

1 Уравнение конвекции с диффузией

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x}); t > 0; x \in [-L, L]$$

Уравнение конвекции с диффузией.

$$Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}}$$

- число Пекле

$$\frac{L}{U} = t_{\text{конв}}$$

$$\frac{L^2}{\mathcal{D}} = t_{\text{диффузионная}}$$

$$\frac{t_{\text{диф}}}{t_{\text{конв}}} = \frac{LU}{\mathcal{D}}$$

$$Re \ll 1$$

почти дифф процесс

$$Re \gg 1$$

почти конв процесс

Сначала будем рассматривать стационарное уравнение.

$$\frac{d}{dx}(uQ) - \frac{d}{dx}(\mathcal{D} \frac{dQ}{dx}) = 0$$

На отрезке вводится разностная сетка

$$\Omega_n(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

.

Потоковые точки - точки с полуцелые точки

$$xi + \frac{1}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- потоковые узлы

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$$

$$h_i = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

Вводим сеточные функции.

$$Q_i = (x_{i+\frac{1}{2}}; x_{i-\frac{1}{2}})$$

константа на отрезке

$$[x_{i+\frac{1}{2}} \text{ до } x_{i-\frac{1}{2}}]$$

D - константа в полуцелых точках (от x_i до x_{i+1} константа)

Считаем скорость и тепло в потоковых точках, где диффузия постоянна

$$Q_x = \frac{Q_{i+1}i = Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\bar{x}} = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\hat{x}} = \frac{Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}$$

Между потоковыми точками интегрируем получаем формулу.

$$\begin{aligned} \int_{x_i+\frac{1}{2}}^{x_{i+1}+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} [uQ - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx}] dx = \\ = [uQ - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx}] \Big|_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_{i+1}+\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^{tot}$$

$$W_{i-\frac{1}{2}}^{tot} = U_{i+\frac{1}{2}}Q_{i+\frac{1}{2}} = W_{i+\frac{1}{2}}^D - W_{i-\frac{1}{2}}^D$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^D = -D_{i+\frac{1}{2}} \frac{dQ}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}}$$

$$U_i i + 1/2 Q_{i+1/2} - D_{i+1/2} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \\ - [U_i i - 1/2 Q_{i-1/2} - D_{i-1/2} Q_{\bar{x}_{i-1/2}}] = 0$$

$$\frac{U_{i+1/2}Q_{i+1/2} - U_{i-1/2}Q_{i-1/2}}{\bar{h}_i} - \\ - \frac{D_{i+1/2}Q_x - D_{i-1/2}Q_{\bar{x}}}{\bar{h}_i} = 0$$

Интерполируем Q в полуцелые точки.

$$Q_{i+1/2} = \Theta_{i+1/2}Q_i + (1 - Q_{i+1/2})\Theta_{i+1}$$

1.

$$\Theta = 1/2$$

$$W =$$

Получится схема с центральными разностями

$$uQ_x - DQ_{xwithlintx} = 0$$

2.

$$\Theta_{i+1/2} = 1/2(1 + \frac{|u_{i+1/2}|}{U_{i+1/2}})$$

$$W_{i+1/2} = u_{i+1/2}^+ Q_i - \bar{U}_{i+1/2} Q_{i+1}$$

$$U'_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} + |U_{i+1/2}|)$$

$$U_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} - |U_{i+1/2}|)$$

$$(u_{i+1/2}^+ Q_i + \bar{u}_{i+1/2}^+ Q_i + 1) - DQ_{\bar{x}\bar{x}} = 0$$

2 Модельная задача

$$\frac{d(UQ)}{dx} - D \frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$

При увеличении числа Пекле график прижимается к координатам снизу.

3 Решение разностной задачи (центральные разности).

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_i = a + bq^i$$

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

Подставляем

$$\frac{U}{2h}b(q^{i+1} - q^{i-1}) - Db\frac{q^{i+1} - 2q^i + q^{i-1}}{h^2} = 0$$

$$\frac{u}{2}(q^2 - 1) - \frac{D}{h}(q^2 - 2q + 1) = 0$$

4 Лекция 2

Точное решение

$$Q(x) = \frac{1 - e^{\frac{Ux}{D}}}{1 - e^{\frac{U}{D}}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - e^{Pe \cdot i}}{1 - e^{Pe_n N}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - \bar{q}^i}{1 - \bar{q}^N}$$

$$\bar{q} = e^{Pe_N} = 1 + \frac{Pe_n + Pe_n^2}{2}$$

Сеточная функция (Центральные разности)

$$q = \frac{1 + \frac{Pe}{2}}{1 - \frac{Pe}{2}} =$$

$$\left(1 + \frac{Pe_N}{2} \left(1 + \frac{1}{2}Pe_n + \frac{1}{4}Pe_n^2 + \dots\right)\right) =$$

$$1 + Pe_n + \frac{Pe_n^2}{2}$$

Но число пекре должно быть меньше 2

Направленные разности

$$q + Pe_n$$

Для схемы с центральными разностями

$$\begin{aligned} U \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} &= 0 \\ Q_{i+1}(\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) + Q_i(\frac{2\lceil}{h^2}) + Q_{i-1}(-\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) &= 0 \\ -Q_{i+1}(1 - \frac{1}{2}\mathcal{D}) + 2Q_i - Q_{i-1}(1 - \frac{1}{2}Pe_n) &= 0 \end{aligned}$$

Для схеммы с направленными разностями

$$\begin{aligned} U \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h} - \mathcal{D} \frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} &= 0 \\ Q_{i-1}(-\frac{u}{h} - \frac{\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(\frac{u}{h} - \frac{2\mathcal{D}}{h^2}) + Q_{i+1}(\frac{\mathcal{D}}{h^2}) &= 0 \\ -Q_{i-1}(1 + Pe_n) &\dots \end{aligned}$$

Попробуем предсказать поведение вышеописанных схем

$$\begin{aligned} Q_{i-1} &= Q_i - h \frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \dots \\ Q_{i+1} &= Q_i + h \frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \dots \end{aligned}$$

Первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{U}{h} (\frac{\partial Q}{\partial x})_i - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \dots \\ U \frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \frac{1}{2} U h \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2}|_i / \dots = 0 \end{aligned}$$

$$U \frac{\partial Q}{\partial x} |_i - \mathcal{D} (1 + \frac{1}{2} Pe_n) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} |_i$$

Для того чтобы коэф диффузии был похож на то что было в исходном уравнении $\frac{Pe_n}{2} \ll 1$

5 Схема А.А.Самарского

$$U^+ Q_{\bar{x}} + U^- Q_x - \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}} Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$\bar{D} = \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}} = \mathcal{D} (\infty - \frac{|\mathcal{P}|_{\setminus} |/\epsilon}{\infty + \frac{|\mathcal{P}|_{\setminus} |}{\epsilon}})$$

$$u^+ Q_{\bar{x}} - u^- Q_x = u Q_{x0} - \frac{|U|_h}{2} Q_{\bar{x}x}$$

$$U Q_{x0} - \mathcal{D} [\frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}] Q_{\bar{x}x} = 0$$

- Коэфф диффузии

$$\mathcal{D} [\frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}] = \mathcal{D}^*$$

$$Pe_n^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} - \text{эффективное число Пикле}$$

$$f = Pe^*(Pe)$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \frac{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2}}$$

$$Pe^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \frac{1 + \frac{|Pe_n|}{2}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}$$

$$Pe_n \rightarrow 0; Pe_n^* \rightarrow Pe_n$$

$$Pe_n \rightarrow \inf; Pe_n^* \rightarrow 2$$

$$|Pe * n| = \frac{Pe_n^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{|Pe_n|})}{Pe_n^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{2|Pe_n|} + \frac{1}{|Pe_n|^2})}$$

6 Экспоненциальная схема

$$u \frac{dQ}{dx} - \mathcal{D} \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$Q(x) = Q_i + (Q_{i+1} - Q_i) \frac{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}} \frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}})}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$\begin{aligned} W^{tot} &= u_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \\ &= u_{i+\frac{1}{2}} Q_i + u_{i+\frac{1}{2}} (Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_i) \frac{\exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2} - 1)}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1} - \\ &\quad - u_{i+\frac{1}{2}} (Q_{i+1} - Q_i) \frac{\exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2})}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1} \end{aligned}$$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = uQ_{\bar{x}} + uh \frac{e^{P \frac{Pe_N}{2}} - 1}{e^{Pe_N} - 1} Q_{\bar{x}x} - uh \frac{e^{P \frac{Pe_n}{2}}}{e^{Pe_n} - 1} Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$uQ_{\bar{x}} = uQ_{x0} - \mathcal{D} \frac{Pe}{2} Q_{\bar{x}x}$$

$$uQ_{x0} - \mathcal{D}^2 Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \left(\frac{Pe_N}{2} \frac{e^{Pe} + 1}{e^{Pe} - 1} \right) = \mathcal{D} \frac{Pe_n}{2} \coth \frac{Pe}{2}$$

$$Pe_n = \frac{Uh}{\mathcal{D}} = 2th \frac{Pn_n}{2}$$

7 Схема Сполдинга

$$\begin{aligned} Pe_{h,i+\frac{1}{2}}^* &= Pe_{h,i+\frac{1}{2}}, Pe_h \leq 2 \\ &= 2, Pe_h > 2 \end{aligned}$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \Theta_{i+\frac{1}{2}} Q_i + (1 - \Theta_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+1})$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_n, i + \frac{1}{2}} [Pe_{n, \frac{1}{2}} - 1 + \max(-Pe_{n, i+\frac{1}{2}}, 1 - \frac{Pe_{n, i+\frac{1}{2}}}{2}, 0)]$$

1.

$$|Pe_{n, i+\frac{1}{2}}| \leq 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

буквально схема с центральными разностями.

2.

$$|Pe_{n, i+\frac{1}{2}}| > 2$$

(a)

$$Pe_n > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 + 0] = 1 - \frac{1}{Pe}$$

(b)

$$Pe_n < -2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 - Pe_n] = -\frac{1}{Pe_n}$$

Или оба варианта в одной формуле

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n} \right) - \frac{1}{Pe_n}$$

Подставляем Θ

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n} \right) - \frac{1}{Pe_n} \right] Q_i + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|Pe_n|}{Pe_n} + \frac{1}{Pe_n} \right) \right] Q_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} = uQ_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+\frac{1}{2}}^+ Q_i + U_{i+\frac{1}{2}}^- Q_i + 1 + DQ_x$$

$$\frac{d}{dx} uQ - D \frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} = U^+ Q_{\bar{x}} + \bar{u} Q_x + DQ_{\bar{x}x}$$

Таких схем множество, но суть такова, что до определенного момента рассматриваются направленные разности, а потом переходят на константу

8 Схема Патанкара

Надо разобрать к экзамену! Есть в презентации.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + \max(0, Pe_n) + \max(0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5)]$$

Теперь нужно определить в полуцелых точках.

9 Разностная схема на расширенных шаблонах

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i+1} + Q_i) - \eta(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})$$

1.

$$u \frac{d}{dx} = uQ_{x^0} - \frac{Uh}{2}(Q_x \bar{x} - Q_{xx}) \frac{1}{2} h^2 Q_{\bar{x}\bar{x}}$$

2.

$$\eta = \frac{1}{2} - \text{схема с направленными разностями}$$

3.

$$\eta = \frac{1}{4} - \text{схема Фрома}$$

4.

$$\eta = \frac{1}{6} - \text{схема с искусственной дисперсией}$$

5.

$$\eta = \frac{1}{8} - \text{схема QUICK}$$

10 Нестационарные задачи

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$u = \text{const}, Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}} \gg 1$$

Сетка вводится аналогично стационарной задаче.

$$t_k = \tau_k$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial Q}{\partial t} dx dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(uQ) dx dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x}) dx dt$$

По слагаемым

1. Выносим, так как не зависит от t , по x константа на отрезке интегрирования

$$h_i \cdot (Q_i^{k=1} - Q_i^k)$$

- 2.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}) dt$$

Воспользуемся квадратурной формулой

$$= \tau (W_{i+\frac{1}{2}}^\sigma + W_{i-\frac{1}{2}}^\sigma)$$

$$f^{(\sigma)} = \sigma f^{t_{k+1}} + (1 - \sigma) f^{t_k} = \sigma \hat{f} + (1 - \sigma) f$$

Возникает ровно та же проблема определения W в полуцелых точках

3.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} [\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x} |_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x} |_{i-\frac{1}{2}}] dt =$$

$$\tau [(\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x})_{i+\frac{1}{2}}^{(\sigma)} - (\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}}^{(\sigma)}]$$

11 Решение модельной задачи

Отрезок от -L до L. Начальные данные: 1 при отрицательных значениях, 0 при положительных.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$S = t, y = x - ut$$

$$Q(x, t) = Q(y(x, t), S(t))$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - u \frac{\partial Q}{\partial y} + u \frac{\partial Q}{\partial y} \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \Rightarrow$$

интеграл Пуассона

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{\mathcal{D}S}}} e^{-z^2} dz \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x-ut}{2\sqrt{\mathcal{D}t}}} e^{-z^2} dz \right]$$

Подставить это дома и убедиться, что оно является решением уравнения.

11.1 Направленные разности.

****рисунок фронта****

Самое большое размытие при использовании чисто неявной схемы ($\sigma = 1$)

Меньше всего размывается явная схема ($\sigma = 0$).

То есть неявная схема ухудшает проблемы направленных разностей

11.2 Центральные разности

****рисунок фронта****

Чисто неявная схема снова размывает сильнее.

($\sigma = 0.5$)

12 Диффузия и дисперсия

Дисперсия - скорость убывания волны зависит от амплитуды.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

$$Q(t, x) = e^{-P(m)t} e^{im(x-q(m)t)}$$

m - волновое число, $P(m)$ - скорость убывания амплитуды, $q(m)$ - скорость распространения волны, $i^2 = -1$.

$$Q = e^{-Pt} e^{im(x-qt)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

Подставим Q и посмотрим какими должны быть P и m , для того чтобы оно удовлетворяло уравнениям.

$$-P - imq + Uim = -\mathcal{D}m^2 - im^3p + \gamma m^4$$

$$P = \mathcal{D}m^2 - \gamma m^4$$

- скорость убывания

$$q = u + M^2\beta$$

- скорость волны

На амплитуду влияют четные производные (но они чередуются
уменьшает-увеличивает-уменьшает-...)

скорость движения от третьей производной (нечетные производные)
проверить с каким знаком.