Разностные схемы для уравнения конвективной диффузии. Лекция 4

О.С.Мажорова

Сентябрь 2020 г.

Метод Неймана

Пусть бегущая волна

$$Q(t,x) = e^{-p(m)t}e^{\mathbf{i}m[x-qt]}=e^{-t[p(m)+\mathbf{i}mq]}e^{\mathbf{i}mx} = \mathbf{a}(t)e^{\mathbf{i}mx}, \qquad (1)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+u\frac{\partial Q}{\partial x}=D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad (2)$$

$p(m) = Dm^2,\ q = u$, (m – волновое число, длина волны $\lambda=\dfrac{2\pi}{m}$)

$$Q(t+\tau,x)=e^{-(t+\tau)[Dm^2+\mathbf{i}mu]}e^{\mathbf{i}mx}=\mathrm{G}Q(t,x),\ \ \mathrm{G}=e^{-\tau(Dm^2+\mathbf{i}mu)}$$

За время τ амплитуда бегущей волны с волновым числом m изменяется в $|\mathrm{G}| = e^{-\tau Dm^2}$ раз, сдвиг по фазе $\phi = -\tau u m$.

Устойчивость явной схемы с направленными разностями 1

Явная разностная схему с направленными разностями:

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - \mathcal{C}(Q_i^k - Q_{i-1}^k) + \mathcal{S}(Q_{i-1}^k - 2Q_i^k + Q_{i+1}^k) \qquad (3)$$

Будем искать решение разностной задачи в виде сеточной бегущей волны. Рассмотрим проекцию (1) на сетку

$$Q_i^k = Q(t_k, x_i) = e^{-pt_k} e^{\mathbf{i}m[x_i - qt_k]} = e^{-\tau k[p+\mathbf{i}mq]} e^{\mathbf{i}mhi} = \mathbf{a}_k e^{\mathbf{i}\theta i}, \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{a}_k = |\mathbf{a}_k| e^{\mathbf{i}\phi_k}$ – комплексная амплитуда, $\theta = mh$ – фазовый угол.
Подставим (4) в (3)

Устойчивость схемы с направленными разностями 2.

$$\mathbf{a}_{k+1}e^{\mathbf{i}\theta i} = \mathbf{a}_k e^{\mathbf{i}\theta i} - \mathcal{C}\mathbf{a}_k(e^{\mathbf{i}\theta i} - e^{\mathbf{i}\theta(i-1)}) + \mathcal{S}\mathbf{a}_k(e^{\mathbf{i}\theta(i-1)} - 2e^{\mathbf{i}\theta i} + e^{\mathbf{i}\theta(i+1)}),$$

После деления на $e^{\mathbf{i}\theta i}$, получим $\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_k G$, где G – множитель перехода со слоя t_k на слой t_{k+1}:

$$G = 1 - \mathcal{C}\underbrace{(1-e^{-\mathbf{i}\theta})}_{1-\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta} + \mathcal{S}\underbrace{(e^{\mathbf{i}\theta}-2+e^{-\mathbf{i}\theta})}_{2\cos\theta-2}$$

$$= 1-(\mathcal{C}+2\mathcal{S})\underbrace{(1-\cos\theta)}_{2\sin^2(\theta/2)} - \mathbf{i}\mathcal{C}\sin\theta$$

Необходимое условие устойчивости: $|G| < 1$ для всех $\theta = mh$.

Минимальная длина волны на сетке $\lambda_{min} = 2h = \dfrac{2\pi}{m}$, $\Rightarrow$ $\theta = mh \in [0, \pi]$.

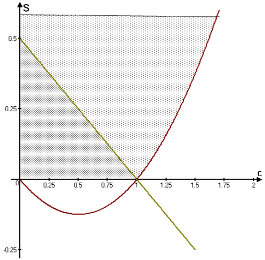
Необходимое условие устойчивости явной схемы с направленными разностями

$$|G|^2 = 1 - 4(\mathcal{C}+2\mathcal{S})\sin^2\frac{\theta}{2} + 4(\mathcal{C}+2\mathcal{S})^2\sin^4\frac{\theta}{2} + 4\mathcal{C}^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \le 1 \Rightarrow$$

$$(\mathcal{C}+2\mathcal{S})[(\mathcal{C}+2\mathcal{S})-1]\sin^2\frac{\theta}{2} + [\mathcal{C}^2 - (\mathcal{C}+2\mathcal{S})]\cos^2\frac{\theta}{2} \le 0, \ \ \forall\theta\in[0,\pi].$$

Короткие волны $\Rightarrow \theta \approx \pi \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} \approx 0 \Rightarrow \underline{\mathcal{C}+2\mathcal{S} \le 1}$

Длинные волны $\Rightarrow \theta \approx 0 \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} \approx 0 \Rightarrow \mathcal{C}^2 - (\mathcal{C}+2\mathcal{S}) < 0$



Почему с помощью дифференциального приближения получилось такое слабое условие устойчивости?

Изменение амплитуды длинных волн

$$|G|^2=1-4(\mathcal{C}+2\mathcal{S})\sin^2\frac{\theta}{2}+4(\mathcal{C}+2\mathcal{S})^2\sin^4\frac{\theta}{2}+4\mathcal{C}^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

Длинные волны: $\theta = mh \approx 0 \Rightarrow$

$$|G|^2 \approx 1-4(\mathcal{C}+2\mathcal{S})\frac{(mh)^2}{4}+4\mathcal{C}^2\frac{(mh)^2}{4} = 1-(mh)^2(\mathcal{C}+2\mathcal{S}-\mathcal{C}^2)$$

$$|G| \approx 1-(mh)^2(\mathcal{S}+\frac{1}{2}\mathcal{C}(1-\mathcal{C}))=\underline{1-\frac{m^2h^2D\tau}{h^2}}-\frac{(mh)^2}{2}\mathcal{C}(1-\mathcal{C})$$

В дифференциальной задаче $|\mathrm{G}| = e^{-\tau D m^2}=\underline{1-D\tau m^2}$. $\Rightarrow$ Разностные гармоники убывают быстрее.

Устойчивость явной схемы с центральными разностями 1

Запишем разностную схему в виде:

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - \frac{1}{2}\mathcal{C}(Q_{i+1}^k - Q_{i-1}^k) + \mathcal{S}(Q_{i-1}^k - 2Q_i^k + Q_{i+1}^k) \qquad (5)$$

Подставим бегущую волну в (5), сократим на $e^{\mathbf{i}\theta i}$ и получим множитель перехода со слоя на слой:

$$G = 1 - \frac{\mathcal{C}}{2}\underbrace{(e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta})}_{2\mathbf{i}\sin\theta} + \mathcal{S}\underbrace{(e^{\mathbf{i}\theta} - 2 + e^{-\mathbf{i}\theta})}_{-2(1-\cos\theta)}$$

$$= 1 - 4\mathcal{S}\sin^2\theta/2 - 2\mathbf{i}\mathcal{C}\sin\theta/2\cos\theta/2;$$

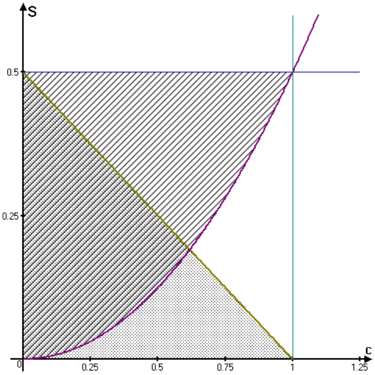
$$|G|^2 = 1 - 8\mathcal{S}\sin^2\theta/2 + 16\mathcal{S}^2\sin^4\theta/2 + 4\mathcal{C}^2\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2 \le 1;$$

$$-2\mathcal{S} + 4\mathcal{S}^2\sin^2\theta/2 + \mathcal{C}^2\cos^2\theta/2 \le 0;$$

$$\sin^2\theta/2(4\mathcal{S}^2 - 2\mathcal{S}) + \cos^2\theta/2(\mathcal{C}^2 - 2\mathcal{S}) \le 0 \Rightarrow$$

$$2\mathcal{S} - 1 \le 0; \quad \mathcal{C}^2 - 2\mathcal{S} \le 0.$$

Необходимое условие устойчивости явной схемы с центральными разностями



Центральные разности

$$\mathcal{C}^2 \leq 2\mathcal{S} \leq 1$$

Направленные разности

$$\mathcal{C} + 2\mathcal{S} \leq 1$$

Поведение длинных и коротких волн

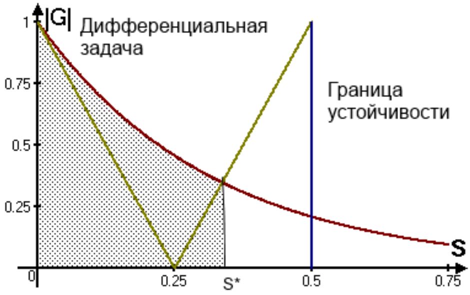
Длинные волны: $\theta \ll 1$

$$|G|^2=1-8\mathcal{S}\sin^2\theta/2+16\mathcal{S}^2\sin^4\theta/2+4\mathcal{C}^2\sin^2\theta/2\cos^2\theta/2 \approx$$

$$1-8\mathcal{S}\frac{(mh)^2}{4}+4\mathcal{C}^2\frac{(mh)^2}{4}=1-m^2h^2(2\mathcal{S}-\mathcal{C}^2);$$

$$|G| \approx 1-\frac{m^2h^2}{2}(2\mathcal{S}-\mathcal{C}^2)=1-Dm^2\tau+\frac{m^2h^2}{2}\mathcal{C}^2 \Rightarrow$$

Длинные волны убывают медленнее, чем в дифференциальной задаче и скорость убывания зависит от числа Куранта.



Короткие волны:

$\theta \approx \pi$

$|G|^2=1-8\mathcal{S}+16\mathcal{S}^2;$

$|G|=|1-4\mathcal{S}|$

Таблица

Схема	Коэффициент перехода G	Скорость затухания длинных волн ($\lvert G\rvert$ при $\theta\to 0$)	Условие устойчивости
UPW $\sigma=0$	$1-(\mathcal{C}+2\mathcal{S})(1-\cos\theta)-\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta$	$1-(mh)^2(\mathcal{S}+1/2\mathcal{C}(1-\mathcal{C}))$	$\mathcal{C}+2\mathcal{S}\le 1$
$\sigma=0.5$	$\dfrac{1-\frac{1}{2}(\mathcal{C}+2\mathcal{S})(1-\cos\theta)-\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta}{1+\frac{1}{2}(\mathcal{C}+2\mathcal{S})(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta}$	$1-(mh)^2(\mathcal{S}+1/2\mathcal{C})$	Безусловно устойчива
$\sigma=1$	$\dfrac{1}{1+(\mathcal{C}+2\mathcal{S})(1-\cos\theta)+\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta}$	$1-(mh)^2(\mathcal{S}+1/2\mathcal{C}(1+\mathcal{C}))$	Безусловно устойчива
CD $\sigma=0$	$1-2\mathcal{S}(1-\cos\theta)-\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta$	$1-(mh)^2(\mathcal{S}-1/2\mathcal{C}^2)$	$\mathcal{C}^2\le 2\mathcal{S}\le 1$
$\sigma=0.5$	$\dfrac{1-\mathcal{S}(1-\cos\theta)-\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta}{1+\mathcal{S}(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta}$	$1-(mh)^2\mathcal{S}$	Безусловно устойчива
$\sigma=1$	$\dfrac{1}{1+2\mathcal{S}(1-\cos\theta)+\mathrm{i}\mathcal{C}\sin\theta}$	$1-(mh)^2(\mathcal{S}+1/2\mathcal{C}^2)$	Безусловно устойчива