Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Москва, 2024

Содержание

Лекция 1

1.1 Исторический экскурс

Лекции с 9:30 два часа.

Вариационная постановка для задача мат физики. задача - условие на границе + начальное. (Экстремум функционала энергии, поэтому энергетические пространства).

Соболев - прямые методы решения задач. позволяют найти решение с помощью СЛАУ. Наиболее известен метод Рица.

1.2 Метод Дирихле

Дана область $\omega \in \mathbb{R}^2$.

$$M = u : u_0(x,y), (x,y) \in \partial\Omega$$

$$\iint_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2] dxdy \to min$$

Интеграл Дирихле $\Rightarrow \overline{u}$ - гармонический в Ω

1.3 Контрпример Вейерштрасса.

$$M = y; y(x) \in c'[-1;1], y(-1) = -1, y(1) = 1$$

$$J(y) = int^1_{-1} x^2 (y')^2 dx, J(y) \geq 0$$

$$y_\varepsilon(x) = \frac{arctg(\frac{x}{\varepsilon})}{arctg(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$y'_\varepsilon(x) = \frac{1}{arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_\varepsilon) = \int_{-1}^{1} \frac{x^2\varepsilon^2}{arctg^2(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx = frac2\varepsilon arctg(\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$J(\overline{y}) = \int_{-1}^{1} x^2 y^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Противоречие: $y(-1) = -1, y(1) = 1$

1.4 Контрпример Адамара

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\inf} \frac{\rho^2}{2^n} cos(2^n\Theta), x = \rho cos\Theta, y = \rho sin\Theta$$

$$\rho \leq 1$$

Непрерывны и гармоничны. Интеграл Дирихле в круге $\rho \leq r \leq 1$

$$\pi sum_{n=1}^{\inf} r^{2^{2n+1}} \to_{r\to 1} \inf$$

1.5 Метод Ритца

$$J(\omega) = int_a^b f(x,\omega,\omega',...,\omega^{(k)})dx \to inf$$

$\omega \in M$ класс допустимых функций

$\psi_0, \psi_1, ...\psi_n, ...($ координатные функции $)$

Св-ва:

$$1)\forall a_1...a_n \in \mathbb{R}, \forall_n$$

$$\omega_n = \omega_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i \in M$$

$$2)\forall \omega \in M \text{и} \forall varepsilon > 0$$

Уравнение полноты

$$H(\omega n) = F(a_1, ..., a_n) \to inf$$

$$||\omega - \psi_0 - \sum_{i=1} n a_i \psi_i|| < \varepsilon$$

Рассмотрим:

$$J(\omega_n) = F(\alpha_1, ..., \alpha_n) \to inf$$

$\dfrac{\partial J}{\partial a_1}(\omega_n) = 0, ... \dfrac{\partial J}{\partial a_n}(\omega_n) = 0 -$ альтернативная система уранений

$\Rightarrow a_1, ..., a_n -$ решение

Насколько хорошо приближает метод искомое решение? На примере задачи об упругой поластине.

$\Omega_{\subset \mathbb{R}^2} -$ обл $, S = \partial\Omega$

изгиб $\omega(x,y)$ удовлетворяет ур-ю Сори Жульен

$$\Delta^2\omega = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4} = \frac{q(xy)}{\mathcal{D}}; (x,y) \in \Omega$$

$\mathcal{D} -$ жесткость пластины при упругом изгибе

$q(x,y),$- Интенсивность давления

$$\omega(x,y) = 0$$

$\dfrac{\partial\omega(x,y)}{\partial\mathcal{D}} = 0 \leftarrow$ Производная по нормали к S

$$J(\omega) = \iint_{Omega} (\frac{1}{2}(\Delta\omega)^2 - f(\omega)d\Omega \to inf)$$

$$f = \frac{q(x,y)}{\mathcal{D}} \in C'(\overline{\Omega})$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Рассмотрим без доказательства ограниченности снизу.

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi}\iint_\Omega r^2 lnrf(\xi,\eta)d\xi\eta$$

$$(x,y)(\xi,\eta) - \text{ точки из } \Omega r - \text{ расстояние между } (x,y) \text{ и } (\xi,\eta)$$

$$J(\omega) = J_0 + \frac{1}{2}\iint_\Omega (\Delta\omega_2)^2 dxdy$$

$$j(\omega) \geq J_0 \Rightarrow \exists inf J(\omega)$$

Введем $\psi_1(x,y),...,\psi_n(x,y)$ - координатные ф-ции

$$1)\psi_n(x,y), \frac{\partial^{k+l}\psi_n}{\partial x^k \partial x^l} \in C(\overline{\Omega}), k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon$$

$2)\psi_n(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$3)\forall$ ф-ии $\zeta(x,y)$:

а) удовлетворяет пункту 1

б) $\zeta(x,y) \equiv 0 (x,y) \in \Omega\rho$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1, ...\alpha_m \in \mathbb{R}:$$

$$|\zeta(x,y) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\psi_i(x_i,y_i)| < \varepsilon$$

$$|\frac{\partial^{k+1}\zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial^{k+l}\psi_i(x,y)}{\partial x^k \partial y^l}| < \varepsilon$$

Условие полноты $k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon \Rightarrow$
приближенное решение :

$$\omega_n = \alpha_1\psi_1 + ... + \alpha_n\psi_n \rightarrow J(\omega)$$

$$J_n = \iint_\Omega (\frac{1}{2}(\Delta\omega_n)^2 - f(\omega_n))dxdy$$

α_i выбираем : $J(\omega_n) \rightarrow J(\omega)$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}a_k = B_i, i = \overline{1,n}$$

$$A_{ik} = \iint_\Omega \Delta\psi_i\Delta\psi_k dxdy \Rightarrow$$

$\exists!$ решение $a_1,...,a_n$ в $\omega_n = ...$ приближение решение

$$B_i = \iint_\Omega f\psi_i dxdy$$

$\rightarrow$ Сущ ед решения $a_1,...,a_n$в$\omega_n = ...$(приближенное решение)

Рассмотрим $\forall b_1,...b_n$

$$\zeta_n = b_1\psi_n + ... + b_n\xi_n$$

??b_i и $\sum_{i=1}^{n}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1} nA_{ik}a_k b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i B_i$$

$$\sum_{i=x}^{n}\sum_{k=1} n \iint_\Omega b_i \Delta\psi_i \Delta\psi_k a_k dxdy - \sum_{i=1}^{n} \iint_\Omega f b_i \psi_i dxdy = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} [\iint_\omega b_i \Delta\psi_i \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta\xi_k dxdy - \iint_{\Omega f b_i \psi_i dxdy}] = 0$$

...

$$\int_O mega(\Delta\omega_n \sum_{i=1} n b_i \psi_i) - f(\sum_{i=1} n b_i \psi_i) dxdy = 0$$

$$\iint_O mega(\Delta\Omega_n \zeta_n - f\zeta) dxdy = 0$$

$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\iint_\Omega (\Delta\omega_u)^2 dxdy$ не возрастает у $\geq inf$

$\forall\varepsilon > 0$ по критерию Коши $\Rightarrow N(\varepsilon)\forall_n > N(\varepsilon)$

Лекция 2

$\varphi_1(x,y),...,\varphi_n(x,y)$ — координатные функции, $\qquad w_n = \alpha\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n)^2 dxdy$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m : 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x,y)$$

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dxdy < 1$$

Обозначим $S = \partial\Omega$ — границу области Ω

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\left(\varphi\frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)dS + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega}\Delta\varphi\ln r\ d\xi d\eta$$

$$\left|\int\limits_{x} f(x)\overline{g}(x)dx\right|^2 \leq \left(\int\limits_{x}|f(x)|^2dx\right)\left(\int\limits_{x}|g(x)|^2dx\right)$$

$$|\varphi(x,y)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\iint\limits_{\Omega}(\Delta\varphi)^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{\Omega}\ln^2 r\ d\xi d\eta\right)^{1/2}$$

$$|\varphi(x,y)| \leq C_1$$

$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1\sqrt{\varepsilon}$$

$$\omega_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} w_n(x,y) \in C(\Omega)$$

2.1 Метод Бубнова – Галеркина

$w_n = \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$
$Lw - \lambda Mw = 0$
L, M — дифференциальные операторы
$\sum\limits_{i=1}^{n}(A_{ik} - \lambda B_{i_k})a_k = 0, \quad k = \overline{1,n}$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \dots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \dots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$N(x,y) = Lw_n - \lambda Mw_n$ — невязка
$N(x,y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1,n}$

2.2 Повторение

1. $f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0$

2. $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0,\ \ f(x) >= 0 \ \ \Rightarrow \ \ f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$

3. $|f(x)| < \varphi(x), \varphi$ — суммируема по Лебегу $\Rightarrow f(x)$ — суммируема по Лебегу

4. $\{\varphi_n(x)\}$ — суммируемы с квадратами по Лебегу

   $\lim\limits_{n,k\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$

Обозначим V – линейное пространство

(φ, ψ) – скалярное произведение: $\quad (\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$

1. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$
3. $(\varphi, \varphi) \geq 0$
4. $(\varphi, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{0}$

$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$

- Неравенство Коши-Буняковского
  $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|\|\psi\|$
- Неравенство треугольника
  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$

$$L_2(\Omega): \quad (\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$L_2(\Omega, \sigma): \quad (\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\sigma(x)dx$$

$$L_2(\Omega^m): \quad (\varphi, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}dx$$

Критерий линейной зависимости системы функций

$\varphi_1, ..., \varphi_n$ линейно зависима (ЛЗ) в H

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) & \dots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_1) & \dots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix} = 0$$

Опр. M — плотно в H, если $\forall p \in H$ и $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \varphi_n \in M : \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$.

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$$\uparrow$$

$$\begin{array}{lll} \forall \varepsilon > 0 : \quad \forall \varphi \in H & \exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : & \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ & \exists \varphi_n^2 \in C_0^{\infty}(\Omega) : & \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \\ & ... & \end{array}$$

$C_0^{(k)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система (ОНС)
$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$
$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + ... + \|\varphi_n\|^2 + ...$

$\{\varphi_n\}$ полная в H, если из $(\varphi, \varphi_k) = 0\ \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{0}$
$\forall \varphi \in H : \quad a_k = (\varphi, \varphi_k) -$ коэффициенты Фурье

Теор. H — гильбертово, $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система (ПОНС)

$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2$ — равенство Парсеваля

Теор. $\exists a_k : \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, $\{\varphi_n\}$ — ПОНС в H, тогда:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$ сходится по $\|\cdot\|$ к $\varphi \in H$, при этом $\|\varphi\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

Опр. H сепарабельно если $\exists M-$ счетное мн-во плотное в H.

Теор. H сепарабельно $\Leftrightarrow \exists$ ПОНС (счетная или конечная) в H.

$\{u : \int\limits_{\Omega} u dx = 0\}$ — пример подпространства в $L_2(\Omega)$.

Пусть H_1 — подпространство в H
$\forall \varphi \in H \quad \exists! \varphi_1 \in H_1 : \|\varphi - \varphi_1\| = \min\limits_{\psi \in H_1} \|\varphi - \psi\|$ — проекция φ на H_1
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad H_2 = \varphi \perp H_1$ — ортогональное дополнение

l — линейный функционал : $\quad M \subset H \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$
$|l_\varphi| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|_H$
$\lim\limits_{\psi \to \varphi} l_\psi = l_\varphi \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \|\psi - \varphi\| < \delta : \quad |l_\psi - l_\varphi| < \varepsilon$

Теор. (Рисса) $\forall l$ — непрерывного линейного функционала в H $\exists! \psi \in H : l_\varphi = (\varphi, \psi)$

Пусть M — плотно в H, $\quad \Phi : M \times M \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$
$\Phi(\varphi, \psi) : \Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$
$\Phi(\varphi, \varphi)$ — квадратичная форма

$H : D_A \subset H$ — область определения некоторого оператора A
Линейный оператор A ограничен $\Leftrightarrow$ A непрерывен
$\varphi \in D_A, \quad A\varphi \in R_A$ — область значений оператора A
$\varphi \in D_A \to! \ A\varphi \in R_A$

Лекция 3

$$\left.\begin{array}{l} Au = f \\ u, f \in H \end{array}\right| \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad H = L_2(\Omega)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in C(\overline{\Omega}) \\ u|_s = 0 \end{cases}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ \ u|_s = 0\}$$

$$A = -\Delta u$$

Формула Остроградского

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right) d\Omega = \int\limits_S \Big(\varphi\cos(\overline{n}\cdot x) + \psi\cos(\overline{n}\cdot y) + \omega\cos(\overline{n}\cdot z)\Big) dS$$

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix} \qquad \int\limits_\Omega \mathrm{div} W d\Omega = \int\limits_S W_n dS$$

Пусть $\varphi = uv,\ \psi = \omega = 0$

$$\int\limits_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int\limits_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int\limits_S uv\cos(\overline{n}\cdot x) dS$$

$$\int\limits_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = -\int\limits_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int\limits_S uvcos(\overline{n}\cdot x_i) dS \qquad \text{в } \mathbb{R}^m \tag{0}$$

3.1 Формулы Грина

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(P)\frac{\partial u(P)}{\partial x_k}\right) + C(P)u(P)$$

$$D_L = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad C(P) \in C(\overline{\Omega})$$

$$A_{ik}(P) \in C(\overline{\Omega}), \quad A_{ik}(P) = A_{ki}(P)\ \ \forall P, \quad i,k = \overline{1,n}$$

$$\int\limits_{\Omega} vLud\Omega = -\sum_{i,k=1}^{m} \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Omega + \int\limits_{\Omega} Cuvd\Omega$$

в (**??**) подставим $u \to v, v \to A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}$

$$\int\limits_{\Omega} vLud\Omega = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega + \int\limits_{\Omega} Cuvd\Omega - \int\limits_{S} v\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{1}$$

$$\int\limits_{\Omega} uLud\Omega = \int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]d\Omega - \int\limits_{S} u\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{2}$$

из (**??**) вычитаем ее же, но поменяв местами u и v: $\qquad$ (**??**) $-$ $(\textbf{??})_{u\rightleftarrows v}$

$$\int\limits_{\Omega}(vLu - uLv)d\Omega = \int\limits_{\Omega}\left[\cancelto{0}{\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}}\right]d\Omega -$$
$$- \int\limits_{S}\left[v\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i) - u\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_k)\right]dS$$

$$N\bullet := \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial \bullet}{\partial x_i}cos(\overline{n}\cdot x_i)$$

$$\int\limits_{\Omega}(vLu - uLv)\,d\Omega = \int\limits_{S}(uNv - vNu)\,dS \tag{3}$$

Частный случай формул Грина, это оператор Лапласа:

$$Lu = -\Delta u;\ A_{ii} = 1;\ A_{ik} = 0,\ i \neq k;\ C = 0$$

$$-\int\limits_{\Omega} v\Delta ud\Omega = \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega - \int\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{4}$$

$$-\int\limits_{\Omega} u\Delta ud\Omega = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{5}$$

$$-\int\limits_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)d\Omega = \int\limits_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \tag{6}$$

3.2 Положительные операторы

Пусть оператор A симметричен в H

Опр. Оператор называется положительным, если $\forall u \in D_A \subset H, \qquad (Au, u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

Пр. 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u \qquad \text{в } L_2(0,1); \qquad D_B = \{u \in C_0^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$(Bu, v) = -\int\limits_0^1 v\frac{d^2u}{dx^2}dx = \int\limits_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - v\left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 = -\int\limits_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2} = (u, Bv) \quad \forall u, v \in D_B$$

$$(Bu, u) = \int\limits_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = const, u(0) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Пр. 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \qquad D_C = \left\{u \in C^2(0,1), \begin{cases} u'(0) + \alpha u(0) = 0 \\ u'(1) + \beta u(1) = 0 \end{cases} \alpha, \beta = const\right\}$$

$$(Cu, v) = \int\limits_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1) = (u, Cv)$$

$\alpha > 0, \beta \geq 0$

$$(Cu, u) = \int\limits_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geq 0$$

$\alpha = \beta = 0, \quad u \equiv 1 \Rightarrow (Cu, u) = 0 \Rightarrow C$ не является положительным

Пр. 3

$$Au = -\Delta u, \qquad D_A = \{u \in C^2(\Omega) : \quad u|_s = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, S = \partial\Omega, H = L_2(\Omega)\}$$

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = -\int\limits_\Omega u\Delta u d\Omega = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \cancelto{0}{\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS} \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = const, \ u|_s = 0 \Rightarrow u = 0$$

Рассмотрим мембрану
Ω в плоскости (x, y), $u(x, y)$ — изгиб мембраны

$$-\Delta u = \frac{q}{T}$$

q — поперечная нагрузка на единицу площади
T — натяжение мембраны
$u|_S = 0$ — мембрана закреплена на краях

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy$$

3.3 Положительно определенные операторы

Опр. Симметричный оператор A называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \tag{7}$$

Пр. 1 (продолжение)

$$B : u(0) = 0, u \in D_B$$

$$u(x) = \int\limits_0^x u'(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

$$u^2(x) \leq \int\limits_0^x 1^2 dt \cdot \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt = x \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt \leq x \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int\limits_0^1 u^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$\gamma^2 \|u\|^2 \leq (Bu, u), \quad \gamma = \sqrt{2} \quad \Rightarrow B$ является положительно определенным

Пр. 4

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{du}{dx} \right) \quad \text{в } L_2(0, 1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1],\ u(1) = 0\}$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dx} \left[x^3 \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] dx = \left[x^3 \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right] \Bigg|_0^1 = 0$$

$(Lu, u) = \int\limits_0^1 x^3 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \geq 0 \quad \Rightarrow L$ является положительно определенным

$$\frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2, \qquad u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}, \qquad u_\delta \in \mathcal{D}_L$$

$\dfrac{(Lu_\delta, u_\delta)}{\|u_\delta\|^2} = \dfrac{\int_0^1 x^3 (\frac{du_\delta}{dx})^2 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^3 dx} = \dfrac{9 \int_0^1 x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^6 dx} = \dfrac{9}{40} \delta \quad \Rightarrow L$ не явл. положительно опр.

3.4 Энергетическая норма

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)
На D_A : $\quad [u,v]_A = (Au,v)_H$
Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1. $[u,v]_A = \overline{[v,u]}_A$
   $(Au,v) = (u,Av) = \overline{(Av,u)} = \overline{[v,u]}$

2. $[a_1u + a_2u, v] = a_1[u,v] + a_2[u,v]$

3. $(Au,u) = [u,u] \geq \gamma\|u\|^2 \geq 0$

4. $[u,u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$|u| = [u,u]$ — энергетическая норма
D_A предгильбертово, дополним его по $|\cdot|_A \;\Rightarrow\;$ гильбертово пр-во H_A

$$u \in H_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u \in D_A \\ \exists u: \; \{u_n\} \in D_A: \; |u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{array}\right.$$

Лекция 4

4.1 Энергетическое пространство

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)

На D_A : $\begin{array}{l} [u,v]_A = (Au,v)_H \\ \|u\|_A = [u,u]_A \end{array}$

H_A — энергетическое пространство

$$\|u\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|u\|_A \tag{4.0}$$

$$u \in H_A \begin{cases} u \in D_A \\ \exists\{u_n\} \in D_A : \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_A = 0 \end{cases}$$

Теор. $\forall u \in H_A \to$ только один элемент из H, причем различные $u_1, u_2 \in H_A$ отвечают различным элементам из H

Док-во.

1. $u_n : \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_A = 0$
   $\|u_n - u_m\|_A \le \|u_n - u\|_A + \|u_m - u\|_A \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$
   $\Rightarrow \|u_n - u_m\|_H \to 0$ при $n, m \to \infty$
   $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_H = 0$

2. $u_{1,n} \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_1, \quad u_{2,n} \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_2$
   u_1 и $u_2 \to u \in H, \qquad u = u_1 - u_2$
   $\exists\{u_n\} \in H_A \qquad \|u_n - u\|_A \to 0$
   $\forall f \in H \qquad |(f, u_n)| \overset{\text{КБ}}{\le} \|f\| \cdot \|u_n\| \le \|f\|_A \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \|u_n\|_A \to 0$
   $\forall \varphi \in D_A \qquad A\varphi = f \in H$
   Тогда $(A\varphi, u_n) \to 0$
   $[\varphi, u_n]_A = (A\varphi, u_n) \to 0$
   Переходя к пределу: $[\varphi, u]_A = 0 \ \forall\varphi \qquad \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ □

Пример 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \qquad D_B = \{u \in C^2[0,1],\ u(0) = u(1) = 0\}$$

$$H = L_2(0,1),\ u \in H_B$$

$$u \in H_B, \quad \exists\{u_n\} \in D_B \quad \|u_n - u\|_B \to 0$$

$$\|u_n - u_k\|_B \le \|u_n - u\|_B + \|u_k - u\|_B \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$$\|u_n - u_k\|_B^2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$$\Rightarrow \{\frac{du_n}{dx}\} \text{ фундаментальна в } L_2(0,1) \Rightarrow \exists v(x) \in H$$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int\limits_0^x u_n'(t)dt, \quad u_n \in D_B, \qquad \text{при } x = 0 :\ u_n(0) = 0$$

Переходя к пределу: $u(x) = \int\limits_0^x v(t)dt$ и $u(0) = 0$

$$u(1) = \int\limits_0^1 v(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 u_n^{'}(t)dt = \lim_{n\to\infty} (u_n(1) - u_n(0)) = 0$$

Следовательно, u абсолютно непрерывная на$[0, 1]$, удовлетворяет граничным условиям $u' \in L_2(0, 1)$

Пример 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u(x); \qquad u'(0) + \alpha u(0) = 0,\ u'(1) + \beta u(1) = 0$$

$\exists\{u_n\} \in D_C, \quad \alpha > 0,\ \beta \geq 0$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$$|u_n(0) - u_k(0)| \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int\limits_0^x u_n'(t)dt$$

$$u(x) = c_0 + \int\limits_0^x v(t)dt$$

Теор. Пусть оператор A положительный, но не положительно определенный. Тогда

$$u \in H_A : \quad u \in H \Leftrightarrow \exists\{u_n\} \in D_A$$

$$\|u = u_n\|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{и} \quad \|u_k - u_n\|_H \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

Пример 3

4.2 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f$$

$$A : \mathcal{D}(A) \in H \to H;$$

Теорема
А положителен в Н уравнении **??** $\exists$ не более одного решения.
Доказательство

$u_1, u_2 -$ Решения **??**...

Теорема о функциональной энергии
A - положительный в H; u - решение **??** $\rightleftarrows$ доставляет минимум функционала

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H$$

Доказательство
...

Пример 4

$$\Delta^2\omega = \frac{\partial^4}{\partial x^4}\omega + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial^2\omega\partial^2 y} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}$$

$$\mathcal{D}_A = \{\omega \in c^4(\overline{\Omega}); \omega|_S = 0; \frac{\partial\omega}{\partial n}|_S = 0\}$$

$$A - \omega = \frac{a(x,y)}{\mathcal{D}}$$

4.3 Обобщение решения задачи о min для ф.э.

$A -$ Поллжительно определено в H $Au = f$**??**$f \in H$

фикс $f \in H \forall u \in H_A (u, f)_H :$ ф-ла $: H_A \to \mathcal{R}$

$$|(u, f)_H| \leq ||f||_H ||u||_H \leq ||f||_H \frac{1}{\gamma}||u||_A; \gamma||f||_H - const$$

Опр $(f, u) \Rightarrow$ по Т Рисса $\exists u_0 \in H_A (f, u)_H = [u, u_0]_A$

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0] - [u_0, u]_A$$

$$+ - [u_0, u_0]_A$$

$$F(u) = ||u - u_0||_A^2 - ||u_0||_A^2$$

$argmin_{u \in H_A} F(u) = u_0$ Обощенное решение $Au = f$

Если H сепарабельно, энергетическое про-во тоже сепарабельно, $\exists\{\omega_n\}$ ПОНС

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n]\omega_n\textbf{??}$$

$$u = \omega_n [u_0 \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H \omega_n$$

Лекция

5.1 Применение энергетического метода для краевых задач

1. Немного опазадал, пример часть примера пропустил ...

$$(Lu, u)_H = \sum_{k=0}^{m} \int_{x_1}^{x_2} p_k(x)(\frac{d^k u}{dx^k})^2 dx >= \int_{x_1}^{x^2} p_{n_1}(x)(\frac{d^m u}{dx^n} dx^3) >= p_0 \int_{x_1}^{x^2} (\frac{d^m u}{dx^m} dx = p_0 ||u_(m)||_H^2)$$

...

$$(Lu_M) >= \partial^2 ||u||_H^2, \gamma = \sqrt{p_0}(\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1})^m$$

...

$$||u||_A \leq \sqrt{p_0} ||u||^{(m)}{}_H \exists \{u_N(x)\}$$

$$lim_{n \to \infty} = 0; u_0 - \text{ точное решение}$$

$$||u_n - u_k||_A <= ||u_n - u_0||_A + ||u_k - u_0||_A \to 0$$

$$u_n^{(l)}(x_1) = u_k^(l)(x_1) = 0, l = \overline{0, m-1}$$

...

2. Изгиб балки

$$L_\omega = \frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}] + K\omega = q(x)$$

$\omega -$ Прогиб балки

$E -$ модуль Юнга

$I(x) -$ момент инерции

$q(x) -$ интенсивность нагрузки на балку

$K -$ коэф податливости основания

$$\omega(0) = \omega(l) = 0$$

$$\omega'(0) = \omega'(l) = 0; A - \text{ Положительно определен}$$

Аналогично задачи минимизации функционала

$$F(\omega) = \int_0^l (EI(x)\omega''^2 + K\omega^2 - 2q(x\omega))dx = (L\omega, \omega) - 2(\omega, q)$$

Воспользуемся методом Рица

$$u_n(x)_{n=1}^{\infty}, \phi_n(x) = (x-l)^2 x^{n+1}, \text{ Полная система в } H_A$$

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x) = (x-l)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k+1}$$

$$\sum_{n}^{k=1} a_k A_{1k} = b_{ij}; i = \overline{1,n}$$

$$b_j = (q, \phi_j)_H = \int_0^l a(x)(x-l)x dx$$

$$A_{ik} = (L\phi_i, \phi_k)_H = \int_0^l (EI(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_k}{dx^2} + k\phi_i\phi_k)dx$$

...

$$\omega(0) = 0; \omega''(l) = 0$$

$$\omega'(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2})_{x=0}^{x=l} = 0$$

Тут тоже можно доказать полажительную определенность

3. Краевая задача для систем ОДУ

$$-\sum_{k=1}^{s}[\frac{d}{dx}(p_{jk}(x)\frac{du_k(x)}{dx}) - q_{jk}(x)u_k(x)] = f_j(x)$$

краевые ...

$$-\frac{d}{dx}[P(x)\frac{du}{dx}] + Q(x)u(x) = f(x)$$

$$u(x_1) = u(x_2) = 0$$

$$(u, v)_{H=L_2(x_1,x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} u(x) \cdot v(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{s} u_k(x) v_k(x) dx$$

5.1.1 Теорема

$P(x), Q(x)$ симметр. $x \in [x_1, x_2] \Rightarrow A$ Симметричный

Доказательство

$$(Au, v)_H = -\int_{x_1}^{x^2} v(x) \cdot \frac{d}{dx}[P(x)\frac{du}{dx}]dx + \int_{x_1}^{x_2} v(x) \cdot Q(xu(xdx)) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} P\frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + v(x \cdot Q(x)u(x))dx$$

$$Qu \cdot v = \sum_{j,k=1}^{s} q_{jku_k \cdot v_j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{s} q_{k,j}v_j \cdot v_k$$

Следовательно оператор симметричен

5.1.2 Теорема

$P(x), Q(x)$ симметрич на $[x_1, x_2]$

$P(x)$ положит. опр. $Q(x)$ неотр на $(x_1, x_2] \Rightarrow A$ положительно определен

доказательство

$P(x)$ пол. опр $\forall x \Rightarrow$ пусть $\lambda_1(x) > 0$

$\exists \lambda > 0 = const; \lambda_1(x) > \hat{\lambda} > 0 x \in [x_1, x_2]$

$\forall t = (t, ..., s)$

$$P(x)t \cdot t = \sum_{j,k=1}^{s} P_{jk}(x)t_j t_k \geq \lambda_1(x) \sum_{k=1}^{s} t_k^2 \geq$$

$$\geq \hat{\lambda} \sum_{k=1}^{s} t_k^2$$

$$Q(x)t \cdot t = \sum_{k,k=1}^{s} q_{jk}t_j t_k \geq 0$$

$$(u, u)_H = \int_{x_1}^{x_2} (P\frac{du}{dx} \cdot \frac{du}{dx})dx \geq \hat{\lambda} \int_{k=1}^{s} (\frac{du_k}{idx}^2)dx$$

$$(Au, u)_H \geq \frac{2\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2} \int_{x_1}^{x_2} (\sum_{k=1}^{s} u_k^2)dx = \frac{2\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2}dx = \frac{\hat{\lambda}}{(x_2 - x_1)^2}||u||_H^2$$

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 ||u||_H^2$$

...

5.2 Основные кр задачи для ур-я Пуассона

$-\Delta u = f(p)$ в $\Omega \in \mathcal{R}^m$

з. Дирихле

$u|_{\partial\Omega} = 0$

$$Au = -\Delta u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

$$P_A = \{u \in c^2(\overline{\Omega}_1) u|_{2\Omega} = 0\}$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$(-\Delta, u)_h = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial n}{\partial x_i})^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_\Omega (grubu)^2 d\Omega \geq 0$$

$\rightleftarrows$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H$$

$$F(u) = \int_\Omega ((gradu)^2 - 2uf) d\Omega$$

$$[\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma(P)u]|_{\partial\Omega} = 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_\Gamma (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial u^2} dS \geq 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Rightarrow u = condt \int_{\partial\xi} \gamma c^2 dS = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$F(u) = \int_\Omega ((gradu)^2 - 2uf) d\Omega + \int_{\gamma\Omega} \gamma n^2 dS$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$$

з Неймана
??, **??**

$$(-\Delta, u)_H = -\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dS + \int_{\Omega}(gradu)^2 d\Omega \geq$$

$$u == 1(-\Delta u, u)_H = 0$$

при $V == 1$

$$\int_{\Omega} \Delta u d\Omega = \int_{\partial\overline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$$

$$S_{\Omega} f d\Omega = 0$$

Условие разрешимости **??** **??**

Лекция 6

**пропустил начало (почти треть) **
Уравнение Фридрехса в общем виде:

$$\int_{\omega}\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial n}{\partial x_k})^2 d\Omega \geq x^2 \int_{\Omega} u^2 dx$$

$$u|_S = 0$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega =\leq c\{\int_{\Omega}(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial n}{\partial y}d\Omega) + \int_{\Omega} u^2 dS\}$$

$$(\frac{\partial(fv)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial(fv)}{\partial y})^2 = f^2[(\frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial v}{\partial y})^2)] - vf\Delta f + \frac{\partial}{\partial x}(v^2 f\frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial}{\partial y}(v^2 f\frac{\partial f}{\partial y})$$

Преобразуем правую и левую части

$$v^2((\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2) + f^2((\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2) + 23\frac{\partial v}{\partial x}f\frac{\partial f}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial y}f\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$v^2(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + v^2(\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 2v\frac{\partial v}{\partial x}f\frac{\partial f}{\partial x} + v^2 f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}^2_v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} - v^2 f\Delta f + f[(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2]$$

Это предполагается очевидным XD

$$\int((\frac{\partial(fv)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial(fv)}{\partial y})^2)d\Omega \geq +\int_{\Omega} vf\Delta f d\Omega + \int_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS$$

$$-\int_\Omega vf\Delta f d\Omega \leq \int_\Omega ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2)d\Omega + \int_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS$$

$$f = \sin(\frac{\pi x}{a}) \cdot \sin(\frac{\pi y}{b})$$

$$\Delta f = -\pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \cdot f - \int_\Omega v^2 f\Delta u^2 = \int_\Omega u^2 s\Omega\pi^2()$$

$$|\int_{\partial u} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS| \leq \int_{\partial\Omega} v^2 f|\frac{\partial f}{\partial n}|dS \leq c_1\int_{\partial\Omega} u^2 d\Omega$$

$$\pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})\int_\Omega y^2 d\Omega \leq ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2)dx + c_1\int_{\partial\Omega} v^2 dS$$

$$c = min\{\frac{c_1}{\pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}; \frac{1}{\pi}(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})\}$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dS \geq \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega + \sigma\int_{\partial\Omega u^2 dS} \geq \sigma\{(gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS\}$$

$$\frac{1}{c}||u||_H^2 \leq \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\frac{\sigma_1}{c}||u||_H^2 \leq \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma}{c}}$$

Лекция 7

$$-(\Delta u, u)_H \geq \frac{\sigma_1}{c}||u||_H$$

$$\Delta u = f \text{ в } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Omega = 0$$

7.1 Не-во Пуанкаре

$$(x_1, y_1), (x_2, x_2) \in \Omega$$

$$\Omega u^2 d\Omega \in A \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega + B(\int_\Omega u d\Omega)^2$$

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leq (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + B(\int_\Omega d\Omega)^2$$

$$u^2(x_2, y_2) + u^2(x_1, y_1) - 2u(x_2, y_2)u(x_1, u_1) = (\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial n}{\partial x}(x, y_1)dx)^2 + (\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial n}{\partial y}(x_2, y)dy)^2 + 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial n}{\partial x}(x_1, y_1)dx \int$$

$$\iiiint u^2(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = ab \int_\Omega u^2 d\Omega$$

$$ab \int_\Omega u^2 d\Omega$$

$$\iiiint u(x_2, y_2)u(x_1, y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = (\int_\Omega u d\Omega)$$

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^a \int_0^b a \int_0^a (\frac{\partial u}{\partial x}(x_1, y_1)^2) dx dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 =$$

$$= a^2 b ... \int (\frac{\partial u}{\partial x}(x, y))^2 d\Omega$$

$$2ab \int_\Omega u^2 d\Omega - 2(\int_\Omega u d\Omega)^2 \leq 2ab\{a^2 \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + d \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial y})^2 d\Omega)\}$$

$$A = max\{a^2, b^2\}, B = \frac{1}{ab} : ab$$

$$D_N = D(A_N) = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0; \int_\Omega u d\Omega = 0\}$$

$$||u||_H^2 \leq A \int_\Omega \sum_{k=1}^m (\frac{\partial u}{\partial x_k})^2 d\Omega = \overline{A}(Lu, u)_H \omega = \frac{2}{\sqrt{\overline{A}}}(A_N u, u) \geq \omega^2 ||u||_H^2$$

Даже $A : A_n$ или A_D $[u, V]_A = \int_\Omega gradu \cdot fradV d\Omega, ||u||_A = \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega$

$u, V \in L_2(\Omega); \psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$

Если $\forall \psi \in c_0^\infty \int_\Omega u \dfrac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega V \psi d\Omega$

Пусть $u \in H_{A_D} \exists \{u_N\} \in D_{A_D}$

$$||u_n - u||_H \to_{n\to\infty} 0$$

$$||u_n - u||_A \to_{n\to\infty} 0$$

$$\int_{(gradu_n = gradu_0)^2}^2 d\Omega = \sum_{k=1}^m \int (\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{u_l}{\partial x_k})^2 d\Omega \to 0$$

$||\dfrac{\partial u_n}{\partial x_k} - V||_H \to 0$ покажем, что $\Omega \to 0$

Пусть $\psi \in c_0^\infty(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega u_n \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\Omega = -\int_\Omega \psi \frac{\partial u_n}{\partial x_j} d\Omega$$

$$(u_n, \frac{\psi}{\partial x_k})_H = (\frac{\partial u_n}{\partial x_k; \psi})_H \to (u, \frac{\partial \psi}{\partial x_k})_H; = -(\psi, V)_H$$

7.2 Неоднородные краевые условия

$$\Delta u = 0 \Omega \in \mathcal{R}^{\Updownarrow}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi$$

Пусть $\exists \psi(P); \psi \in c(\overline{\Omega})$,

$\psi(P) = \phi(P)$

$\dfrac{\partial \psi}{\partial x_k} \in C(\Omega), k = 1\overline{1, m}$

$$\Phi(u) = \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega$$

$D_\Phi = \{u : ref7_*\}\Phi(P) + \eta(P),$

$\eta : \mathbf{??} + \eta|_{\partial\Omega} = 0$

Пусть ф-ии $u_0(P)$ достигает $min\Phi(u) : u_0(P)$ реш. **??**, **??**
** 1-3 и еще на гарнице ноль

$u_0 + t\eta \in D_\Phi, \forall t \in \mathcal{R}, \eta : \mathbf{??}$

$\Phi(u_0 + th)$ достигает min при $t = 0$ как скал функция t

$$\frac{d}{dt}\{\Phi(u_0+t\eta)\}|_{t=0} = \{\frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{k=1}^m (\frac{\partial(u_0+t\eta)}{\partial x_k})^2 d\Omega\}|_{t=0} = \{\frac{d}{dt}\int_\Omega \sum_{k=1}^m [(\frac{\partial u_0}{\partial x_k})^2 + 2(\frac{\partial u_0}{\partial x_k})^2 + 2\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\cdot t\frac{\partial u}{\partial x_k} + t^2(\frac{\partial \eta}{\partial x_k})^2$$

...

$\Rightarrow \int_\Omega \eta\Delta u_0 d\Omega = 0 \Rightarrow$

$\eta\mathbf{??}$ плотность в $L_2(\Omega) = H$

$\Rightarrow \Delta u_0 = 0$

$\Phi(u) = \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega$

$\psi : \mathbf{??} u = \psi - V$

$\Phi(u) = \Phi(\psi - V) = \int_\Omega (grad(u = V))^2 d\Omega =$

$= \int_\Omega (grad\psi)^2 d\Omega - 2\int gradV \cdot grad\psi d\Omega + \int_\Omega (gradV) d\Omega$

$F(V) = ||V||^2_{A_D} - 2\int gradV grad\psi d\Omega; V \in H_D = H_{A_D}$

$lV = \int_\Omega grad\psi gradv d\Omega; |lV| \leq \int_\Omega (grad\psi)^2 d\Omega \int_\Omega (gradV)^2 d\Omega = c||V||_{H_{A_D}} \Rightarrow l -$ ограничение

$I\forall$ ограничение Ω

$\psi \in H'(\Omega) : \exists!$ Обобщен. реш Дирихле

$u \in H(\Omega)$

7.3 ур-е с переменным коэф

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x}(A_j k(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}) + c(P)u; Lu = f\Omega \in \mathcal{R}^{\Updownarrow}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$(N[u] + \partial(P)u)|_{\partial\Omega} = 0$$

$$N(u)|\partial_{\partial\Omega} = u$$

Формула Грина

$$\int_{\Omega}(VLu - uLV)d\Omega = -\int_{\partial\Omega}(VN(u) - uN(V))dS$$

При условиях **??** и **??** интеграл сокращается к 0, поэтому останется только **??**.

$$N(u) + \sigma u = 0$$

$$N(v) + \sigma v = 0$$

$$VN(u) + \sigma uV - bN(V) - \partial uV = 0$$

на $\partial\Omega VN(u) - uN(V) = 0$

$\Rightarrow$ гр. у. **??**, **??**, **??**

Опр L элементт в $\overline{\Omega}$, если $A_{jk}(P)$:

$$\exists_{\mu_0} = const > 0 \forall t1, ...t_m \in \mathcal{R}; \forall P \in \overline{\Omega}$$

$$\sum_{j,k=0}^{m} A_j k(P) t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{j,k=1}^{m} t_k^2$$

Пример оператор Триколи

$$Ly = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$A_H = y, A_{22} = 1 A_{21} = A_{12} = 0$$

$$yt_1^2 + 1 \cdot t_2^2 \geq Bt_1^2 + t_2^2 \geq \hat{B}(t_1^2 + t_2^2)$$

$$\forall \Omega : \overline{\Omega} \in \mathcal{R}x(x, +\infty) L \text{ элиптич в} \Omega$$

L эллептический в $\overline{\Omega}$

$C(P) \geq 0$ ф-ла Грина

$$(Lu, u)_H = \int uLud\Omega = \int_\Omega (\sum_{j,k=1}^m A_jk \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2) d\Omega - \int_\partial uN(u)dS$$

??/?? Дир Лейли $\int_{\partial\Omega} (\cdot) dS = 0 \gamma = \sqrt{c_0}$

$$(Lu, u)_H \geq a_1^2 d\Omega \geq c_0 \int_\Omega u^2 d\Omega =$$

$$= \Omega^2 ||u||_H^2$$

?? Смен кр з $N(u) = -\sigma u$ на $\partial\Omega\sigma(P) \geq \sigma_0 > 0$

$$(Lu, u)_H \geq \sigma \int_{\partial\Omega} u^2 dS \geq c_0 ||u||_H^2$$

Лекция 8

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (J_{jk}(P) \frac{\partial n}{\partial x_k} + c(P)u = f(P))$$

1. з Дирихле

$$(Lu, u) = \mu \sum_{j=1}^m \int_\Sigma (\frac{\partial n}{\partial x_j})^2 d\Omega \geq \Sigma^2 ||u||_H^2; \sigma = \sqrt{ae\mu_0}$$

2. з Робэна

$$(Lu, u) \geq (\alpha(\int_\Sigma \sum_{j=1}^n) (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega} n^2 dS); \Rightarrow (Lu, u) \geq \alpha ||u||^2$$

3. з Неймана

$$C(P) = 0$$

$$Lu = -\sum_{j,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_k} l) = f(P)$$

$$\int_\Omega (\cdot) d\Omega + \text{ ф-ла Остроградского}$$

$$-\int_S \sum_{j,k=1}^{m} A_j \frac{\partial n}{\partial x_k} cos(\overline{n}, x) dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(P) d\Omega = 0$$

$$\int_\Omega u d\Omega = 0$$

$$D_{L_N} = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), N(u)|_{\partial\Omega} = 0, \int_\Omega u d\Omega = 0\}$$

$$(L_N u, n) = -\int_\Omega u \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x}) d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_j} \frac{\partial n}{\partial x_n} d\Omega \geq \mu_0 \int_{k=1}^{m} (\frac{\partial n}{\partial x_k})^2 d\Omega$$

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leq A \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial n}{\partial x_0} dS + B(\int_\Omega u\Omega)^2)$$

8.1 Энергетический метод для пложительных операторов

$$Au = f$$

Все еще работает теорема о функциональной энергии

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

Энергетическое пространство попрожденное опреатором H_A, вообще говоря его элементам нельзя соспоставить элементы из Гильбертова.

$H_A -$ Энергетическое пр-во

(u, f) на $D_A -$ плотно в H и в H_A

$(u, f) = lu$ Функционал $\rightarrow$ может быть ограничен или не ограницен

Если ограничен в H_A прододжим на H_A
в H_A по теореме Рисса $\exists u_0 \in H_A (u, f) = [u, u_0]A$

$$[u - u_0, u - u_0] = ||u||_A^2 + ||u_0||_A^2 - 2[u, u_0]_A$$

$$F(u) = ||u||_A^2 - 2[u, u_0]_A = ||u - u_0||_A^2 - ||u_0||_A^2$$

Минимум достигается на элементе $F(u) = u_0$. Но u_0 может не лежать в энергетическом про-ве. Обобщенное решение с конечной энергией.

Если H сепарабильно $\Rightarrow H_A$ сепарабильно $\Rightarrow \{\phi_n\}$ в H_A

$$u_o=\sum_{n=1}^{\infty}[u_0,\phi]_A\phi$$

$$[\phi_n,u_0]=l\phi_n$$

Если $\{\phi\}\in D_A\Rightarrow l\phi_n-(f,\phi_n)\Rightarrow u_o=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n$

$$u_k\sum_{n=1}^{k}(f,\phi_n)||u_k-u_0||_A\rightarrow_{k\rightarrow\infty}0$$

Если $\{\phi\}\in D_A\Rightarrow l\phi_n-(f,\phi_n)\Rightarrow u_o=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n\Rightarrow=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n$

8.2 Эллиптические уравнения в бесконечной области

$\Omega=\infty$ обл $;\partial\Omega$

$$-\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{kj}^{(P)}\frac{\partial u}{\partial x_k})=f(P)$$

з Дирихле

$U|_{\partial\Omega}=0;A_{jk}$ отр A

$$D_A=\{u\in C^2(\overline{\Omega}),u|_{\partial\Omega}=0,b(P=0),|P|>>1\}$$

$A-$ положительно определен

$HuD\exists u_0$ об реш с кон энергией

$\exists g(P):f(P=divg(P))$

$$\int_{\Omega}|g(P)|^2d\Omega<\infty$$

$h(P)l$ обобщенная $\div g(P)$. Если $\forall\phi(P)\in c_0^{\infty}(\Omega)$

$$||u_0||_A^2\leq C\int_{\Omega}(g(P))^2d\Omega$$

Дост усл - я

$m\geq 3\int_{\Omega}|P|^2f^2(P)d\Omega<\infty\Rightarrow||u_0||_A^2\leq C^2\int_{\Omega}|P|^2f(\beta)d\Omega$

$m\geq 2\int_{\Omega}f^2(P)d\Omega<\infty$ и $f(P)=0|P|\Rightarrow 1$

8.2.1 Эллиптическое уравнение в бесконечной области

$$H_{A_D} = \{u \in H'(\Omega) \text{ и } u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_{A_H} = \{\exists 0 \delta \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)\}$$

$$F(u) = \int_{k,j=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial x_n} d\Omega - 2lu$$

$$l_N n = -\int_\Omega grubugd\Omega + \int_{\partial u} ug_{\overline{n}} dS$$

$$l_D u = -\int_\Omega grubgd\Omega$$

$$lu = \int_\Omega u(P)f(P)d\Omega$$

$$Au = f$$

$$B_j u = 0; j = 1, q$$

$$H > D_A$$

знак принадлежит в обратную сторону

$$H_A$$

При условии $u \in D_A$, но не обязательно $u \in H_A$ естественные $B_j : u \in H_A$ главные гр условия для A.

$$-\Delta u = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \partial u = 0, \sigma > 0$$

$$(-\Delta u, V)_H = -\int V \Delta u d\Omega$$

$$\int grudugradV d\Omega - \int_{\partial\Omega} V \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$F(u, u) = ||u||_A^2 - 2(f, u) = \int_\Omega (grud^2 u - 2u)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \partial u^2 dS$$

$$u_0 = argminF;$$

$$\frac{d}{dt}(F(u_0 + t\eta))|'_{t=0} = 0$$

$$-\int_\Omega \eta(\Delta u_0 + f)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \eta(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \partial u_0)dS = 0$$

Лекция 8

9.1 Метод Бубнова-Галеркина

$$Lu = f, D_2 \text{ плотность в H}$$

Опреатор L не обязательно положительный.

$$Bu = 0$$

$$\{\phi_n\} \in D_A \text{ координатные функции}$$

Удовлетворяет (??)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \phi_k(P)$$

$$a_k \text{ выбирается из условия, что } Au_n - f = \perp \phi_1, .., \phi_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} (L\phi_k, \phi) a_k = (f, \phi_j) j = \overline{1, n}$$

9.2 Применение метода Б-Г к интегральному уравнению Фредгольма

$$u(P) - \int_\Omega K(P, Q) u(Q) d\Omega f(P) p \in p \in \Omega$$

$$\int_\Omega \int_\Omega k^2(P, Q) d\Omega_p d\Omega_; : \Theta$$

$$\int f^2(P) < \infty \exists \text{ решение } u(P) \text{ в H}$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$\{\widetilde{\phi_n}\} \text{ ПОНС } ; (\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$$

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} a_k \phi_k(P)$$

$$a_m - \sum_{k=1}^{n} \omega_m a_k = f_m$$

$$f_m = (f_1, \phi_m)$$

$$\Omega_{mk} = \int_\Omega \int_\Omega k(P, Q) \phi_m(P) \phi(Q) d\Omega_P d\Omega_Q$$

$$f_n(P) = \sum_{k=1}^{n} f_k \phi_k(P)$$

$$lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega (K_n(P, Q) - K(P, Q))^2 d\Omega_P d\Omega_Q = 0$$

$$lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n f^2) d\Omega$$

Вспомогательное уравнение

$$u_n(P) - \int_\Omega K_n(P,Q) u_n(Q) d\Omega = f_n$$

Из + ИУ при дос большом

$$u(n)\exists! \text{ реш } \text{ и } ||m_n - u||_H \to^{n\to\infty} 0$$

$$u_n(P) = \sum_{k=1}^n A_k \phi_K(P)$$

$$A_k = \sum_{k=1}^n \omega_{kl} \int_\Omega u_l(Q) u_k(Q) d\Omega + (f, \phi_k)$$

$$A_k - \sum_{l=1}^n \omega A_k = f_k$$

9.3 Элементы теории приближение

$H_A \supset H_N$ - конечномерное

$\exists$ норм про-во X: $\exists$ элемент наилучшего приближения

$\forall u \in X : \rho(u, H_N) = inf_{V\in H_N} \rho(u, V) X = C[a, b]$

$1, x, x^2, ..., x^N, ...$

$|C[a, b] \to P_{N-1}(x)$

$$L_N(x) = \sum_{n=1}^n f(x_k) l_k(x)$$

$\{l_k(x)\}-$ система фундаментальных многочленов

$$l_k(x) = \frac{(x - x^1)...(x - x_N)}{(x_k - x_1)...(x_k - x_N)} = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_K)}$$

$l_k(x_m) = \delta_{km}; \omega(x) = {}^m_{k=1}(x = x_k)$

$||f - L_N(x)||_C \leq (1 + ||P||)\rho_N(f, H_N)$

$$||P|| = max_{x\in[a,b]} \sum_{k=1}^n |l_k(x)| = \Lambda_N - \text{ построение Лебега}$$

Λ_N- неогр возростает при $n \to \infty$ для всего $C[a, b]$и сущ зависит от выбора сетки $x_1, ..., x_N$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{2}{b-a} t_k; t_K = -cos\{\frac{\pi}{2N}(2k-1)\}$$

$$\Lambda_N \approx \frac{2}{\pi} lnN + 1 - q_N, 0 << q_N < \frac{1}{4}$$

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p(x\frac{du}{dx}) + q(x)u)$$

$$Lu = f \ + \text{гр у} \ u(a) = u(b) + 0$$

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k l_k(x); a_k = u_N(x_k)$$

$$\sum_{p=1}^{n} a_p(Ll_p, l_K) = (f, l_k) = \int_a^b f(x) ln(x) dx = f_K$$

$$l_k(x_m) = \delta_{km}, \omega(x) = {}_{k=1}^{m}(x - x_k) \text{ СЛАУ с тuравнений}$$

$$a_{kl} = (Ll_k, l_p) = \int_a^b p(x) \frac{dl_n(x)}{dx} \frac{dlp(x)}{dx} + \int_a^b a(x) q(x) l_k(x) f(x) dx$$

$$x_1 = a; x_N = b \Rightarrow$$

$$l_1(x_1) = 0; l_N(X_N) = 0$$

$$u_n(x) = \sum_{k=2}^{N-1} u(x_K) l_N(x)$$

$$\sum_{p=1}^{N-1} u_k a_{Kp} = f_k$$

$$p = w$$

Пример

$$p \equiv 1, a \equiv 0$$

$$f(x) = \{1, x \geq 0; -1, x < 0\}$$

$$N = 5; x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = 1$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 - \frac{3}{2}}$$

$$l_3(x) = (x + 1(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}))$$

$$l_4(x) = \frac{(x + 1(x + \frac{1}{2})x(x-1))}{\frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}$$

$$u_N - u_2 l_2(x) + u_3 l_3(x) + u_4 l_4(x)$$

$$a_{kp} = \int_{-1}^{1} \frac{dl_k}{dx} \frac{dl_P}{dx} dx$$

период гр у

$$[a, b] = [0, 2\pi]$$

$$u_N = \frac{a}{2} + \sum_{k=1} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

$$x_k = \frac{2\pi}{x}(k-1) a_0, a_k, b_k \text{ Упр.}$$

$$dim H_N - 2N - 1$$

$$a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

$$\Lambda_N \frac{1}{\pi} ln N + \delta(2 - \frac{2}{\pi}), 0 < \delta < 1$$

9.4 Введение в теорию степенных сплайнов

$$[a,b] a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b, h_K = s_k - x_{k-1} k = \overline{0, N-1}\, h_k = x + 1 - x_k$$

Определение
Сплайн степени n, дефекта ν:

$$S_{n\nu} = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_p^(k)(x - x_k)^P = \sum_{p=0}^{n} b'_P (x_{k+1} - x)^P$$

$$(x - x_K)_t^P = \{(x - x_k)^P, x \geq x_k; 0, x \leq x_k\}$$

Лекция

10.1 Степенные сплайны

$\Omega = [a, b]$ Разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

$h_I = x_i - x_{i-1}$

$h = max_{i=1,N} h_i$

1. кусочнопостоянные сплайны

   задается многочленами степени 0.

   $$\phi_i(x) = 1, x \in (x_{i-1}, x_i); 0, x \not\in (x_{i-1}, x_i)$$

   $$H_N = \lambda(\phi_1, ..., \phi_N)$$

   (a) Система линейно независима

   (b) $(\phi_i, \phi_j) = (h_i), i = j$

   Теорема:

   $$\forall u \in W'_p(a,b) \exists V(x) \in H_N :$$

   $$||u - v||_{L_2(a,b)} \leq c \cdot h ||u||_{W'_p}(a,b)$$

   $$||u||_{W'_p}(a,b) = ||u||_{L_p(a,b)} + ||\frac{du}{dx}||_{L_p(a,b)}$$

   Д

$$= \int_{i=1}^{N} u_i\phi_i(x)$$

$$u_i = \frac{1}{h_i}\int_{x_i}^{x_{i-1}} uu(\xi)d\xi$$

$$||u-v||^p_{L_p(a,b)} = \int_a^b |u-v|^p dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{xi} |u(x) - \frac{1}{h_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_I} u(\xi)d\xi =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{1}{h_i}|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(u(x)-u(\xi))d\xi|dx =$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_\xi^x \frac{du}{d\eta}d\eta|^P dx \leq=$$

$$\leq \sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{du}{d\eta}d\eta|^P dx =$$

$$= h_i(\int_{x_i-1}^{x_i}(\frac{du}{d\eta}d\eta))^P$$

Неравенство Гелдера

$$|\int_\Omega u(x)v(x)dx \leq (\int_\Omega |u(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}} (\int_\Omega (u(x))^P dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$|\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1\cdot|\frac{du}{d\eta}|d\eta \leq (\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1^q dx)^{\frac{1}{q}} (\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{du}{d\eta}|^P dx)^{\frac{1}{p}}$$

$$(\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{du}{d\eta}|d\eta)^P \leq h_i^{\frac{p}{q}} \int_{x_i-1}^{x_i} |\frac{du}{d\eta}|^P d\eta$$

$$||u-v||^P_{L_P(a,b)} \leq \sum_{i=1}^{N} h_i^{q+\frac{p}{q}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{du}{d\eta}|^P d\eta \leq h^{1+\frac{p}{q}} \int_a^b |\frac{du}{d\eta}d\eta \leq h^P ||u||^P_{W'_P}$$

$$|x_{(x)} - V^{(x)}| = |\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(u(x)-u(\xi))s\xi| = |\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_\xi^x \frac{du}{d\eta}d\eta| \leq$$

$$\leq h_i sup_{(x_{i-1},x_i)} \geq h||u||_{W'_{(a,b)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||u-v||_{L_\infty(a,b)} \leq h||u||_{W'_\infty(a,b)}$$

Для устойчивости нам нужно чтобы матрица грамма $\widetilde{M} = ((\phi_i,\phi_j))$ а с.н. были отр $a_1 < |\Lambda| < a_2$ a_1, a_2 не зав от N

$$wave\phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h_i}}\{1, x\in(\phi_{i-1},\phi_i); 0, x\not\in()\}$$

$$\Omega \subset \mathcal{R}^m, \Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$$

$$max_{i=\overline{1,N}} sup_{x_{ij}\leq\Omega_i}|x-y| \leq h$$

2. Кусочно линейные базисные функции

$$0 < x_0 < x_1 < ... < x_N = b$$

$\forall$ узлы сетки $x_i \Rightarrow \phi_i(x) = \{\frac{x-x_{i-1}}{h_i}, x \in (x_{i-1}, x_i); \frac{x_{i_1} x_i}{h_{i+1}}, x \in (x_i, x_{i+1}); 0, x \not\in (x_{i-1}, x_{i+1})\} i = \overline{i, N-1}$

$$\phi_0(x = \{\frac{x_1 - x}{h_1}, x \in (x_0, x_1)); 0, x \not\in (x_{N-1}, ..., x_N)\}$$

$$(\phi_i, \phi_j)_{L_2(\Omega)} = \{\neq, |i-j| \leq 1; 0, |i-j| > 1\}$$

$$\nu = \sum_{a_i}^{\phi_i(x)} \in H_N$$

Теорема

$$u \in W_2^2(\Omega) \Rightarrow \exists V \in H_N = W_2^{1,n}(\Omega)$$
$$||u - v||_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 ||u||_{W_2^2}(\Omega)$$
$$||u - v||_{W'_2}(\Omega) \leq c_2 \cdot h||u||W_2^2(\Omega)$$
$$v(x) = \sum_{i=0}^{N} u(x_i)\psi_i(x)$$
$$\forall x \in (x_{i-1,x})$$
$$u(x) - v(x)$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i} x \in (x_{i-1}, x_i)$$
$$u(x) - v(x) = \int_{x_{i-1}}^{x} \frac{d}{d\xi}(u - v) d\xi =$$
$$= \int_{x_{i-1}}^{x} [\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{\phi(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i}] d\xi$$
$$= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{du(\eta)}{du}) d\eta =$$
$$= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_[i-1]}^{x_i} d\eta \int_{\eta}^{\xi} \frac{d^2u}{dt}(t) dt$$
$$\Rightarrow |u(x) - v(x)|^2 \leq h_i 4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\frac{d^2u}{dt^2}|^2, x \in (x_{i-1}, x_i)$$
$$\sum_{i=1}^{N} (\cdot) ||u - v||_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 ||u||_{W_2^2}(\Omega)$$

Лекция

Получение нормы в 0v21
Теорема:
Если $n(x) \in W^2_\infty(\Omega)$, то $||u-v||_{L_\infty}(\Omega) \leq c_3h^2||u||_{W^2_\infty}$

$$||u-v||_{W'_\infty} \leq c_4h||u||_{W^2_\infty}(\Omega)$$

Если $u \in c^2(\Omega)$

$$||u-V||_{C(\omega)} \leq c_5h^2||u||_{c^2(\Omega)}$$

Докозательство - Упражнение

$$\phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt(h)}\begin{cases} \frac{x-x_i}{h_i}, x \in (x_{i-1,x_i}) \\ \frac{x_{i+1-x}}{h_i+1}, x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, x \in (x_i-1, x_i+1) \end{cases}$$

$$V = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{h}u(x_i)\phi_i(x)$$

Пример:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u = f(x), x \in (a,b) \\ u(a) = 0; \frac{du}{dx}(a) = 0, f \in L_2(a,b) \end{cases}$$

$$H_A : ||u||_A = \sqrt{\int_a^b (p(\frac{du}{dx})^2 + qu^2)dx}$$

$$H_N - L_{in}(\phi_0, ...\phi_N);$$

11.1 Билинейные базисные функции в $\mathcal{R}$

Все рассматривается для прямоугольной области.

$$\Omega - \text{ прямоугольная в } \mathcal{R}^{\in}$$

$$A_0 = x_0 < x_1 < ... < x_N < A_1, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta x = maxis_{i=1,N}\Delta x_i$$

$$B_0 = y_0 < y_1 < ... < y_N = B, \Delta y_1 = y_i - y_{i-1}, \Delta y = max_{i=1,N}\Delta y_i$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i-x_{i-1}}{\Delta x_i}, x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_i+1-x}{\Delta x_{i+1}}, x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, x \not\in (x_{i-1,x_i}) \end{cases}$$

$$y_j = \{ \ u$$

$$Q_ij(x,y) = \phi_i(x)\phi_j(y)$$

$$y(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}Q_{ij}(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega}$$

$$L(Q_{ij}) = W_2^{1,h} \ni {W'}_2$$

Теорема

Если $uu \in C^2(\Omega) \Rightarrow \exists u^h \in W_2^{1,h}$

$$||u - u^h||_{L_2(\Omega)} \le c \cdot h^2 ||u||_{C^2\Omega}$$

$$||u - u^h||_{{W'}_2(\Omega)} \le c \cdot h ||u||_{C^2(\Omega)}$$

$$\xi(x,y) = (x - x_l)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) + (uu - y_k)\frac{\partial \xi}{\partial y}(x_k, y_k) + \int_{x_l}^{x} dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 xi}{\partial x''^2}(x'', y_n) dx'' +$$

$$+ \int_{y_k}^{y} dy' \int_{y_k}^{y'} dy' \frac{\partial^2 \xi}{\partial y''^2}(x_l, y'') dy'' + \int_{x_l}^{x} \int_{y_k}^{y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dx' dy'$$

...

$$(x - x_l)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) =$$

$$= \frac{x - x_l}{\Delta x_l H} \int_{x_{l+1}}^{x_l} dx' \int_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx''$$

$$\int_{x_l}^{x} dx' \int_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''} dx' \int_{y_k}^{y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dx' dy' =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_{l+1}, \Delta y_{k+1}} \int_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \cdot \int_{x_l}^{x} dx' \int_{y_k}^{y} dy' (\frac{\partial u}{\partial x' \partial y'}(\frac{\partial u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''})) dy'$$

... здесь была получена первая оценка

ПОлучить вторую оценку это второе упражнение.

Более сильная оценка. Упр со *.

$$x||u - y^h||_{C(\Omega)} \le C(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sum_{i=2} ||D^{(1)} u_\Omega$$

$$F(u) = \int_\Omega ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + u^2 - 2uf) dx dy$$

$$H_A - \overset{0}{W}{}'_2(\Omega)$$

Теорема

$$\forall u \in W_2'(\Omega) \cup C^2(\Omega)$$

$$\exists u^h \in W_2^{1,h} : \text{ оценить } (T^1)$$

11.2 Построение проекционно сеточной схемы для ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx})\frac{du}{dx} + q(x)u(x) = f(x), f \in L_2(a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \\ Au = f, 0 < p_0 \le p(x) \le p, 0 \leqq (x) \le q \end{cases}$$

$H = L_2(a,b) \Rightarrow A$ положительно определена $\Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow !$ реш $u(3)$

$||u||_{W_2^2}(\Omega) \le c||f||_H$

$H_A = \overset{0}{W}{}'_2(\Omega); c_0||u||_{W_2'} \le ||n||_A \le c_1||u||_{W'_2}$

$F(u) = [u,u] - 2(u,f) \to min$ на $\overset{0}{W}{}'_2 = H_A; u_i = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ далее тоже самое что и раньше

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i\phi_i(x)$$

$$\overset{0}{W}{}_2^{i,h} = \{v = \sum_{i=1}^{N-1} a_i\phi_I(x)\}$$

Минимизируем $F(v)$ на $\overset{0}{W}{}_2^{1,h}$;

a_i из $\dfrac{\partial F}{\partial a}(u_n) = 0, i = 1, N-1$

$\hat{A}a = f; \hat{A} = (A_{ij}) = ([[\phi_I, \phi_j]])$

$a = (a_i, ..., a_{N-1})^T$

$f = (f_1, ..., f_{N-1})^T$

$$f_i = \int_{\Omega_i} f\phi_i dx$$

$$\phi_i = \int_{\Omega} (p\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_i}{dx} + q\phi_i\phi_j)$$

$\exists !$ реш $(a_1, ..., a_{N-1})^T$

кот однозначно определяется $u^h \leftarrow argminF(Vq)$

Упр Найти $A_{ij}pq$

$p_{i-\frac{1}{2}} = p(x)$

$x \in (x_{i-1}, x_i) i = \overline{1, N}$

$q_{i-\frac{1}{2}} = -...$ аналогично

Лекция

Продолжение прошлой лекции
Постановка с прошлой лекции:

$$-\frac{d}{dx}[p(x)\frac{du}{dx}] + q(x)u = f$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

$$||u - u_H|| \leq ||u - V_n||, \text{ где } V_n = \sum_{i=1}^{N-1} h_i\phi_i; \forall V_n \in H_{A^{(N)}} = \overset{\circ}{W}{}_2^1, h$$

$$c_0||u||_{W'_2} \leq ||u||_A \leq c_1||u||_{W'_c}$$

$$||u - u_h||_{W'_2} \leq ch||f||_H$$

$$||u - u_h||_{H=L_2} \leq c_2 h||f||_H$$

$$[u, V]_A = (f, V), v \in W'^0_2$$

$$[u_n, V_n]_A a = (f, V_n); \forall V_h \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,h} = H_A^{(N)}$$

$$[u - u_n, V_n] = 0 \forall V_n \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,n}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу
Здесь немного путаю n и h, нужно поправить

$$A\Phi = F, F = u - u_h \text{ по св-вам } A \exists! \text{ реш } \Phi :$$

$$||\Phi||_{W_2^2} \leq c||F|| = C||u - u_h||$$

и Φ удовлетворяет:

$$[\Phi, V] = (F, V) \forall V \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$$

Рассмотрим $V = u - u_h$

$$(F,V) = (u-u_h, u-u_h) = (A\Phi, u-u_h) =$$
$$= [\Phi, u-u_n] - [u-u_n\Phi_h] =$$
$$= [\Phi-\Phi_h, u-u_n] \le ||\Phi-\Phi_n||_A \cdot ||u-u_n||_A \le$$
$$\le ch||f||||\Phi-\Phi_n||_A \le$$
$$\le ch||f|| \cdot ||\Phi-\Phi_h||_{W'_2}$$

Из результатов аппроксимации можно выбрать Φ_h:

$$||\Phi-\Phi_h||_{W'_2} \le ch||\Phi||_{W_2^2}$$

$$\to ||u-u_h||^2 \le ch||f|| \cdot ||\Phi-\Phi_h||_{W'_2} \le ch^2||f|| \cdot ||\Phi||_{W_2^2}$$

$$||u-u_h|| \le ch^2||f|| \cdot ||u-u_h||$$

Расмотрим задачу с другими граничными условиями.
упр 1

$$\begin{pmatrix} -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u = f(x) \\ u(a) = 0, \frac{du}{dx}(b) = 0 \end{pmatrix}$$

упр 1 Проверитть оценки в W'_2 упр 2 Найти $\hat{A}$ при $h_i = h, i = overline 1, N$, $\Phi = 0, P = const$

12.1 Применение ВП к з. Дирихле для ур-я Лапласа

$$\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}\{-\delta u = f(x,y); u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$\forall Au = -\Delta u, D(A) = \{u \in W_2^2(\Omega), u|_{\partial\omega} = 0\}, f \in L_2(\Omega)$$

А симметричный положительно определенный

$$\Rightarrow \forall f \in L_2 \exists! n \in \overset{\circ}{W'}_2 \text{ пересечение } W_2^2$$

$$H_A = \overset{\circ}{W'}_2(\Omega), (u,V)_A \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y})d\Omega$$

$$[u,V]_A = (f,V), \forall V \in H_A; h_x = \frac{a}{N_x}$$

$$\phi_i j = \frac{1}{\sqrt{h_x h_y}} \begin{pmatrix} x_j \leq x \leq x_{i+1}; (1 - (\frac{u}{h_y} - j)) \\ \text{даллее упр} \end{pmatrix}$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_x - 1} \sum_{j=1}^{N_y - 1} a_{ij} \phi_{ij}(x, y); H_A^N = \overset{\circ}{W'}{}_2^{1,h} \subset H_A = \overset{\circ}{W'}{}_2$$

$a_i j$ - решение СЛАУ

$$[u_h, phi_{kl}]_A = (f, \phi_{kl})$$

$$\hat{A} a = f$$

$$A_{ijk} = [\phi_{ij}, \phi_{kl}]_A; \phi_i; \text{ кусочно лин.}$$

Упр Найти A_{ijkl}

$$a(a_{11}, a_{21}, ..., a_{N_{x-1}}, ..., a_{1,N_y - 1}, a_{2N_y - 1, ..., a_{N_x - 1 N_{y-1}}})$$

Оценки:

$$||u - u_h||_{W'_2} \leq ch||f||$$

$$||u - u_h|| \leq ch^2||f||$$

$$A = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u$$

упр показать предедущее выражение

$$\frac{2a_{ij} - a_{i-1,j} - a_{j+1,i}}{h_x^2} + \frac{2a_{ij} - a_{i,j-1} - a_{i,j+1}}{h_y^2} = f_i j = (f, \phi_{ij})_H$$

$$\partial\Omega_h \subset \partial\Omega$$

h - max сторона треугольника $\triangle$ $\Theta_0 - min\triangle$

$$||u - u_h||_{W'_2(\Omega)} \leq c\frac{h}{sin\Omega_0}||f||$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x, y)$$

12.2 Подходы к решению неоднородных краевой задачи

$$\left(\begin{array}{c} -\Delta u = f \text{ в } \Omega \\ u|_{2\omega} = g \end{array} \right)$$

$$f \in L_2(\Omega), g \in W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$$

$$c_3(||f||_{L^2} + ||g||_{W_2^{\frac{3}{2}}}) \leq ||u||_{W_2^2(|omega)} \leq c_u()$$

1. Сведение к однородным гр. у

$$V = u - \Phi$$
$$-\Delta V = f = f + \Delta\Phi \in L_2(\Omega); V|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u_h = V_h + \Phi$$

$$\Phi \in W'_2(\Omega)$$

2. СНос тр. у

$$u_h \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x, y)$$

$$i = \overline{1, N} = [u_h, \phi_i]_A = (f, \phi_i)$$

$$i = \overline{N+1, \widetilde{N}} a_i \phi_i(x_i, y_i) = g(x_i, y_i)$$

12.3 Метод штрафа

рассмотрим модифицированную 3 краевую задачу

$$\left(\begin{array}{c} -\Delta u_\epsilon = f \text{ в } \Omega \\ u_\epsilon + \epsilon\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ на } \partial\Omega \end{array} \right), \epsilon > 0 \text{ мало}$$

для нее $[u, v]_A = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\epsilon} uV dS$

$$u_{\epsilon,h} = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x)$$

a_i находится из

$$[u_h, \phi_i]_A = (f, \phi_i) + \int_{\partial\Omega} g\phi dS$$

$$||u_\epsilon - u_{\epsilon,n}||_{W'2}(\Omega) \leq$$

$$\leq \frac{ch}{sin\Theta_0}(q + \frac{h}{\epsilon})^2 (||f||_{L_2} + \frac{1}{\epsilon}||\phi||_{W_2^2}(\partial\Omega))$$

Лекция 14

13.1 Вариационная постановка задачит на собственные значения симметрично полржительного оператора

$$A\phi = \lambda\phi D(A) \supset H$$