# Разностные схемы для уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Лекция 6

О.С.Мажорова

Сентябрь 2020 г.

# Разностная сетка 1.

В области $\overline{\mathcal{D}}$ с границей $\partial\mathcal{D}$ введем прямоугольную сетку
$\overline{\mathcal{D}^h} = \overline{\mathcal{D}^h_x} \times \overline{\mathcal{D}^h_y}$,
$\overline{\mathcal{D}^h_x} = \{x_i; i = \overline{0, N_x}, x_0 = 0, x_{N_x} = L\}$,
$\overline{\mathcal{D}^h_y} = \{y_j; j = \overline{0, N_y}, y_0 = 0, y_{N_y} = 1\}$.
Внутренние узлы области $\mathcal{D}^h = \mathcal{D}^h_x \times \mathcal{D}^h_y$,
$\mathcal{D}^h_x = \{x_i; i = \overline{1, N_x - 1}\}$,
$\mathcal{D}^h_y = \{y_j; j = \overline{1, N_y - 1}\}$;
$\overline{\mathcal{D}^h} \backslash \mathcal{D}^h$ - множество узлов на границе $\partial\mathcal{D}$.
$(\overline{I} \times \overline{J})$, $(I \times J)$ и $(\overline{I} \times \overline{J}) \backslash (I \times J)$ – множество индексов, отвечающих узлам сеток $\overline{\mathcal{D}^h}$, $\mathcal{D}^h$ и $\overline{\mathcal{D}^h} \backslash \mathcal{D}^h$ соответственно.

$\widetilde{I} = \{i = \overline{0, N_x - 1}\}$, $\widetilde{J} = \{j = \overline{0, N_y - 1}\}$.

# Разностная сетка 2.

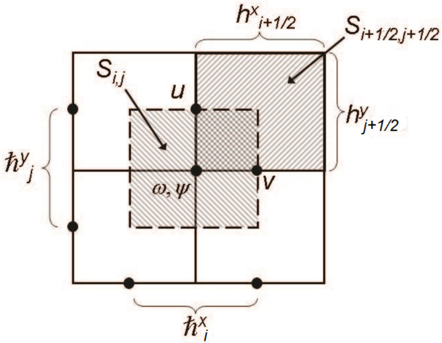
Шаги сетки: $h^x_{i+1/2}=x_{i+1}-x_i$, $h^y_{j+1/2}=y_{j+1}-y_j$, $i \in \widetilde{I}$, $j \in \widetilde{J}$.

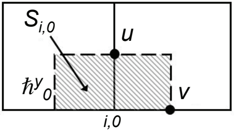
Полуцелые узлы: $x_{i+1/2}=(x_{i+1}+x_i)/2$, $y_{j+1/2}=(y_{j+1}+y_j)/2$

Соответствующие им шаги: $\hbar^x_0=h^x_{1/2}/2$,

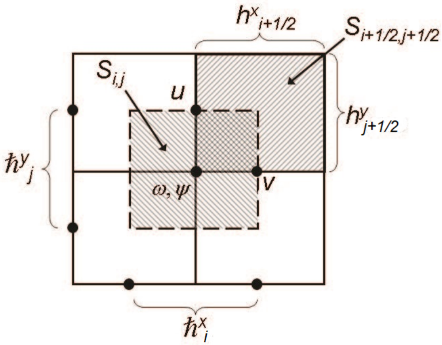
$\hbar^x_i=(h^x_{i+1/2}+h^x_{i-1/2})/2$, $\hbar^x_{N_x}=h^x_{N_x-1/2}/2$ и $\hbar^y_0=h^y_{1/2}/2$,

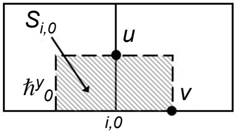
$\hbar^y_j=(h^y_{j+1/2}+h^y_{j-1/2})/2$, $\hbar^y_{N_y}=h^y_{N_y-1/2}/2$.



# Разностная сетка 3.




$\mathcal{S}_{i+1/2j+1/2}$ – ячейки с центрами в точках $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$, их площадь $d\mathcal{S}_{i+1/2j+1/2} = h^x_{i+1/2}h^y_{j+1/2}$, $(i,j) \in (I \times J)$;

$\mathcal{S}_{ij}$ - ячейки с центрами в $(x_i, y_j)$, и площадью $d\mathcal{S}_{i,j}{=}\hbar^x_i\hbar^y_j$, $(i,j){\in}(\overline{I} \times \overline{J})$.

Ячейки $S_{ij+1/2}$ и $S_{i+1/2j}$, соответственно, с центрами в точках $(x_i, y_{j+1/2})$ и $(x_{i+1/2}, y_j)$ и площадями $dS_{ij+1/2}{=}\hbar^x_i h^y_{j+1/2}$, $dS_{i+1/2j}{=}h^x_{i+1/2}\hbar^y_j$.

# Сеточные функции и их производные.

Значения сеточных функций в узлах $(x_i, y_j)$ будем обозначать $f_{ij} = f$; $f(x_{i\pm1/2}, y_j) = f_{i\pm1/2j}$, $f(\pm1_x)$ - значения функции в узлах, сдвинутых в направлении $x$ на $\pm1$. Аналогично обозначаются сдвиги по направлению $y$.

$$f_{x,i+1/2j}=f_x=\frac{f_{i+1j}-f_{ij}}{h^x_{i+1/2}};\quad f_{\bar{x},i-1/2j}=f_{\bar{x}}=\frac{f_{ij}-f_{i-1j}}{h^x_{i-1/2}};$$

$$f_{\overset{\circ}{x},ij}=f_{\overset{\circ}{x}}=\frac{f_{i+1j}-f_{i-1j}}{2\hbar^x_i};\quad f_{\tilde{x}}=\frac{f_{i+1/2j}-f_{i-1/2j}}{\hbar^x_i};\quad f_{x\tilde{x}}=\frac{f_x-f_{\bar{x}}}{\hbar^x_i}.$$

Сетка по времени: $\{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots\}$

Производная по времени: $f_t=\dfrac{f(t_{k+1})-f(t_k)}{\tau}=\dfrac{\hat{f}-f}{\tau}$;

$$f^{(\sigma)}=\sigma\hat{f}+(1-\sigma)f.$$

Функции $\psi$ и $\omega$ будем относить к узлам разностной сетки $\overline{\mathcal{D}^h}$.

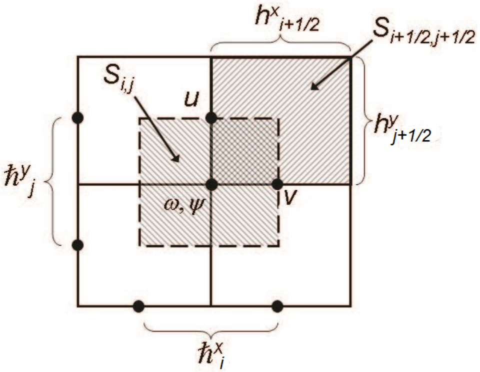
# Скалярные произведения.

$$f(x_i, y_j), g(x_i, y_j) \Rightarrow (f, g)_h^{(0)} = \sum_{(i,j)\in\overline{I}\times\overline{J}} f_{ij} g_{ij} dS_{ij};$$

$$f(x_i, y_{j+1/2}), g(x_i, y_{j+1/2}) \Rightarrow (f, g)_h^{(1)} = \sum_{(i,j)\in\overline{I}\times\widetilde{J}} f_{ij+1/2} g_{ij+1/2} dS_{ij+1/2};$$

$$f(x_{i+1/2}, y_j), g(x_{i+1/2}, y_j) \Rightarrow (f, g)_h^{(2)} = \sum_{(i,j)\in\widetilde{I}\times\overline{J}} f_{i+1/2j} g_{i+1/2j} dS_{i+1/2j}$$

# Вычисление скорости.




$$u_{ij+1/2} = \psi_y = \frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij}}{h^y_{j+1/2}},$$

$$v_{i+1/2j} = -\psi_x = -\frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{h^x_{i+1/2}}$$

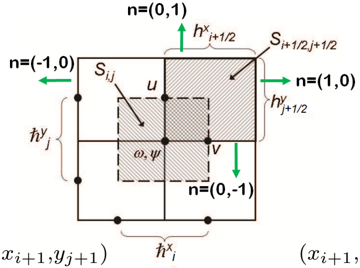
Уравнение неразрывности:

$$\int\limits_{S_{i+1/2j+1/2}} div\mathbf{V}dxdy = \int\limits_{\partial S_{i+1/2j+1/2}} (\mathbf{V}, \mathbf{n})dl,$$

$\mathbf{n}$ — нормаль к границе ячейки:

$$(div\mathbf{V})_{i+1/2j+1/2} dS_{i+1/2j+1/2} = u_{i+1j+1/2} h^y_{j+1/2} + v_{i+1/2j+1} h^x_{i+1/2} \\ - u_{ij+1/2} h^y_{j+1/2} - v_{i+1/2j} h^x_{i+1/2}$$

# Вычисление интеграла по границе ячейки.




$$\int\limits_{\partial S_{i+1/2j+1/2}} (\mathbf{V},\mathbf{n})dl = \int\limits_{(x_{i+1},y_j)}^{(x_{i+1},y_{j+1})} (\mathbf{V}_{i+1,j+1/2},\mathbf{n})dy + \int\limits_{(x_i,y_{j+1})}^{(x_{i+1},y_{j+1})} (\mathbf{V}_{i+1/2,j+1},\mathbf{n})dx +$$

$$\int\limits_{(x_i,y_j)}^{(x_i,y_{j+1})} (\mathbf{V}_{i,j+1/2},\mathbf{n})dy + \int\limits_{(x_i,y_j)}^{(x_{i+1},y_j)} (\mathbf{V}_{i+1/2,j},\mathbf{n})dx +$$

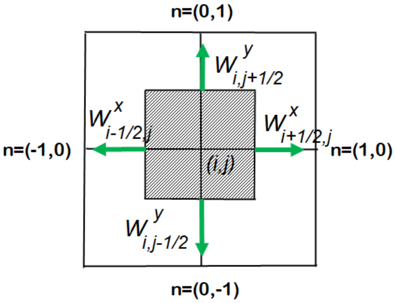
Задача. Доказать, что $(div\mathbf{V})_{i+1/2j+1/2} = 0.$

# Аппроксимация уравнения переноса вихря 1.

Аппроксимацию по пространству уравнения переноса вихря получим, проинтегрировав уравнение по ячейке $S_{ij}$, $(ij)\in I\times J$.

$$\underbrace{\int\limits_{S_{ij}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dxdy}_{\mathcal{I}_1} + \underbrace{\int\limits_{S_{ij}} \mathcal{K}(\mathbf{V},\omega) dxdy}_{\mathcal{I}_2} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \underbrace{\int\limits_{S_{ij}} \Delta\omega dxdy}_{\mathcal{I}_3}$$

где $\mathcal{K}(\mathbf{V},\omega)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(W^x)+\frac{\partial}{\partial y}(W^y)\right]$, $\mathbf{W}=(W^x,W^y)$; $W^x=u\omega$, $W^y=v\omega$




$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{S_{ij}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dxdy \approx \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial t} dS_{ij}$$

$$\mathbf{W} = (W^x_{i+1/2j}, W^y_{i,j+1/2})$$

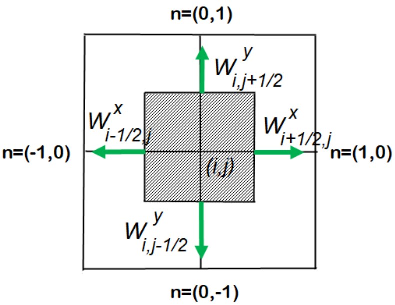
Компоненты вектора $\mathbf{W}$ задаются на гранях ячейки $S_{ij}$

# Аппроксимация конвективных членов 1.

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{S_{ij}} \left( \frac{\partial}{\partial x} W^x + \frac{\partial}{\partial y} W^y \right) dxdy = \int\limits_{\partial S_{ij}} (W, n) dl \approx$$

$$\left( W^x_{i+1/2j} - W^x_{i-1/2j} \right) \hbar^y_j + \left( W^y_{ij+1/2} - W^y_{ij-1/2} \right) \hbar^x_i;$$

$W^x = u\omega, W^y = v\omega$ – не определены в нужных точках



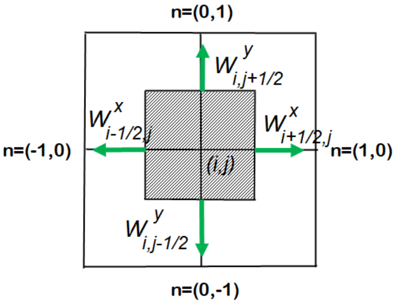

$$u_{ij} = \frac{h^y_{j+\frac{1}{2}} u_{ij+1/2} + h^y_{j-1/2} u_{ij-1/2}}{2\hbar^y_j}$$

$$v_{ij} = \frac{h^x_{i+1/2} v_{i+1/2j} + h^x_{i-1/2} v_{i-1/2j}}{2\hbar^x i}$$

$$u_{ij} = \psi_{\overset{\circ}{y}} = \frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij-1}}{2\hbar^y_j};$$

$$v_{ij} = -\psi_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{\psi_{i+1j} - \psi_{i-1j}}{2\hbar^x_i}$$

# Аппроксимация конвективных членов 2.



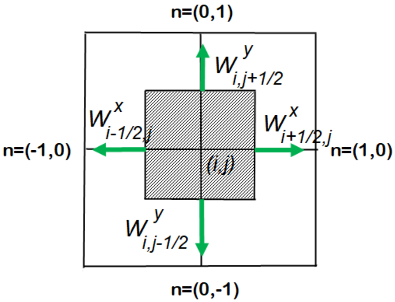

Потоки в серединах сторон ячейки $S_{ij}$ :

$$W^x_{i+1/2j}=0.5(u_{i+1j}\omega_{i+1j}+u_{ij}\omega_{ij})$$
$$=0.5(\psi_{\overset{\circ}{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}+\psi_{\overset{\circ}{y}}\omega_{ij})$$
$$W^y_{ij+1/2}=0.5(v_{ij+1}\omega_{ij+1}+v_{ij}\omega_{ij})$$
$$=-0.5(\psi_{\overset{\circ}{x}}(+1_y)\omega_{j+1}+\psi_{\overset{\circ}{x}}\omega_{ij})$$

$$\mathcal{K}_h(\psi,\omega)\hbar^x_i\hbar^y_j=\left(W^x_{i+1/2j}-W^x_{i-1+1/2j}\right)\hbar^y_j+\left(W^y_{ij+1/2}-W^x_{ij-1/2}\right)\hbar^x_i=$$
$$0.5\left(\psi_{\overset{\circ}{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}-\psi_{\overset{\circ}{y}}(-1_x)\omega_{i-1j}\right)\hbar^y_j-0.5\left(\psi_{\overset{\circ}{x}}(+1_y)\omega_{j+1}-\psi_{\overset{\circ}{x}}(-1_y)\omega_{j-1}\right)\hbar^x_i$$

$$\mathcal{K}^{(1)}_h(\psi,\omega)=(\psi_{\overset{\circ}{y}}\,\omega)_{\overset{\circ}{x}}-(\psi_{\overset{\circ}{x}}\,\omega)_{\overset{\circ}{y}}$$

# Аппроксимация конвективных членов 3.




Потоки в серединах сторон ячейки $S_{ij}$ :

$$W^x_{i+1/2j}=\frac{u_{i+1j}+u_{ij}}{2}\cdot\frac{\omega_{i+1j}+\omega_{ij}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)+\psi_{\mathring{y}})(\omega_{i+1j}+\omega_{ij})$$

$$W^x_{ij+1/2}=\frac{v_{ij+1}+v_{ij}}{2}\cdot\frac{\omega_{ij+1}+\omega_{ij}}{2}$$

$$=-\frac{1}{4}(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)+\psi_{\mathring{x}})(\omega_{ij+1}+\omega_{ij})$$

$$\mathcal{K}_h^{(2)}(\psi,\omega)\hbar^x_i\hbar^y_j=(\psi_{\mathring{y}}(i+1/2)\omega_{i+1/2j}-\psi_{\mathring{y}}(i-1/2)\omega_{i-1/2j})\hbar^y_j-$$
$$(\psi_{\mathring{x}}(j+1/2)\omega_{ij+1/2}-\psi_{\mathring{x}}(j-1/2)\omega_{ij-1/2})\hbar^x_i$$

$$\mathcal{K}_h^{(2)}(\psi,\omega)=W^x_{\bar{x}}+W^y_{\bar{y}}$$

# Уравнение переноса завихренности.

Аппроксимация оператора Лапласа.

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{Re}\int\limits_{S_{ij}}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right)dxdy = \frac{1}{Re}\int\limits_{\partial S_{ij}}(grad\,\omega, n)dl \approx$$

$$\frac{1}{Re}\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{i+1/2j}\hbar^y_j+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{ij+1/2}\hbar^x_i\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{i-1/2j}\hbar^y_j-\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{ij-1/2}\hbar^x_i\right]$$

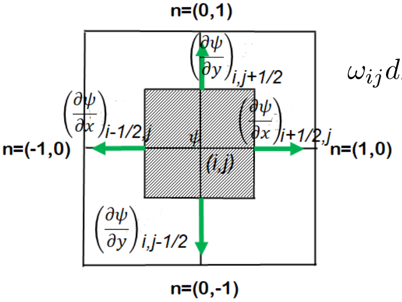
Дифференциально-разностное уравнение переноса завихренности:

$$\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial t}+(\psi_{\mathring{y}}\,\omega)_{\mathring{x}}-(\psi_{\mathring{x}}\,\omega)_{\mathring{y}}=\frac{1}{Re}(\omega_{x\tilde{x}}+\omega_{y\tilde{y}})$$

# Аппроксимация кинематического уравнения 1.

$$\int\limits_{S_{ij}} \omega dxdy = -\int\limits_{S_{ij}} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) dxdy = -\int\limits_{\partial S_{ij}} (grad\,\psi, \mathbf{n})dl. \qquad (1)$$

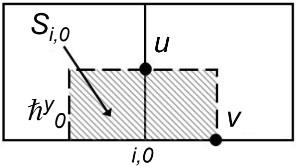
Если $\mathcal{S}_{ij}$ – внутренняя ячейка, $(ij)\in I\times J$, то интегралы в (1) аппроксимируются следующим образом:




$$\omega_{ij}dS_{ij} = -\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i+1/2j}\hbar^y_j + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{ij+1/2}\hbar^x_i - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i-1/2j}\hbar^y_j - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{ij-1/2}\hbar^x_i\right]$$

$$\omega = -(\psi_{x\tilde{x}} + \psi_{y\tilde{y}})$$

# Аппроксимация кинематического уравнения на границе.




$$\omega_{i0} dS_{i0} = -\left[ \underline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i+1/2,0}} \hbar^y_0 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,1/2} \hbar^x_i - \underline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i-1/2,0}} \hbar^y_0 - \underline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,0}} \hbar^x_i \right],$$

где подчеркнутые члены, в силу граничных условий

$\psi|_{\partial\mathcal{D}} = \left.\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\mathcal{D}} = 0$, равны нулю.

Производную $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i1/2}$ заменим на $\psi_{y,i0}$ и получим,

$$\omega_{i0} = -\frac{2}{(h^y_{1/2})^2}(\psi_{i1} - \psi_{i0}) = -\frac{2}{(h^y_{1/2})^2}\psi_{i1}. \qquad (2)$$

# Аппроксимация кинематического уравнения 2.

Задача. Показать, что в угловых точках $\omega_{00} = \omega_{0N_y} = \omega_{N_x N_y}$ $= \omega_{N_x 0} = 0$,
Разностное уравнение

$$\omega = -(\psi_{x\tilde{x}} + \psi_{y\tilde{y}}) \tag{3}$$

выполняется для всех узлов $(i, j) \in \overline{I} \times \overline{J}$.