\partial \psi}{\partial y})_{i,0} \overline{h}_i^x]$$

$$S_{i0} = \overline{h}_i^x \overline{h}_0^y$$

$$\overline{h}_0^y = \frac{h^y_{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$-[(\frac{\partial \psi}{\partial x})^{y}_{i+\frac{1}{2}} \overline{h}_0^y + (\frac{\partial \psi}{\partial y})_{ij+\frac{1}{2}} \overline{h}_i^x - (\frac{\partial \psi}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}j} \overline{h}_i^y - (\frac{\partial \psi}{\partial y})_{i,j-\frac{1}{2}} \overline{h}_i^x]$$

ψ на границе равно нулю $\Rightarrow$

$$\omega_{ij} \overline{h}_i^x \overline{h}_0^y = -(\frac{\partial \psi}{\partial y})_{i,j+\frac{1}{2}} \overline{h}_i^x$$

$$\omega_{ij} = -\frac{2}{h^y_{\frac{1}{2}}} \frac{(\psi_{i1} - \psi_{i0})}{h^y_{\frac{1}{2}}}$$

$\omega_{Ij} = -\dfrac{2}{(h^y_{\frac{1}{2}})^2} \psi_{i1}$ - итоговое граничное условие (условие Тома (Thom))

6.2 Баланс кинетической энергии

Переобозначим скалярные произведения

$$f(x_i, y_i) \to (f,g)^0 = \sum_{(i,j)\in \overline{I}\times\overline{J}} f_{ij g_{ij} S_{ij}} = \sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y} f_{ij} g_{ij} \overline{h}_i^x \overline{h}_j^y$$

$$(f,g)_h^{(1)} = \sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_{y-1}} f_{ij+\frac{1}{2}} g_{ij+\frac{1}{2}} \overline{h}_i^x \overline{h}_j^y + \frac{1}{2}$$

$$(f,g)_h^{(2)} = \sum_{i=0}^{N_x-1}\sum_{j=0}^{N_{y-1}} f_{i,j+\frac{1}{2}} g_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}}^x \overline{h}_j^y$$

Лекция 8

$$\nu(\Delta\omega, \psi)(\omega, \omega)$$

$$(\Delta, \psi)_w^0 \sum_{(i,j)} \hbar_i^x \ \hbar_j^y (\omega_{\overline{x}x} + \omega_{\overline{y}y})\psi_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_y=1} \hbar_u^y \sum_{i=1}^{N_x-1} (\omega_x - \omega_{\overline{x}}\psi_{ij} + ...) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_y} \hbar_j^y [\sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_x \psi_{ij} - \sum_{i=0}^{N_x-1} \omega_x \psi_{i+1j}] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y [\sum_{i=1}^{N_x-2} \omega_x \psi_x h_{i+\frac{1}{2}}^x + \omega_x (N_x - 1)\psi_{N_x-1,j} - \omega(0,j)\psi_{1j}] =$$

$$\omega_x \psi_x h_{i+\frac{1}{2}}^x (\omega_x (N_x - 1)\psi_{N_x-1} - \omega_x(N_x-1)\psi_{N_x}) = -\omega_x(N_x-1)(\psi_{N_x}) - ...$$

$$= -\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_x \psi_x h_i^x + \frac{1}{2} = \{\omega = -\Delta\psi = -(\psi_{\overline{x}x} + \psi_{\overline{y}y})\} =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N_{y-1}} \hbar_i^y \sum_{i=1}^{N_x-1} (\omega_{i+1} j - \omega_i j)\psi_x = \sum_{j=1}^{Ny-1} \hbar_i^y [\sum_{i=1}^{N_x} \omega_{ij} \psi \overline{x} - \sum_{i+0}^{N_x-1} \omega_{ij}\psi_x] =$$

$$= -\sum_j \hbar^y_j \sum_1^{N-x-1} \omega_{ij}(\psi_{\overline{x}} - \psi_x)$$

$$\psi_{x\overline{x}} = (\psi_x - \psi_{\overline{x}})\frac{1}{h}$$

$$= \sum_0 \hbar^y_j \sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_{ij}(\psi_x - \psi_{\overline{x}}) + \omega_{N_xj}\psi_{\overline{x}}(N_{xj}) - \omega_{0j}\psi(0,j) =$$

Из граничных условаий следует (буквальо есть омеги на границе вправа).

$$= -\sum \omega_i^2 j \ \hbar^x_i \ \hbar^y_j$$

7.1 Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu T) = æ\Delta T$$

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(T^2)dxdy + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(uT)\cdot T)dxdy = æ\int_\Omega \Delta T dxdy =$$

$$\mathcal{K}(\mathcal{T}) = -\int_\Omega (uT\frac{\partial T}{\partial x} + \nu T\frac{\partial T}{\partial y})dxdy = -\frac{1}{2}\int_\Omega (u\frac{\partial}{\partial x}(T^2))dxdy = \frac{1}{2}\int_\Omega (T^2\frac{\partial u}{\partial x} + T^2\frac{\partial \nu}{\partial y})dxdy = \frac{1}{2}\int_\Omega T^2 divV dx$$

$$\overset{\omega}{W}{}^x_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{1}{2}(u_{i+1j}\omega_{i+1} + u_i j\omega_{ij})$$

- та самая хорошая интерполяция.

$$oversetTW^x_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{u_{i+1j} + u_{ij}}{2}\frac{T_{i+1j} + T_{ij}}{2}$$

$$\frac{1}{4}\sum_{ij} \hbar^y_j[T_{ij}(\psi_{overset0y(+1_x)} + \psi_{\underset{y}{0}})(T_{i+1j} + T_{ij}) - T_{ij}(\psi_{\underset{y+}{0}} + \psi_{\underset{y(-1_x)}{0}})(T_{ij} + T_{i-1j})]$$

$$\frac{1}{4}\sum \hbar^x_i[(\psi_{\underset{x}{0}} + \psi_{\underset{x}{0}})(T_{ij+1} + T_{ij}) - T_{ij}(\psi_{\underset{x}{0}}\psi_{\underset{x}{0}}(-1y))(T_{ij} + T_{ij-1})]$$

$$\sum = \frac{1}{4}\sum^{ij} T_{i-1j}T_{i-1j}[\psi_{\underset{y}{0}}(T_{ij} + T_{i-1j}) + T_{ij}\psi_{\underset{y}{0}}(T_{i+1} + T_{ij})] - \frac{1}{4}\sum_{ij}[T_i j\psi_{\underset{y}{0}}(T_{ij} + T_{i-1j}) + T_{ij}\psi_{\underset{y(ij)}{0}}(T(_{i+1j} + Tij))] =$$

Сгруппируем слогаемые из скобок попарно (первое с первым, второе со вторым). В формуле выше опущены шаги сетки.

$$= \psi_{\overset{0}{y}}(T_{ij} + T_{i-1j})(T_{i-1j} - T_{ij}) + \psi_{\overset{0}{y}}(T_{i+1j} + T(ij))(T_{ij-T_{i+1j}}) =$$

Разность квадратов в обеих скобках.

$$= \frac{1}{2}\sum \psi_{\overset{0}{y}}(T^2_{i-1j} - T^2(i+j)) = -\frac{1}{2}\psi_{\overset{0}{y}}(T^2)_(\overset{0}{x}) =$$

$$= \overset{(1)}{\sum} + \overset{(2)}{\sum} = \frac{1}{2}\sum \hbar^x_i \ \hbar^y_i(-\psi_{\overset{0}{y}}T^2_{\overset{0}{x}} + \psi_{\overset{0}{x}}T^2_{\overset{0}{y}}) = \frac{1}{2}\sum_{ij} \hbar^x_i \ \hbar^y_i(\psi_{overset0x\overset{0}{y}}\psi_{overset0y\overset{0}{x}})$$

7.2 Уравнение Навье-Стокса в естественных переменных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \triangledown)V = -\triangledown\rho\nu\Delta V$$
$$didV = 0$$

$$\triangledown = (\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3})$$
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_3}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \nu\Delta v_i$$

$$v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = V_1\frac{\partial V_i}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_i}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_i}{\partial x_3} =$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(V_1V_i) + \frac{\partial}{\partial x_2}(V_2V_i) + \frac{\partial}{\partial x_3}(V_3V_i) =$$
$$V_1\frac{\partial V_i}{\partial x_1} + V_i\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2\frac{\partial V_i}{\partial x_2} + V_i\frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3\frac{\partial V_i}{\partial x_3} + V_i\frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

$$V(\frac{\partial V}{\partial t}V) + (\mathcal{K}(V) \circ V \cdot V) =$$

$$= -(\triangledown\rho V) + \eta(\Delta V, V) \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega E_{kin}d\Omega + \sum_{i=1}^{3}(\mathcal{K}(V) \circ V_i, V_i)d\Omega = \eta\sum(\Delta V_i, V_i)$$

1.
$$\frac{\partial\rho}{\partial x_i}V_idx_1dx_2dy_2 = -\sum_{i=1}^{3} p\frac{\partial V_i}{\partial x_i}dx_1dx_2dx_3 = \rho(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3})dx_1dx_2dx_3 = 0$$

7.3 Вклад конвективных членов

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial}{\partial x_1}(V_iV_2)+\frac{\partial}{\partial x_2(V_iV_2)+\frac{\partial}{\partial x_3(V_iV_3)}}]V_idx_1dx_2dx_3=$$

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega(\sum_{i=1}^{3}V_1\frac{\partial}{\partial x_1}(V_i^2)+V_2\frac{\partial}{\partial x_2}(V_i^2)+V_3\frac{\partial}{\partial x_3}(V_i^2))dx_1dx_2dx_3=$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}V_i^2\div Vdx_1dx_2dx_3=0$$

Конвективный член не вносит изменений (ошибок)

$$\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega \Delta V_i\cdot V_idx_1dx_2dx_3=-\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega[(\frac{\partial V_i}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial V_i}{\partial x_2})^2+(\frac{\partial V_i}{\partial x_3})^2]$$

Введем сетку

$$V_1=U$$

$$V_2=V$$

$$x_1=x$$

$$x_2=y$$

Аппроксимация дивергенции скорости V

$$\div V$$

$$\int_{S_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}\div Vdxdy=$$

$$=\int_{\partial S_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}(V,n)dl=$$

$$u_{i+1j+\frac{1}{2}}h^y_{J+\frac{1}{2}}+V_{i+\frac{1}{2}J+1}h^x_{i+\frac{1}{2}}-u_{ij+\frac{1}{2}}h^y_{j+\frac{1}{2}}-V_{i+\frac{1}{2}j}h^x_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\div V=\frac{U_{i+1j+\frac{1}{2}-u_{ij+\frac{1}{2}}}}{h^x_{i+\frac{1}{2}}}+\frac{V_{i+\frac{1}{2}-V_i+\frac{1}{2}j}}{h^y_{j}\frac{1}{2}}=0$$

Лекция 10

В лекции 9 написали аппроксимации уранения импулься и интегрировали по ячейке. Переинтерполировали так чтобы дивергенция внутри ячейки была равна 0.

Вывод разностного уравнения для второй компоненты в разностном случае.

Повторили построение аппроксимации.

Уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} + ... - gradp + \nu \Delta V$$

$$\div V = 0$$

u, V, P

На давление нет уравнения. Обычно используют предиксктор-корректор, не очень хороший споб, но лучше нет.

1. Предиктор скорости

$$\frac{\widetilde{V} - V^k}{t} + K_h(V^k)\widetilde{V} = \nu \Delta \widetilde{V}$$

$$\widetilde{V}|_r = 0$$

2. корректор

$$V^{k+1} = \widetilde{V} = \tau gradp^{k+1}$$

$$\frac{V^{k+1} - V^k}{}$$

$$divV^{k+1} = div\widetilde{V} - \tau divgradP^{k+1} = 0$$

$$divgradp = \frac{divwidetildeV}{\tau}$$

8.1 Исследование устойчивости

$$\frac{\hat{u}_{ij+\frac{1}{2}} - u_{ij+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{u^2_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - U^2_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h^x} + \frac{(uV)_{ij+1} - (uV)_{ij}}{h^y} = -\frac{P_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h^x} + \nu \Delta u_{ij+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u_{i+1j+\frac{1}{2}} - u_{ij+\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{V_{i+\frac{1}{2}j+1} - V_{i+\frac{1}{2}j}}{h_y} = 0$$

Процедура линеаризации

$$u = a + \overline{u}$$

$$V = b + \overline{V}$$

$$p = p_0 + \overline{p}$$

$$\overline{u} << 1$$
$$\overline{V} << 1$$
$$\overline{p} << 1$$

$$K = (a+\overline{u})^2_{\overline{x}} + [(a+\overline{u})(f+\overline{V})]_y =$$
$$= (a^2 + 2a\overline{u} + \overline{u}^2)_{\widetilde{x}}(ab + b\overline{u} + a\overline{V} + \overline{u}\overline{V})_y =$$
$$= 2a\overline{u}_{\widetilde{x}} + b\overline{u}_y + a\overline{V}_y =$$
$$= a\overline{u}_{\widetilde{x}} + b\overline{u}_y + a(\overline{u}_{\widetilde{x}}\overline{V}_y)$$
$$K = a\overline{u}_{\widetilde{x}} + b\overline{u}_y$$

Результат линеаризации:

$$\frac{\hat{\overline{u}}_{ij+\frac{1}{2}} - \overline{u}_{ij+\frac{1}{2}}}{\tau} + a\hat{\overline{u}}_{\widetilde{x}} + b\hat{\overline{u}}_y = -\hat{p}_{\hat{x}} + \nu\Delta\hat{\overline{u}}$$
$$\frac{\overline{V_{i+\frac{1}{2}j} - \overline{V}_{i+\frac{1}{2}}}}{\tau} + a\hat{\overline{V}}_y = -\hat{p}_y + \nu\Delta\hat{\overline{V}}$$
$$\hat{\overline{u}}_x + \hat{\overline{V}}_y = \nu$$

Лекция

9.1 Устойчиость схемы для Н-С

Система уравнений:

$$\frac{\hat{U} - U}{\tau} + au_{\substack{x\\0}} + bU\overset{y}{0} = -P\hat{x} + \nu(U_{\overline{x}x} + U_{\overline{y}y})$$
$$\frac{\hat{U} - V}{\tau}...$$
$$divV = 0$$

Конец системы

$$\phi = l_1h^x, \Theta = l_1h^y$$
$$U^k_{mn} = U^k(x_m, y_k) = U^k e^{i(l_1x + l_2y)} = q^kU_ae^{i(m\phi + n\Theta)}$$
$$U_a\frac{q^{k+1} - q^k}{\tau}e^{i(m\phi + (n+\frac{1}{2}\Theta))} + aU_aq^{k+1}e^{i(n+\frac{1}{2})\Theta}\frac{e^{i(m+1)\phi} - e^{i(m-1)\phi}}{wh^x} + bU_aq^{k+1}e^{im\pi}\frac{e^{i(n+\frac{3}{2})\Theta} - e^{i(n-\frac{1}{2})\Theta}}{2h^y} =$$
$$-q^kU_p\frac{e^{i(m+\frac{1}{2}\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta) - e^{i(m-\frac{1}{2})\phi + (n+\frac{1}{2}\Theta)}}}{h^x} + \nu[\frac{1}{(h^x)^2}q^{k+1}U_a(e^{i[(m+1)\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta]}) - 2e^{i[m\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta]} + e^{i((m-1)\phi + (m+\frac{1}{2})\Theta)}$$
$$= U_a\frac{q^{k+1}q^k}{\tau} + U_aq^{k+1}a\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2h^x} + U_abq^{k+1}\frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2h^y}$$

$$= -q^k P_a \frac{e^{i\frac{\phi}{2}} - e^{-i\frac{\phi}{2}}}{h^x} + \nu q^{k+1} \cdot [\frac{e^{i\phi - 2 + e^{-i\phi}}}{(h^x)^2} + \frac{e^{i\Theta} - 2 + e^{-i\Theta}}{(h^y)^2}] =$$

$$= U_a \frac{1 - \frac{1}{q}}{\tau} + aU_a \frac{isin\phi}{h_x} + bU_a \frac{isin\Theta}{h^y} =$$

$$= \frac{2isin\frac{\phi}{2}}{h^y} = -P_a \frac{2isin\frac{\phi}{2}}{h^x} + \nu U_a [\frac{1}{(h^x)^2}(wisin\frac{\phi}{2})^2 + \frac{1}{(h^y)^2}(2isin\frac{Q}{2})^2] =$$

$$= [\frac{1 - \frac{1}{q}}{\tau} + \frac{ia}{h^x} sin\phi + \frac{ib}{h^y} sin\Theta + \nu 4(\frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{(h^x)^2} + \frac{sin^2\frac{\Theta}{2}}{(h^y)^2})] + \frac{P_n}{h^x} 2isin\frac{\phi}{2} = 0$$

Результат:

$$\mathcal{Z} u_a + OV_a + \frac{2iP_a}{h_x} sin\frac{\phi}{2} = 0$$

То же самое нужно проделать для второй компаненты, полностью аналогично:

$$(OU_a + \mathcal{Z} V_a + \frac{29}{h_y} sin\frac{Q}{2} P_a) = 0$$

Дивергенция:

$$U_a a^{k+1} \frac{e^{i(m+1)\phi + (n+\frac{1}{2}\Theta)} - e^{i[m\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta]}}{h^x} + V_a a^{k+1} \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})\phi + (n+1)\Theta} - e^{i[h_x(m+\frac{1}{2}\phi + n\phi)]}}{h^y} = 0$$

$$\frac{U_a}{h_x}(e^{i\frac{\phi}{2} - e^{-i\frac{\phi}{2}}}) + \frac{V_b}{h_y}(e^{i\frac{\Theta}{2}} - e^{-i\frac{Q}{2}}) = 0$$

Третье уравнение:

$$\frac{1}{h_x} sin\frac{\phi}{2} U_a + \frac{1}{h_y} sin\frac{\Theta}{2} V_a + OP_a = 0$$

Итого система:

1. $$\ddagger u_a + OV_a + \frac{2iP_a}{h_x} sin\frac{\phi}{2} = 0$$

2. $$(OU_a + \mathcal{Z} V_a + \frac{29}{h_y} sin\frac{Q}{2} P_a) = 0$$

3. $$\frac{1}{h_x} sin\frac{\phi}{2} U_a + \frac{1}{h_y} sin\frac{\Theta}{2} V_a + OP_a = 0$$

посчиатем определитель коэффициентов этой системы:

1. $$\ddagger u_a + OV_a + \frac{2iP_a}{h_x} sin\frac{\phi}{2} = 0$$

2.

$$(OU_a + \mathcal{Z}V_a + \frac{29}{h_y} sin\frac{Q}{2} P_a) = 0$$

3.

$$\frac{1}{h_x} sin\frac{\phi}{2} U_a + \frac{1}{h_y} sin\frac{\Theta}{2} V_a + OP_a = 0$$

$$= -\mathcal{Z}\frac{1}{(h^x)^2} 2isin^2\frac{\phi}{2} - \mathcal{Z}\frac{1}{h^y}^2 2isin^2\frac{\Theta}{2} = 0 \Rightarrow \mathcal{Z} = 0$$

Подставим z

$$\mathcal{Z} = \frac{1 + \frac{1}{q}}{\tau} + \frac{ia}{h^x} sin\phi + \frac{ib}{h^y} \sin\Theta + 4\nu(\frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{(h^x)^2} + \frac{sin^2\frac{Q}{2}}{(h^y)^2}) = 0$$

$$|\frac{1}{q}| < 1; |q| < 1$$

Следовательно схема безусловна устойчива при этом условии

Для явной схемы

$$\mathcal{Z} = \frac{q-1}{\tau} + \frac{ia}{h_z} sin\phi + \frac{ib}{h_y} sin\Theta + 4\nu(\frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{(h^x)^2} + \frac{sin^2\frac{\Theta}{2}}{(h^y)^2})$$

Так как мы ищем достаточное условие можем взять

$$h = h^x = h^y$$

$$a = b : \phi = \Theta$$

$$\frac{q-1}{\tau} + \frac{ia}{h} sin\phi + \frac{ib}{h} sin\phi + 4\nu(\frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{h^2} + \frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{h^2}) = 0$$

$$\frac{q-1}{\tau} + \frac{i(a+b)}{h} sin\phi + 8\nu(\frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{h^2}) = 0$$

$$q = -\tau\frac{i(a+b)}{h} sin\phi + 8\nu(\frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{h^2}) + 1$$

$$q = \frac{-\tau i(a+b)sin\phi}{h} + \frac{8\nu(sin^2\frac{\phi}{2})}{h^2} + 1$$

$$q = \frac{-2\tau iasin\phi}{h} + \frac{8\nu(sin^2\frac{\phi}{2})}{h^2} + 1$$

$$q = (1 - 8\frac{\nu\tau}{h^2} sin^2\frac{\phi}{2}) - \frac{2i\tau a}{h} sin\phi$$

Устойчив при модуле q $<$ 1

$$|q|^2 = (1 - \frac{8\tau\nu}{h^2})^2 + \frac{4\tau^2 a^2}{h^2} sin^2\phi < 1$$

$$1 - \frac{16\tau\nu}{h^2} sin^2\frac{\phi}{2} + \frac{64\tau^2\nu^2}{h^4} sin^4\frac{\phi}{2} + \frac{4\tau^2 a^2}{h^2} sin^2\phi < 1$$

$$\frac{4\nu}{sin}^2\frac{\phi}{2} + \frac{16\tau\nu^2}{h^2} sin^4\frac{\phi}{2} + 4\tau a^2 sin^2\frac{\phi}{2}\cos^2\frac{\phi}{2}$$

$$\nu + \frac{4\tau\nu}{h^2} sin^2\frac{\phi}{2}\tau a^2 sin^2\frac{\phi}{2} cos^2\frac{\phi}{2} < 0$$

$$-\nu + \tau[\frac{4\nu sin^2\frac{\phi}{2}}{h^2} + a^2 cos^2\frac{\phi}{2}] < \nu$$

$$\tau < \frac{\nu}{4\nu\frac{sin^2\frac{\phi}{2}}{2}} + acos^2\frac{\phi}{2}$$

$$\tau \sim h^2$$

9.2 Задача Стефана

Задача о фазовом переходе (например плавление или замерзание). Задача с подвижной внутренней границей.

В твердой фазе:

$$c_p\rho_p\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\kappa^s\frac{\partial T}{\partial x})$$

$$c_l\rho_l\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\kappa^l\frac{\partial T}{\partial x})$$

$$T_{ph} = 0$$

Необходимо еще одно условие чтобы получить границу раздела сред, где одно уравнение переходит в другое.

$$\epsilon^s = C_p^S\rho^S(T - T_0)$$

$$\epsilon^l = c_p^S\rho^s(T_{ph} - T_0) + \lambda\rho + C_p^l\rho^l(T - T_{ph})$$

$$E = 0\int_0^{\xi(t)}\epsilon^s dx + \int_{\xi(t)}^L \epsilon^l dx$$ - внутренняя энергия всей системы

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^{\xi(t)}\frac{\partial\epsilon^S}{\partial t}dx + \xi(t)\epsilon^S|_{x=\xi(t)} + \int_{\xi(t)}^L\frac{\partial\epsilon^l}{\partial t}dx - \xi\epsilon^l|_{x=\xi(t)} =$$

$$= \int_0^{\xi(t)} C_p^S\rho^S\frac{\partial}{\partial t}(T - T_0)dx + \xi(t)[\epsilon^S|_{x=\xi(t)} - \epsilon^l|_{x-\xi(t)}]\int_{\xi(t)}^L[C_P^S\rho^S(T_{Ph-T_0}) + \lambda\rho + C_P^l(T - T_0)]dt =$$

$$= \int_0^{\xi(t)}\frac{\partial}{\partial x}(\kappa^S\frac{\partial T}{\partial x})dx + \int_{\xi(t)}^L\frac{\partial}{\partial x}(\kappa^l\frac{\partial T}{\partial x})sx + \xi(t)[\epsilon^S|_{x=\xi(t)}] =$$

$$= \kappa^S\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=\xi(t)} - \kappa^S\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=0} + \kappa^l\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=L} - \kappa^2\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=\xi(t)} + \xi(t)[C_p^S\rho^S(T_{PH} - T_0) - C_p^S\rho^S(T_{PH-T_0}) - \lambda\rho - C_p^l - C_p^l p^l(T$$

Условие Стефана:

$$\kappa^S\frac{\partial T}{\partial x}|^s_{\xi(t)} - \kappa^l\frac{\partial T}{\partial x}|_{\xi(t)^l} = \lambda\rho\overset{\xi}{\cdot}$$

$$\kappa = æ$$

Лекция 10

1. Подход подвижной сетке закрепляем узлы как на резинке, и они двигаются вместе с перемещением границы раздела.

2. Замена переменных так чтобы левая граница была 0, граница раздела 1, правая граница 2.

10.1 Замена переменных (неподвижная сетка)

Замена переменных (переход в новую систему переменных)

$$\widetilde{t} = t$$

$$x = \phi(t, y)\{y\xi(t) - \text{"}S\text{"} \text{ (твердая фаза) }; \xi(t) + (L - \xi(t))(y-1)\text{"}l\text{"} \text{ (жидкая фаза) }\}$$

$$y = \frac{x}{\xi(t)} - \text{"}s\text{"}; y = 1 + \frac{x - \xi(t)}{l^l} - \text{"}l\text{"}$$

Можно проверить что система невырождена, посчитав якобиан:

$$l^s\{ \text{ длинна твердой фазы } \}$$

$$l^l\{ \text{ длинна жидкой фазы } \}$$

Отображение становится вырождено только если длинна одной из зон станет равной нулю.

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial \widetilde{t}} = \frac{\partial}{\partial x}(æ\frac{\partial T}{\partial x}); T(t, y) = T(t(\widetilde{t}), y(\widetilde{t}, x))$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \widetilde{t}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \widetilde{t} = \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \widetilde{t}}$$

дифференциалы прямого и обратного преобразования:
x:

$$d\widetilde{t} = dt$$

$$dx = \frac{\partial \phi}{\partial t}dt + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy$$

Инварианты с матрицами

$$\begin{pmatrix} d\widetilde{t} \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} & \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dy \end{pmatrix}$$

Умножить его на обратную матрицу.

$$\begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} & \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d\widetilde{t} \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dt \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} & \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\widetilde{t} \\ dx \end{pmatrix}$$

у:

$$dt = d\widetilde{t}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \widetilde{t}} d\widetilde{t} + \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

Инварианты с матрицами

$$\begin{pmatrix} dt \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \widetilde{t}} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\widetilde{t} \\ dy \end{pmatrix}$$

тогда посчитаем

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \begin{pmatrix} \frac{1}{l^s} \\ \frac{1}{l^l} \end{pmatrix} \frac{1}{l}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \widetilde{t}} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = -\frac{\phi_t}{l}$$

Итого

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \widetilde{t}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \widetilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \widetilde{t}}$$

$$c(\frac{\partial t}{\partial t} - \frac{\phi_t}{l}\frac{\partial T}{\partial y}) = \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial y}(æ\frac{1}{l}\frac{\partial T}{\partial y})$$

Итого получаем совсем другое уровнение, но по постоянным областям.
Теперь перейдем к границному условию:

$$\frac{æ}{l^s}\frac{\partial T}{\partial y}|_{1-0} - \frac{æ}{l^l}\frac{\partial T}{\partial y}|_{1+0}$$

$$æ\frac{\partial T}{\partial x}|_{x=\xi(t-0)} - æ\frac{\partial T}{\partial x}_{\xi(t)+0} = \lambda\frac{d\xi}{dt}$$

Теперь апроксимируем это граничное условие

$$c(l\frac{\partial T}{\partial t}) - (\phi_t\frac{\partial T}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(æ\frac{1}{l}\frac{\partial T}{\partial y})$$

$$c(\frac{\partial}{\partial t}(lT)) - T\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T) + T\phi_{ty}$$

$$\phi_{ty} = \frac{\partial l}{\partial t}$$

$$c(\frac{\partial}{\partial t}(lT)) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})$$

Пусть узел связанный с границей раздела фаз называется y_{i*}

Вводим потоковые точки связанные с серединами отрезков, а температуру относим к узлам.

æ и c Относим к потоковым точкам, так как они зависят от фазы отрезка, также как и l (Длинна отрезка l зависит от отрезка).

Нужно написать алгоритм однородный отностельно границы раздела сред.

$$\int_{t_j}^{j+1}\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c[\frac{\partial}{\partial t}(lT) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T)]dtdy = \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})dtdy$$

Первый интеграл:

$$I_1 = \int_t \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c\frac{\partial}{\partial t}(lT)dy = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt\frac{\partial}{\partial t}\int_{yi-\frac{1}{2}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c(lT)dy = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt\frac{\partial}{\partial t}[\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i} clTdy + \int_{y^{i+\frac{1}{2}}}^{y_i} clTdy] =$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt\frac{\partial}{\partial t}[c_{i-\frac{1}{2}}(l_{i-\frac{1}{2}}T_i)h_{i-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2} + c_{i+\frac{1}{2}}(l_{i+\frac{1}{2}}T_i)h_{i+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}] =$$

$$= \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{2}c_{i-\frac{1}{2}}[(l_{i+\frac{1}{2}}T_i) - (l_{i-\frac{1}{2}}T_i)] + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2}c_{i+\frac{1}{2}}[(\widehat{l_{i+\frac{1}{2}}T_i}) - (l_{i+\frac{1}{2}T_i})]$$

Второй интеграл:

$$I_2 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt[\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i} c_{i-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T)dy \int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c_{i+\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T)dy] =$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} [c_{i-\frac{1}{2}}[(\phi_t T)(y_i) - (\phi_t T)(y_{i-\frac{1}{2}})] + [c_{i+\frac{1}{2}}((\phi_t T)(y_{i+\frac{1}{2}}) - (\phi_t T)(y_i))]] =$$

$$\phi_t|_{i+0} = \phi_t|_{i-0}$$

$$\phi_t|_{i=i^*} = \frac{d\xi}{dt}; \phi = y\xi$$

$$\phi_t = y\cdot\dot{\xi}$$

$$l''\phi_t = (2-y)\dot{\xi}$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (c_{i-\frac{1}{2}} - c_{i+\frac{1}{2}})\frac{d\xi}{dt}T + c_{i+\frac{1}{2}}(\phi_t T y_{i+\frac{1}{2}} - c_{i-\frac{1}{2}}(\phi_t T)_{y(i-\frac{1}{2})})dt$$

$$(\phi_t T)_{i+\frac{1}{2}} = \phi_t(i+\frac{1}{2})\frac{T_i + T_{i+1}}{2}$$

Остался последний интеграл

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})$$

$$\int_{t_j}^{t_j+1} dt[\int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})dy + \int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y}(\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})dy] =$$

$$= \int_{t_j}^{t_j+1} dt[(\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})_{y_{i-0}} - (\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})_{y_{i-\frac{1}{2}}} + (\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})_{y_{i+\frac{1}{2}}} - (\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})_{y_i+0}] =$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\frac{d\xi}{dt}\lambda\delta_{ii*} + (\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})_{i+\frac{1}{2}} - (\frac{æ}{l}\frac{\partial T}{\partial y})_{i-\frac{1}{2}}]dt$$

Лекция

11.1 Разностная схема на подвижной сетке

Вводим сетку так, чтобы один узел был всегда на границе раздела фаз ($\xi(t)$). Если двигается узел $\xi(t+\tau)$, то все узлы справа и слева сдвигаются, так чтобы расстояние между узлами были равны.

$$h_{i+\frac{1}{2}}(t)x_{in}(t) - x_i(t)$$

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x + i + 1(t+\tau) - x_i(t+\tau)$$

$$h_i(t) = \cancel{h_i} = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\cancel{f_x} = \frac{f(x_{i+1}(t)) - f(x_i(t))}{\cancel{h_i + \frac{1}{2}}(t)}$$

Строим разностную схему

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(æ\frac{\partial T}{\partial x})$$

Картинка с узлами и отрезком интегрирования

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}^{i+\frac{1}{2}(t)} c\frac{\partial T}{\partial t}dtdx =$$

вспомним как дифференцируется (формула интегрирования по переменным границам или формула интегрирования по параметру):

$$\frac{d}{dt}\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{x+\frac{1}{2}}}(cT)dxk =$$

$$= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}(T)}^{i+\frac{1}{2}(t)}\frac{\partial}{\partial t}(cT)dx + (cT)_{i+\frac{1}{2}}\frac{dx_{i+\frac{1}{2}}}{dt} - (CT)_{i-\frac{1}{2}}\frac{dx_{i-\frac{1}{2}}}{dt}$$

Применим эту формулу к интегралу:

$$I_1 = \int_{t_j}^{t_j+1} dt[\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_i(t)}\frac{\partial}{\partial t}(CT)dx + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial t}(CT)dx] =$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt[\frac{d}{dt}\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_i}(CT)dx - (CT)dx - (CT)\frac{dv_i}{dt} + (CT)_{x_{i-\frac{1}{2}}}\frac{dx_{i-\frac{1}{2}}}{dt} + \frac{d}{dt}\int_{v_i(t)}^{x_i+\frac{1}{2}(t)}(CT)dx - (CT)_{x_i+\frac{1}{2}}\frac{dx_{i+\frac{1}{2}}}{dt} + (C$$

$$= \frac{c_{i-\frac{1}{2}}}{2}[h^{w\,\hat{}}_{i-\frac{1}{2}}T_i - h^x_{i+\frac{1}{2}}T_j] + \frac{c_{i+\frac{1}{2}}}{2}[h^{x\,\hat{}}_{i+\frac{1}{2}}T_i - h^x_{i+\frac{1}{2}}T_i] - \tau[(CT^(\sigma)x_t)_{i+\frac{1}{2}} - (CT^\sigma x_t)_{i-\frac{1}{2}}] - \tau[(c_{i-\frac{1}{2}} - c_{i+\frac{1}{2}})T_i^{(\sigma)}(x_i)_t]$$

$$T^\sigma = \hat{T} + (1-\sigma)T$$

Шапка значит что $h^x_{i-\frac{1}{2}}(t_{j+1})+$ (берем по следующему временному слою)

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\hat{x}_i - x_i}{\tau}$$

$$I_2 = \int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}^{x_i+\frac{1}{2}(t)}\frac{\partial}{\partial x}(æ\frac{\partial T}{\partial x})dtdx =$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt[\int_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}^{x_i(t)}\frac{\partial}{\partial x}(æ\frac{\partial T}{\partial x})dx + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial x}(æ\frac{\partial T}{\partial x}dx)] =$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt[æ\frac{\partial T}{\partial x}|_{x_i(t)} - æ\frac{\partial T}{\partial x}|_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}æ\frac{\partial T}{\partial x}|_{x_i}] =$$

$$= \tau\frac{dx_i}{dt}\lambda\delta_{ij} + \tau[æ_{i+\frac{2}{2}}\frac{\partial T}{Px}|_{i+\frac{1}{2}} - æ_{i-\frac{1}{2}}\frac{\partial T}{\partial x}|_{i-\frac{1}{2}}]$$

11.2 задача Стефана в двумерном пространстве

Рассмотрим на фиксированной сетке, на подвижной рассматривать не будем так как нет времени, а они эквивалентны вплоть до замены переменных.

Нарисуем цилиндр со стенками конечной толщины. внутри есть жидкая фаза "l"и твердая фаза "S".

Плотность снова одинаковая

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\widetilde{r}}(\widetilde{r}æ\frac{\partial T}{\partial \widetilde{r}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\widetilde{r}æ\frac{\partial T}{\partial \widetilde{t}})$$

$$||æ\nabla T \cdot N|| = StV_{Ph(l_z,N)}$$

N - нормаль границы раздела

Условия на границе:

$$æ\frac{\partial T}{\partial n}|_S = æ\frac{\partial T}{\partial n}|_l$$

$$\frac{\partial T}{\partial}$$

Границы раздела - $\widetilde{z_1}$ - дно, $\widetilde{z_2}$ - граница раздела сред, $\widetilde{z_3}$ - крышка, $\widetilde{z_0}, \widetilde{z_4}$ - нижняя поверхность, верхняя поверхность

Переводим эти кривые в прямые линии и получаем разделение по отдельным слоям.

Сделаем замену переменных:

$$t = \widetilde{t}$$

$$r = \widetilde{r}$$

$$z = \frac{\widetilde{z} - \widetilde{z_\gamma}}{\widetilde{l^\gamma}}$$

Например при $\gamma = 0$:

$$z = \frac{\widetilde{z} - z_0}{l^0}$$

$$\gamma = 0, 1, 2, 3$$

Делаем замену переменных

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial \widetilde{t}} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \widetilde{t}} \\ \frac{\partial T}{\partial \widetilde{r}} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \widetilde{r}} \\ \frac{\partial T}{\partial \widetilde{z}} = \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \widetilde{z}} \end{cases}$$

$$d\widetilde{t} = dt$$

$$d\widetilde{r} = dr$$

$$d\widetilde{z} = \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$d\widetilde{t} = dt$$

$$d\widetilde{r} = dr$$

$$d\widetilde{r} = \frac{\partial z}{\partial\widetilde{t}}d\widetilde{t}d\widetilde{t} + \frac{\partial z}{\partial\widetilde{r}}d\widetilde{z}d\widetilde{z}$$

$$\begin{bmatrix} d\widetilde{t} \\ d\widetilde{r} \\ d\widetilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dt \\ dr \\ dz \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dt \\ dr \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial\widetilde{t}} & \frac{\partial\phi}{\partial\widetilde{r}} & \frac{\partial\phi}{\partial\widetilde{z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\widetilde{t} \\ d\widetilde{r} \\ d\widetilde{z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}^{(} - 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial\widetilde{t}} & \frac{\partial\phi}{\partial\widetilde{r}} & \frac{\partial\phi}{\partial\widetilde{z}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}^{(} - 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{\partial\phi}{\partial t}}{\frac{\partial\phi}{\partial z}} & \frac{-\frac{\partial\phi}{\partial r}}{\frac{\partial\phi}{\partial z}} & -\frac{1}{\frac{\partial\phi}{\partial z}} \end{bmatrix}^{(} - 1)$$

S_γ	$\phi_z^\gamma = l$	ϕ_t	r
S_0	$z_1 - z_0$	0	$(z-1)z_{2,r}$
S_1	$z_1(\widetilde{r}\widetilde{t} - z_1)$	$(z-1)z_{2,t}$	
S_2	$z_3 - z_2(\widetilde{r,\widetilde{t}})$	$(3-z)z_{2,t}$	
S_3	$z_4 - z_3$	z_j	

Взять таблицу из лекций, но там есть опечатка!

$$\frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}(æ\widetilde{r}\frac{\partial T}{\partial\widetilde{r}}) + \frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}\widetilde{(ræ\frac{\partial T}{\partial\widetilde{z}}})] \cdot rl =$$

$l[\frac{\partial}{\partial\widetilde{r}}Q_1 + \frac{\partial}{\partial\widetilde{z}}Q_2]$, где $Q_1 = æ\widetilde{r}\frac{\partial T}{\partial\widetilde{r}}, Q_2 = æ\widetilde{r}\frac{\partial T}{\partial\widetilde{z}}$

$$l\frac{\partial Q}{\partial r} = l\frac{\partial Q_1}{\partial r} - \phi_r\frac{\partial Q_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}(lQ_1) - Q_1\frac{\partial}{\partial r}(lQ_1) - Q_1\frac{\partial l}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(\phi_r Q_1) + Q_1\frac{\partial \phi_r}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(lQ_1) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi_r Q_1) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(lr\text{æ}(\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\phi_r}{l}\frac{\partial T}{\partial z})) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(\phi_r r\text{æ}(\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial_r}{l}\frac{\partial T}{\partial z})) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}(r\text{æ}(l\frac{\partial T}{\partial r} - \phi_r\frac{\partial T}{\partial z})) - \frac{\partial}{\partial z}(r\text{æ}(\phi_r\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\phi_r^2}{l}\frac{\partial T}{\partial z}))$$

$$l\frac{\partial Q}{\partial \widetilde{z}} = \frac{\partial}{\partial z}(\text{æ}r\frac{1}{l}\frac{\partial T}{\partial z})$$

Введем следующие обозначения

$$L^{rr} = l; Z^{rz} = Z^{zr} = -\phi_r; Z_z z = \frac{1+\phi^2}{l}$$

Тогда:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial r}[\text{æ}r(L^{rr}\frac{\partial T}{\partial r} + L^{rz}\frac{\partial T}{\partial z})] + \frac{\partial}{\partial z}[\text{æ}r(L^{zr}\frac{\partial T}{\partial r} + L^{zz})\frac{\partial T}{\partial z}]$$

Этот оператор хороший - эллиптический, самосопряженный, самоопределенный доказать в качестве упражнения.

Подумать как записать краевые условия для выражений $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ и $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$