

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных методов

# ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

# Содержание

<b>Лекция 1</b>	<b>4</b>
1.1 Принцип Дирихле . . . . .	4
1.2 Контрпример Вейерштрасса . . . . .	4
1.3 Контрпример Адамара . . . . .	4
1.4 Метод Ритца . . . . .	5
<b>Лекция 2</b>	<b>8</b>
2.1 Метод Бубнова – Галеркина . . . . .	8
2.2 Повторение . . . . .	8
<b>Лекция 3</b>	<b>11</b>
3.1 Формулы Грина . . . . .	11
3.2 Положительные операторы . . . . .	13
3.3 Положительно определенные операторы . . . . .	14
3.4 Энергетическая норма . . . . .	15
<b>Лекция 4</b>	<b>16</b>
4.1 Энергетическое пространство . . . . .	16
4.2 Энергетический метод . . . . .	18
4.3 Обобщение решения задачи о $\min$ для функционала . . . . .	19
<b>Лекция 5</b>	<b>20</b>
5.1 Минимизация последовательностей . . . . .	20
5.2 Распирение положительно определенного оператора . . . . .	21
5.3 Некоторые методы построения минимизирующей последовательности . . . . .	21
5.4 Краевые задачи для ОДУ . . . . .	23
<b>Лекция 6</b>	<b>26</b>
6.1 Применение энергетического метода для краевых задач . . . . .	26
6.2 Основные краевые задачи для ур-я Пуассона . . . . .	29
<b>Лекция 7</b>	<b>31</b>
<b>Лекция 8</b>	<b>34</b>
8.1 Неравенство Пуанкаре . . . . .	34
8.2 Неоднородные краевые условия . . . . .	36
8.3 Уравнения с переменными коэффициентами . . . . .	37
<b>Лекция 9</b>	<b>39</b>
9.1 Энергетический метод для положительных операторов . . . . .	40
9.2 Эллиптические уравнения в бесконечной области . . . . .	41
<b>Лекция 10</b>	<b>43</b>
10.1 Метод Бубнова-Галеркина . . . . .	43
10.2 Применение метода Б-Г к интегральному уравнению Фредгольма . . . . .	43
10.3 Элементы теории приближения . . . . .	44
10.4 Введение в теорию степенных сплайнов . . . . .	46
<b>Лекция 11</b>	<b>47</b>
11.1 Кусочно постоянные сплайны . . . . .	47

11.2 Кусочно линейные базисные функции . . . . .	48
<b>Лекция 12</b>	<b>50</b>
12.1 Билинейные базисные функции в $\mathbb{R}^2$ . . . . .	50
12.2 Построение проекционно сеточной схемы для ОДУ 2-го порядка . . . . .	53
<b>Лекция 13</b>	<b>54</b>
13.1 Применение ВП к з. Дирихле для ур-я Лапласа . . . . .	55
13.2 Подходы к решению неоднородной краевой задачи . . . . .	56
<b>Лекция 14</b>	<b>58</b>
14.1 Вариационная постановка задачи на собственные значения симметрично положительного оператора . . . . .	58
14.2 Метод Ритца в задаче собственных значений . . . . .	60

# Лекция 1

## 1.1 Принцип Дирихле

Дана область  $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$$M = \{u : u = u_0(x, y), (x, y) \in \partial\Omega\}$$

Среди всех функций  $u \in M$ , та функция, которая доставляет минимум «интегралу Дирихле» (1.1) наименьшее значение, является гармонической.

$$\iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1.1)$$

## 1.2 Контрпример Вейерштрасса

Наименьшее значение может и не достигаться

$$M = \{y : y(x) \in C'[-1; 1], y(-1) = -1, y(1) = 1\}$$

$$J(y) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, \quad J(y) \geq 0, \quad \exists \inf J(y)$$

Докажем, что нижняя граница равна нулю

$$y_{\varepsilon}(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x/\varepsilon)}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)}$$

$$y'_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_{\varepsilon}) = \int_{-1}^1 x^2 (y'_{\varepsilon})^2 dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \varepsilon^2}{\operatorname{arctg}^2(1/\varepsilon)} \cdot \frac{1}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} dx < \frac{2\varepsilon}{\operatorname{arctg}(1/\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$J(\tilde{y}) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = \text{const}$$

Противоречие:  $y(-1) = -1, y(1) = 1$

## 1.3 Контрпример Адамара

Гармоническая функция может обращать интеграл Дирихле в бесконечность

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2n}}{2^n} \cos(2^n \theta); \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

Ряд сходится в круге  $\rho \leq 1$ , его сумма непрерывна и гармонична внутри этого круга. Однако интеграл Дирихле этой функции, взятый по кругу  $\rho \leq r \leq 1$  равен

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n+1} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty$$

## 1.4 Метод Ритца

Рассмотрим функционал:

$$J(w) = \int_a^b f(x, w, w', \dots, w^{(k)}) dx \rightarrow \inf$$

при условии:

$w \in M$  — класс допустимых функций.

Используются координатные функции:

$$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$$

обладающие следующими свойствами:

1. Для любого  $n$  и любых  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , функция

$$w_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \dots + a_n\psi_n \in M.$$

2. Для любого  $w \in M$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует  $n \in \mathbb{N}$ , такое что

$$\|w - \psi_0 - a_1\psi_1 - a_2\psi_2 - \dots - a_n\psi_n\| < \varepsilon.$$

Рассматриваем функционал

$$J(w_n) = F(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \inf,$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial J(w_n)}{\partial a_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J(w_n)}{\partial a_n} = 0. \quad (1.2)$$

Это дает систему уравнений для определения коэффициентов  $a_1, \dots, a_n$ .

### Пример (задача об упругой пластине)

Рассмотрим область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с границей  $S = \partial\Omega$ . Изгиб  $w(x, y)$  удовлетворяет уравнению Софи Жермен:

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

где  $D$  — жесткость пластины,  $q(x, y)$  — интенсивность давления.

Краевые условия:

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = 0 \quad (\text{производная по нормали к } S).$$

Данную задачу можно привести к следующей вариационной:

$$J(w) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\Delta w)^2 - fw \right] d\Omega \rightarrow \inf \quad (1.3)$$

где  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ .

Положим в (1.3)  $w = w_1 + w_2$ , где

$$w_1 = -\frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln(r) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

и  $r$  — расстояние между точками  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta) \in \Omega$ .

Функционал приводится к виду

$$J(w) = J_0 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta w_2)^2 dx dy \geq J_0.$$

Таким образом, функционал  $J(w)$  ограничен снизу, а следовательно имеет точную нижнюю границу

Введем координатные функции  $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \dots, \psi_n(x, y), \dots$ , удовлетворяющие:

1.  $\psi_n(x, y)$  и их производные вида  $\frac{\partial^{k+l}\psi_n}{\partial x^k \partial y^l}$  до порядка  $k, l \leq 3$  принадлежат  $C(\overline{\Omega})$
2.  $\psi_n(x, y)$  удовлетворяют краевым условиям
3. Для любой функции  $\zeta(x, y) \in C^1(\Omega)$  найдется такое  $m$ , что выполняется:

$$|\zeta(x, y) - \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(x, y)| < \varepsilon,$$

а также для производных:

$$\left| \frac{\partial^{k+l}\zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial^{k+l}\psi_i(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \right| < \varepsilon, \quad k \leq 3, l \leq 3$$

Ищем приближенное решение в виде:

$$w_n = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \dots + a_n \psi_n$$

Определяем коэффициенты  $a_i$  так, чтобы  $J(w_n)$  был минимальным:

$$J_n = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} (\Delta w_n)^2 - f w_n \right] dx dy$$

Уравнения (1.2) в данном случае имеют вид:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k = B_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

где

$$A_{ik} = \iint_{\Omega} \Delta \psi_i \Delta \psi_k dx dy, \quad B_i = \iint_{\Omega} f \psi_i dx dy$$

Эта система имеет единственное решение  $a_1, \dots, a_n$ , определяющее приближенное решение.

Рассмотрим для произвольных  $b_1, b_2, \dots, b_n$ :

$$\zeta_n = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \dots + b_n\psi_n$$

Умножив уравнение (1.4) на  $b_i$  и просуммируем по всем  $i$ :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} a_k b_i = \sum_{i=1}^n B_i b_i$$

Используя явный вид коэффициентов придем к:

$$\iint_{\Omega} (\Delta w_n \zeta_n - f \zeta_n) dx dy = 0 \quad (1.5)$$

Решение уравнений (1.4) при подстановке в  $J_n$  доставляет ему минимальное значение (обозначим его  $J_n^{(0)}$ ). Можно показать, что оно равно

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta w_n)^2 dx dy$$

С возрастанием  $n$  величина  $J_n^{(0)}$  не возрастает; в то же время она ограничена снизу. По теореме о монотонной переменной у нее есть предел. На основании критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m : \quad 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad (1.6)$$

Обозначим

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x, y)$$

Используя (1.5) и (1.6) с помощью некоторых преобразований можно прийти к

$$\iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx dy < 1$$

К функции  $\varphi(x, y)$  применим формулу

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left( \varphi \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \Delta \varphi \ln r \, d\xi d\eta$$

Поскольку  $\varphi(x, y)$  является линейной комбинацией координатных функций, она удовлетворяет граничным условиям. Получим

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \Delta \varphi \ln r \, d\xi d\eta$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу, получим

$$|\varphi(x, y)| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \left( \iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 d\xi d\eta \right)^{1/2}}_{\leq 1} \underbrace{\left( \iint_{\Omega} \ln^2 r \, d\xi d\eta \right)^{1/2}}_{\leq C}$$

$$|\varphi(x, y)| \leq C_1$$

$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}$$

$$\omega_n \rightrightarrows_{\Omega} w_n(x, y) \in C(\Omega)$$

## Лекция 2

### 2.1 Метод Бубнова – Галеркина

Рассмотрим приближенное решение в виде:

$$w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n + \dots$$

где  $L$  и  $M$  — дифференциальные операторы, задающие задачу:

$$Lw - \lambda Mw = 0$$

Приходим к системе уравнений вида:

$$\sum_{i=1}^n (A_{ik} - \lambda B_{ik}) \alpha_k = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

Чтобы решение было ненулевым, необходимо и достаточно, чтобы определитель равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \dots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \dots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$N(x, y) = Lw_n - \lambda Mw_n \text{ — невязка}$$

$$N(x, y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}$$

### 2.2 Повторение

1.  $f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = 0$
2.  $\int_{\Omega} f(x) dx = 0, \quad f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0$
3.  $|f(x)| < \varphi(x), \varphi$  — суммируема по Лебегу  $\Rightarrow f(x)$  — суммируема по Лебегу
4.  $\{\varphi_n(x)\}$  — суммируемы с квадратами по Лебегу

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$$

Обозначим  $V$  — линейное пространство

$(\varphi, \psi)$  — скалярное произведение:  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

1.  $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2.  $(a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2, \psi) = a_1 (\varphi_1, \psi) + a_2 (\varphi_2, \psi)$
3.  $(\varphi, \varphi) \geq 0$
4.  $(\varphi, \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$



- Неравенство Коши-Буняковского

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

- Неравенство треугольника

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$$

$$L_2(\Omega) : \quad (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

$$L_2(\Omega, \sigma) : \quad (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} \sigma(x) dx$$

$$L_2(\Omega^m) : \quad (\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(x)} dx$$

### Критерий линейной зависимости системы функций

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно зависима (ЛЗ) в  $H$

$\Updownarrow$

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0$$

**Опр.**  $M$  — плотно в  $H$ , если  $\forall p \in H$  и  $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_n \in M : \|\varphi_n - p\| < \varepsilon$ .

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$  плотно в  $L_2(\Omega)$

$\uparrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \forall \varphi \in H \quad \begin{aligned} &\exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ &\exists \varphi_n^2 \in C_0^{\infty}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

...

$C_0^{(k)}(\Omega)$  плотно в  $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$  — ортонормированная система (ОНС)

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$$

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2 + \dots$$

$\{\varphi_n\}$  полная в  $H$ , если из  $(\varphi, \varphi_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$\forall \varphi \in H : \quad a_k = (\varphi, \varphi_k)$  — коэффициенты Фурье

**Теор.**  $H$  — гильбертово,  $\{\varphi_k\}$  — полная ортонормированная система (ПОНС)

$$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2 \text{ — равенство Парсеваля}$$

**Теор.**  $\exists a_k : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$  сходится,  $\{\varphi_n\}$  — ПОНС в  $H$ , тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \text{ сходится по } \|\cdot\| \text{ к } \varphi \in H, \text{ при этом } \|\varphi\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

**Опр.**  $H$  сепарабельно если  $\exists M$  — счетное мн-во плотное в  $H$ .

**Теор.**  $H$  сепарабельно  $\Leftrightarrow \exists$  ПОНС (счетная или конечная) в  $H$ .

$\{u : \int_{\Omega} u dx = 0\}$  — пример подпространства в  $L_2(\Omega)$ .

Пусть  $H_1$  — подпространство в  $H$

$\forall \varphi \in H \quad \exists! \varphi_1 \in H_1 : \|\varphi - \varphi_1\| = \min_{\psi \in H_1} \|\varphi - \psi\|$  — проекция  $\varphi$  на  $H_1$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad H_2 = \varphi \perp H_1$  — ортогональное дополнение

$l$  — линейный функционал :  $M \subset H \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$$|l_{\varphi}| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|_H$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi} l_{\psi} = l_{\varphi} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \|\psi - \varphi\| < \delta : |l_{\psi} - l_{\varphi}| < \varepsilon$$

**Теор. (Рисса)**  $\forall l$  — непрерывного линейного функционала в  $H \quad \exists! \psi \in H : l_{\varphi} = (\varphi, \psi)$

Пусть  $M$  — плотно в  $H$ ,  $\Phi : M \times M \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$\Phi(\varphi, \psi) : \Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$$

$\Phi(\varphi, \varphi)$  — квадратичная форма

$H : D_A \subset H$  — область определения некоторого оператора  $A$

Линейный оператор  $A$  ограничен  $\Leftrightarrow A$  непрерывен

$\varphi \in D_A, \quad A\varphi \in R_A$  — область значений оператора  $A$

$\varphi \in D_A \rightarrow! A\varphi \in R_A$

## Лекция 3

$$\left. \begin{array}{l} Au = f \\ u, f \in H \end{array} \right| \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad H = L_2(\Omega)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in C(\overline{\Omega}) \\ u|_S = 0 \end{cases}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}); \quad u|_S = 0\}$$

$$A = -\Delta u$$

### Формула Остроградского

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) d\Omega = \int_S \left( \varphi \cos(\bar{n} \cdot x) + \psi \cos(\bar{n} \cdot y) + \omega \cos(\bar{n} \cdot z) \right) dS$$

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix} \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} W d\Omega = \int_S W_n dS$$

Пусть  $\varphi = uv$ ,  $\psi = \omega = 0$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uv \cos(\bar{n} \cdot x) dS$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv \cos(\bar{n} \cdot x_i) dS \quad \text{в } \mathbb{R}^m \quad (3.0)$$

### 3.1 Формулы Грина

$$Lu = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ik}(P) \frac{\partial u(P)}{\partial x_k} \right) + C(P)u(P)$$

$$D_L = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad C(P) \in C(\overline{\Omega})$$

$$A_{ik}(P) \in C(\overline{\Omega}), \quad A_{ik}(P) = A_{ki}(P) \quad \forall P, \quad i, k = \overline{1, n}$$

$$\int_{\Omega} v Lu d\Omega = - \sum_{i,k=1}^m \int_{\Omega} v \frac{\partial}{\partial x_i} \left( A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) d\Omega + \int_{\Omega} C uv d\Omega$$

в (3.0) подставим  $u \rightarrow v, v \rightarrow A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$

$$\int_{\Omega} v L u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} C u v d\Omega - \int_S v \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) dS \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} u L v d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} + C u^2 \right] d\Omega - \int_S u \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) dS \quad (3.2)$$

из (3.1) вычитаем ее же, но поменяв местами  $u$  и  $v$ :  $(3.1) - (3.1)_{u \leftrightarrow v}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v L u - u L v) d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right] d\Omega - \\ &\quad - \int_S \left[ v \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_i) - u \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(\bar{n} \cdot x_k) \right] dS \end{aligned}$$

$$N u := \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\bar{n} \cdot x_i)$$

$$\int_{\Omega} (v L u - u L v) d\Omega = \int_S (u N v - v N u) dS \quad (3.3)$$

Частный случай формул Грина, это оператор Лапласа:

$$L u = -\Delta u; \quad A_{ii} = 1; \quad A_{ik} = 0, \quad i \neq k; \quad C = 0$$

$$- \int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (3.4)$$

$$- \int_{\Omega} u \Delta v d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS \quad (3.5)$$

$$- \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_S \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS \quad (3.6)$$

### 3.2 Положительные операторы

Пусть оператор  $A$  симметричен в  $H$

**Опр.** Оператор называется положительным, если  $\forall u \in D_A \subset H, \quad (Au, u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

**Пр. 1**

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u \quad \text{в } L_2(0, 1); \quad D_B = \{u \in C_0^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$(Bu, v) = -\int_0^1 v \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - v \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = -\int_0^1 u \frac{d^2 v}{dx^2} dx = (u, Bv) \quad \forall u, v \in D_B$$

$$(Bu, u) = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = \text{const}, u(0) = 0 \Rightarrow u = 0$$

**Пр. 2**

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \quad D_C = \left\{ u \in C^2(0, 1), \begin{cases} u'(0) + \alpha u(0) = 0 \\ u'(1) + \beta u(1) = 0 \end{cases} \quad \alpha, \beta = \text{const} \right\}$$

$$(Cu, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1) = (u, Cv)$$

$$\alpha > 0, \beta \geq 0$$

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geq 0$$

$$\alpha = \beta = 0, \quad u \equiv 1 \Rightarrow (Cu, u) = 0 \Rightarrow C \text{ не является положительным}$$

**Пр. 3**

$$Au = -\Delta u, \quad D_A = \{u \in C^2(\Omega) : u|_S = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, S = \partial\Omega, H = L_2(\Omega)\}$$

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = -\int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \text{const}, \quad u|_S = 0 \Rightarrow u = 0$$

Рассмотрим мембрану

$\Omega$  в плоскости  $(x, y)$ ,  $u(x, y)$  — изгиб мембраны

$$-\Delta u = \frac{q}{T}$$

$q$  — поперечная нагрузка на единицу площади

$T$  — натяжение мембраны

$u|_S = 0$  — мембрана закреплена на краях

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

### 3.3 Положительно определенные операторы

**Опр.** Симметричный оператор  $A$  называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \quad (1)$$

**Пр. 1 (продолжение)**

$$B : u(0) = 0, u \in D_B$$

$$u(x) = \int_0^x u'(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

$$u^2(x) \leq \int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x (u'(t))^2 dt = x \int_0^x (u'(t))^2 dt \leq x \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\gamma^2 \|u\|^2 \leq (Bu, u), \quad \gamma = \sqrt{2} \Rightarrow B \text{ является положительно определенным}$$

**Пр. 4**

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left( x^3 \frac{du}{dx} \right) \quad \text{в } L_2(0, 1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1], u(1) = 0\}$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 \frac{d}{dx} \left[ x^3 \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] dx = \left[ x^3 \left( u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] \Big|_0^1 = 0$$

$$(Lu, u) = \int_0^1 x^3 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \Rightarrow L \text{ является положительно определенным}$$

$$\frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2, \quad u_{\delta}(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad u_{\delta} \in \mathcal{D}_L$$

$$\frac{(Lu_{\delta}, u_{\delta})}{\|u_{\delta}\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 \left( \frac{du_{\delta}}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^{\delta} (\delta - x)^3 dx} = \frac{9 \int_0^1 x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int_0^{\delta} (\delta - x)^6 dx} = \frac{9}{40} \delta \Rightarrow L \text{ не явл. положительно опр.}$$

### 3.4 Энергетическая норма

Пусть  $A$  — положительно определен в  $H$  (гильберт.)

На  $D_A$  :  $[u, v]_A = (Au, v)_H$

Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1.  $[u, v]_A = \overline{[v, u]_A}$   
 $(Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]}$
2.  $[a_1u + a_2u, v] = a_1[u, v] + a_2[u, v]$
3.  $(Au, u) = [u, u] \geq \gamma \|u\|^2 \geq 0$
4.  $[u, u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$|u| = [u, u]$  — энергетическая норма

$D_A$  предгильбертово, дополним его по  $|\cdot|_A \Rightarrow$  гильбертово пр-во  $H_A$

$$u \in H_A \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} u \in D_A \\ \exists u : \{u_n\} \in D_A : |u_n - u| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right.$$

## Лекция 4

### 4.1 Энергетическое пространство

Пусть  $A$  — положительно определен в  $H$  (гильберт.)

На  $D_A$  :  $[u, v]_A = (Au, v)_H$   
 $\|u\|_A = [u, u]_A$

$H_A$  — энергетическое пространство

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A \quad (4.0)$$

$$u \in H_A \begin{cases} u \in D_A \\ \exists \{u_n\} \in D_A : \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_A = 0 \end{cases}$$

**Теор.**  $\forall u \in H_A \rightarrow$  только один элемент из  $H$ , причем различные  $u_1, u_2 \in H_A$  отвечают различным элементам из  $H$

Док-во.

$$\begin{aligned} 1. \quad & u_n : \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_A = 0 \\ & \|u_n - u_m\|_A \leq \|u_n - u\|_A + \|u_m - u\|_A \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \\ & \Rightarrow \|u_n - u_m\|_H \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty \\ & \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_H = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & u_{1,n} \xrightarrow{\|\cdot\|_A} u_1, \quad u_{2,n} \xrightarrow{\|\cdot\|_A} u_2 \\ & u_1 \text{ и } u_2 \rightarrow u \in H, \quad u = u_1 - u_2 \\ & \exists \{u_n\} \in H_A \quad \|u_n - u\|_A \rightarrow 0 \\ & \forall f \in H \quad |(f, u_n)| \stackrel{\text{КБ}}{\leq} \|f\| \cdot \|u_n\| \leq \|f\|_A \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \|u_n\|_A \rightarrow 0 \\ & \forall \varphi \in D_A \quad A\varphi = f \in H \\ & \text{Тогда } (A\varphi, u_n) \rightarrow 0 \\ & [\varphi, u_n]_A = (A\varphi, u_n) \rightarrow 0 \\ & \text{Переходя к пределу: } [\varphi, u]_A = 0 \quad \forall \varphi \quad \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \quad \square \end{aligned}$$

Неравенство (4.0) выполняется не только в  $D_A$ , но и во всем пространстве  $H_A$ . Пусть  $u \notin D_A$ , тогда:

$$\exists \{u_n\} \in D_A \quad \|u_n - u\|_A \rightarrow 0, \text{ при этом } \|u_n - u\|_H \rightarrow 0$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_n\|_A \rightarrow \|u\|_A \quad \|u_n\|_H \rightarrow \|u\|_H$$

Так как,  $u_n \in M$ , то для  $u_n$  справедливо  $\|u_n\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u_n\|_A$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  получим

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A$$



### Пример 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \quad D_B = \{u \in C^2[0, 1], \ u(0) = u(1) = 0\}$$

$$H = L_2(0, 1), \ u \in H_B$$

$$u \in H_B, \quad \exists \{u_n\} \in D_B \quad \|u_n - u\|_B \rightarrow 0$$

$$\|u_n - u_k\|_B \leq \|u_n - u\|_B + \|u_k - u\|_B \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0$$

$$\|u_n - u_k\|_B^2 = \int_0^1 \left( \frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx} \right)^2 dx \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{du_n}{dx} \right\} \text{ фундаментальна в } L_2(0, 1) \Rightarrow \exists v(x) \in H$$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u'_n(t) dt, \quad u_n \in D_B, \quad \text{при } x = 0 : u_n(0) = 0$$

$$\text{Переходя к пределу: } u(x) = \int_0^x v(t) dt \quad \text{и} \quad u(0) = 0$$

$$u(1) = \int_0^1 v(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 u'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(1) - u_n(0)) = 0$$

Следовательно,  $u$  абсолютно непрерывная на  $[0, 1]$ , удовлетворяет граничным условиям  $u' \in L_2(0, 1)$

### Пример 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u(x); \quad u'(0) + \alpha u(0) = 0, \ u'(1) + \beta u(1) = 0$$

$$\exists \{u_n\} \in D_C, \quad \alpha > 0, \ \beta \geq 0$$

$$\int_0^1 \left( \frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx} \right)^2 dx \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0$$

$$|u_n(0) - u_k(0)| \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0$$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int_0^x u'_n(t) dt$$

$$u(x) = c_0 + \int_0^x v(t) dt$$

**Теор.** Пусть оператор  $A$  положительный, но не положительно определенный. Тогда

$$u \in H_A : \quad u \in H \Leftrightarrow \exists \{u_n\} \in D_A$$

$$\|u = u_n\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{и} \quad \|u_k - u_n\|_H \xrightarrow{n, k \rightarrow \infty} 0$$

### Пример 3

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left( x^3 \frac{du}{dx} \right), \quad u(1) = 0$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1], \quad u(1) = 0\}$$

$$H_L = \left\{ u \text{ абсолютно непрерывна на } [0, 1], \quad u(1) = 0, \quad \int_0^1 x^3 u'^2 dx = 0 \right\}$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{x} - 1$$

## 4.2 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f, \quad A : D(A) \subset H \rightarrow H \quad (4.1)$$

**Теор.**  $A$  положителен в  $H$ , тогда уравнение (4.1) имеет не более одного решения.

Док-во.

$$\text{Пусть } u_1, u_2 \text{ — решения (4.1), } \tilde{u} = u_1 - u_2, \quad Au_1 = f, \quad Au_2 = f$$

$$A\tilde{u} = 0$$

$$(A\tilde{u}, \tilde{u}) = [\tilde{u}, \tilde{u}]_A = \|\tilde{u}\|_A^2 = 0$$

□

**Теор. (о функционале энергии)** Если  $A$  — является положительным в  $H$ ;  $u$  — решение уравнения (4.1)  $\Leftrightarrow u$  доставляет минимум функционалу

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H \quad (4.2)$$

Док-во.

Заметим, что  $D_A = D_F$  (вытекает из выражения (4.2)). Также  $F(u) = (Au, u) - 2\operatorname{Re}(u, f)$ , и так как  $A$  положительный оператор, то  $F(u)$  принимает только вещественные значения.

⊕

$$u_0 : Au_0 - f = 0$$

$$\forall v \in D_A = D_F, \quad v = u_0 + \eta$$

$$\begin{aligned} F(v) &= (A(u_0 + \eta), u_0 + \eta) - (u_0 + \eta, f) - (f, u_0 + \eta) \stackrel{\text{симм. } A}{=} \\ &= F(u_0) + (Au_0 - f, \eta) + (\eta, Au_0 - f) + (A\eta, \eta) \stackrel{Au_0 - f = 0}{=} \\ &= F(u_0) + A(\eta, \eta) \geq F(u_0) \Rightarrow u_0 = \operatorname{argmin}_{D_F} F \end{aligned}$$

⊕

$$u_0 = \operatorname{argmin}_{D_F} F$$

$$\forall \eta \in D_A : v = u_0 + \lambda \eta \in D_A = D_F, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$F(v) \geq F(u_0)$$

Используя симметричность  $A$  приведем к виду

$$2\lambda \operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] + \lambda^2(A\eta, \eta) \geq 0$$

Это возможно только тогда, когда

$$\operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] = 0$$

Заменив  $\eta$  на  $i\eta$ , получим

$$\operatorname{Im}[(Au_0 - f, \eta)] = 0$$

Получаем

$$(Au_0 - f, \eta) = 0 \quad \forall u \in D_A \Rightarrow Au_0 - f = 0$$

□

**Замеч.** Если пространство вещественное, получим  $F(u) = A(u, u) - 2(u, f)$

#### Пример 4

$$A\omega = \Delta^2\omega = \frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial^2x\partial^2y} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}$$

$$D_A = \left\{ \omega \in C^4(\overline{\Omega}); \quad \omega|_S = 0; \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_S = 0 \right\}$$

$$A\omega = \frac{q(x, y)}{\mathcal{D}}$$

### 4.3 Обобщение решения задачи о min для функционала

$A$  — положительно определенный в  $H$ ,  $Au = f$  (4.1),  $f \in H$

фикс.  $f \in H \quad \forall u \in H_A \quad (u, f)_H : \text{ф-ла } H_A \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$$|(u, f)_H| \stackrel{\text{КБ}}{\leq} \|f\|_H \|u\|_H \leq \|f\|_H \frac{1}{\gamma} \|u\|_A; \quad \gamma, \quad \|f\|_H = \text{const} \quad \Rightarrow \text{ограничен}$$

огр.  $(f, u) \Rightarrow$  по теор. Рисса  $\exists u_0 \in H_A : (f, u)_H = [u, u_0]_A$

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0]_A - [u_0, u]_A$$

$\pm [u_0, u_0]_A$  в (4.\*)

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

$\operatorname{argmin}_{u \in H_A} F(u) = u_0$  — обобщенное решение  $Au = f$

(4.\*)

$H$  — сепарабельно  $\Rightarrow H_A \ni \{\omega_n\}$  ПОНС

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \omega_n$$

$$u = \omega_n, \quad [u_0, \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H \omega_n$$

## Лекция 5

**Пример** (задача о кручении стержня)

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 2G\Theta \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$G$  — модуль сдвига

$\Theta$  — угол закручивания

$$\Omega : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

$$Au = -\Delta u$$

$$D_A = \{u \in C^2(\Omega), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$[u, v]_A = \int_0^a \int_0^b -\Delta v(x, y) u(x, y) dx dy$$

$$\|u\|_A^2 = - \int_0^a \int_0^b \Delta u(x, y) u(x, y) dx dy$$

$$\psi_{m,n} = \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \in D_A$$

$$\Delta\psi_{m,n} = -\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \psi(x, y)$$

$$\|u\|_A^2 = \frac{\pi^2(b^2 m^2 + a^2 n^2)}{4ab}$$

$$w_{m,n} = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2 m^2 + a^2 n^2}} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$$

$$(2G\Theta, w_{m,n}) = \frac{16abG\Theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2 m^2 + a^2 n^2}}$$

$$\psi(x, y) = \frac{32G\Theta a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{mn(b^2 m^2 + a^2 n^2)}$$

### 5.1 Минимизация последовательностей

$\Phi(u)$  ограничен снизу на  $M$ ,  $\exists d = \inf_{u \in M} \Phi(u)$

$u_n$  — минимизирующая,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(u_n) = d$

Пусть  $u_0$  — обобщенное решение  $Au = f$

$$F(u) = \|u - u_0\|_A - \|u_0\|_A$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F(u_0) = -\|u_0\|_A$$

**Теор.** Если  $A$  положительно определенный оператор в  $H$ , то для  $\forall \dots u_n$  для  $F(u)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_A = 0 \quad \Rightarrow \quad \|u_n - u_0\|_A \rightarrow 0$$

$$F(u_n) = \|u_n - u_0\|_A - \|u_0\|_A \rightarrow -\|u_0\|_A$$

Если  $u_0 \in H_A$ , то теорема верна и для положительного  $A$

## 5.2 Расширение положительно определенного оператора

$$[u, f]_H = [u, u_0]_A \quad \forall f \in H \rightarrow \exists! u_0 \in H_A$$

$\Rightarrow$  определен линейный оператор  $G : D_G = H \rightarrow H_A \supset R_A \quad u_0 = Gf$

$\exists G^{-1}$  — расширение  $A$

### 1. Ограниченность

$$\forall u \in H_A : |[u, Gf]_A| \leq |(u, f)_H| \leq \|f\|_H \cdot \|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_H \cdot \|u\|_A$$

Пусть  $u = Gf$

$$\|Gf\|_A^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_H \cdot \|Gf\|_A$$

$$\|Gf\|_A \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_H$$

$$\|Gf\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|Gf\|_A$$

$$\|Gf\|_H \leq \frac{1}{\gamma^2} \|f\|_H$$

### 2. Положительность

$$(Gf, h)_H = [Gf, Gf]_A = \|Gf\|_A^2 \geq 0$$

$$G : H_A \rightarrow H_A \forall f \in H_A$$

$$[Gf, f]_A = [f, GF]_A = \overline{(f, f)_H} = \|f\|_H \geq 0$$

$$\text{Пусть } Gf = 0 \Rightarrow (u, f)_H = [u, Gf]_A = 0 \quad \forall u \in H_A$$

TODO

$\Rightarrow G^{-1}$  — расширение  $A$

$$\forall \tilde{u} \in D_A : G^{-1}\tilde{u} \quad A\tilde{u}$$

$$A\tilde{u} = f \Rightarrow \tilde{u} \text{ — доставляет } \min F(u)$$

$$\tilde{u} = Gf, \quad A\tilde{u} = f = G^{-1}\tilde{u} \Rightarrow G^{-1} \text{ — расширение } A$$

Если  $A$  положительно определенный, то и  $G^{-1}$  положительно определенный

## 5.3 Некоторые методы построения минимизирующей последовательности

### 1. Процесс Ритца

$H$  — вещественное гильбертово пространство,  $A$  — положительно определенный

$$Au = f$$

$$\min_{u \in H_A} F(u) = [u, u]_A - 2(u, f)_H$$

Введем координатные функции  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$

- $\varphi_i \in H_A$

- $\forall n \{ \varphi_i \}_{i=1}^n$  — линейно независимые
- $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  полно в  $H_A$

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$$F(u_n) = \left[ \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j, \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right] - 2 \left( \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, f \right) = \sum_{j,k=1}^n a_j a_k [\varphi_j, \varphi_k] - 2 \sum_{k=1}^n a_k (\varphi_k, f)$$

Необходимое условие:  $\min \frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}$ . Для положительного  $A$  является и достаточным условием

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j} = 2 \sum_{k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k]_A a_k - 2(f, \varphi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

Получим СЛАУ относительно  $a_1, \dots, a_n$

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k]_A a_k = (f, \varphi_j) \rightarrow a_1, \dots, a_n \text{ — решение}$$

$$([\varphi_k, \varphi_j]_A)_{k,j=\overline{1,n}} \text{ — определитель Грама}$$

$$\exists! \text{ решение } u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$$

$$\{\varphi_n\} \rightarrow \{w_n\} \quad \text{ПОНС в норме } \|\cdot\|_A$$

$$[w_k, w_j]_A = \delta_{kj} \quad \Rightarrow \quad a_k = (f, w_k)_H = c_k$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$$

$$\|u_n\|_A^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 (u_n, f) = \sum_{k=1}^n c_k^2$$

$$F(u_n) = \|u_n\|_A^2 - 2(u_n, f)_H = - \sum_{k=1}^n c_k^2 = -\|u_n\|_A^2$$

$$\|u_n\|_A^2 \leq \|u_0\|_A^2, \quad \|u_n\|_A^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|u_0\|_A^2$$

$$\text{Пусть } n > k : \|u_n - u_k\|_A^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^n c_i w_i \right\|_A^2 = \sum_{i=k+1}^n c_i^2 = \|u_0\|_A^2 - \|u_k\|_A^2$$

$$\forall u \in H_A$$

TODO

$$\|u_0\|_A^2 \geq \|u_1\|_A^2 = c_1^2 = ((f, w_1)_H)^2 = ((f, u_1)_H)^2 \cdot \frac{1}{\|u_1\|_A^2}$$

$$\|u_0\|_A^2 \geq \frac{((f, u)_H)^2}{\|u\|_A^2} \quad \forall u \in H_A$$

## 2. Метод Куранта

$$Au = f, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m + \text{ граничные условия } \partial\Omega$$

$$\Phi(u) = F(u) + \underbrace{\sum_{j=0}^k \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = j} \left\| \frac{\partial^j (Au - f)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_H^2}_{\geq 0}, \quad f \in C^k(\Omega)$$

$$\Phi(u) \geq F(u)$$

$$u_0 = \operatorname{argmin}_{H_A} F(u)$$

$$\{u_n\} - \text{минимизирует } \Phi(u)$$

TODO:Пример

## 3. Метод наискорейшего спуска

$$Au = f$$

$$m\|u\|_H^2 \leq (Au, u)_H \leq M\|u\|_H^2$$

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

$$\textcircled{1} \quad \forall u_1: \quad v_1 = Au_1 - f, \quad u_2 = u_1 - a_1 v_1$$

$$F(u_1 - a_1 v_1) = F(u_1) - 2a_1 \left[ (Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H \right] + a_1^2 (Av_1, v_1)_H$$

$$a_1 (Av_1, v_1)_H - \left[ (Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H \right] = 0$$

$$(Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H = (Au_1 - f, v_1)_H = (v_1, v_1)_H = \|v_1\|_H^2$$

$$a_1 = \frac{\|v_1\|_H^2}{(Av_1, v_1)_H}$$

$$\textcircled{2} \quad \forall u_2: \quad v_2 = Au_2 - f, \quad u_3 = u_2 - a_2 v_2$$

...

$$\textcircled{n} \quad \|u_{n+1} - u_0\|_A \leq \|u_1 - u_0\|_A \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^n$$

## 5.4 Краевые задачи для ОДУ

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left( \Phi(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u'(x)$$

$$Lu = f(x), \quad x_1 < x \leq x_2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(x_1) + \beta_1 u(x_1) = 0 \\ \alpha_2 u'(x_2) + \beta_2 u(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$D_L = \{C^2[x_1, x_2] + \text{граничные условия}\}$$

Пусть

- $p(x) \geq 0, \quad q(x) \geq 0, \quad x \in [x_1, x_2]$   
( $p$  может обращаться в 0 в некоторых точках)  $p(x) \geq p_0 > 0$

- $p \in C^1[x_1, x_2], q \in C[x_1, x_2]$
- $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p(x)}$  СХОДИТСЯ НА  $[x_1, x_2]$
- $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \quad i = 1, 2$

$$(Lu, v) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + q(x) u(x) v(x) \right] dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1} p(x_1) u(x_1) v(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} p(x_2) u(x_2) v(x_2)$$

$$(Lu, u) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ p(x) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + q(x) u^2(x) \right] dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1} p(x_1) u^2(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} p(x_2) u^2(x_2)$$

►  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$(Lu, u) \geq p_0 \int_{x_1}^{x_2} \left[ p(x) \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx = p_0 \|u'\|_H^2 \geq \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad \gamma = \frac{\sqrt{2p_0}}{x_2 - x_1}$$

$$u(x_1) = 0 \rightarrow u(x) = \int_{x_1}^x u'(t) dt$$

$$u^2(x) \leq (x_2 - x_1) \|u'\|_H^2$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (...) dx \Rightarrow \|u\|_H^2 \leq \frac{x_2 - x_1}{2} \|u'\|_H^2$$

►  $\beta_1 > 0$

$$(Lu, u) \geq \frac{B}{C} \|u\|_H^2$$

$$C = \max \{ 2A(x_2 - x_1), 2(x_2 - x_1) \}, \quad B = \min \left\{ \frac{\beta_1}{\alpha_1} p(x_1), 1 \right\}$$

$$F(u) = (Lu, u)_H - 2(u, f)_H = \frac{\beta_1}{\alpha_1} p(x_1) u^2(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2} p(x_2) u^2(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \left[ p(x) u'(x)^2 + q(x) u^2(x) - 2f(x) u(x) \right] dx$$

$$u_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_A} u_0(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_A = 0, \quad \|u_n - u_m\|_A^2 \rightarrow 0$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} [u_n(x) - u_m(x)] = 0$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} [u'_n(x) - u'_m(x)]^2 dx = 0$$

$$u_n(x) - u_m(x) = u_n(x_1) - u_m(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} [u'_n(t) - u'_m(t)]^2 dt$$



Используя неравенство Буняковского и  $a + b^2 \leq a^2 + b^2$

$$|u_n(x) - u_m(x)|^2 \leq 2(u_n(x_1) - u_m(x_1))^2 + 2(x_2 - x_1) \int_{x_1}^{x_2} [u'_n(t) - u'_m(t)]^2 dt$$

$$u_n(x) \rightrightarrows u(x)$$

$$u'_n \xrightarrow{\text{ср}} u'(x)$$

## Лекция 6

### 6.1 Применение энергетического метода для краевых задач

#### Пример 1

$$Lu = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[ p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right], \quad Lu = f$$

$$\begin{cases} u(x_1) = u'(x_1) = \dots = u^{(m-1)}(x_1) = 0 \\ u(x_2) = u'(x_2) = \dots = u^{(m-1)}(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$p_k(x) \geq 0, \quad x \in [x_1, x_2], \quad f \in L_2(x_1, x_2)$$

$$D_L = \{u \in C^{2m}[x_1, x_2] + \text{граничные условия}\}$$

$$(Lu, u)_H = \sum_{k=0}^m \int_{x_1}^{x_2} p_k(x) \left( \frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \geq \int_{x_1}^{x_2} p_m(x) \left( \frac{d^m u}{dx^m} \right)^2 dx \geq p_0 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d^m u}{dx^m} \right)^2 dx = p_0 \|u^{(m)}\|_H^2$$

Так как выполняется  $u(x_1) = u'(x_1) = \dots = u^{(m-1)}(x_1) = 0$ , то

$$\|u\|_H^2 \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} \|u'\|_H^2$$

$$\|u\|_H \leq \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \|u'\|_H, \quad \dots, \quad \|u^{(l-1)}\|_H \leq \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \|u^{(l)}\|_H, \quad l = \overline{1, m}$$

$$\|u^{(m)}\|_H^2 \geq \left( \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \right)^m \|u'\|_H^2$$

FIXME

$$(Lu_m) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad \gamma = \sqrt{p_0} \left( \frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \right)^m \Rightarrow L - \text{положительно определенный}$$

$$\|u\|_A \leq \sqrt{p_0} \|u^{(m)}\|_H, \quad \exists \{u_n(x)\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\| = 0, \quad u_0 - \text{точное решение}$$

$$\|u_n - u_k\|_A \leq \|u_n - u_0\|_A + \|u_k - u_0\|_A \rightarrow 0$$

$$u_n^{(l)}(x_1) = u_k^{(l)}(x_1) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}$$

$$u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) = \int_{x_1}^x \left( u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t) \right) dt$$

$$\begin{aligned} \left| u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) \right| &\stackrel{\text{КБ}}{\leq} (x - x_1) \int_{x_1}^x \left( u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t) \right)^2 dt \leq \\ &\leq (x_2 - x_1) \int_{x_1}^{x_2} \left( u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t) \right)^2 dt \leq (x_2 - x_1) \left\| u_n^{(m)} - u_k^{(m)} \right\|_H^2 \end{aligned}$$

**Пример 2** (задача об изгибе балки)

$$L\omega = \frac{d^2}{dx^2} \left[ EI(x) \frac{d^2\omega}{dx^2} \right] + K\omega = q(x)$$

$\omega$  — прогиб балки

$E$  — модуль Юнга

$I(x)$  — момент инерции сечения

$q(x)$  — интенсивность нагрузки на балку

$K$  — коэффициент податливости основания

$$\omega(0) = \omega(l) = 0$$

$$\omega'(0) = \omega'(l) = 0$$

Из предыдущей задачи известно, что  $L$  положительно определен

$$F(\omega) = \int_0^l \left( EI(x) \omega''^2 + K\omega^2 - 2q(x)\omega \right) dx = (L\omega, \omega) - 2(\omega, q)$$

Воспользуемся методом Ритца

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty, \quad \varphi_n(x) = (x-l)^2 x^{n+1}, \quad \text{полная система в } H_A$$

$$\omega_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = (x-l)^2 \sum_{k=1}^n a_k x^{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k A_{ik} = b_{ij}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$b_j = (q, \varphi_j)_H = \int_0^l q(x) (x-l)^2 x^{j+1} dx$$

$$A_{ik} = (L\varphi_i, \varphi_k)_H = \int_0^l \left( EI(x) \frac{d^2\varphi_i}{dx^2} \frac{d^2\varphi_k}{dx^2} + k\varphi_i\varphi_k \right) dx$$

$$\omega_n(x) \xrightarrow{[0;l]} w_0(x), \quad \omega'_n(x) \xrightarrow{[0;l]} w'_0(x), \quad \omega''_n(x) \xrightarrow{\text{ср}} w''_0(x),$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega''(l) = 0, \quad \omega'(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( EI(x) \frac{d^2\omega}{dx^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=l} = 0$$

**Пример 3** (краевая задача для систем ОДУ)

$$-\sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dx} \left( p_{jk}(x) \frac{du_k(x)}{dx} \right) - q_{jk}(x) u_k(x) \right] = f_j(x)$$

$$u_j(x_1) = u_j(x_2) = 0$$

$$u(x) = (u_1(x), \dots, u_j(x))^T, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_j(x))^T$$

$$(p_{jk}(x))_{j,k=1} \subset P(x), \quad (q_{jk}(x))_{j,k=1} \subset Q(x)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[ P(x) \frac{du}{dx} \right] + Q(x)u(x) = f(x)$$

$$u(x_1) = u(x_2) = 0$$

$$p_{jk}(x), q_{jk}(x), p'_{jk}(x) \in C[x_1, x_2]$$

$$(u, v)_{H=L_2(x_1, x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} u(x)v(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^s u_k(x)v_k(x)dx$$

$$D_A = \left\{ u = (u_1, \dots, u_j)^T, u_i(x) \in C[x_1, x_2], u_i(x_1) = u_i(x_2) = 0 \right\}$$

**Теор.**  $P(x), Q(x)$  симметричны на  $x \in [x_1, x_2] \Rightarrow A$  симметричный  
Док-во.

$$\begin{aligned} (Au, v)_H &= - \int_{x_1}^{x_2} v(x) \frac{d}{dx} \left[ P(x) \frac{du}{dx} \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} v(x) Q(x) u(x) dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ P \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + v(x) Q(x) u(x) \right] dx = (u, Av)_H \Rightarrow \text{симметр.} \end{aligned}$$

$$Quv = \sum_{j,k=1}^s q_{jk} u_k v_j = \sum_{i,j=1}^s q_{kj} v_j u_k$$

□

**Теор.**  $P(x), Q(x)$  симметричны на  $[x_1, x_2]$ ,  $P(x)$  — полож. опр.,  $Q(x)$  неотр. на  $[x_1, x_2] \Rightarrow A$  положительно определен

Док-во.

$$P(x) \text{ пол. опр } \forall x \Rightarrow \text{ пусть } \lambda_1(x) > 0$$

$$\exists \tilde{\lambda} > 0 = \text{const}, \quad \lambda_1(x) > \tilde{\lambda} > 0, \quad x \in [x_1, x_2]$$

$$\forall t = (t_1, \dots, t_s)^T$$

$$P(x)t \cdot t = \sum_{j,k=1}^s P_{jk}(x) t_j t_k \geq \lambda_1(x) \sum_{k=1}^s t_k^2 \geq \tilde{\lambda} \sum_{k=1}^s t_k^2$$

$$Q(x)t \cdot t = \sum_{j,k=1}^s q_{jk} t_j t_k \geq 0$$

$$(Au, u)_H = \int_{x_1}^{x_2} \left( P \frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx} + Qu \cdot u \right) dx \geq \tilde{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^s \left( \frac{du_k}{dx} \right)^2 dx$$

$$(Au, u)_H \geq \frac{2\tilde{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \sum_{k=1}^s u_k^2 \right) dx = \frac{2\tilde{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} \|u\|_H^2$$

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

□

$$\begin{aligned} u'(x_1) - M_1 u(x_1) &= 0 \\ u'(x_2) - M_2 u(x_2) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A - \text{полож. опр., } M_1, M_2 - ?? \text{ неотриц.}$$

## 6.2 Основные краевые задачи для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(p) \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad (6.1)$$

► задача Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (6.2)$$

$$Au = -\Delta u = -\sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega \geq 0 \quad (6.3)$$

$$(Au, u)_H = 0 \Leftrightarrow u = \text{const} = 0 \quad \Rightarrow \quad A - \text{положительный}$$

$$\Leftrightarrow \min F(u)$$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H \quad (6.4)$$

$$F(u) = \int_{\Omega} ((\text{grad } u)^2 - 2uf) d\Omega \quad (6.5)$$

► задача Робена

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P)u \right] \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (6.6)$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \geq 0, \quad \sigma(P) \neq 0, \quad \sigma(P) \geq 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Leftrightarrow u = \text{const} = c, \quad \int_{\partial\Omega} \sigma c^2 dS = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$F(u) = \int_{\Omega} ((\text{grad } u)^2 - 2uf) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \quad (6.7)$$

► задача Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (6.8)$$

Аналогично (6.3)

$$(-\Delta u, u)_H = - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega \geq 0$$

Но, этого недостаточно, например:

$$u \equiv 1, \quad (-\Delta u, u)_H = 0$$

Интегрируем  $\int_{\Omega} (...) d\Omega$  уравнение (6.1):

$$-\int_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega$$

(3.6) при  $v = 1$

$$\int_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int_{\partial\bar{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$$

$$\int_{\Omega} f d\Omega = 0 \quad \text{— условие разрешимости}$$

$$\int_{\Omega} u(P) d\Omega = 0 \tag{6.9}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\bar{\Omega}), \quad u : (6.8), (6.9)\}$$

С учетом условия (6.9)

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Leftrightarrow \text{grad } u = 0 \Rightarrow u = c \stackrel{(6.9)}{\Rightarrow} u = 0 \quad \Rightarrow \quad A \text{ — положительный}$$

$$\Leftrightarrow \min F(u)$$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H$$

$$F(u) = \int_{\Omega} ((\text{grad } u)^2 - 2uf) d\Omega$$

## Лекция 7

### ① задача Дирихле

$$(-\Delta u, u)_H = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$$

При  $n = 2$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega$$

TODO: картинка + текст

$\forall A(x_1, y_1) \in \Pi :$

$$\int_{x_{min}}^{x_1} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} dx = u(x_1, y_1) - u(x_{min}, y_1)$$

$$u^2(x_1, y_1) \stackrel{\text{КБ}}{\leq} (x_1 - x_{min}) \int_{x_{min}}^{x_1} \left[ \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} \right]^2 dx \leq a \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[ \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} \right]^2 dx$$

$$\int_{\Pi} u^2(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \leq a^2 \int_{\Pi} \left[ \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} \right]^2 dx dy_1 \leq \int_{\Pi} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega$$

$$\int_{\Pi} u^2(x, y) d\Omega \leq \int_{\Pi} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega$$

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

Получаем, что  $A$  положительно определен на  $D_A$

Неравенство Фридрикса в общем виде:

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \geq \gamma^2 \int_{\Omega} u^2 dx, \quad u|_S = 0$$

### ② задача Робена

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \quad \text{в } \Omega \\ \left[ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P)u(P) \right] \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right.$$

$$\sigma(P) \geq \sigma_0 = \text{const} > 0$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq C \left\{ \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS \right\}$$

$$u = f \cdot v$$

$$\left(\frac{\partial(fv)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(fv)}{\partial y}\right)^2 = f^2 \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] - v^2 f \Delta f + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( v^2 f \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 f \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{(*)}$$

Преобразуем правую и левую части:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} f\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} f\right)^2 &= v^2 \left( \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right) + f^2 \left( \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right) + \\ &\quad + 2v \frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

$$(*) = 2v \frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( f \frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2v \frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( f \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Получим TODO

$$v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 2v \frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 f \frac{\partial^2 f^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} - v^2 f \Delta f + f \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right]$$

Проинтегрируем получившееся  $\int_{\Omega} (...) d\Omega$

$$\int_{\Omega} \left( \left(\frac{\partial(fv)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(fv)}{\partial y}\right)^2 \right) d\Omega \geq - \int_{\Omega} v f \Delta f d\Omega + \int_{\partial\Omega} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

$$- \int_{\Omega} v f \Delta f d\Omega \leq \int_{\Omega} \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) d\Omega + \left| \int_{\partial\Omega} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS \right|$$

$$f = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\Delta f = -\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) f$$

$$- \int_{\Omega} v^2 f \Delta f d\Omega = - \int_{\Omega} -v^2 f \Delta u^2(\cdot) d\Omega = \int_{\Omega} u^2 \pi^2(\cdot) d\Omega$$

$$\left| \int_{\partial\Omega} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS \right| \leq \int_{\partial\Omega} v^2 f \left| \frac{\partial f}{\partial n} \right| dS \leq c_1 \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} \left( \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) d\Omega + c_1 \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$c = \min \left\{ \frac{c_1}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}, \frac{1}{\pi^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \right\}$$



$$\begin{aligned}
(-\Delta u, u)_H &= \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS \stackrel{(6.6)}{\geq} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \sigma_0 \int_{\partial\Omega} u^2 dS \geq \\
&\geq \sigma_1 \left\{ \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS \right\}
\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \min\{\sigma_0, 1\}$$

$$\frac{\sigma_1}{c} \|u\|_H^2 \leq \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_1}{c}}$$

## Лекция 8

$$-(\Delta u, u)_H \geq \frac{\sigma_1}{c} \|u\|_H$$

$$\Delta u = f \text{ в } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Omega} = 0$$

### 8.1 Неравенство Пуанкаре

TODO

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Omega$$

$$\Omega u^2 d\Omega \in A \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega + B \left( \int_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + B \left( \int_{\Omega} d\Omega \right)^2$$

$$\begin{aligned} u^2(x_2, y_2) + u^2(x_1, y_1) - 2u(x_2, y_2)u(x_1, y_1) &= \\ &= \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \right)^2 + \left( \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy \right)^2 + 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy \leq \\ &\leq 2 \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \right)^2 + 2 \left( \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy \right)^2 \leq \\ &\leq 2 \left\{ |x_2 - x_1| \int_0^a \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) \right)^2 dx + |y_2 - y_1| \int_0^b \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) \right)^2 dy \right\} \end{aligned}$$

Проинтегрируем  $\iiint \dots dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$

$$\iiint \int u^2(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = ab \int_{\Omega} u^2 d\Omega$$

$$\iiint \int u(x_2, y_2) u(x_1, y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \left( \int_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

$$2ab \int_{\Omega} u^2 d\Omega - 2 \left( \int_{\Omega} u d\Omega \right)^2 \leq ab \left\{ a^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 d\Omega + b^2 \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 d\Omega \right\}$$

$$A = \max\{a^2, b^2\}, \quad B = \frac{1}{ab}$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq A \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega + B \left( \int_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

$$D_N = D(A_N) = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} u d\Omega = 0 \right\}$$

$$\|u\|_H^2 \leq A \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega = \tilde{A} (Au, u)_H, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}}} (A_N u, u) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

$$\text{Далее } A: \quad A_N \text{ или } A_D \quad [u, v]_A = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega$$

$$\|u\|_A = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega$$

$$u, v \in L_2(\Omega), \quad \psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$$

Если  $\forall \psi \in C_0^\infty$  справедливо тождество

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} d\Omega = - \int_{\Omega} v_j \psi d\Omega$$

то функция  $v_j$  называется TODO

Пусть  $u \in H_{A_D}$ ,  $\exists \{u_n\} \in D_{A_D}$  такая, что

$$\|u_n - u\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|u_n - u\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\Omega} (\text{grad } u_n - \text{grad } u_l)^2 d\Omega = \sum_{k=1}^m \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \rightarrow 0$$

$$\exists v_j \in L_2(\Omega): \quad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - v_j \right\|_H \rightarrow 0$$

Покажем, что  $v_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ ,  $k = \overline{1, m}$

Пусть  $\psi(P) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $\{u_n\} \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} u_n \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi \frac{\partial u_n}{\partial x_k} d\Omega$$

$$\left( u_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)_H = - \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_k}, \psi \right)_H \rightarrow \left( u, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)_H = - (\psi, v_k)_H$$

## 8.2 Неоднородные краевые условия

$$\Delta u = 0 \quad (7.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi \quad (7.2)$$

Пусть  $\exists \psi(P)$ , удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} & \bullet \psi \in C(\overline{\Omega}) \\ & \bullet \psi(P)|_{\partial\Omega} = \varphi(P) \\ & \bullet \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \in C(\Omega), \quad k = \overline{1, m} \\ & \bullet \Phi(u) = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$D_{\Phi} = \{u : ref7_*\} \Phi(P) + \eta(P),$$

$$\eta : ?? + \eta|_{\partial\Omega} = 0$$

Пусть функция  $u_0(P)$  достигает  $\min \Phi(u) : u_0(P)$  реш. (7.1), (7.2)

\*\* 1-3 и еще на границе ноль

$$u_0 + t\eta \in D_{\Phi}, \forall t \in \mathcal{R}, \eta : 8.2$$

$\Phi(u_0 + t\eta)$  достигает  $\min$  при  $t = 0$  как скал функция от  $t$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \Phi(u_0 + t\eta) \right] \Big|_{t=0} &= \left[ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial(u_0 + t\eta)}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \right] \Big|_{t=0} = \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left( \left( \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x_k} \cdot t \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + t^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)^2 \right) d\Omega \right] \Big|_{t=0} = \dots = \\ &= \int_{\Omega} \text{grad } u_0 \text{ grad } \eta d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина (??) и используя краевое условие (??), получим

$$\int_{\Omega} \eta \Delta u_0 d\Omega = 0$$

Множество функций  $\eta$  плотно в  $L_2(\Omega)$ . Тогда из последнего следует:

$$\Delta u_0 = 0$$

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} (\text{grad } u)^2 d\Omega$$

$$u = \psi - v, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \Phi(\psi - v) = \int_{\Omega} (\text{grad}(\psi - v))^2 d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (\text{grad} \psi)^2 d\Omega - 2 \int_{\Omega} \text{grad} \psi \cdot \text{grad} v d\Omega + \int_{\Omega} (\text{grad} v)^2 d\Omega \end{aligned}$$

$$F(v) = \|v\|_{A_D}^2 - 2 \int_{\Omega} \text{grad} v \cdot \text{grad} \psi d\Omega, \quad v \in H_D = H_{A_D}$$

Линейный функционал

$$lv = \int_{\Omega} \text{grad} v \cdot \text{grad} \psi d\Omega$$

$$|lv|^2 \leq \int_{\Omega} (\text{grad} \psi)^2 d\Omega \int_{\Omega} (\text{grad} v)^2 d\Omega = c \|v\|_{H_{A_D}}^2 \Rightarrow l — ограничен$$

Из этого следует, что существует решение задачи о минимуме функционала. **FIX**

$$\psi \in H(\Omega) : \quad \exists! \text{ Обобщен. реш Дирихле}$$

$$u \in H(\Omega)$$

### 8.3 Уравнения с переменными коэффициентами

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{jk}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + C(P)u, \quad Lu = f, \quad \Omega \in \mathbb{R}^m \quad (7.5)$$

Краевые условия одного из трех типов

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7.6)$$

$$[N[u] + \sigma(P)u]|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7.7)$$

$$N(u)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7.8)$$

Формула Грина

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} (vN(u) - uN(v)) dS \quad (7.9)$$

При условиях (7.6) и (7.8) интеграл очевидным образом обращается в 0, поэтому остается рассмотреть случай (7.7).

$$N(u) + \sigma u = 0, \quad N(v) + \sigma v = 0$$

$$vN(u) + v\sigma u - uN(v) - u\sigma v = 0$$

$$[vN(u) - uN(v)]|_{\partial\Omega} = 0$$

Получаем, что при любых граничных условиях (7.6)-(7.8) правая часть (7.9) обращается в ноль, а следовательно  $(Lu, v) = (u, Lv)$  и оператор симметричен.

Оператор  $L$  называется эллиптическим в  $\bar{\Omega}$ , если

$$\exists \mu_0 = \text{const} > 0 \quad \forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}, \quad \forall P \in \bar{\Omega} : \quad \sum_{j,k=0}^m A_{jk}(P) t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{j,k=1}^m t_k^2$$

**Пример** (оператор Триколи)

$$Ly = y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$A_{11} = y, \quad A_{21} = A_{12} = 0, \quad A_{22} = 1$$

$$y t_1^2 + 1 \cdot t_2^2 \geq B t_1^2 + t_2^2 \geq \tilde{B}(t_1^2 + t_2^2), \quad \tilde{B} = \min\{B, 1\}$$

$$\forall \Omega : \quad \bar{\Omega} \subset \mathbb{R} \times (0, +\infty) \quad L \text{ эллиптический в } \bar{\Omega}$$

Если коэффициент  $C(P)$  ограничен снизу некоторым положительным числом, то оператор  $L$  положительно определенный. Действительно, по формуле Грина (??):

$$(Lu, u)_H = \int_{\Omega} u Lu \, d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + C u^2 \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega} u N(u) dS$$

При краевых условиях (7.6), (7.8):

$$\int_{\partial\Omega} (...) dS = 0, \quad \Rightarrow \gamma = \sqrt{c_0}$$

$$(Lu, u)_H \geq c_0 \int_{\Omega} u^2 d\Omega = \gamma^2 \|u\|_H^2$$

При условии (7.7):

$$N(u) = -\sigma u \text{ на } \partial\Omega, \quad \sigma(P) \geq \sigma_0 > 0$$

$$(Lu, u)_H \geq \sigma_0 \int_{\partial\Omega} u^2 dS \geq \sigma_0 \|u\|_H^2$$

FIX

## Лекция 9

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk}(P) \frac{\partial n}{\partial x_k} + c(P)u = f(P))$$

1. з Дирихле

$$(Lu, u) = \mu \sum_{j=1}^m \int_{\Sigma} \left( \frac{\partial n}{\partial x_j} \right)^2 d\Omega \geq \Sigma^2 \|u\|_H^2; \sigma = \sqrt{ae\mu_0}$$

2. з Робэна

$$(Lu, u) \geq (\alpha \left( \int_{\Sigma} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} n^2 dS); \Rightarrow (Lu, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

3. з Неймана

$$C(P) = 0$$

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_k} l) = f(P)$$

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega + \text{ф-ла Остроградского}$$

$$- \int_S \sum_{j,k=1}^m A_j \frac{\partial n}{\partial x_k} \cos(\bar{n}, x) dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(P) d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} u d\Omega = 0$$

$$D_{L_N} = \{u \in C^2(\bar{\Omega}), N(u)|_{\partial\Omega} = 0, \int_{\Omega} u d\Omega = 0\}$$

$$(L_N u, n) = - \int_{\Omega} u \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_k}) d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^m A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_j} \frac{\partial n}{\partial x_k} d\Omega \geq \mu_0 \int_{k=1}^m \left( \frac{\partial n}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq A \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial n}{\partial x_0} \right)^2 dS + B \left( \int_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

## 9.1 Энергетический метод для положительных операторов

$Au = f, u, f \in H, A$  положительный

Все еще работает теорема о функциональной энергии

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

Энергетическое пространство порожденное оператором  $H_A$ , вообще говоря его элементам нельзя сопоставить элементы из Гильбертова.

$H_A$  — Энергетическое пр-во

$(u, f)$  на  $D_A$  — плотно в  $H$  и в  $H_A$

$(u, f) = lu$  Функционал  $\rightarrow$  может быть ограничен или не ограничен

Если ограничен в  $H_A$  продолжим на  $H_A$

в  $H_A$  по теореме Рисса  $\exists u_0 \in H_A (u, f) = [u, u_0]_A$

$$[u - u_0, u - u_0] = \|u\|_A^2 + \|u_0\|_A^2 - 2[u, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u\|_A^2 - 2[u, u_0]_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

Минимум достигается на элементе  $F(u) = u_0$ . Но  $u_0$  может не лежать в энергетическом пр-ве. Обобщенное решение с конечной энергией.

Если  $H$  сепарабельно  $\Rightarrow H_A$  сепарабельно  $\Rightarrow \{\phi_n\}$  в  $H_A$

$$u_o = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \phi]_A \phi$$

$$[\phi_n, u_0] = l\phi_n$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$$

$$u_k \sum_{n=1}^k (f, \phi_n) \|u_k - u_0\|_A \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n) \phi_n$$



## 9.2 Эллиптические уравнения в бесконечной области

Пусть  $\Omega$  — бесконечная область

$$-\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left( A_{jk}(P) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = f(P)$$

при краевом условии задачи Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Допустим, что коэффициенты  $A_{jk}$  ограничены

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0, b(P=0), |P| \gg 1\}$$

Оператор  $A$  является лишь положительным

Задача (??), (??) имеет решение с конечной энергией тогда, когда

$$\exists g(P) : \quad f(P) = \operatorname{div} g(P), \quad \int_{\Omega} |g(P)|^2 d\Omega < \infty$$

$\operatorname{div} g$  понимается в смысле "обобщенной дивергенции"

$$\|u_0\|_A^2 \leq C \int_{\Omega} |g(P)|^2 d\Omega$$

Можно указать более простое достаточное условие:

$$m \geq 3 : \quad \int_{\Omega} |P|^2 f^2(P) d\Omega < \infty \quad \Rightarrow \quad \|u_0\|_A^2 \leq C^2 \int_{\Omega} |P|^2 f(P) d\Omega$$

$$m \geq 2 : \quad \int_{\Omega} f^2(P) d\Omega < \infty$$

Перейдем к задаче Неймана:

$$H_{AD} = \{u \in H'(\Omega) \text{ и } u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_{AH} = \{\exists 0\delta \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)\}$$

$$F(u) = \int_{k,j=1}^m A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_j} \frac{\partial n}{\partial x_k} d\Omega - 2lu$$

В случае задачи Неймана  $lu$  определяется формулой:

$$l_N u = - \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot g \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} u g_n dS$$

В случае задачи Дирихле:

$$l_D u = - \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot g \, d\Omega$$

Если сходится интеграл (??), то:

$$l u = \int_{\Omega} u(P) f(P) d\Omega$$

TODO

$$A u = f$$

$$B_j u = 0; j = 1, q$$

$$H > D_A$$

знак принадлежит в обратную сторону

$$H_A$$

При условии  $u \in D_A$ , но не обязательно  $u \in H_A$  естественные  $B_j : u \in H_A$  главные гр условия для  $A$ .

$$-\Delta u = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \partial u = 0, \sigma > 0$$

$$(-\Delta u, v)_H = - \int v \Delta u d\Omega$$

$$\int \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$F(u, u) = \|u\|_A^2 - 2(f, u) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad}^2 u - 2u) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \partial u^2 dS$$

$$u_0 = \operatorname{argmin} F;$$

$$\frac{d}{dt}(F(u_0 + t\eta))'|_{t=0} = 0$$

$$- \int_{\Omega} \eta (\Delta u_0 + f) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \eta \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \partial u_0 \right) dS = 0$$

# Лекция 10

## 10.1 Метод Бубнова-Галеркина

Пусть линейный оператор  $L$  (не обязательно положительный) определен на множестве, плотном в  $H$  (гильбертовом)

$$Lu = f \quad (10.1)$$

Выбираем последовательность элементов  $\{\varphi_n\}$ ,  $\varphi_n \in D_A$ , которые назовем координатными функциями. Все они удовлетворяют некоторым однородным краевым условиям задачи (10.1)

Будем считать, что как и (10.1), так и все краевые условия линейные. Тогда и функция

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_n \varphi_k(P) \quad (10.2)$$

будет удовлетворять всем краевым условиям задачи (10.1)

$a_k$  выбирается таким образом, чтобы после подстановки  $(Au_n - f) \perp \varphi_1, \dots, \varphi_n$

$$\sum_{k=1}^n a_j (L\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n} \quad (10.3)$$

## 10.2 Применение метода Б-Г к интегральному уравнению Фредгольма

$$u(P) - \int_{\Omega} K(P, Q) u(Q) d\Omega = f(P) \quad (10.4)$$

Предполагаем следующее

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(P, Q) d\Omega_P d\Omega_Q < \infty, \quad \int f^2(P) d\Omega < \infty \quad (10.5)$$

а также единственность решения (10.4) в  $H = L_2(\Omega)$

Возьмем систему  $\{\varphi_n\}$  полную и ортонормированную (ПОНС)

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} \quad (10.6)$$

Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(P)$$

Подставляя в (10.4) и требуя ортогональности, а также учитывая (10.6) получим СЛАУ

$$a_m - \sum_{k=1}^n \gamma_{mk} a_k = (f, \varphi_m) \quad (10.7)$$

$$\gamma_{mk} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} K(P, Q) \varphi_m(P) \varphi_k(Q) d\Omega_P d\Omega_Q$$

Введем обозначения:

$$K_n(P, Q) = \sum_{k,m=1}^n \gamma_{mk} \varphi_m(P) \varphi_k(Q)$$

$$f_n(P) = \sum_{k=1}^n (f, \varphi_k) \varphi_k(P)$$

Система  $\{\varphi_n\}$  — ПОНС, поэтому

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} [K_n(P, Q) - K(P, Q)]^2 d\Omega_P d\Omega_Q &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [f_n(P) - f(P)]^2 d\Omega &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$v_n(P) - \int_{\Omega} K_n(P, Q) v_n(Q) d\Omega = f_n(P) \quad (10.9)$$

Из теории интегральных уравнений из (10.8) следует, что при достаточно большом  $n$  уравнение (10.9) разрешимо и имеет единственное решение

$$\|v_n - v\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Интегральное уравнение (10.9) можно решить. Заменяя  $K_n(P, Q)$  и  $f_n(P)$  их значениями, получим

$$v_n(P) = \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(P)$$

$$A_m = \sum_{k=1}^n \gamma_{mk} \int_{\Omega} v_n(Q) \varphi_k(Q) d\Omega + (f, \varphi_m)$$

$$A_m - \sum_{l=1}^n \gamma_{ml} A_l = (f, \varphi_m), \quad m = \overline{1, n}$$

### 10.3 Элементы теории приближения

TODO

$H_A \supset H_N$  - конечномерное

$\exists$  норм про-во  $X$ :  $\exists$  элемент наилучшего приближения

$$\forall u \in X : \rho(u, H_N) = \inf_{v \in H_N} \rho(u, v) X = C[a, b]$$

$$1, x, x^2, \dots, x^N, \dots$$

$$|C[a, b] \rightarrow P_{N-1}(x)$$

$$L_N(x) = \sum_{n=1}^n f(x_k) l_k(x)$$

$\{l_k(x)\}$  – система фундаментальных многочленов

$$l_k(x) = \frac{(x-x^1)\dots(x-x_N)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_N)} = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_K)}$$

$$l_k(x_m) = \delta_{km}; \omega(x) = \prod_{k=1}^m (x-x_k)$$

$$\|f - L_N(x)\|_C \leq (1 + \|P\|)\rho_N(f, H_N)$$

$$\|P\| = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=1}^n |l_k(x)| = \Lambda_N - \text{построение Лебега}$$

$\Lambda_N$  – неогр возрастает при  $n \rightarrow \infty$  для всего  $C[a, b]$  и сущ зависит от выбора сетки  $x_1, \dots, x_N$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{2}{b-a}t_k; t_K = -\cos\{\frac{\pi}{2N}(2k-1)\}$$

$$\Lambda_N \approx \frac{2}{\pi} \ln N + 1 - q_N, 0 << q_N < \frac{1}{4}$$

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u$$

$$Lu = f + \text{гр у } u(a) = u(b) + 0$$

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k l_k(x); a_k = u_N(x_k)$$

$$\sum_{p=1}^n a_p (Ll_p, l_K) = (f, l_K) = \int_a^b f(x) \ln(x) dx = f_K$$

$$l_k(x_m) = \delta_{km}, \omega(x) = \prod_{k=1}^m (x-x_k) \text{ СЛАУ с туравнений}$$

$$a_{kl} = (Ll_k, l_p) = \int_a^b p(x) \frac{dl_n(x)}{dx} \frac{dlp(x)}{dx} + \int_a^b a(x) q(x) l_k(x) f(x) dx$$

$$x_1 = a; x_N = b \Rightarrow$$

$$l_1(x_1) = 0; l_N(X_N) = 0$$

$$u_n(x) = \sum_{k=2}^{N-1} u(x_K) l_N(x)$$

$$\sum_{p=1}^{N-1} u_k a_{Kp} = f_k$$

$$p = w$$

Пример

$$p \equiv 1, a \equiv 0$$

$$f(x) = \{1, x \geq 0; -1, x < 0\}$$

$$N = 5; x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = 1$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 - \frac{3}{2}}$$

$$l_3(x) = (x+1(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}))$$

$$l_4(x) = \frac{(x+1(x+\frac{1}{2})x(x-1))}{\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}$$

$$u_N - u_2 l_2(x) + u_3 l_3(x) + u_4 l_4(x)$$

$$a_{kp} = \int\limits_{-1}^1 \frac{dl_k}{dx} \frac{dl_P}{dx} dx$$

период гр у

$$[a,b]=[0,2\pi]$$

$$u_N=\frac{a}{2}+\sum_{k=1}a_kcos(kx)+b_ksin(kx)$$

$$x_k=\frac{2\pi}{x}(k-1)a_0,a_k,b_k\text{ Упр.}$$

$$\dim H_N-2N-1$$

$$a_kcos(kx)+b_ksin(kx)$$

$$\Lambda_N\frac{1}{\pi}lnN+\delta(2-\frac{2}{\pi}),0<\delta<1$$

## 10.4 Введение в теорию степенных сплайнов

$$[a,b]a=x_0< x_1<...<x_{N-1}<x_N=b, h_K=s_k-x_{k-1}k=\overline{0,N-1}h_k=x+1-x_k$$

Определение

Сплайн степени n, дефекта  $\nu$ :

$$S_{n\nu}=P_n(x)=\sum_{k=0}^na_p^{(k)}(x-x_k)^P=\sum_{p=0}^nb'_P(x_{k+1}-x)^P$$

$$(x-x_K)_t^P=\{(x-x_k)^P,x\geq x_k;0,x\leq x_k\}$$

# Лекция 11

## 11.1 Кусочно постоянные сплайны

Рассмотрим случай одной переменной

$$\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Введем на  $[a, b]$  сетку

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b, \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \max_{i=1, N} h_i$$

Зададим на каждом отрезке  $(x_{i-1}, x_i)$  функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

Линейную оболочку таких функций обозначим  $H_N$

1. Система линейно независима
2.  $(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad (\varphi_i, \varphi_i) = h_i$

**Теор.** Для любой функции  $u(x) \in W_p^1(\Omega) \quad \exists v(x) \in H_N$ :

$$\|u - v\|_{L_2(a,b)} \leq ch \|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

где  $c = const$  не зависит от  $h, u$ , а норма в  $W_p^1$  задается выражением

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \left\| \frac{du}{dx} \right\|_{L_p(\Omega)}$$

Док-во

$$v = \int_{i=1}^N u_i \varphi_i(x), \quad u_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi) d\xi$$

Тогда при  $p < \infty$

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{L_p(a,b)}^p &= \int_a^b |u - v|^p dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| u(x) - \frac{1}{h_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi) d\xi \right|^p dx = \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u(x) - u(\xi)) d\xi \right|^p dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{\xi}^x \frac{du}{d\eta} d\eta \right|^p dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right| d\eta \right|^p dx = \sum_{i=1}^N h_i \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right| d\eta \right)^p \end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера:

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

получим

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \cdot \left| \frac{du}{d\eta} \right| d\eta &\leq \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^q d\eta \right)^{1/q} \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right|^p d\eta \right)^{1/p} \\
\left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right| d\eta \right)^p &\leq h_i^{p/q} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right|^p d\eta \\
\|u - v\|_{L_p}^p &\leq \sum_{i=1}^N h_i^{1+p/q} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{du}{d\eta} \right|^p d\eta \leq h^{1+p/q} \int_a^b \left| \frac{du}{d\eta} \right|^p d\eta = h^p \int_a^b \left| \frac{du}{d\eta} \right|^p d\eta \leq h^p \|u\|_{W_p^1}^p
\end{aligned}$$

Для  $L_\infty$  рассмотрим

$$\begin{aligned}
|u - v| &= \left| u(x) - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi) d\xi \right| = \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (u(x) - u(\xi)) d\xi \right| = \left| \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{\xi}^x \frac{du}{d\eta} d\eta \right| \leq \\
&\leq h_i \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} \left| \frac{du}{d\eta} \right| \leq h \|u\|_{W_\infty^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u - v\|_{L_\infty(\Omega)} \leq h \|u\|_{W_\infty^1(\Omega)}$$

□

Для устойчивости нам необходимо, чтобы собственные значения матрицы Грама  $\widehat{M} = (M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j))$  были ограничены сверху и снизу положительными числами  $a_1 < \lambda < a_2$ , не зависящими от  $N$

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h_i}} \begin{cases} 1, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

$$\Omega \subset \mathcal{R}^m, \Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$$

$$\max_{i=\overline{1,N}} \sup_{x_{ij} \leq \Omega_i} |x - y| \leq h$$

## 11.2 Кусочно линейные базисные функции

Введем на  $[a, b]$  сетку

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b, \quad h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \max_{i=1,N} h_i$$

Зададим на каждом отрезке  $(x_{i-1}, x_i)$  функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \quad i = \overline{1, N-1}$$



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1}, & x \in (x_0, x_1) \\ 0, & x \notin (x_0, x_1) \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in (x_{N-1}, x_N) \\ 0, & x \notin (x_{N-1}, x_N) \end{cases}$$

TODO картинка

$$(\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \begin{cases} 0, & |i - j| > 1 \\ 1, & |i - j| \leq 1 \end{cases}$$

$$v_N = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(x) \in H_N$$

**Теор.** Для любой функции  $u(x) \in W_2^2(\Omega)$   $\exists v(x) \in H_N = W_2^{1,h}(\Omega)$ :

$$\|u - v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$\|u - v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_2 h \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

где  $c_1, c_2 = \text{const}$  не зависят от  $h, u$

Док-во

$$v(x) = \sum_{i=0}^N u(x_i) \varphi_i(x)$$

Оценим разность  $u - v$  в произвольной точке  $x \in (x_{i-1}, x_i)$ . С учетом того, что функция  $v(x)$  кусочно-линейная и  $dv(x)/dx = (u(x_i) - u(x_{i-1}))/h_i$

$$\begin{aligned} u(x) - v(x) &= \int_{x_{i-1}}^x \frac{d}{d\xi} (u - v) d\xi = \int_{x_{i-1}}^x \left[ \frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i} \right] d\xi = \\ &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^x d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[ \frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{du(\eta)}{d\eta} \right] d\eta = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^x d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\eta \int_{\eta}^{\xi} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} dt \end{aligned}$$

Применяя к (??) неравенство КБ и расширяя пределы интегрирования

$$|u(x) - v(x)|^2 \leq h_i^3 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^2 dt$$

Суммируя по  $i = 1, \dots, N$  получим (??). Если же сначала продифференцировать, а затем провести те же самые рассуждения и оценки, то получим (??).

$$\sum_{i=1}^N (\cdot) \|u - v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

TODO: добавить переходов

## Лекция 12

**Теор.** Если  $u(x) \in W_{\infty}^2(\Omega)$ , то  $\exists v \in H_N$ :

$$\|u - v\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq c_3 h^2 \|u\|_{W_{\infty}^2(\Omega)}$$

$$\|u - v\|_{W_{\infty}^1} \leq c_4 h \|u\|_{W_{\infty}^2(\Omega)}$$

Если  $u \in C^2(\Omega)$ , то

$$\|u - v\|_{C(\Omega)} \leq c_5 h^2 \|u\|_{C^2(\Omega)}$$

**Упр.** Доказать теорему.

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$v(x) = \sum_{i=0}^N \sqrt{h} u(x_i) \varphi_i(x)$$

**Пример**

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), & p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad f \in L_2(a, b) \\ u(a) = \frac{du}{dx}(b) = 0 \end{cases}$$

$$H_A : \quad \|u\|_A = \sqrt{\int_a^b \left( p \left| \frac{du}{dx} \right|^2 + q|u|^2 \right) dx}$$

$$H_N = L(\varphi_0, \dots, \varphi_N)$$

### 12.1 Билинейные базисные функции в $\mathbb{R}^2$

Пусть  $\Omega$  — некоторая прямоугольная область в  $\mathbb{R}^2$

$$A_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_x} < A_1, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta x = \max_{i=1, N_x} \Delta x_i$$

$$B_0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{N_y} = B_1, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta y = \max_{i=1, N_y} \Delta y_i$$

$$h = \max(\Delta x, \Delta y)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta x_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta y_j}, & y \in (y_{j-1}, y_j) \\ \frac{y_{j+1} - y}{\Delta y_{j+1}}, & y \in (y_j, y_{j+1}) \\ 0, & y \notin (y_{j-1}, y_{j+1}) \end{cases}$$

$$Q_{ij}(x, y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

$$u^h(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} Q_{ij}(x, y), \quad (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}$$

$$L(Q_{ij}) = W_2^{1,h} \cap W_2^1$$

**Теор.** Если  $u \in C^{(2)}(\Omega)$ , то существует  $u^h \in W_2^{1,h}$  такая, что

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^2 \|u\|_{C^{(2)}(\Omega)}$$

$$\|u - u^h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq ch \|u\|_{C^{(2)}(\Omega)}$$

где  $c = \text{const}$  не зависит от  $h, u$

Доказ-во

$$u^h(x, y) = \sum_{i,j} u(x_i, y_j) Q_{ij}(x, y)$$

$$\xi(x, y) = u(x, y) - u^h(x, y)$$

$$\begin{aligned} \xi(x, y) = (x - x_l) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) + (y - y_k) \frac{\partial \xi}{\partial y}(x_k, y_k) + \int_{x_l}^x dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' + \\ + \int_{y_k}^y dy' \int_{y_k}^{y'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y''^2}(x_l, y'') dy'' + \underbrace{\int_{x_l}^x \int_{y_k}^y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dx' dy'}_C \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y') dy',$$

$$\textcircled{A} \quad (x - x_l) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) = \frac{x - x_l}{\Delta x_{l+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'',$$

$$\textcircled{B} \quad \int_{x_l}^x dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' = \int_{x_l}^x dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'',$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{C} \quad & \int_{x_l}^x dx' \int_{y_k}^y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dy' = \\
& = \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \int_{x_l}^x dx' \int_{y_k}^{y'} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''}(x'', y'') \right) dy'
\end{aligned}$$

Следовательно выражение для  $\xi(x, y)$  принимает вид

$$\begin{aligned}
\xi(x, y) &= \frac{x - x_l}{\Delta x_{l+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' + \frac{y - y_k}{\Delta y_{k+1}} \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy' \int_{y'}^{y_k} \frac{\partial^2 u}{\partial y''^2}(x_l, y'') dy'' + \\
&+ \int_{x_l}^x dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' + \int_{y_k}^y dy' \int_{y_k}^{y'} \frac{\partial^2 u}{\partial y''^2}(x_l, y'') dy'' + \\
&+ \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \int_{x_l}^x dx' \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''}(x'', y'') \right) dy'
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|\xi(x, y)| \leq c (\Delta x_{l+1}^2 + \Delta y_{k+1}^2) \sum_{|i|=2} \|D^{(i)}u\|_{C(\Omega_{l+1, k+1})} \leq c (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sum_{i=2} \|D^{(i)}u\|_{C(\Omega)}$$

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} |u - u^h|^2 dx dy \leq c (\Delta x^2 + \Delta y^2)^2 \left( \sum_{i=2} \|D^{(i)}u\|_{C(\Omega)} \right)^2$$

**Упр.** Получить вторую оценку

**Упр\*.** Доказать более сильную оценку:

$$\|u - u^h\|_{C(\Omega)} \leq c (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sum_{i=2} \|D^{(i)}u\|_{C(\Omega)}$$

TODO картинка

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & f \in L_2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

$$F(u) = \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 - 2uf \right) dx dy$$

$$H_A = \mathring{W}_2^1(\Omega)$$

$$\mathring{W}_2^{1,h} = \left\{ u^h : u^h \in W_2^{1,h}, \quad u^h = \sum_{i,j} a_{ij} Q_{ij}, \quad \|u^h\|_{\mathring{W}_2^{1,h}} = \|u^h\|_{W_2^{1,h}}, \quad (x_i, y_j) \in \Omega \right\}$$

**Теор.** Для любой  $u \in W_2^1(\Omega) \cap C^{(2)}(\Omega)$  существует  $u^h \in W_2^{1,h}$  такая, что справедливы оценки (??).

## 12.2 Построение проекционно сеточной схемы для ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x), & f \in L_2(a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1, \quad 0 \leq q(x) \leq q_1$$

$$Au = f$$

$$H = L_2(a, b) \Rightarrow A \text{ положительно определен} \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \exists! \text{ решение (??)}$$

Пусть  $u(x)$  — решение (??)

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c \|f\|_H$$

$$H_A = \mathring{W}_2^1(\Omega), \quad c_0 \|u\|_{W_2^1} \leq \|u\|_A \leq c_1 \|u\|_{W_2^1}$$

$$F(u) = [u, u] - 2(u, f) \rightarrow \min \quad \text{на } \mathring{W}_2^1(\Omega)$$

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \left\{ \dots \right.$$

$$\mathring{W}_2^{1,h} = \left\{ v = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x) \right\} \subset \mathring{W}_2^1 = H_A$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x) \text{ — минимизирует } F(v) \text{ на } \mathring{W}_2^{1,h}$$

$$\text{Находим } a_j \text{ из } \frac{\partial F}{\partial a}(u_h) = 0, \quad i = \overline{1, N-1}$$

Приходим к системе уравнений

$$\hat{A}a = f, \quad \hat{A} = (A_{ij})$$

$$A_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] = \int_{\Omega_{ij}} \left( p \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} + q \varphi_i \varphi_j \right) dx$$

$$a = (a_1, \dots, a_{N-1})^T, \quad f = (f_1, \dots, f_{N-1})^T$$

$$f_i = \int_{\Omega_i} f \varphi_i dx$$

Существует единственное решение  $(a_1, \dots, a_{N-1})^T$ , которое однозначно определяет решение  $u^h \leftarrow \underset{v \in \mathring{W}_2^{1,h}}{\operatorname{argmin}} F(v)$

Отметим, что так как  $A_{ij} = 0$  при  $|i - j| > 1$ , то матрица  $\hat{A}$  оказывается трехдиагональной.

**Упр.** Найти  $A_{ij}$  в случае кусочно-постоянных  $p$  и  $q$  на сетке

$$p_{i-\frac{1}{2}} = p(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = \overline{1, N}$$

$$q_{i-\frac{1}{2}} = \dots$$

## Лекция 13

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$$\|u - u_h\|_A \leq \|u - v_n\|, \quad \text{где } v_h = \sum_{i=1}^{N-1} b_i \varphi_i; \quad \forall v_h \in H_A^{(N)} = \mathring{W}_2^{1,h}$$

$$c_0 \|u\|_{W_2^1} \leq \|u\|_A \leq c_1 \|u\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq c \|u - v_h\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq c \inf_{v_h \in H_A^{(N)}} \|u - v_h\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch \|u\|_{W_2^2} \leq ch \|f\|_{H=L_2}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch \|f\|_H$$

$$\|u - u_h\|_{H=L_2} \leq c_2 h \|f\|_H \quad (\text{в силу неравенства Фридрихса})$$

$$[u, v]_A = (f, v), \quad \forall v \in \mathring{W}_2^1$$

$$[u_h, v_h]_A = (f, v_h), \quad \forall v_h \in \mathring{W}_2^{1,h} = H_A^{(N)}$$

$$[u - u_h, v_h] = 0 \quad \forall v_h \in \mathring{W}_2^{1,h}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу  $A\Phi = F$ ,  $F = u - u_h$   
по свойствам  $A$   $\exists!$  решение  $\Phi$ :

$$\|\Phi\|_{W_2^2} \leq c \|F\| = C \|u - u_h\|$$

и  $\Phi$  удовлетворяет:  $[\Phi, v] = (F, v) \quad \forall v \in \mathring{W}_2^1$

Рассмотрим  $v = u - u_h$

$$\begin{aligned} (F, v) &= (u - u_h, u - u_h) = (A\Phi, u - u_h) = [\Phi, u - u_h] - [u - u_h, \Phi_h] = [\Phi - \Phi_h, u - u_h] \leq \\ &\leq \|\Phi - \Phi_h\|_A \cdot \|u - u_h\|_A \leq ch \|f\| \|\Phi - \Phi_h\|_A \leq \tilde{c} h \|f\| \cdot \|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1} \end{aligned}$$

Из результатов аппроксимации можно выбрать  $\Phi_h$ :

$$\|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1} \leq \tilde{c} h \|\Phi\|_{W_2^2}$$

$$\|u - u_h\|^2 \leq ch \|f\| \cdot \|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1} \leq ch^2 \|f\| \cdot \|\Phi\|_{W_2^2} \leq ch^2 \|f\| \cdot \|u - u_h\|$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\| \leq ch^2 \|f\| \cdot \|u - u_h\|$$

Рассмотрим задачу с другими граничными условиями

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x) \\ u(a) = 0, \quad \frac{du}{dx}(b) = 0 \end{cases}$$

$$u_h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i$$

**Упр.** Проверить оценки в  $W'_2$

**Упр.** Найти  $\hat{A}$  при  $h_i = h, i = \overline{1, N}, \Phi = 0, P = \text{const}$

### 13.1 Применение ВП к з. Дирихле для ур-я Лапласа

$$\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$Au = -\Delta u$$

$$D(A) = \{u \in W_2^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad f \in L_2(\Omega)$$

$A$  — симметричный положительно определенный

$$\Rightarrow \forall f \in L_2 \quad \exists! n \in \mathring{W}_2^1 \cap W_2^2$$

$$\|u\|_{W_2^2} \leq c \|f\|$$

$$H_A = \mathring{W}_2^1(\Omega), \quad (u, v)_A = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega$$

$$[u, v]_A = (f, v), \quad \forall v \in H_A$$

TODO: картинка + дополнить

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{h_x h_y}} \begin{cases} 1 - \left( \frac{x}{h_x} - j \right), & x_j \leq x \leq x_{j+1} \\ \dots \\ \dots \\ \text{Упр.} \end{cases}$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} a_{ij} \varphi_{ij}(x, y), \quad H_A^{(N)} = \mathring{W}_2^{1,h} \subset H_A = \mathring{W}_2^1$$

$$a_{ij} — \text{решение СЛАУ}, \quad [u_h, \varphi_{kl}]_A = (f, \varphi_{kl})$$

$$\hat{A}a = f, \quad \hat{A} = (A_{ijkl}), \quad A_{ijkl} = [\varphi_{ij}, \varphi_{kl}]_A, \quad \varphi_{ij} — \text{кусочно линейные}$$

$$a = (a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{N_x-1,1}, \dots, a_{1,N_y-1}, \dots, a_{N_x-1,N_y-1}), \quad \text{Упр. } A_{ijkl} = ?$$

Оценки:

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch \|f\|$$

$$\|u - u_h\| \leq ch^2 \|f\|$$

$$A = -\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u$$

**Упр.** показать предыдущее выражение

$$\frac{2a_{ij} - a_{i-1,j} - a_{j+1,i}}{h_x^2} + \frac{2a_{ij} - a_{i,j-1} - a_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{ij} = (f, \varphi_{ij})_H, \quad i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}$$

TODO: картинка

$$\partial\Omega_h \subset \partial\Omega$$

$h$  — max сторона  $\triangle$

$\theta_0$  — min  $\angle$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c \frac{h}{\sin \theta_0} \|f\|$$

$$u_h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x, y)$$

### 13.2 Подходы к решению неоднородной краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega \leftarrow \text{выпуклая, } \partial\Omega \text{ гладкая} \\ u|_{\partial\Omega} = g, & f \in L_2(\Omega), g \in W_2^{3/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

$$c_3(\|f\|_L^2 + \|g\|_{W_2^{3/2}}^2) \leq \|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c_u()$$

① Сведение к однородным граничным условиям

Пусть  $\exists \Phi \in D(A) : \Phi = g$  на  $\partial\Omega$

$$v = u - \Phi$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{f} = f + \Delta\Phi & \in L_2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$$u_h = v_h + \Phi$$

$$\Phi \in W_2^1(\Omega)$$

② "Снос" граничных условий (с  $\partial\Omega$  на  $\partial\Omega_h$ )

$$u_h = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} a_i \varphi_i(x, y), \quad \varphi_1, \dots, \varphi_N \text{ — внутренние узлы, } \varphi_{N+1}, \dots, \varphi_{\tilde{N}} \text{ — граничные узлы}$$

$$i = \overline{1, N} : [u_h, \varphi_i]_A = (f, \varphi_i)$$

$$i = \overline{N+1, \tilde{N}} : a_i \varphi_i(x_i, y_i) = g(x_i, y_i)$$

③ Метод штрафа

Рассмотрим модифицированную 3 краевую задачу

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{в } \Omega \\ u_\varepsilon + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{на } \partial\Omega \end{cases}, \quad \varepsilon > 0 \text{ мало}$$

Для нее:

$$[u, v]_A = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\varepsilon} uv dS$$

$$u_{\varepsilon, h} = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i(x)$$

$a_i$  находится из

$$[u_h, \varphi_i]_A = (f, \varphi_i) + \int_{\partial\Omega} g \varphi_i dS$$



$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{W_2^1(\Omega)} &\leq \frac{ch}{\sin \theta_0} \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right) \left(\|f\|_{L_2} + \frac{1}{\varepsilon} \|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right) \\
\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{ch^2}{\sin^2 \theta_0} \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^2 \left(\|f\|_{L_2} + \frac{1}{\varepsilon} \|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right) \\
\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} &\leq c\varepsilon \left(\|f\|_{L_2} + \frac{1}{\varepsilon} \|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right)
\end{aligned}$$

## Лекция 14

### 14.1 Вариационная постановка задачи на собственные значения симметрично положительного оператора

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad D(A) \subset H \quad (14.1)$$

$A$  — симметричный,  $\lambda$  — собственные значения,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{— собств. знач. } A \Rightarrow (\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

$$(A\varphi, \varphi) = \lambda(\varphi, \varphi)$$

$$\lambda = \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

**Опр.**  $A$  ограничен снизу, если  $\forall \varphi \in D(A)$  :

$$(A\varphi, \varphi) \geq k(\varphi, \varphi), \quad k \in \mathbb{R} \text{ (не обязательно } k > 0) \quad (14.2)$$

$$\text{Далее } A \text{ — ограничено снизу} \Rightarrow \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geq k \Rightarrow \exists \inf_{\varphi \in D(A)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = d \geq k$$

$$F(\varphi) = \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \quad (14.4)$$

**Теор.** Пусть  $A$  — симметричн., огр. снизу,  $d = \inf_{\varphi \in D(A)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$

Если  $\exists \varphi_0 \neq 0 \in D(A)$  :  $F(\varphi_0) = \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = d \Rightarrow \exists \min \lambda_1 = d$ ,  $\varphi_0$  — собств. функция

Док-во.

Пусть  $\eta \in D(A)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_0 + t\eta \in D(A)$

$$\psi(t) = \frac{(A(\varphi_0 + t\eta), \varphi_0 + t\eta)}{(\varphi_0 + t\eta, \varphi_0 + t\eta)} = F(\varphi_0 + t\eta) = \frac{t^2(A\eta, \eta) + 2t \operatorname{Re}(A\varphi_0, \eta) + (A\varphi_0, \varphi_0)}{t^2(\eta, \eta) + 2t \operatorname{Re}(\varphi_0, \eta) + (\varphi_0, \varphi_0)}$$

Так как  $\varphi_0 = \operatorname{argmin} F(\varphi) \Rightarrow \psi(t)$  в  $t = 0$   $\min \Rightarrow \psi'(0) = 0$

$$(\varphi_0, \varphi_0) : \operatorname{Re}(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0$$

Аналогично, заменив  $(\eta)$  на  $(i\eta)$  :

$$\operatorname{Im}(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0 \Rightarrow (A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in D(A) \Rightarrow A\varphi_0 - d\varphi_0 = 0 \Rightarrow A\varphi_0 = d\varphi_0$$

Следовательно  $d$  — собственное значение,  $\varphi_0$  — собственная функция

Покажем min

Пусть  $\lambda_1$  — с. зн.  $A$

$$\lambda_1 = \frac{(A\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \geq \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = d \quad (14.5)$$

□

**Теор.** Пусть  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  — собств. знач. симм., огр. снизу  $A$

Пусть  $\exists \varphi_{n+1} \neq 0 \in D(A) : \varphi_{n+1} = \operatorname{argmin}_{\varphi \in D(A)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$  при условии:

$$(\varphi_{n+1}, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (14.6)$$

$$\Rightarrow \lambda_{n+1} = \frac{(A\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}{(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})} — \text{следующее собств. знач.}, \quad \varphi_{n+1} — \text{собств. функц.}$$

TODO: 7, 8

Док-во.

$$\forall \zeta \in D(A)$$

$$\eta = \zeta - \sum_{k=1}^n (\zeta, \varphi_k) \varphi_k$$

$\eta$  удовлетворяет усл (14.6)

$t\eta$  удовлетворяет усл (14.6)

$\varphi_{n+1} + t\eta \in D(A)$  удовлетворяет усл (14.6)

$$\psi(t) = \frac{(A(\varphi_{n+1} + t\eta), \varphi_{n+1} + t\eta)}{(\varphi_{n+1} + t\eta, \varphi_{n+1} + t\eta)}$$

Аналогично  $(A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in D(A) \text{ (плотно в } H)$

$$\Rightarrow A\varphi_{n+1} = \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}$$

Пусть  $\exists \lambda' — \text{собств. знач.: } \lambda' > \lambda_n, \quad \varphi' — \text{соответствующая собств. функц.}$

$$\lambda' = \frac{(A\varphi', \varphi')}{(\varphi', \varphi')} \geq \lambda_{\min} = \min_{\varphi \in D(A) + (14.6)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

$\lambda_{n+1}$  следующее собственное значение после  $\lambda_n$

□

**Теор.**

Пусть оператор опр снизу симм  $A$ , содержит тоолько собственные значения  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \min$  с зн  $A$   $\lambda_0$  и  $\varphi_0$  - с  $\Phi$

$$\frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \lambda_0$$

$$A\varphi - \lambda B\varphi = 0$$

$A, B$  - симметричные,  $\Phi$  - огр. снизу  $B$  - положительно опр.,  $D(A) \subset D(B) \subset H$

Если  $\lambda_0 \varphi_0$  - удовлетворяет ??  $\Rightarrow \lambda_0$  с зн,  $\varphi_0$  с  $\Phi$

$$\lambda_0 = \frac{A\varphi_0, \varphi_0}{(B\varphi_0, \varphi_0)}$$

Теорема

Пусть  $\lambda_k \neq \lambda_m$  - с зн ??

$$(B\varphi_k, \varphi_m) = 0; k \neq m$$

- (огр. снизу А не требуется)

Теорема

Пусть  $d = \inf_{\varphi \in D(A)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}$

Если  $\exists \varphi_0 : \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(B\varphi_0, \varphi_0)} = d$   
 $\Rightarrow d = \min$  - с зн ??,  $\varphi_0$  - с ф

Теорема

Пусть  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  - с зн ??

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$  соответствующие собств функции

Пусть  $\exists \varphi_{n+1} = \varphi \in D(A)$   $\frac{(A\varphi, \varphi)}{(B\varphi, \varphi)}$

$$\lambda_n \Rightarrow \lambda_{n+1} = \frac{(A\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}{(B\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}$$

$$(B\varphi, \varphi_k) = 0, k = \overline{1, n}$$

## 14.2 Метод Ритца в задаче собственных значений

Пусть А — ограниченный снизу оператор

$$d = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{(u, u)} \quad (14.11)$$

По теор. (??). Если  $\exists u_0 : \inf_{D(A)} \frac{A\varphi_0, \varphi_0}{\varphi_0, \varphi_0} = d$ , то задачу можно свести к

$$M = \{u : \varphi \in D(A) \cap \|\varphi\| = 1\}$$

$$\inf_{u \in M} (Au, u) \quad (14.12)$$

$$(u, u) = 1 \quad (14.13)$$

TODO

Система  $\{\varphi_n\} \subset D(A)$  полна в Н

$$\forall u \in D(A) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ и } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$$\|u - u^*\| < \varepsilon, \quad u^* = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$$

Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$$

Выберем коэффициенты  $a_k$  так, чтобы  $u_n$  удовлетворяло (14.13) и  $(Au_n, u_n) \rightarrow \min$

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^n (A\varphi_n, \varphi_m) a_k \overline{a_m}$$

удовлетворяющих уравнению

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^n (\varphi_k, \varphi_m) a_k \overline{a_m} = 1 \quad (14.14)$$

Метод множителей Лагранжа

$$\Phi = (Au_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)$$

$\lambda$  — пока неопределенный параметр

$$\sum_{k=1}^m a_k [(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)] = 0, \quad m = \overline{1, n} \quad (14.15)$$

Однородное СЛАУ относительно  $a_1, \dots, a_n$  (одновременно не обр. в ноль)  $\Rightarrow \det(\dots) = 0 \Rightarrow$  уравнение на  $\lambda$

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2) & \vdots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (14.16)$$

Если последовательность  $\{\varphi_n\}$  ортонормирована, то уравнение упрощается

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda & (A\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (14.17)$$

Получаем уравнение  $n$ -й степени по  $\lambda$ . Коэффициент при  $(-1)\lambda^n$  равен определителю матрицы Грама для  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Отсюда следует, что уравнение имеет ровно  $n$  корней

Пусть  $\lambda_0$  — корень. Пусть  $a_k^{(0)}$ ,  $k = \overline{1, n}$  — нетривиальное решение. Тогда  $\forall \eta : \eta a_k^{(0)}$  также будет решением. Под  $a_k^{(0)}$  теперь будем понимать  $\eta a_k^{(0)}$ . Подставив  $\eta a_k^{(0)}$  в (14.14) найдем  $\eta$ . Подставив в (14.15)  $\lambda = \lambda_0$  и  $a_k = a_k^{(0)}$ , умножим на  $\overline{a_m^{(0)}}$  и просуммируем  $\sum_m(\dots)$ , получим:

$$\underbrace{\sum_{k,m=1}^n a_k^{(0)} \overline{a_m^{(0)}} (A\varphi_k, \varphi_m)}_{=(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)})} = \lambda_0 \underbrace{\sum_{k,m=1}^n (\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} \overline{a_m^{(0)}}}_{=1 \text{ (14.14)}}$$

$$\lambda_0 = (Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}), \quad u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^n a_k^{(0)} \varphi_k$$

$$\min_M (Au, u) = \min \text{ из } \lambda \text{ корней}$$