

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра вычислительных методов

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Москва, 2024

# Содержание

<b>Лекция 1</b>	<b>4</b>
1.1 Уравнение конвекции с диффузией . . . . .	4
1.2 Модельная задача . . . . .	6
1.3 Решение разностной задачи (центральные разности). . . . .	6
<b>Лекция 2</b>	<b>7</b>
2.1 Схема А.А.Самарского . . . . .	8
2.2 Экспоненциальная схема . . . . .	9
2.3 Схема Сполдинга . . . . .	10
2.4 Схема Патанкара . . . . .	11
2.5 Разностная схема на расширенных шаблонах . . . . .	11
<b>Лекция 3</b>	<b>11</b>
3.1 Нестационарные задачи . . . . .	11
3.2 Решение модельной задачи . . . . .	12
3.2.1 Направленные разности. . . . .	13
3.2.2 Центральные разности . . . . .	13
3.3 Диффузия и дисперсия . . . . .	13
3.4 Дифференциальное представление разностных схем . . . . .	14
3.5 Дифференциально приближение для схемы с направленными разностями. . . . .	14
<b>Лекция 4</b>	<b>15</b>
4.1 Устойчивость разностных схем. Метод Неймана (Метод гармоник.) . . . . .	15
4.1.1 Явная схема с направленными разностями . . . . .	15
4.2 Изменение амплитуды волны. . . . .	17
4.2.1 Коротко про устойчивость схемы с центральными разностями . . . . .	17
<b>Лекция 5</b>	<b>18</b>
5.1 Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости . . . . .	18
<b>Лекция 5</b>	<b>19</b>
6.1 Переинтерполяции . . . . .	21
6.1.1 Переинтерполяция 1 . . . . .	21
6.1.2 Переинтерполяция 2 . . . . .	21
6.1.3 Первый способ применение . . . . .	21
6.2 Баланс кинетической энергии . . . . .	23
<b>Лекция 8</b>	<b>23</b>
7.1 Уравнение теплопроводности . . . . .	24
7.2 Уравнение Навье-Стокса в естественных переменных . . . . .	25
7.3 Вклад конвективных членов . . . . .	26
<b>Лекция 10</b>	<b>27</b>
8.1 Исследование устойчивости . . . . .	27
<b>Лекция</b>	<b>28</b>
9.1 Устойчивость схемы для Н-С . . . . .	28
9.2 Задача Стефана . . . . .	31
<b>Лекция 10</b>	<b>32</b>

10.1 Замена переменных (неподвижная сетка) . . . . .	32
--	----

<b>Лекция</b>	<b>35</b>
---------------	-----------

11.1 Разностная схема на подвижной сетке . . . . .	35
11.2 задача Стефана в двумерном пространстве . . . . .	37

# Лекция 1

## 1.1 Уравнение конвекции с диффузией

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x}); t > 0; x \in [-L, L]$$

Уравнение конвекции с диффузией.

$$Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}}$$

- число Пекле

$$\frac{L}{U} = t_{\text{конв}}$$

$$\frac{L^2}{\mathcal{D}} = t_{\text{диффузионная}}$$

$$\frac{t_{\text{диф}}}{t_{\text{конв}}} = \frac{LU}{\mathcal{D}}$$

$$Re \ll 1$$

почти дифф процесс

$$Re \gg 1$$

почти конв процесс

Сначала будем рассматривать стационарное уравнение.

$$\frac{d}{dx}(uQ) - \frac{d}{dx}(\mathcal{D} \frac{dQ}{dx}) = 0$$

На отрезке вводится разностная сетка

$$\Omega_n(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

.

Потоковые точки - точки с полуцелые точки

$$xi + \frac{1}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- потоковые узлы

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$$

$$h_i = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

Вводим сеточные функции.

$$Q_i = (x_{i+\frac{1}{2}}; x_{i-\frac{1}{2}})$$

константа на отрезке

$$[x_{i+\frac{1}{2}} \text{ до } x_{i-\frac{1}{2}}]$$

D - константа в полуцелых точках (от  $x_i$  до  $x_{i+1}$  константа)

Считаем скорость и тепло в потоковых точках, где диффузия постоянна

$$Q_x = \frac{Q_{i+1}i - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\bar{x}} = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\hat{x}} = \frac{Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}$$

Между потоковыми точками интегрируем получаем формулу.

$$\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_i+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} [uQ - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx}] dx =$$

$$= [uQ - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx}] \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i+\frac{1}{2}} =$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^{tot}$$

$$W_{i-\frac{1}{2}}^{tot} = U_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} = W_{i+\frac{1}{2}}^D - W_{i-\frac{1}{2}}^D$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^D = -D_{i+\frac{1}{2}} \frac{dQ}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}}$$

$$U_i i + 1/2 Q_{i+1/2} - D_{i+1/2} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} -$$

$$- [U_i i - 1/2 Q_{i-1/2} - D_{i-1/2} Q_{\bar{x}_{i-1/2}}] = 0$$

$$\frac{U_{i+1/2} Q_{i+1/2} - U_{i-1/2} Q_{i-1/2}}{\bar{h}_i} -$$

$$- \frac{D_{i+1/2} Q_x - D_{i-1/2} Q_{\bar{x}}}{\bar{h}_i} = 0$$

Интерполируем Q в полуцелые точки.

$$Q_{i+1/2} = \Theta_{i+1/2} Q_i + (1 - \Theta_{i+1/2}) \Theta_{i+1}$$

1.

$$\Theta = 1/2$$

$$W = ....$$

Получится схема с центральными разностями

$$uQ_x - DQ_{xwithlntx} = 0$$

2.

$$\Theta_{i+1/2} = 1/2(1 + \frac{|u_{i+1/2}|}{U_{i+1/2}})$$

$$W_{i+1/2} = u_{i+1/2}^+ Q_i - \bar{U}_{i+1/2} Q_{i+1}$$

$$U'_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} + |U_{i+1/2}|)$$

$$U_{withlin_{i+1/2}} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} - |U_{i+1/2}|)$$

$$(u_{i+1/2}^+ Q_i + \bar{u}_{i+1/2}^+ Q_i + 1) - DQ_{\widehat{xx}} = 0$$

## 1.2 Модельная задача

$$\frac{d(UQ)}{dx} - D \frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$

При увеличении числа Пекле график прижимается к координатам снизу.

## 1.3 Решение разностной задачи (центральные разности).

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_i = a + bq^i$$

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

Подставляем

$$\frac{U}{2h} b(q^{i+1} - q^{i-1}) - Db \frac{q^{i+1} - 2q^i + q^{i-1}}{h^2} = 0$$

$$\frac{u}{2}(q^2 - 1) - \frac{D}{h}(q^2 - 2q + 1) = 0$$

## Лекция 2

Точное решение

$$Q(x) = \frac{1 - e^{\frac{Ux}{\mathcal{D}}}}{1 - e^{\frac{U}{\mathcal{D}}}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - e^{Pe \cdot i}}{1 - e^{Pe_n N}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - \bar{q}^i}{1 - \bar{q}^N}$$

$$\bar{q} = e^{Pe_N} = 1 + \frac{Pe_n + Pe_n^2}{2}$$

Сеточная функция (Центральные разности)

$$q = \frac{1 + \frac{Pe}{2}}{1 - \frac{Pe}{2}} =$$

$$(1 + \frac{Pe_N}{2}(1 + \frac{1}{2}Pe_n + \frac{1}{4}Pe_n^2 + \dots)) =$$
$$1 + Pe_n + \frac{Pe_n^2}{2}$$

Но число пекре должно быть меньше 2

Направленные разности

$$q + Pe_n$$

Для схемы с центральными разностями

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i+1}(\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) + Q_i(\frac{2\lceil}{h^2}) + Q_{i-1}(-\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i+1}(1 - \frac{1}{2}\mathcal{D}) + 2Q_i - Q_{i-1}(1 - \frac{1}{2}Pe_n) = 0$$

Для схеммы с направленными разностями

$$U \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h} - \mathcal{D} \frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i-1}(-\frac{u}{h} - \frac{\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(\frac{u}{h} - \frac{2\mathcal{D}}{h^2}) + Q_{i+1}(\frac{\mathcal{D}}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i-1}(1 + Pe_n) \dots$$

Попробуем предсказать поведение вышеописанных схем

$$Q_{i-1} = Q_i - h \frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \dots$$

$$Q_{i+1} = Q_i + h \frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \dots$$

Первое слагаемое:

$$\frac{U}{h} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_i - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \dots$$

$$U \frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \frac{1}{2} U h \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2}|_i / \dots = 0$$

$$U \frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \mathcal{D} \left( 1 + \frac{1}{2} Pe_n \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}|_i$$

Для того чтобы коэф диффузии был похож на то что было в исходном уравнении  $\frac{Pe_n}{2} \ll 1$

## 2.1 Схема А.А.Самарского

$$U^+ Q_{\bar{x}} + U^- Q_x - \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}} Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$\bar{D} = \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}} = \mathcal{D} \left( \infty - \frac{|\mathcal{P}|_{\setminus} |/\in}{\infty + \frac{|\mathcal{P}|_{\setminus} |}{\in}} \right)$$

$$u^+ Q_{\bar{x}} - u^- Q_x = u Q_{x0} - \frac{|U|_h}{2} Q_{\bar{x}x}$$

$$U Q_{x0} - \mathcal{D} \left[ \frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2} \right] Q_{\bar{x}x} = 0$$

- Коэфф диффузии

$$\mathcal{D} \left[ \frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2} \right] = \mathcal{D}^*$$

$$Pe_n^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} - \text{эффективное число Пикле}$$

$$f = Pe^*(Pe)$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \frac{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2}}$$



$$Pe^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \frac{1 + \frac{|Pe_n|}{2}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}$$

$$Pe_n \rightarrow 0; Pe_n^* \rightarrow Pe_n$$

$$Pe_n \rightarrow \inf; Pe_n^* \rightarrow 2$$

$$|Pe * n| = \frac{Pe_n^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{|Pe_n|})}{Pe_n^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{2|Pe_n|} + \frac{1}{|Pe_n|^2})}$$

## 2.2 Экспоненциальная схема

$$u \frac{dQ}{dx} - \mathcal{D} \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$Q(x) = Q_i + (Q_{i+1} - Q_i) \frac{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}} \frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}})}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$\begin{aligned} W^{tot} &= u_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \\ &= u_{i+\frac{1}{2}} Q_i + u_{i+\frac{1}{2}} (Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_i) \frac{\exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2} - 1)}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1} - \\ &- u_{i+\frac{1}{2}} (Q_{i+1} - Q_i) \frac{\exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2})}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1} \end{aligned}$$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = u Q_{\bar{x}} + uh \frac{e^{\frac{P Pe_N}{2}} - 1}{e^{Pe_N} - 1} Q_{\bar{x}x} - uh \frac{e^{\frac{P Pe_n}{2}}}{e^{Pe_n} - 1} Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$u Q_{\bar{x}} = u Q_{x0} - \mathcal{D} \frac{Pe}{2} Q_{\bar{x}x}$$

$$u Q_{x0} - \mathcal{D}^2 Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \left( \frac{Pe_N}{2} \frac{e^{Pe} + 1}{e^{Pe} - 1} \right) = \mathcal{D} \frac{Pe_n}{2} \coth \frac{Pe}{2}$$

$$Pe_n = \frac{Uh}{\mathcal{D}} = 2th \frac{Pn_n}{2}$$

### 2.3 Схема Сполдинга

$$Pe_{h,i+\frac{1}{2}}^* = Pe_{h,i+\frac{1}{2}}, Pe_h \leq 2 \\ = 2, Pe_h > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \Theta_{i+\frac{1}{2}} Q_i + (1 - \Theta_{i+\frac{1}{2}}) Q_{i+1}$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + \max(-Pe_{n,i+\frac{1}{2}}, 1 - \frac{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}{2}, 0)]$$

1.

$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| \leq 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

буквально схема с центральными разностями.

2.

$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| > 2$$

(a)

$$Pe_n > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + 0] = 1 - \frac{1}{Pe_n}$$

(b)

$$Pe_n < -2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 - Pe_n] = -\frac{1}{Pe_n}$$

Или оба варианта в одной формуле

$$\frac{1}{2} (1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) - \frac{1}{Pe_n}$$

Подставляем  $\Theta$

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2} (1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) - \frac{1}{Pe_n}] Q_i + [\frac{1}{2} (1 - \frac{|Pe_n|}{Pe_n} + \frac{1}{Pe_n})] Q_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} = u Q_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+\frac{1}{2}}^+ Q_i + U_{i+\frac{1}{2}}^- Q_{i+\frac{1}{2}} + 1 + D Q_x$$

$$\frac{d}{dx} u Q - D \frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} = U^+ Q_{\bar{x}} + \bar{u} Q_x + D Q_{\bar{x}x}$$

Таких схем множество, но суть такова, что до определенного момента рассматривается направленные разности, а потом переходят на константу

## 2.4 Схема Патанкара

Надо разобрать к экзамену! Есть в презентации.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + \max(0, Pe_n) + \max(0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5)]$$

Теперь нужно определить в полуцелых точках.

## 2.5 Разностная схема на расширенных шаблонах

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i+1} + Q_i) - \eta(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})$$

1.

$$u \frac{d}{dx} = u Q_{x^0} - \frac{Uh}{2}(Q_{x\bar{x}} - Q_{xx}) \frac{1}{2} h^2 Q_{\bar{x}\bar{x}}$$

2.

$$\eta = \frac{1}{2} - \text{схема с направленными разностями}$$

3.

$$\eta = \frac{1}{4} - \text{схема Фрома}$$

4.

$$\eta = \frac{1}{6} - \text{схема с искусственной дисперсией}$$

5.

$$\eta = \frac{1}{8} - \text{схема QUICK}$$

## Лекция 3

### 3.1 Нестационарные задачи

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$u = \text{const}, Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}} \gg 1$$

Сетка вводится аналогично стационарной задаче.

$$t_k = \tau_k$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial Q}{\partial t} dx dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (uQ) dx dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x}) dx dt$$

По слагаемым

1. Выносим, так как не зависит от  $t$ , по  $x$  константа на отрезке интегрирования

$$h_i \cdot (Q_i^{k+1} - Q_i^k)$$

- 2.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}) dt$$

Воспользуемся квадратурной формулой

$$= \tau (W_{i+\frac{1}{2}}^\sigma + W_{i-\frac{1}{2}}^\sigma)$$

$$f^{(\sigma)} = \sigma f^{t_{k+1}} + (1 - \sigma) f^{t_k} = \sigma \hat{f} + (1 - \sigma) f$$

Возникает ровно та же проблема определения  $W$  в полуцелых точках

- 3.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} [\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x} |_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x} |_{i-\frac{1}{2}}] dt =$$

$$\tau [(\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x})_{i+\frac{1}{2}}^{(\sigma)} - (\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}}^{(\sigma)}]$$

### 3.2 Решение модельной задачи

Отрезок от  $-L$  до  $L$ . Начальные данные: 1 при отрицательных значениях, 0 при положительных.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$S = t, y = x - ut$$

$$Q(x, t) = Q(y(x, t), S(t))$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - u \frac{\partial Q}{\partial y} + u \frac{\partial Q}{\partial y} \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \Rightarrow$$

интеграл Пуассона

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\pi} \mathcal{D} S}} e^{-z^2} dz \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x-ut}{2\sqrt{\mathcal{D} t}}} e^{-z^2} dz \right]$$

Подставить это дома и убедиться, что оно является решением уравнения.

### 3.2.1 Направленные разности.

\*\*рисунок фронта\*\*

Самое большое размытие при использовании чисто неявной схемы ( $\sigma = 1$ )

Меньше всего размывается явная схема ( $\sigma = 0$ ).

То есть неявная схема ухудшает проблемы направленных разностей

### 3.2.2 Центральные разности

\*\*рисунок фронта

Чисто неявная схема снова размывает сильнее.

( $\sigma = 0.5$ )

## 3.3 Диффузия и дисперсия

Дисперсия - скорость убывания волны зависит от амплитуды.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

$$Q(t, x) = e^{-P(m)t} e^{im(x-q(m)t)}$$

$m$  - волновое число,  $P(m)$  - скорость убывания амплитуды,  $q(m)$  - скорость распространения волны,  $i^2 = -1$ .

$$Q = e^{-Pt} e^{im(x-qt)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

Подставим  $Q$  и посмотрим какими должны быть  $P$  и  $m$ , для того чтобы оно удовлетворяло уравнениям.

$$-P - imq + Uim = -\mathcal{D}m^2 - im^3p + \gamma m^4$$

$$P = \mathcal{D}m^2 - \gamma m^4$$

- скорость убывания

$$q = u + M^2\beta$$

- скорость волны

На амплитуду влияют четные производные (но они чередуются уменьшает-увеличивает-уменьшает-...)

скорость движения от третьей производной (нечетные производные) проверить с каким знаком.

### 3.4 Дифференциальное представление разностных схем

$L(Q) = 0$  Дифференциальное уравнение

$L_h^\tau(Q, \tau, h) = 0$  - Разностная схема

$L_H^\tau(Q) = L(Q) + \epsilon(Q, \tau, h) = 0$  - Погрешность аппроксимации

Не будем убирать погрешность и будем его рассматривать как бесконечный ряд.

$$L_h^\tau(Q) = L(Q) + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial Q}{\partial x^i} = 0$$

Процедура по созданию подобного представления (в общих чертах):

### 3.5 Дифференциально приближение для схемы с направленными разностями.

$$Q_t + uQ_{\bar{x}}^{(\sigma)} - \mathcal{D}Q_{\bar{x}}^{(\sigma)}x = 0$$

$$Q^{(\sigma)} = Q^{0.5} + (\sigma - 0.5)\tau Q_t = \frac{\hat{Q} + Q}{2} + (\sigma - 0.5)(\hat{Q}Q)$$

$$Q_t + uQ_{\bar{x}}^{(0.5)} - \mathcal{D}Q_{\bar{x}x}^{(0.5)} + u(\sigma - 0.5)\tau Q_{t\bar{x}} - \mathcal{D}(\sigma - 0.5)Q_{t\bar{x}x}$$

Разложим в точке  $(t_k + \frac{\tau}{2}, x_i Q(t_k + \frac{\tau}{2})Q^{(0.5)})$

$$Q_t = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^3 \bar{Q}}{\partial t^3} + \dots$$

$$Q^{(0.5)} = \bar{Q} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dots$$

и тд.

Как избавиться от высоких производных и смешанных производных по t и x. Метод дифференциального представления.

## Лекция 4

### 4.1 Устойчивость разностных схем. Метод Неймана (Метод гармоник.)

$$Q(t, x) = e^{-p(m)t} e^{Im(x-qt)} - \text{Бегущая волна} = a(t) e^{Imx}$$

$$a(t) = e^{-t[p(m)+Imq]} \text{ Комплексная амплитуда}$$

$$p(m) = \mathcal{D}m^2, q = u \text{ Для нашего конкретного уравнения}$$

$$Q(t + \tau, x) = e^{-t+\tau} [\mathcal{D}m^2 + (Imq)] e^{Imx} = GQ(t, x)$$

G - Множитель перехода

$$G = e^{-\tau(\mathcal{D}m^2 = Imu)}$$

#### 4.1.1 Явная схема с направленными разностями

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - c(Q_i^k - Q_{i-1}^k) + S(Q_{i+1}^k - 2Q_i^k + Q_{i-1}^k)$$

$$c = \frac{u\tau}{h} - \text{число Куррента}, S = \frac{\mathcal{D}\tau}{h^2} - \text{Тепловое число Куррента}$$

$$\begin{aligned} Q_i^k &= Q(t_k, x_i) = e^{-pt_k} e^{Im[x_i - qt_k]} = \\ &= e^{\tau k[p - Imq]} e^{Imhi} = \\ &= a_k e^{I\Theta i} \end{aligned}$$

$$\tau k = t_k, ih = x_i, \Theta = mh$$

Надо выяснить при каких P и Q при подстановке бегущей волны данное уравнение является решением нашего уравнения.

$$a_{k+1} e^{I\Theta i} = a_k e^{I\Theta i} - ca_k (e^{I\Theta(i-1)} - 2e^{I\Theta i} + e^{I\Theta(i+1)})$$

$$e^{emi}; a_{k+1} = a_k G$$

$$G = 1 - c(1 - e^{-I\Theta}) + S(e^{I\Theta} - 2 + e^{-I\Theta})$$

$$c(1 - e^{-I\Theta}) = 1 - \cos\Theta + i\sin\Theta$$

$$(e^{I\Theta} - 2 + e^{-I\Theta}) = 2\cos\Theta - 2$$

Напоминание:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$$

$$?? = 1 - (c + 2S)(1 - \cos\Theta) + I c \sin\Theta \text{ Множитель перехода со слоя на слой}$$

Схема устойчива тогда, когда  $|G| > 1$

$$\Theta = mh$$

$$\lambda_{min} = 2h = \frac{2\pi}{m} - \text{минимальная длина волны}$$

$$\Rightarrow mh = \pi \text{ Короткие волны}$$

$$mh \rightarrow 0 - \text{Длинные волны}$$

$$1 - (c + 2S)(1 - \cos\Theta) - I c \sin\Theta$$

$$|G|^2 = 1 - 4(c + 2S)\sin^2\frac{\Theta}{2} + (c + 2S)^2 \cdot 4\sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-(c + 2S) + (c + 2S)^2\sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$-(c + 2S)(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \cos^2\frac{\Theta}{2}) + (c + 2S)^2\sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$(c + 2S)[(c + 2S) - 1]\sin^2\frac{\Theta}{2} + [c^2 - (c + 2S)]\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0; \forall \Theta \in [0, \pi]$$

$$c + 2S - 1 < 0; c^2 - (c + 2S) < 0 - \text{Условия устойчивости}$$

Метод Неймана дает необходимое условие устойчивости, но вообще говоря не достаточное.



## 4.2 Изменение амплитуды волны.

$$|G|^2 = 1 + 4(c + 2S)\sin^2\frac{\Theta}{2} = 4(c + 2S)^2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos^2\frac{\Theta}{2}$$

Для волны  $\Theta = mh \rightarrow 0$

$$|G|^2 = 1 - 4(c + 2S)\frac{(mh)^2}{4} + 4(c + 2S)^2\frac{(mh)^4}{2} + 4c^2\frac{(mh)^2}{4} = 1 + (mh)^2[c^2 - (c + 2S)] =$$

$$= 1 - (mh)^2[c + 2S - c^2]$$

$$|G| = 1 - (mh)^2(S + \frac{1}{2}c(1 - c))$$

$$|G| = 1 - (m^2h^2)(\frac{\mathcal{D}\tau}{h^2} + \frac{1}{2}c(1 - c)) =$$

$$= 1 - m^2\tau\mathcal{D} - \frac{1}{2}m^2h^2c(1 - c)$$

$1 - m^2\tau\mathcal{D}$  То как убывает волна в исх уравнении

$\frac{1}{2}m^2h^2c(1 - c)$  Добавка разностной схемы

$$|G| = e^{-\tau\mathcal{D}m^2} = 1 - \tau\mathcal{D}m^2$$

### 4.2.1 Коротко про устойчивость схемы с центральными разностями

$$Q_t + uQ_{x^0\mathcal{D}Q_{\bar{x}x}}$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - \frac{1}{2}c(Q_{i_k}^k - Q_{i-1}^k) + S(Q_{i-1}^k - 2Q_i^k + Q_{i+1}^k)$$

$$G = 1 - \frac{c}{2}(e^{I\Theta} - e^{-I\Theta}) + S(e^{-I\Theta} - 2 + e^{I\Theta}) =$$

$$= 1 - 4S\sin^2\frac{\Theta}{2} - 2cI\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}$$

$$|G|^2 = 1 - 8S\sin^2\frac{\Theta}{2} + 16S^2\sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-2S + 4S^2\sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$\sin^2 \frac{\Theta}{2} [4S^2 - 2S] + \cos^2 \frac{\Theta}{2} [c^2 - 2S] < 0$$

$$2S^2 - S < 0; c^2 - 2S < 0 - \text{Условие устойчивости}$$

Рассмотрим для длинных волн

$$|G|^2 = 1 - 8S \sin^2 \frac{\Theta}{2} + 16S^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2} + 4c^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cos^2 \frac{\Theta}{2} < 1$$

$$\begin{aligned} \approx &= 1 - 8S \frac{(mh)^2}{4} + 4c^2 \frac{(mh)^2}{4} = \\ &= 1 - (mh)^2 (2S - c^2) \end{aligned}$$

$$|G| \approx 1 - (mh)^2 S + (mh)^2 \frac{c^2}{2} =$$

$$1 - \frac{m^2 h^2 \mathcal{D}\tau}{h^2} + m^2 h^2 \frac{c^2}{2}$$

Длинные волны убывают медленнее чем в дифференциальном случае. (В прошлом примере было наоборот)

дз решить задачи из таблицы (хотя бы некоторые), позже возможно следует ей прислать.

## Лекция 5

### 5.1 Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = -\nabla p + \chi \Delta V = g\rho \quad (1)$$

$$\operatorname{div} V = (\nabla \cdot v) = 0 \quad (2)$$

$$\rho = \rho(p, t) = \rho_0(1 + \beta T) \quad (3)$$

$V$  - вектор скорости  $p$  - Давление  $\chi$  - коэффициент вязкости

$$\frac{D\rho}{Dx} = \{ \text{Полная производная} \} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\frac{D\rho}{Dx} + \rho \operatorname{div} V = 0$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} V = 0$$

Жидкость несжимаема тоже самое, что полная производная равна 0, это одновременно означает что дивергенция равна 0.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} V = 0$$

Перепишем уравнение 1 в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla \frac{p}{\rho_0} + \nu \Delta V + F$$

$$\eta = \frac{\chi}{\rho_0} - \text{Кинетическая вязкость} \quad (4)$$

Из 4 Исключаем давление.

$$\Delta V = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} V;$$

$$(V \cdot \nabla)V = \operatorname{rot} V \times V + \nabla \left( \frac{V^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{rot} V \times V = -\nabla \left( \frac{p}{\rho_0} + \frac{V^2}{2} \right) - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} V + F \quad (5)$$

Применим ротор к 5

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \nu \Delta \Omega + \operatorname{rot} F \quad (6)$$

пусть  $V = (V_x(t, x, y))$

## Лекция 5

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(V\omega) = \nu \Delta \omega$$

$$(u\omega) = W^x$$

$$(V\omega) = W^y$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\operatorname{div} V = 0$$

$$\Delta \psi = -\omega$$

$$\psi, \omega \text{ в узлах сетки } , u(i, j + \frac{1}{2}), V(i + \frac{1}{2}, j)$$

Тогда дивергенция по ячейке автоматически равна нулю. Ячейки называются нулю.

$$div V|_{S_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}$$

Ячейка с центром в  $U \ S(i, j + \frac{1}{2})$  Ячейка с центром в  $V \ S(i + \frac{1}{2}, j)$

Аппроксимация производной по  $\omega$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}$$

$$\int_{S_{i,j}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dx dy + \int_{S_{i,j}} (W^x + \frac{\partial}{\partial y} W^y) dx dy = \mu \int_{S_{i,j}} \Delta \omega dx dy$$

$\overline{S}$  означает площадь

$$\frac{\partial}{\partial t} [\omega_{ij}] \overline{S_{ij}} = \frac{\partial}{\partial t} \omega_{ij} \overline{h_i^x h_i^y}$$

$$W=(W^x,W^y)$$

$$I_2 = \int_{S_{ij}} (\frac{\partial}{\partial x} W^x + \frac{\partial}{\partial y} W^y) dx dy = \int_{\partial S_{ij}} (w, n) dl =$$

$$= W_{i+\frac{1}{2},j}^x \overline{h_i^y} + W_{ij+\frac{1}{2},\overline{h_i^x}}^y - W_{i-\frac{1}{2},j}^x \overline{h_i^y} - W_{ij-\frac{1}{2},\overline{h_i^x}}^y$$

Делим на  $\frac{1}{\overline{h_i^x h_i^y}}$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}}^x - W_{i-\frac{1}{2}}^y}{\overline{h_i}}$$

$$u_{ij} = \frac{h_{i,j+\frac{1}{2}}^y u_{ij+\frac{1}{2}} + h_{ij-\frac{1}{2}}^y u_{i,j-\frac{1}{2}}}{2h_j^y}$$

$$V_{ij} = \frac{h_{i+\frac{1}{2},j}^x V_{i+\frac{1}{2},j} + h_{i-\frac{1}{2},j}^x V_{i,j-\frac{1}{2}}}{2h_j^y}$$

$$u_{ij} = \psi_{y^0} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\overline{h_j^y}}, V_{ij} = \psi_{x^0} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\overline{h_j^x}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x = (u\omega)_{i\frac{1}{2},j}$$

## 6.1 Переинтерполяции

### 6.1.1 Переинтерполяция 1

$$W_{i+\frac{1}{2}}^x = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}\omega_{i+1j} + u_{ij} + \omega_{ij})$$

$$W_{ij+\frac{1}{2}}^y = \frac{1}{2}(V_{ij+1}\omega_{ij+1} + V_{ij}\omega_{ij})$$

### 6.1.2 Переинтерполяция 2

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x = \frac{u_{i+1,j} + u_{ij}}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}\omega_{ij}}{2}$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^y = \frac{V_{i,j+1} + V_{ij}}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}\omega_{ij}}{2}$$

### 6.1.3 Первый способ применение

Начнем с первого способа.

$$\mathcal{K}_h(\psi, \omega) \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y = (W_{i+\frac{1}{2}}^x - W_{i-\frac{1}{2},j}^x) \bar{h}_i^y + (W_{ij+\frac{1}{2}}^y - W_{i,j-\frac{1}{2}}^y) \bar{h}_i^x$$

$$u_{i+1,j} = \psi_{y^0}(+1_x); u_{ij} = \psi_{y^0}$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x = \frac{1}{2}[\psi_{y^0}(+1_x)\omega_{i+1j} + \psi_{y^0}\omega_{ij}]$$

$$W_{i-\frac{1}{2},j}^x = \frac{1}{2}[\psi_{y^0}\omega_{i+1j} + \psi_{y^0}(-1_x)\omega_{i-1,j}]$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x - W_{i-\frac{1}{2},j}^x$$

$$\mathcal{K}_h(\psi, \omega) \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y = (W_{i+\frac{1}{2}}^x - W_{i-\frac{1}{2},j}^x) \bar{h}_i^y + (W_{ij+\frac{1}{2}}^y - W_{i,j-\frac{1}{2}}^y) \bar{h}_i^x =$$

$$\frac{1}{2}[\psi_{y^0}(+1+x)\omega_{i+1j} - \psi_{y^0}\omega_{i-1,j}]\bar{h}_i^y - \frac{1}{2}[\psi_{x^0}(+1_y)\omega_{ij+1} - \psi_{x^0} - \psi_{x^0}(-1_y)\omega_{ij-1}]\bar{h}_i^x$$

$$\mathcal{K}_h(\psi, \omega) = (\psi_{y^0}\omega)_{x^0} - (\psi_{x^0}^0\omega)_{y^0}$$

Теперь осталось проинтегрировать оператор лапласа.

$$I = \nu \int \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{\partial S_{ij}} ((grad \omega, n) dl)$$

Еще есть условие, его тоже надо аппроксимировать

$$\omega = -\Delta \psi$$

$$\int_{S_{ij}} \omega dx dy = - \int_{S_{ij}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx dy = - \int_{\partial S_{ij}} (grad \psi, n) dl$$

$$= - \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^y + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}\bar{h}_i^x} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j} \bar{h}_i^y - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}}{h_{j+\frac{1}{2}}^y}$$

Но что происходит на границе?

$$\omega_{ij} S_{i0} = \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},0} \bar{h}_0^y + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i\frac{1}{2}} \bar{h}_i^2 - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},0} \bar{h}_0^h - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,0} \bar{h}_i^x \right]$$

$$S_{i0} = \bar{h}_i^x \bar{h}_0^y$$

$$\bar{h}_0^y = \frac{h_{\frac{1}{2}}^y}{2}$$

$$- \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^y \bar{h}_0^y + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x - \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j} \bar{h}_i^y - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x \right]$$

$\psi$  на границе равно нулю  $\Rightarrow$

$$\omega_{ij} \bar{h}_i^x \bar{h}_0^y = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x$$

$$\omega_{ij} = - \frac{2}{h_{\frac{1}{2}}^y} \frac{(\psi_{i1} - \psi_{i0})}{h_{\frac{1}{2}}^y}$$

$$\omega_{Ij} = - \frac{2}{(h_{\frac{1}{2}}^y)^2} \psi_{i1} - \text{итоговое граничное условие (условие Тома (Thom))}$$

## 6.2 Баланс кинетической энергии

Переобозначим скалярные произведения

$$f(x_i, y_i) \rightarrow (f, g)^0 = \sum_{(i,j) \in \bar{I} \times \bar{J}} f_{ij} g_{ij} s_{ij} = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} f_{ij} g_{ij} \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y$$

$$(f, g)_h^{(1)} = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y-1} f_{i,j+\frac{1}{2}} g_{i,j+\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y + \frac{1}{2}$$

$$(f, g)_h^{(2)} = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} f_{i,j+\frac{1}{2}} g_{i+\frac{1}{2},j} \bar{h}_{i+\frac{1}{2}}^x \bar{h}_j^y$$

## Лекция 8

$$\nu(\Delta\omega, \psi)(\omega, \omega)$$

$$(\Delta, \psi)_w^0 \sum_{(i,j)} h_i^x h_j^y (\omega_{\bar{x}x} + \omega_{\bar{y}y}) \psi_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_y-1} h_j^y \sum_{i=1}^{N_x-1} (\omega_x - \omega_{\bar{x}} \psi_{ij} + \dots) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_y} h_j^y \left[ \sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_x \psi_{ij} - \sum_{i=0}^{N_x-1} \omega_x \psi_{i+1,j} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_y-1} h_j^y \left[ \sum_{i=1}^{N_x-2} \omega_x \psi_x h_{i+\frac{1}{2}}^x + \omega_x (N_x - 1) \psi_{N_x-1,j} - \omega(0, j) \psi_{1j} \right] =$$

$$\omega_x \psi_x h_{i+\frac{1}{2}}^x (\omega_x (N_x - 1) \psi_{N_x-1} - \omega_x (N_x - 1) \psi_{N_x}) = -\omega_x (N_x - 1) (\psi_{N_x}) - \dots$$

$$= - \sum_{j=1}^{N_y-1} h_j^y \sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_x \psi_x h_i^x + \frac{1}{2} = \{ \omega = -\Delta\psi = -(\psi_{\bar{x}x} + \psi_{\bar{y}y}) \} =$$

$$= - \sum_{j=1}^{N_y-1} h_i^y \sum_{i=1}^{N_x-1} (\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}) \psi_x = \sum_{j=1}^{N_y-1} h_i^y \left[ \sum_{i=1}^{N_x} \omega_{ij} \psi_{\bar{x}} - \sum_{i=0}^{N_x-1} \omega_{ij} \psi_x \right] =$$

$$= - \sum_j h_j^y \sum_1^{N-x-1} \omega_{ij} (\psi_{\bar{x}} - \psi_x)$$

$$\psi_{x\bar{x}} = (\psi_x - \psi_{\bar{x}}) \frac{1}{h}$$

$$= \sum_0 h_j^y \sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_{ij} (\psi_x - \psi_{\bar{x}}) + \omega_{N_x j} \psi_{\bar{x}}(N_{xj}) - \omega_{0j} \psi(0, j) =$$

Из граничных условий следует (буквально есть омеги на границе вправа).

$$= - \sum \omega_{ij}^2 h_j^x h_i^y h_j^y$$

## 7.1 Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (uT) + \frac{\partial}{\partial y} (\nu T) = \kappa \Delta T$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (T^2) dx dy + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} (uT) \cdot T dx dy = \kappa \int_{\Omega} \Delta T dx dy =$$

$$\mathcal{K}(T) = - \int_{\Omega} (uT \frac{\partial T}{\partial x} + \nu T \frac{\partial T}{\partial y}) dx dy = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u \frac{\partial}{\partial x} (T^2)) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^2 \frac{\partial u}{\partial x} + T^2 \frac{\partial \nu}{\partial y}) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Omega} T^2 \operatorname{div} V dx$$

$$W_{i+\frac{1}{2}j}^x = \frac{1}{2} (u_{i+1j} \omega_{i+1} + u_{ij} \omega_{ij})$$

- та самая хорошая интерполяция.

$$\operatorname{overSet}TW_{i+\frac{1}{2}j}^x = \frac{u_{i+1j} + u_{ij}}{2} \frac{T_{i+1j} + T_{ij}}{2}$$

$$\frac{1}{4} \sum_{ij} h_j^y [T_{ij} (\psi_{\operatorname{overSet}0y(+1_x)} + \psi_y^0) (T_{i+1j} + T_{ij}) - T_{ij} (\psi_{y+}^0 + \psi_{y(-1_x)}^0) (T_{ij} + T_{i-1j})]$$

$$\frac{1}{4} \sum h_i^x [(\psi_x^0 + \psi_x^0) (T_{ij+1} + T_{ij}) - T_{ij} (\psi_x^0 \psi_x^0 (-1y)) (T_{ij} + T_{i-1j})]$$

$$\sum = \frac{1}{4} \sum_{ij}^{ij} T_{i-1j} T_{i-1j} [\psi_y^0 (T_{ij} + T_{i-1j}) + T_{ij} \psi_y^0 (T_{i+1j} + T_{ij})] - \frac{1}{4} \sum_{ij} [T_{ij} \psi_y^0 (T_{ij} + T_{i-1j}) + T_{ij} \psi_{y(ij)}^0 (T_{i+1j} + T_{ij})] =$$



Сгруппируем слагаемые из скобок попарно (первое с первым, второе со вторым). В формуле выше опущены шаги сетки.

$$= \psi_y(T_{ij} + T_{i-1j})(T_{i-1j} - T_{ij}) + \psi_y(T_{i+1j} + T(ij))(T_{ij} - T_{i+1j}) =$$

Разность квадратов в обеих скобках.

$$= \frac{1}{2} \sum \psi_y(T_{i-1j}^2 - T^2(i+j)) = -\frac{1}{2} \psi_y(T^2)_x =$$

$$= \sum^{(1)} + \sum^{(2)} = \frac{1}{2} \sum \mathcal{H}_i^x \mathcal{H}_i^y (-\psi_y T_x^2 + \psi_x T_y^2) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \mathcal{H}_i^x \mathcal{H}_i^y (\psi_{\text{overset{0}{xy}} \psi_{\text{overset{0}{yx}}})$$

## 7.2 Уравнение Навье-Стокса в естественных переменных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla \rho \nu \Delta V$$

$$didV = 0$$

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x_3}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \nu \Delta v_i$$

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = V_1 \frac{\partial V_i}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_i}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_i}{\partial x_3} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(V_1 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_2}(V_2 V_i) + \frac{\partial}{\partial x_3}(V_3 V_i) =$$

$$V_1 \frac{\partial V_i}{\partial x_1} + V_i \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_i}{\partial x_2} + V_i \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_i}{\partial x_3} + V_i \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

$$V \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) + (\mathcal{K}(V) \circ V \cdot V) =$$

$$= -(\nabla \rho V) + \eta(\Delta V, V) \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega} E_{kin} d\Omega + \sum_{i=1}^3 (\mathcal{K}(V) \circ V_i, V_i) d\Omega = \eta \sum (\Delta V_i, V_i)$$

1.

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} V_i dx_1 dx_2 dy_2 = - \sum_{i=1}^3 p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} dx_1 dx_2 dx_3 = \rho \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

### 7.3 Вклад конвективных членов

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (V_i V_2) + \frac{\partial}{\partial x_2 (V_i V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3 (V_i V_3)}} \right] V_i dx_1 dx_2 dx_3 = \\
& -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^3 V_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (V_i^2) + V_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (V_i^2) + V_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (V_i^2) \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 V_i^2 \div V dx_1 dx_2 dx_3 = 0
\end{aligned}$$

Конвективный член не вносит изменений (ошибок)

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \Delta V_i \cdot V_i dx_1 dx_2 dx_3 = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_3} \right)^2 \right]$$

Введем сетку

$$V_1 = U$$

$$V_2 = V$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = y$$

Аппроксимация дивергенции скорости V

$$\div V$$

$$\int_{S_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} \div V dx dy =$$

$$= \int_{\partial S_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} (V, n) dl =$$

$$u_{i+1j+\frac{1}{2}} h_{J+\frac{1}{2}}^y + V_{i+\frac{1}{2}J+1} h_{i+\frac{1}{2}}^x - u_{ij+\frac{1}{2}} h_{j+\frac{1}{2}}^y - V_{i+\frac{1}{2}j} h_{i+\frac{1}{2}}^x$$

$$\div V = \frac{U_{i+1j+\frac{1}{2}} - u_{ij+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} + \frac{V_{i+\frac{1}{2}J+1} - V_{i+\frac{1}{2}j}}{h_j^y} = 0$$

## Лекция 10

В лекции 9 написали аппроксимации уравнения импульса и интегрировали по ячейке. Переинтерполировали так чтобы дивергенция внутри ячейки была равна 0.

Вывод разностного уравнения для второй компоненты в разностном случае.

Повторили построение аппроксимации.

Уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \dots - \text{grad} p + \nu \Delta V$$

$$\div V = 0$$

$u, V, P$

На давление нет уравнения. Обычно используют предиктор-корректор, не очень хороший споб, но лучше нет.

### 1. Предиктор скорости

$$\frac{\tilde{V} - V^k}{t} + K_h(V^k)\tilde{V} = \nu \Delta \tilde{V}$$

$$\tilde{V}|_r = 0$$

### 2. корректор

$$V^{k+1} = \tilde{V} = \tau \text{grad} p^{k+1}$$

$$\underline{V^{k+1} - V^k}$$

$$\text{div} V^{k+1} = \text{div} \tilde{V} - \tau \text{div grad} P^{k+1} = 0$$

$$\text{div grad} p = \frac{\text{div} \tilde{V}}{\tau}$$

## 8.1 Исследование устойчивости

$$\frac{\hat{u}_{ij+\frac{1}{2}} - u_{ij+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{u_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^2 - U_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^2}{h^x} + \frac{(uV)_{ij+1} - (uV)_{ij}}{h^y} = -\frac{P_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h^x} + \nu \Delta u_{ij+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u_{i+1j+\frac{1}{2}} - u_{ij+\frac{1}{2}}}{h_x} + \frac{V_{i+\frac{1}{2}j+1} - V_{i+\frac{1}{2}j}}{h_y} = 0$$

Процедура линеаризации

$$u = a + \bar{u}$$

$$V = b + \bar{V}$$

$$p = p_0 + \bar{p}$$

$$\bar{u} \ll 1$$

$$\bar{V} \ll 1$$

$$\bar{p} \ll 1$$

$$\begin{aligned} K &= (a + \bar{u})_x^2 + [(a + \bar{u})(f + \bar{V})]_y = \\ &= (a^2 + 2a\bar{u} + \bar{u}^2)_{\tilde{x}}(ab + b\bar{u} + a\bar{V} + \bar{u}\bar{V})_y = \\ &= 2a\bar{u}_{\tilde{x}} + b\bar{u}_y + a\bar{V}_y = \\ &= a\bar{u}_{\tilde{x}} + b\bar{u}_y + a(\bar{u}_{\tilde{x}}\bar{V}_y) \\ K &= a\bar{u}_{\tilde{x}} + b\bar{u}_y \end{aligned}$$

Результат линеаризации:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}_{ij+\frac{1}{2}} - \bar{u}_{ij+\frac{1}{2}}}{\tau} + a\hat{u}_{\tilde{x}} + b\hat{u}_y &= -\hat{p}_{\hat{x}} + \nu\Delta\hat{u} \\ \frac{\hat{V}_{i+\frac{1}{2}j} - \bar{V}_{i+\frac{1}{2}}}{\tau} + a\hat{V}_y &= -\hat{p}_y + \nu\Delta\hat{V} \\ \hat{u}_x + \hat{V}_y &= \nu \end{aligned}$$

## Лекция

### 9.1 Устойчивость схемы для Н-С

Система уравнений:

$$\frac{\hat{U} - U}{\tau} + au_x^y + bU_0^y = -P\hat{x} + \nu(U_{\bar{x}x} + U_{\bar{y}y})$$

$$\frac{\hat{U} - V}{\tau} \dots$$

$$\text{div} V = 0$$

Конец системы

$$\phi = l_1 h^x, \Theta = l_1 h^y$$

$$U_{mn}^k = U^k(x_m, y_k) = U^k e^{i(l_1 x + l_2 y)} = q^k U_a e^{i(m\phi + n\Theta)}$$

$$\begin{aligned} U_a \frac{q^{k+1} - q^k}{\tau} e^{i(m\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta)} + a U_a q^{k+1} e^{i(n+\frac{1}{2})\Theta} \frac{e^{i(m+1)\phi} - e^{i(m-1)\phi}}{wh^x} + b U_a q^{k+1} e^{im\pi} \frac{e^{i(n+\frac{3}{2})\Theta} - e^{i(n-\frac{1}{2})\Theta}}{2h^y} = \\ -q^k U_p \frac{e^{i(m+\frac{1}{2}\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta)} - e^{i(m-\frac{1}{2}\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta)}}{h^x} + \nu \left[ \frac{1}{(h^x)^2} q^{k+1} U_a (e^{i[(m+1)\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta]} - 2e^{i[m\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta]} + e^{i[(m-1)\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta]}) \right. \\ \left. + \frac{1}{(h^y)^2} q^{k+1} U_a (e^{i[(n+\frac{1}{2})\Theta + (m+\frac{1}{2})\phi]} - 2e^{i[(n+\frac{1}{2})\Theta + m\phi]} + e^{i[(n+\frac{1}{2})\Theta + (m-1)\phi]}) \right] \\ = U_a \frac{q^{k+1} q^k}{\tau} + U_a q^{k+1} a \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2h^x} + U_a b q^{k+1} \frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2h^y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -q^k P_a \frac{e^{i\frac{\phi}{2}} - e^{-i\frac{\phi}{2}}}{h^x} + \nu q^{k+1} \cdot \left[ \frac{e^{i\phi-2+e^{-i\phi}}}{(h^x)^2} + \frac{e^{i\Theta} - 2 + e^{-i\Theta}}{(h^y)^2} \right] = \\
&= U_a \frac{1 - \frac{1}{q}}{\tau} + a U_a \frac{i \sin \phi}{h_x} + b U_a \frac{i \sin \Theta}{h_y} = \\
&= \frac{2i \sin \frac{\phi}{2}}{h^y} = -P_a \frac{2i \sin \frac{\phi}{2}}{h^x} + \nu U_a \left[ \frac{1}{(h^x)^2} (w i \sin \frac{\phi}{2})^2 + \frac{1}{(h^y)^2} (2i \sin \frac{Q}{2})^2 \right] = \\
&= \left[ \frac{1 - \frac{1}{q}}{\tau} + \frac{ia}{h^x} \sin \phi + \frac{ib}{h^y} \sin \Theta + \nu 4 \left( \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{(h^x)^2} + \frac{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}{(h^y)^2} \right) \right] + \frac{P_n}{h^x} 2i \sin \frac{\phi}{2} = 0
\end{aligned}$$

Результат:

$$\mathcal{Z}u_a + OV_a + \frac{2iP_a}{h_x} \sin \frac{\phi}{2} = 0$$

То же самое нужно проделать для второй компаненты, полностью аналогично:

$$(OU_a + \mathcal{Z}V_a + \frac{29}{h_y} \sin \frac{Q}{2} P_a) = 0$$

Дивергенция:

$$\begin{aligned}
&U_a a^{k+1} \frac{e^{i(m+1)\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta} - e^{i[m\phi + (n+\frac{1}{2})\Theta]}}{h^x} + V_a a^{k+1} \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})\phi + (n+1)\Theta} - e^{i[h_x(m+\frac{1}{2})\phi + n\phi]}}{h^y} = 0 \\
&\frac{U_a}{h_x} (e^{i\frac{\phi}{2} - e^{-i\frac{\phi}{2}}}) + \frac{V_b}{h_y} (e^{i\frac{\Theta}{2}} - e^{-i\frac{Q}{2}}) = 0
\end{aligned}$$

Третье уравнение:

$$\frac{1}{h_x} \sin \frac{\phi}{2} U_a + \frac{1}{h_y} \sin \frac{\Theta}{2} V_a + OP_a = 0$$

Итого система:

1.

$$\mathcal{Z}u_a + OV_a + \frac{2iP_a}{h_x} \sin \frac{\phi}{2} = 0$$

2.

$$(OU_a + \mathcal{Z}V_a + \frac{29}{h_y} \sin \frac{Q}{2} P_a) = 0$$

3.

$$\frac{1}{h_x} \sin \frac{\phi}{2} U_a + \frac{1}{h_y} \sin \frac{\Theta}{2} V_a + OP_a = 0$$

посчитаем определитель коэффициентов этой системы:

1.

$$\mathcal{Z}u_a + OV_a + \frac{2iP_a}{h_x} \sin \frac{\phi}{2} = 0$$

2.

$$(OU_a + \mathcal{Z}V_a + \frac{29}{h_y} \sin \frac{Q}{2} P_a) = 0$$

3.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_x} \sin \frac{\phi}{2} U_a + \frac{1}{h_y} \sin \frac{\Theta}{2} V_a + OP_a = 0 \\ & = -\mathcal{Z} \frac{1}{(h^x)^2} 2i \sin^2 \frac{\phi}{2} - \mathcal{Z} \frac{1}{h^y} 2i \sin^2 \frac{\Theta}{2} = 0 \Rightarrow \mathcal{Z} = 0 \end{aligned}$$

Подставим z

$$\mathcal{Z} = \frac{1 + \frac{1}{q}}{\tau} + \frac{ia}{h^x} \sin \phi + \frac{ib}{h^y} \sin \Theta + 4\nu \left( \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{(h^x)^2} + \frac{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}{(h^y)^2} \right) = 0$$

$$\left| \frac{1}{q} \right| < 1; |q| < 1$$

Следовательно схема безусловна устойчива при этом условии

Для явной схемы

$$\mathcal{Z} = \frac{q - 1}{\tau} + \frac{ia}{h_z} \sin \phi + \frac{ib}{h_y} \sin \Theta + 4\nu \left( \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{(h^x)^2} + \frac{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}{(h^y)^2} \right)$$

Так как мы ищем достаточное условие можем взять

$$h = h^x = h^y$$

$$a = b : \phi = \Theta$$

$$\frac{q - 1}{\tau} + \frac{ia}{h} \sin \phi + \frac{ib}{h} \sin \phi + 4\nu \left( \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{h^2} + \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{h^2} \right) = 0$$

$$\frac{q - 1}{\tau} + \frac{i(a + b)}{h} \sin \phi + 8\nu \left( \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{h^2} \right) = 0$$

$$q = -\tau \frac{i(a + b)}{h} \sin \phi + 8\nu \left( \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{h^2} \right) + 1$$

$$q = \frac{-\tau i(a + b) \sin \phi}{h} + \frac{8\nu (\sin^2 \frac{\phi}{2})}{h^2} + 1$$

$$q = \frac{-2\tau i a \sin \phi}{h} + \frac{8\nu (\sin^2 \frac{\phi}{2})}{h^2} + 1$$

$$q = \left( 1 - 8 \frac{\nu \tau}{h^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) - \frac{2i\tau a}{h} \sin \phi$$

Устойчив при модуле q < 1

$$|q|^2 = \left( 1 - \frac{8\nu \tau}{h^2} \right)^2 + \frac{4\tau^2 a^2}{h^2} \sin^2 \phi < 1$$

$$\begin{aligned}
1 - \frac{16\tau\nu}{h^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} + \frac{64\tau^2\nu^2}{h^4} \sin^4 \frac{\phi}{2} + \frac{4\tau^2 a^2}{h^2} \sin^2 \phi &< 1 \\
\frac{4\nu^2}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} + \frac{16\tau\nu^2}{h^2} \sin^4 \frac{\phi}{2} + 4\tau a^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} \\
\nu + \frac{4\tau\nu}{h^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \tau a^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\phi}{2} &< 0 \\
-\nu + \tau \left[ \frac{4\nu \sin^2 \frac{\phi}{2}}{h^2} + a^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \right] &< \nu \\
\tau < \frac{\nu}{4\nu \frac{\sin^2 \frac{\phi}{2}}{2}} + a \cos^2 \frac{\phi}{2} \\
\tau &\sim h^2
\end{aligned}$$

## 9.2 Задача Стефана

Задача о фазовом переходе (например плавление или замерзание). Задача с подвижной внутренней границей.

В твердой фазе:

$$c_p \rho_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa^s \frac{\partial T}{\partial x})$$

$$c_l \rho_l \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa^l \frac{\partial T}{\partial x})$$

$$T_{ph} = 0$$

Необходимо еще одно условие чтобы получить границу раздела сред, где одно уравнение переходит в другое.

$$\epsilon^s = C_p^s \rho^s (T - T_0)$$

$$\epsilon^l = c_p^s \rho^s (T_{ph} - T_0) + \lambda \rho + C_p^l \rho^l (T - T_{ph})$$

$$E = 0 \int_0^{\xi(t)} \epsilon^s dx + \int_{\xi(t)}^L \epsilon^l dx - \text{внутренняя энергия всей системы}$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^{\xi(t)} \frac{\partial \epsilon^s}{\partial t} dx + \xi(t) \epsilon^s|_{x=\xi(t)} + \int_{\xi(t)}^L \frac{\partial \epsilon^l}{\partial t} dx - \xi \epsilon^l|_{x=\xi(t)} =$$

$$= \int_0^{\xi(t)} C_p^s \rho^s \frac{\partial}{\partial t} (T - T_0) dx + \xi(t) [\epsilon^s|_{x=\xi(t)} - \epsilon^l|_{x=\xi(t)}] \int_{\xi(t)}^L [C_p^s \rho^s (T_{ph} - T_0) + \lambda \rho + C_p^l (T - T_0)] dt =$$

$$= \int_0^{\xi(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\kappa^s \frac{\partial T}{\partial x}) dx + \int_{\xi(t)}^L \frac{\partial}{\partial x} (\kappa^l \frac{\partial T}{\partial x}) dx + \xi(t) [\epsilon^s|_{x=\xi(t)}] =$$

$$= \kappa^s \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=\xi(t)} - \kappa^s \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0} + \kappa^l \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=L} - \kappa^l \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=\xi(t)} + \xi(t) [C_p^s \rho^s (T_{ph} - T_0) - C_p^s \rho^s (T_{ph} - T_0) - \lambda \rho - C_p^l \rho^l (T_{ph} - T_0)]$$

Условие Стефана:

$$\kappa^s \frac{\partial T}{\partial x} |_{\xi(t)^s} - \kappa^l \frac{\partial T}{\partial x} |_{\xi(t)^l} = \lambda \rho^s$$

$$\kappa = \varpi$$

## Лекция 10

1. Подход подвижной сетке закрепляем узлы как на резинке, и они двигаются вместе с перемещением границы раздела.
2. Замена переменных так чтобы левая граница была 0, граница раздела 1, правая граница 2.

### 10.1 Замена переменных (неподвижная сетка)

Замена переменных (переход в новую систему переменных)

$$\tilde{t} = t$$

$$x = \phi(t, y) \{ y\xi(t) - "S" \text{ (твердая фаза)} ; \xi(t) + (L - \xi(t))(y - 1)"l" \text{ (жидкая фаза)} \}$$

$$y = \frac{x}{\xi(t)} - "s"; y = 1 + \frac{x - \xi(t)}{l} - "l"$$

Можно проверить что система невырождена, посчитав якобиан:

$$l^s \{ \text{длина твердой фазы} \}$$

$$l^l \{ \text{длина жидкой фазы} \}$$

Отображение становится вырождено только если длина одной из зон станет равной нулю.

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right); T(t, y) = T(\tilde{t}, y(\tilde{t}, x))$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{t}}$$

дифференциалы прямого и обратного преобразования:

х:

$$d\tilde{t} = dt$$

$$dx = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

Инварианты с матрицами

$$\begin{pmatrix} d\tilde{t} \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dy \end{pmatrix}$$

Умножить его на обратную матрицу.



$$\begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} & \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d\tilde{t} \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} dt \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} & \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{t} \\ dx \end{pmatrix}$$

у:

$$dt = d\tilde{t}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} + \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

Инварианты с матрицами

$$\begin{pmatrix} dt \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{t} \\ dy \end{pmatrix}$$

тогда посчитаем

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \begin{pmatrix} \frac{1}{l^s} \\ \frac{1}{l^l} \end{pmatrix} \frac{1}{l}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = -\frac{\phi_t}{l}$$

Итого

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{t}}$$

$$c\left(\frac{\partial t}{\partial t} - \frac{\phi_t}{l} \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varkappa \frac{1}{l} \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Итого получаем совсем другое уравнение, но по постоянным областям.

Теперь перейдем к граничному условию:

$$\varkappa \frac{\partial T}{l^s \partial y} \Big|_{1-0} - \varkappa \frac{\partial T}{l^l \partial y} \Big|_{1+0}$$

$$\varkappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t-0)} - \varkappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\xi(t)+0} = \lambda \frac{d\xi}{dt}$$

Теперь аппроксимируем это граничное условие

$$c\left(l \frac{\partial T}{\partial t}\right) - (\phi_t \frac{\partial T}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\varkappa \frac{1}{l} \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$c\left(\frac{\partial}{\partial t}(lT)\right) - T \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T) + T \phi_{ty}$$

$$\phi_{ty} = \frac{\partial l}{\partial t}$$

$$c\left(\frac{\partial}{\partial t}(lT)\right) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

Пусть узел связанный с границей раздела фаз называется  $y_{i*}$

Вводим потоковые точки связанные с серединами отрезков, а температуру относим к узлам.

$\varkappa$  и  $c$  Относим к потоковым точкам, так как они зависят от фазы отрезка, также как и  $l$  (Длина отрезка  $l$  зависит от отрезка).

Нужно написать алгоритм однородный относительно границы раздела сред.

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c \left[ \frac{\partial}{\partial t}(lT) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T) \right] dt dy = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dt dy$$

Первый интеграл:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_t \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c \frac{\partial}{\partial t}(lT) dy = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c(lT) dy = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i} c l T dy + \int_{y_{i+\frac{1}{2}}}^{y_i} c l T dy \right] = \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \frac{\partial}{\partial t} \left[ c_{i-\frac{1}{2}}(l_{i-\frac{1}{2}} T_i) h_{i-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} + c_{i+\frac{1}{2}}(l_{i+\frac{1}{2}} T_i) h_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{2} c_{i-\frac{1}{2}} [(l_{i+\frac{1}{2}} T_i) - (l_{i-\frac{1}{2}} T_i)] + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} c_{i+\frac{1}{2}} [\widehat{(l_{i+\frac{1}{2}} T_i)} - (l_{i+\frac{1}{2}} T_i)] \end{aligned}$$

Второй интеграл:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left[ \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i} c_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T) dy + \int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} c_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y}(\phi_t T) dy \right] = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} [c_{i-\frac{1}{2}} [(\phi_t T)(y_i) - (\phi_t T)(y_{i-\frac{1}{2}})] + [c_{i+\frac{1}{2}} ((\phi_t T)(y_{i+\frac{1}{2}}) - (\phi_t T)(y_i))] dt = \end{aligned}$$

$$\phi_t|_{i+0} = \phi_t|_{i-0}$$

$$\phi_t|_{i=i*} = \frac{d\xi}{dt}; \phi = y\xi$$

$$\phi_t = y \cdot \dot{\xi}$$

$$l'' \phi_t = (2 - y) \dot{\xi}$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} (c_{i-\frac{1}{2}} - c_{i+\frac{1}{2}}) \frac{d\xi}{dt} T + c_{i+\frac{1}{2}} (\phi_t T)_{y_{i+\frac{1}{2}}} - c_{i-\frac{1}{2}} (\phi_t T)_{y_{i-\frac{1}{2}}} dt$$

$$(\phi_t T)_{i+\frac{1}{2}} = \phi_t(i + \frac{1}{2}) \frac{T_i + T_{i+1}}{2}$$

Остался последний интеграл

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left[ \int_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_i} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy + \int_{y_i}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] = \\ & = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left[ \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{i-0}} - \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{i-\frac{1}{2}}} + \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{i+\frac{1}{2}}} - \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_{i+0}} \right] = \\ & = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[ \frac{d\xi}{dt} \lambda \delta_{ii^*} + \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\varkappa}{l} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] dt \end{aligned}$$

## Лекция

### 11.1 Разностная схема на подвижной сетке

Вводим сетку так, чтобы один узел был всегда на границе раздела фаз  $(\xi(t))$ . Если движется узел  $\xi(t + \tau)$ , то все узлы справа и слева сдвигаются, так чтобы расстояние между узлами были равны.

$$h_{i+\frac{1}{2}}(t) x_{in}(t) - x_i(t)$$

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x + i + 1(t + \tau) - x_i(t + \tau)$$

$$h_i(t) = \cancel{h_i} = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} + h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$\cancel{f_x} = \frac{f(x_{i+1}(t)) - f(x_i(t))}{\cancel{h_i} - \frac{1}{2}(t)}$$

Строим разностную схему

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varkappa \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

\*Картинка с узлами и отрезком интегрирования\*

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}^{x_{i+\frac{1}{2}}(t)} c \frac{\partial T}{\partial t} dt dx =$$

вспомним как дифференцируется (формула интегрирования по переменным границам или формула интегрирования по параметру):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}(t)} (cT) dx &= \\ &= \int_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}^{x_{i+\frac{1}{2}}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (cT) dx + (cT)_{i+\frac{1}{2}} \frac{dx_{i+\frac{1}{2}}}{dt} - (cT)_{i-\frac{1}{2}} \frac{dx_{i-\frac{1}{2}}}{dt} \end{aligned}$$

Применим эту формулу к интегралу:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left[ \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_i(t)} \frac{\partial}{\partial t} (CT) dx + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial t} (CT) dx \right] = \\ &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left[ \frac{d}{dt} \int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_i} (CT) dx - (CT)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{dx_{i+\frac{1}{2}}}{dt} + (CT)_{x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} (CT) dx - (CT)_{x_i} \frac{dx_i}{dt} + (CT)_{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{dx_{i+\frac{1}{2}}}{dt} \right] = \\ &= \frac{c_{i-\frac{1}{2}}}{2} [h_{i-\frac{1}{2}}^w T_i - h_{i+\frac{1}{2}}^x T_j] + \frac{c_{i+\frac{1}{2}}}{2} [h_{i+\frac{1}{2}}^x T_i - h_{i+\frac{1}{2}}^x T_i] - \tau [(CT^{(\sigma)} x_t)_{i+\frac{1}{2}} - (CT^{(\sigma)} x_t)_{i-\frac{1}{2}}] - \tau [(c_{i-\frac{1}{2}} - c_{i+\frac{1}{2}}) T_i^{(\sigma)}(x_i)_t] \end{aligned}$$

$$T^\sigma = \hat{T} + (1 - \sigma)T$$

Шапка значит что  $h_{i-\frac{1}{2}}^x(t_{j+1}) +$  (берем по следующему временному слою)

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\hat{x}_i - x_i}{\tau}$$

$$I_2 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}^{x_{i+\frac{1}{2}}(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\varpi \frac{\partial T}{\partial x}) dt dx =$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left[ \int_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)}^{x_i(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\varpi \frac{\partial T}{\partial x}) dx + \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (\varpi \frac{\partial T}{\partial x}) dx \right] =$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} dt \left[ \varpi \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i(t)} - \varpi \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}(t)} \varpi \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_i} \right] =$$

$$= \tau \frac{dx_i}{dt} \lambda \delta_{ij} + \tau \left[ \varpi_{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2}} - \varpi_{i-\frac{1}{2}} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2}} \right]$$

## 11.2 задача Стефана в двумерном пространстве

Рассмотрим на фиксированной сетке, на подвижной рассматривать не будем так как нет времени, а они эквивалентны вплоть до замены переменных.

Нарисуем цилиндр со стенками конечной толщины. внутри есть жидкая фаза "l" и твердая фаза "S".

Плотность снова одинаковая

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{r}}(\tilde{r}\varpi \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tilde{r}\varpi \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}})$$

$$||\varpi \nabla T \cdot N|| = St V_{Ph(l_z, N)}$$

N - нормаль границы раздела

Условия на границе:

$$\varpi \frac{\partial T}{\partial n}|_S = \varpi \frac{\partial T}{\partial n}|_l$$

$$\frac{\partial T}{\partial}$$

Границы раздела -  $\tilde{z}_1$  - дно,  $\tilde{z}_2$  - граница раздела сред,  $\tilde{z}_3$  - крышка,  $\tilde{z}_0, \tilde{z}_4$  - нижняя поверхность, верхняя поверхность

Переводим эти кривые в прямые линии и получаем разделение по отдельным слоям.

Сделаем замену переменных:

$$t = \tilde{t}$$

$$r = \tilde{r}$$

$$z = \frac{\tilde{z} - \tilde{z}_\gamma}{\tilde{l}^\gamma}$$

Например при  $\gamma = 0$ :

$$z = \frac{\tilde{z} - z_0}{l^0}$$

$$\gamma = 0, 1, 2, 3$$

Делаем замену переменных

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{t}} \\ \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} \end{array} \right.$$

$$d\tilde{t} = dt$$

$$d\tilde{r} = dr$$

$$d\tilde{z} = \frac{\partial\phi}{\partial t}dt + \frac{\partial\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$d\tilde{t} = dt$$

$$d\tilde{r} = dr$$

$$d\tilde{r} = \frac{\partial z}{\partial \tilde{t}} d\tilde{t} d\tilde{t} + \frac{\partial z}{\partial \tilde{r}} d\tilde{z} d\tilde{z}$$

$$\begin{bmatrix} d\tilde{t} \\ d\tilde{r} \\ d\tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dt \\ dr \\ dz \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dt \\ dr \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial \tilde{r}} & \frac{\partial\phi}{\partial \tilde{z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\tilde{t} \\ d\tilde{r} \\ d\tilde{z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}^{(} - 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial \tilde{r}} & \frac{\partial\phi}{\partial \tilde{z}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} & \frac{\partial\phi}{\partial r} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{bmatrix}^{(} - 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\partial\phi}{\partial \tilde{t}} & -\frac{\partial\phi}{\partial \tilde{r}} & -\frac{1}{\frac{\partial\phi}{\partial z}} \end{bmatrix}^{(} - 1)$$

$S_\gamma$	$\phi_z^\gamma = l$	$\phi_t$	$r$
$S_0$	$z_1 - z_0$	0	$(z - 1)z_{2,r}$
$S_1$	$z_1(\tilde{r}\tilde{t} - z_1)$	$(z - 1)z_{2,t}$	
$S_2$	$z_3 - z_2(\tilde{r}, \tilde{t})$	$(3 - z)z_{2,t}$	
$S_3$	$z_4 - z_3$	$z_j$	

Взять таблицу из лекций, но там есть опечатка!

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r} \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\tilde{r} \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}}) \right] \cdot r l =$$

$$l \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} Q_1 + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} Q_2 \right], \text{ где } Q_1 = \tilde{r} \frac{\partial T}{\partial \tilde{r}}, Q_2 = \tilde{r} \frac{\partial T}{\partial \tilde{z}}$$

$$\begin{aligned}
l \frac{\partial Q}{\partial r} &= l \frac{\partial Q_1}{\partial r} - \phi_r \frac{\partial Q_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}(l Q_1) - Q_1 \frac{\partial}{\partial r}(l Q_1) - Q_1 \frac{\partial l}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}(\phi_r Q_1) + Q_1 \frac{\partial \phi_r}{\partial z} = \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(l Q_1) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi_r Q_1) = \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(l r \mathfrak{e}(\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\phi_r}{l} \frac{\partial T}{\partial z})) = \\
&= \frac{\partial}{\partial z}(\phi_r r \mathfrak{e}(\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial_r}{l} \frac{\partial T}{\partial z})) = \\
&= \frac{\partial}{\partial r}(r \mathfrak{e}(l \frac{\partial T}{\partial r} - \phi_r \frac{\partial T}{\partial z})) - \frac{\partial}{\partial z}(r \mathfrak{e}(\phi_r \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\phi_r^2}{l} \frac{\partial T}{\partial z})) \\
l \frac{\partial Q}{\partial \tilde{z}} &= \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{e} r \frac{1}{l} \frac{\partial T}{\partial z})
\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения

$$L^{rr} = l; Z^{rz} = Z^{zr} = -\phi_r; Z_{zz} = \frac{1 + \phi^2}{l}$$

Тогда:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial r}[\mathfrak{e} r (L^{rr} \frac{\partial T}{\partial r} + L^{rz} \frac{\partial T}{\partial z})] + \frac{\partial}{\partial z}[\mathfrak{e} r (L^{zr} \frac{\partial T}{\partial r} + L^{zz}) \frac{\partial T}{\partial z}]$$

Этот оператор хороший - эллиптический, самосопряженный, самоопределенный доказать в качестве упражнения.

Подумать как записать краевые условия для выражений  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$  и  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$