Разностные схемы для уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Лекция 5

О.С.Мажорова

Сентябрь 2020 г.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] = -\nabla p + \chi\Delta\mathbf{V} + \rho\mathbf{g} \qquad (1)$$

$$div\mathbf{V} = (\nabla\cdot\mathbf{V}) = 0, \qquad (2)$$

$$\rho=\rho(p,T) = \rho_0(1-\beta T) \qquad (3)$$

Здесь t – время, x, y, z – декартовы координаты,
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$
$\mathbf{V}(t,x,y,z)=(V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, $p(t,x,y,z)$ – давление, $\mathbf{g}=(0,0,g)$. χ - коэффициент динамической вязкости, T – температура, β – коэффициент теплового расширения.

(1) – закон сохранения импульса;

(2) – закон сохранения массы;

(3) – уравнение состояния

Замечание о несжимаемости

Закон сохранения массы:

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\; div\mathbf{V}=0$$

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}+V_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+V_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+V_z\frac{\partial\rho}{\partial z}}_{\text{Производная Лагранжа}}+\rho\; div\mathbf{V}=0$$

Производная Лагранжа = полная производная ($\frac{D}{Dt}$) = субстанциональная производная.

$V_x\dfrac{\partial}{\partial x}+V_y\dfrac{\partial}{\partial y}+V_z\dfrac{\partial}{\partial z}$ – производная по направлению (V_x, V_y, V_z)

Несжимаемость – это $\dfrac{D\rho}{Dt}=0 \Rightarrow div\mathbf{V}=0$

В уравнениях Навье-Стокса изменение плотности будем учитывать только в подъемной силе и перепишем (1) в виде:

Уравнения Навье-Стокса в переменных "вихрь, функция тока".

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\nabla\frac{p}{\rho_0}+\nu\Delta\mathbf{V}+\mathbf{F} \qquad (4)$$

$\nu = \dfrac{\chi}{\rho_0}$ – кинематическая вязкость.

Исключим из (4) давление. Вспомним, что если $div\mathbf{V}{=}0$, то

$$\Delta\mathbf{V}{=}{-}rotrot\mathbf{V};\quad (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}{=}rot\mathbf{V}\times\mathbf{V}+\nabla\left(\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+rot\mathbf{V}\times\mathbf{V}{=}{-}\nabla\left(\frac{p}{\rho_0}+\frac{\mathbf{V}^2}{2}\right)-\nu rotrot\mathbf{V}+\mathbf{F} \qquad (5)$$

$rot\mathbf{V}{=}\Omega.$ Применим rot к (5) и получим уравнение переноса вихря

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\Omega-(\Omega\cdot\nabla)\mathbf{V}{=}\nu\Delta\Omega+rot\mathbf{F} \qquad (6)$$

Здесь учтено, что $rot(\Omega\times\mathbf{V}){=}(\mathbf{V}\cdot\nabla)\Omega-(\Omega\cdot\nabla)\mathbf{V}$ и $rot\nabla f{=}0.$

Двумерные течения.

Пусть $\mathbf{V} = (V_x(t,x,y), V_y(t,x,y), 0)$. Запишем уравнение переноса вихря для двумерных течений.

$$\Omega = rot\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = (0, 0, \omega)$$

Задача. Доказать (без вычислений), что в двумерном случае $(\Omega \cdot \nabla)\mathbf{V} = 0$

Уравнение переноса вихря (завихренности): $\dfrac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\omega = \nu \Delta \omega$ (7)

Функция тока: $\dfrac{\partial V_x}{\partial x} + \dfrac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \exists \psi : d\psi = V_x dy - V_y dx \Rightarrow V_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\ V_y = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

$\psi = const \Rightarrow d\psi = 0 \Rightarrow \dfrac{V_x}{dx} = \dfrac{V_y}{dy} \Rightarrow$ направление касательной к линии уровня функции тока совпадает с направлением скорости.

Задача. Доказать, что количество жидкости, протекающий в единицу времени через любую кривую, соединяющие точки A и B в плоскости (x, y), равен $q = \psi(B) - \psi(A)$.

Система уравнений Навье-Стокса в переменных (ψ, ω).

Рассмотрим двумерное течение в области $\mathcal{D} = [0, L] \times [0, H]$. Пусть $\mathbf{V} = (u(x, y, t), v(x, y, t), 0)$, $\omega = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$. Уравнение переноса завихренности в безразмерной форме запишем в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle\omega \tag{8}$$

Здесь $\mathrm{Re} = U_0 H/\nu$ - число Рейносьдса, U_0,H - характерные масштабы скорости и вертикальный размер области, ν-кинематическая вязкость. Учитывая условие несжимаемости, уравнение (8) можно переписать в дивергентной форме

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(v\omega) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle\omega \tag{9}$$

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y},\ v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}, \Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\omega\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\omega\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\triangle\omega \tag{10}$$

Кинематическое уравнение, связывающее функцию тока и вихрь:

$$-\omega=\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \tag{11}$$

Свойства дифференциальной задачи.

- Граничные условия на ψ
  Пусть $u|_{\partial\mathcal{D}}{=}v|_{\partial\mathcal{D}}{=}0 \Rightarrow$

$$\psi|_{\partial\mathcal{D}} = const, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\mathcal{D}} = 0, \quad \text{обычно } const = 0. \qquad (12)$$

- Граничных условий на ω нет, но из уравнения (11) следует интегральное условие на завихренность:

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \omega dxdy{=}{-}\int\limits_{\mathcal{D}} \Delta\psi dxdy{=}{-}\int\limits_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial\psi}{\partial n} dl = 0, \qquad (13)$$

  закон сохранения интеграла от завихренности.

- Баланс кинетической энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{Re}\int\limits_{\mathcal{D}} \omega^2 dxdy, \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}} (u^2+v^2)dxdy \qquad (14)$$

Уравнение баланса кинетической энергии 1.

$$\underbrace{\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial \omega}{\partial t} \psi dx dy}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u\omega) + \frac{\partial}{\partial y} (v\omega) \right] \psi dx dy}_{I_2} = \underbrace{\int\limits_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mathrm{Re}} \triangle \omega \psi dx dy}_{I_3}$$

$$I_1 = \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \psi dx dy = \int\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \psi - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} \psi \right) dx dy =$$

$$- \int\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \int\limits_{\mathcal{D}} \left(v \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dy =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2) dx dy = \frac{d\mathcal{E}}{dt};$$ $\mathcal{E}$ – кинетическая энергия

Уравнение баланса кинетической энергии 2.

$$I_2 = \int\limits_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)\right]\psi dxdy=-\int\limits_{\mathcal{D}} \left(u\omega\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\omega\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$-\int\limits_{\mathcal{D}}(-u\omega v+v\omega u)\,dxdy=0 \;\Rightarrow$$

конвективные члены на влияют на баланс кинетической энергии

$$I_3 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{\mathcal{D}} \triangle\omega\psi dxdy=\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{\mathcal{D}} \omega\triangle\psi dxdy=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{\mathcal{D}} \omega^2 dxdy$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}=-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\limits_{\mathcal{D}} \omega^2 dxdy$$

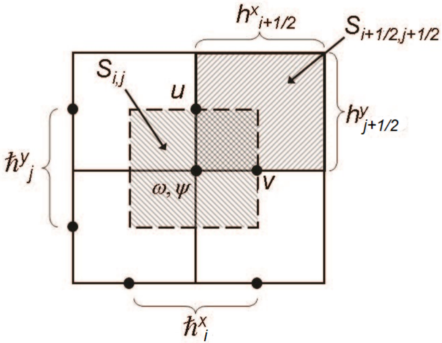
Разностная сетка 1.

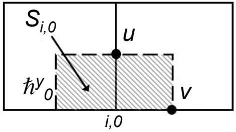
В области $\overline{\mathcal{D}}$ с границей $\partial\mathcal{D}$ введем прямоугольную сетку
$\overline{\mathcal{D}^h} = \overline{\mathcal{D}^h_x} \times \overline{\mathcal{D}^h_y}$,
$\overline{\mathcal{D}^h_x}=\{x_i; i=\overline{0, N_x}, x_0=0, x_{N_x}=L\}$,
$\overline{\mathcal{D}^h_y}=\{y_j; j=\overline{0, N_y}, y_0=0, y_{N_y}=1\}$.
Внутренние узлы области $\mathcal{D}^h = \mathcal{D}^h_x \times \mathcal{D}^h_y$,
$\mathcal{D}^h_x = \{x_i; i = \overline{1, N_x - 1}\}$,
$\mathcal{D}^h_y = \left\{y_j; j = \overline{1, N_y - 1}\right\}$;
$\overline{\mathcal{D}^h}\backslash\mathcal{D}^h$ - множество узлов на границе $\partial\mathcal{D}$.
$\left(\overline{I} \times \overline{J}\right)$, $(I \times J)$ и $\left(\overline{I} \times \overline{J}\right) \setminus (I \times J)$ – множество индексов, отвечающих узлам сеток $\overline{\mathcal{D}^h}$, $\mathcal{D}^h$ и $\overline{\mathcal{D}^h}\backslash\mathcal{D}^h$ соответственно.

$\widetilde{I}=\{i=\overline{0, N_x-1}\}, \widetilde{J}=\{j=\overline{0, N_y-1}\}$.

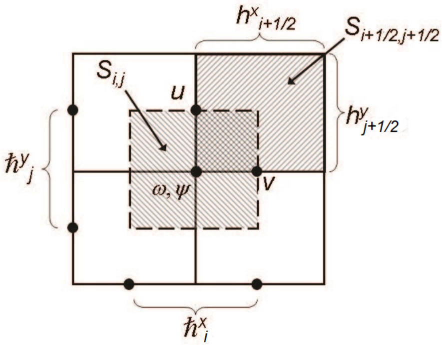
Разностная сетка 2.

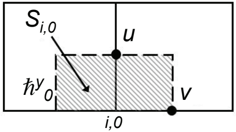
Шаги сетки: $h^x_{i+1/2}=x_{i+1}-x_i$, $h^y_{j+1/2}=y_{j+1}-y_j$, $i \in \widetilde{I}$, $j \in \widetilde{J}$.
Полуцелые узлы: $x_{i+1/2}=(x_{i+1}+x_i)/2$, $y_{j+1/2}=(y_{j+1}+y_j)/2$
Соответствующие им шаги: $\hbar^x_0=h^x_{1/2}/2$,
$\hbar^x_i=(h^x_{i+1/2}+h^x_{i-1/2})/2$, $\hbar^x_{N_x}=h^x_{N_x-1/2}/2$ и $\hbar^y_0=h^y_{1/2}/2$,
$\hbar^y_j=(h^y_{j+1/2}+h^y_{j-1/2})/2$, $\hbar^y_{N_y}=h^y_{N_y-1/2}/2$.





Разностная сетка 3.





$\mathcal{S}_{i+1/2j+1/2}$ – ячейки с центрами в точках $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$, их площадь $d\mathcal{S}_{i+1/2j+1/2} = h^x_{i+1/2}h^y_{j+1/2}$, $(i,j) \in (I \times J)$;

$\mathcal{S}_{ij}$ - ячейки с центрами в (x_i, y_j), и площадью $d\mathcal{S}_{i,j}{=}\hbar^x_i \hbar^y_j$, $(i,j){\in}(\overline{I} \times \overline{J})$.

Ячейки $S_{ij+1/2}$ и $S_{i+1/2j}$, соответственно, с центрами в точках $(x_i, y_{j+1/2})$ и $(x_{i+1/2}, y_j)$ и площадями $dS_{ij+1/2}{=}\hbar^x_i h^y_{j+1/2}$, $dS_{i+1/2j}{=}h^x_{i+1/2}\hbar^y_j$.

Сеточные функции и их производные.

Значения сеточных функций в узлах (x_i, y_j) будем обозначать $f_{ij} = f$; $f(x_{i\pm1/2}, y_j) = f_{i\pm1/2j}$, $f(\pm1_x)$ - значения функции в узлах, сдвинутых в направлении x на ±1. Аналогично обозначаются сдвиги по направлению y.

$$f_{x,i+1/2j}=f_x=\frac{f_{i+1j}-f_{ij}}{h^x_{i+1/2}}; \quad f_{\bar{x},i-1/2j}=f_{\bar{x}} = \frac{f_{ij}-f_{i-1j}}{h^x_{i-1/2}};$$

$$f_{\overset{\circ}{x},ij}=f_{\overset{\circ}{x}}=\frac{f_{i+1j}-f_{i-1j}}{2\hbar^x_i}; \quad f_{\tilde{x}}=\frac{f_{i+1/2j}-f_{i-1/2j}}{\hbar^x_i}; \quad f_{x\tilde{x}} = \frac{f_x - f_{\bar{x}}}{\hbar^x_i}.$$

Сетка по времени: $\{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots\}$

Производная по времени: $f_t=\dfrac{f(t_{k+1})-f(t_k)}{\tau}=\dfrac{\hat{f}-f}{\tau}$;

$$f^{(\sigma)}=\sigma\hat{f}+(1-\sigma)f.$$

Функции ψ и ω будем относить к узлам разностной сетки $\overline{\mathcal{D}^h}$.

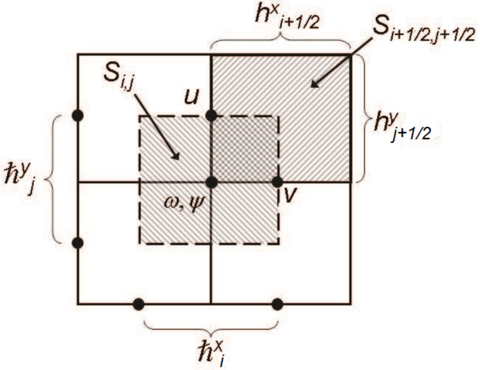
Скалярные произведения.

$$f(x_i, y_j), g(x_i, y_j) \Rightarrow (f, g)_h^{(0)} = \sum_{(i,j)\in \overline{I}\times\overline{J}} f_{ij} g_{ij} dS_{ij};$$

$$f(x_i, y_{j+1/2}), g(x_i, y_{j+1/2}) \Rightarrow (f, g)_h^{(1)} = \sum_{(i,j)\in \overline{I}\times\widetilde{J}} f_{ij+1/2} g_{ij+1/2} dS_{ij+1/2};$$

$$f(x_{i+1/2}, y_j), g(x_{i+1/2}, y_j) \Rightarrow (f, g)_h^{(2)} = \sum_{(i,j)\in \widetilde{I}\times\overline{J}} f_{i+1/2j} g_{i+1/2j} dS_{i+1/2j}$$

Вычисление скорости.



$$u_{ij+1/2}{=}\psi_y = \frac{\psi_{ij+1}-\psi_{ij}}{h^y_{j+1/2}},$$

$$v_{i+1/2j}{=} - \psi_x{=}-\frac{\psi_{i+1j}-\psi_{ij}}{h^x_{i+1/2}}$$

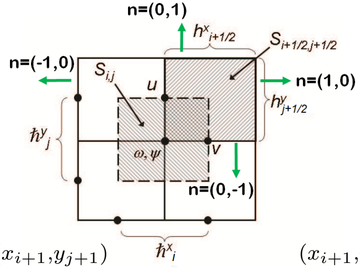
Уравнение неразрывности:

$$\int\limits_{S_{i+1/2j+1/2}} div\mathbf{V}dxdy = \int\limits_{\partial S_{i+1/2j+1/2}} (\mathbf{V},\mathbf{n})dl,$$

$\mathbf{n}$ — нормаль к границе ячейки:

$$(div\mathbf{V})_{i+1/2j+1/2}dS_{i+1/2j+1/2}{=}u_{i+1j+1/2}h^y_{j+1/2}{+}v_{i+1/2j+1}h^x_{i+1/2}$$
$$-u_{ij+1/2}h^y_{j+1/2}{-}v_{i+1/2j}h^x_{i+1/2}$$

Вычисление интеграла по границе ячейки.



$$\int\limits_{\partial S_{i+1/2j+1/2}} (\mathbf{V},\mathbf{n})dl = \int\limits_{(x_{i+1},y_j)}^{(x_{i+1},y_{j+1})} (\mathbf{V}_{i+1,j+1/2},\mathbf{n})dy + \int\limits_{(x_i,y_{j+1})}^{(x_{i+1},y_{j+1})} (\mathbf{V}_{i+1/2,j+1},\mathbf{n})dx +$$

$$\int\limits_{(x_i,y_j)}^{(x_i,y_{j+1})} (\mathbf{V}_{i,j+1/2},\mathbf{n})dy + \int\limits_{(x_i,y_j)}^{(x_{i+1},y_j)} (\mathbf{V}_{i+1/2,j},\mathbf{n})dx +$$

Задача. Доказать, что $(div\mathbf{V})_{i+1/2j+1/2} = 0$.