

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Содержание

Лекция 1	3
1.1 Исторический экскурс	3
1.2 Метод Дирихле	3
1.3 Контрпример Вейерштрасса.	3
1.4 Контрпример Адамара	3
1.5 Метод Ритца	4
Лекция 2	7
2.1 Метод Бубнова – Галеркина	7
2.2 Повторение	8
Лекция 3	11
3.1 Энергетическое пр-во	11
3.2 Положительные и положительно определенные операторы	12
Лекция 4	14
4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2)	14
4.2 Пример	15
4.3 Пример 3	16
4.4 Энергетический метод	16
4.5 Обобщение решения задачи о \min для ф.э.	16

Лекция 1

1.1 Исторический экскурс

Лекции с 9:30 два часа.

Вариационная постановка для задачи мат физики. задача - условие на границе + начальное. (Экстремум функционала энергии, поэтому энергетические пространства).

Соболев - прямые методы решения задач. позволяют найти решение с помощью СЛАУ. Наиболее известен метод Рунге.

1.2 Метод Дирихле

Дана область $\omega \in \mathbb{R}^2$.

$$M = u : u_0(x, y), (x, y) \in \partial\Omega$$

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \rightarrow \min$$

Интеграл Дирихле $\Rightarrow \bar{u}$ - гармонический в Ω

1.3 Контрпример Вейерштрасса.

$$M = y; y(x) \in C'[-1; 1], y(-1) = -1, y(1) = 1$$

$$J(y) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, J(y) \geq 0$$

$$y_{\varepsilon}(x) = \frac{\arctg(\frac{x}{\varepsilon})}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$y'_{\varepsilon}(x) = \frac{1}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_{\varepsilon}) = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \varepsilon^2}{\arctg^2(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{2\varepsilon \arctg(\frac{1}{\varepsilon})}{\varepsilon} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$J(\bar{y}) = \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Противоречие: $y(-1) = -1, y(1) = 1$

1.4 Контрпример Адамара

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^2}{2^n} \cos(2^n \Theta), x = \rho \cos \Theta, y = \rho \sin \Theta$$

$$\rho \leq 1$$

Непрерывны и гармоничны. Интеграл Дирихле в круге $\rho \leq r \leq 1$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n+1}} \rightarrow_{r \rightarrow 1} \inf$$

1.5 Метод Ритца

$$J(\omega) = \int_a^b f(x, \omega, \omega', \dots, \omega^{(k)}) dx \rightarrow \inf$$

$\omega \in M$ класс допустимых функций

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$ (координатные функции)

Св-ва:

$$1) \forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}, \forall_n$$

$$\omega_n = \omega_0 + \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \in M$$

$$2) \forall \omega \in M \exists \forall \epsilon > 0$$

Уравнение полноты

$$H(\omega_n) = F(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \inf$$

$$\|\omega - \psi_0 - \sum_{i=1}^n a_i \psi_i\| < \epsilon$$

Рассмотрим:

$$J(\omega_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow \inf$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}(\omega_n) = 0, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_n}(\omega_n) = 0 - \text{альтернативная система уравнений}$$

$$\Rightarrow a_1, \dots, a_n - \text{решение}$$

Насколько хорошо приближает метод искомое решение? На примере задачи об упругой пластине.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 - \text{обл}, S = \partial\Omega$$

изгиб $\omega(x, y)$ удовлетворяет ур-ю Сори Жульен

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(xy)}{\mathcal{D}}; (x, y) \in \Omega$$

\mathcal{D} - жесткость пластины при упругом изгибе

$q(x, y)$, - Интенсивность давления

$$\omega(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \mathcal{D}} = 0 \leftarrow \text{Производная по нормали к } S$$

$$J(\omega) = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta \omega)^2 - f(\omega) \right) d\Omega \rightarrow \inf$$

$$f = \frac{q(x, y)}{\mathcal{D}} \in C'(\bar{\Omega})$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Рассмотрим без доказательства ограниченности снизу.

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$(x, y)(\xi, \eta)$ — точки из Ω r — расстояние между (x, y) и (ξ, η)

$$J(\omega) = J_0 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega_2)^2 dx dy$$

$$j(\omega) \geq J_0 \Rightarrow \exists \inf J(\omega)$$

Введем $\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)$ - координатные ф-ции

$$1) \psi_n(x, y), \frac{\partial^{k+l} \psi_n}{\partial x^k \partial y^l} \in C(\overline{\Omega}), k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon$$

2) $\psi_n(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

3) \forall ф-ии $\zeta(x, y)$:

а) удовлетворяет пункту 1

б) $\zeta(x, y) \equiv 0(x, y) \in \Omega_\rho$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R} :$$

$$|\zeta(x, y) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi_i(x_i, y_i)| < \varepsilon$$

$$|\frac{\partial^{k+l} \zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^{k+l} \psi_i(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}| < \varepsilon$$

Условие полноты $k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon \Rightarrow$
приближенное решение :

$$\omega_n = \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_n \psi_n \rightarrow J(\omega)$$

$$J_n = \iint_{\Omega} (\frac{1}{2} (\Delta \omega_n)^2 - f(\omega_n)) dx dy$$

α_i выбираем : $J(\omega_n) \rightarrow J(\omega)$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k = B_i, i = \overline{1, n}$$

$$A_{ik} = \iint_{\Omega} \Delta \psi_i \Delta \psi_k dx dy \Rightarrow$$

$\exists!$ решение a_1, \dots, a_n в $\omega_n = \dots$ приближение решение

$$B_i = \iint_{\Omega} f \psi_i dx dy$$

\rightarrow Сущ ед решения a_1, \dots, a_n в $\omega_n = \dots$ (приближенное решение)

Рассмотрим $\forall b_1, \dots, b_n$

$$\zeta_n = b_1 \psi_n + \dots + b_n \xi_n$$

$$?? b_i \text{ и } \sum_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n n A_{ik} a_k b_i = \sum_{i=1}^n b_i B_i$$

$$\sum_{i=x}^n \sum_{k=1}^n n \iint_{\Omega} b_i \Delta \psi_i \Delta \psi_k a_k dx dy - \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\omega} b_i \Delta \psi_i \sum_{k=1}^n a_k \Delta \xi_k dx dy - \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy \right] = 0$$

...

$$\int_O mega(\Delta \omega_n \sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) - f(\sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) dx dy = 0$$

$$\iint_O mega(\Delta \Omega_n \zeta_n - f \zeta) dx dy = 0$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega_u)^2 dx dy \text{ не возрастает у } \geq inf$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ по критерию Коши } \Rightarrow N(\varepsilon) \forall_n > N(\varepsilon)$$

Лекция 2

$\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)$ — координатные функции, $w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta w_n)^2 dx dy$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m : 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x, y)$$

$$\iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 dx dy < 1$$

Обозначим $S = \partial\Omega$ — границу области Ω

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\varphi \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) dS + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \Delta \varphi \ln r \, d\xi d\eta$$

$$\left| \int_x f(x) \bar{g}(x) dx \right|^2 \leq \left(\int_x |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_x |g(x)|^2 dx \right)$$

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\iint_{\Omega} (\Delta \varphi)^2 d\xi d\eta \right)^{1/2} \left(\iint_{\Omega} \ln^2 r \, d\xi d\eta \right)^{1/2}$$

$$|\varphi(x, y)| \leq C_1$$

$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1 \sqrt{\varepsilon}$$

$$\omega_n \rightrightarrows_{\Omega} w_n(x, y) \in C(\Omega)$$

2.1 Метод Бубнова — Галеркина

$$w_n = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$$

$$Lw - \lambda Mw = 0$$

L, M — дифференциальные операторы

$$\sum_{i=1}^n (A_{ik} - \lambda B_{ik}) a_k = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \dots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \dots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$N(x, y) = Lw_n - \lambda Mw_n \text{ — невязка}$$

$$N(x, y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}$$

2.2 Повторение

1. $f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = 0$
2. $\int_{\Omega} f(x) dx = 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \stackrel{\text{п.б.}}{=} 0$
3. $|f(x)| < \varphi(x), \varphi - \text{суммируема по Лебегу} \Rightarrow f(x) - \text{суммируема по Лебегу}$
4. $\{\varphi_n(x)\} - \text{суммируемы с квадратами по Лебегу}$

$$\lim_{n, k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$$

Обозначим V – линейное пространство

(φ, ψ) – скалярное произведение: $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

1. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$
3. $(\varphi, \varphi) \geq 0$
4. $(\varphi, \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$$

- Неравенство Коши-Буняковского

$$|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$$

- Неравенство треугольника

$$\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$$

$$L_2(\Omega) : (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx$$

$$L_2(\Omega, \sigma) : (\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} \sigma(x) dx$$

$$L_2(\Omega^m) : (\varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(x)} dx$$

Критерий линейной зависимости системы функций

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно зависима (ЛЗ) в H

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \left| \begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \right| = 0 \end{array}$$

Опр. M — плотно в H , если $\forall p \in H$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi_n \in M : \|\varphi_n - p\| < \varepsilon$.

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \forall \varepsilon > 0 : \quad \forall \varphi \in H \quad \begin{array}{l} \exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ \exists \varphi_n^2 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \\ \dots \end{array} \end{array}$$

$C_0^{(k)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система (ОНС)

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$$

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2 + \dots$$

$\{\varphi_n\}$ полная в H , если из $(\varphi, \varphi_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi = \mathbf{0}$

$\forall \varphi \in H : \quad a_k = (\varphi, \varphi_k)$ — коэффициенты Фурье

Теор. H — гильбертово, $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система (ПОНС)

$$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2 \text{ — равенство Парсеваля}$$

Теор. $\exists a_k : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, $\{\varphi_n\}$ — ПОНС в H , тогда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \text{ сходится по } \|\cdot\| \text{ к } \varphi \in H, \text{ при этом } \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Опр. H сепарабельно если $\exists M$ — счетное мн-во плотное в H .

Теор. H сепарабельно $\Leftrightarrow \exists$ ПОНС (счетная или конечная) в H .

$\{u : \int_{\Omega} u dx = 0\}$ — пример подпространства в $L_2(\Omega)$.

Пусть H_1 — подпространство в H

$\forall \varphi \in H \quad \exists! \varphi_1 \in H_1 : \|\varphi - \varphi_1\| = \min_{\psi \in H_1} \|\varphi - \psi\|$ — проекция φ на H_1

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad H_2 = \varphi \perp H_1$ — ортогональное дополнение

l — линейный функционал : $M \subset H \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$$|l_\varphi| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|_H$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi} l_\psi = l_\varphi \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : \|\psi - \varphi\| < \delta : |l_\psi - l_\varphi| < \varepsilon$$

Теор. (Рисса) $\forall l$ — непрерывного линейного функционала в $H \exists! \psi \in H : l_\varphi = (\varphi, \psi)$

Пусть M — плотно в H , $\Phi : M \times M \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$

$$\Phi(\varphi, \psi) : \Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$$

$\Phi(\varphi, \varphi)$ — квадратичная форма

$H : D_A \subset H$ — область определения некоторого оператора A

Линейный оператор A ограничен $\Leftrightarrow A$ непрерывен

$\varphi \in D_A, \quad A\varphi \in R_A$ — область значений оператора A

$\varphi \in D_A \rightarrow! A\varphi \in R_A$

Лекция 3

3.1 Энергетическое пр-во

$$Au = f; u, f \in |\Omega \in \mathbb{R}^m$$

$$-\Delta y = f; f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

$$u|_S = 0$$

$$let_A = u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}); u|_S = 0$$

Формула остроградского

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega =$$

$$\int_S \bar{u}x + \psi \cos(\bar{u} \cdot y) + \omega \cos(\bar{u}x) dS$$

$$\int_{\Omega} difW d\Omega = \int_S W_h dS$$

$$\varphi = uv, \psi = \omega = 0$$

$$\int_{\Omega_n} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uv \cos(\bar{u}x) dS$$

$$\int_{\Omega} \frac{u \partial V}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv \cos(\bar{n}x_i) dS$$

$$Lu = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i k(P) \frac{\partial W(P)}{\partial x_k}) + C(P)u(P)$$

$$\int_{\Omega} v Lu d\Omega = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i k(P) \frac{\partial W(P)}{\partial x_k}) d\Omega + \int_{\Omega} C uv d\Omega$$

$${}_B(1)r \rightarrow v, v \rightarrow A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$\int_{\Omega} v Lu = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^M A_{ik} \frac{\partial u}{\partial u_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S V \sum_{i,k=0}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n}x_i) dS$$

$$\int_{\Omega} v Lu = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^M A_{ik} \frac{\partial u}{\partial u_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + C_i d\Omega - \int_S V \sum_{i,k=0}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n}x_i) dS$$

$$(2) - (2)_{u \rightleftharpoons x}$$

из второй формулы Грина вычитаем ее же, но поменяв местами u и v .

$$\int_{\Omega} (vLn - uLv) - \Omega =$$

$$(3) : Tr = \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\bar{u}x_i)$$

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv) d\Omega = \int_S (uNv - vNu) dS$$

- третья формула Грина

Частный случай формулы Грина, это оператор Лапласа

$$Lu = -\Delta u; A_{jj} = 1; A_{ik} = 0, i \neq k; c = 0$$

$$5^1) = \int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$(5^2) - \int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial u^2}{\partial x_i} d\Omega = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$(5^3) \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

3.2 Положительные и положительно определенные операторы

H, A симметрична в H

Теорема $\forall u \in \mathcal{D} \in H(Au, u) \geq 0$;

Пример 1 $\xi = \frac{d}{dx^2}$ в $L_2(0, 1)$; $\mathcal{D}_B = u \in C_0^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0$

$$(Bu, v) = -v \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - v \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = - \int_0^1 \frac{d^2 v}{dx^2} u dx = (u, Bv)$$

$$(Bn, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right) dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0$$

Пр 2

$$C = -\frac{d^2}{dx^2}u, \mathcal{D}_c = \{u \in C^2(0, 1)\}$$

...

Пр 3

$$Au = -\Delta u, \mathcal{D}_A = \{u \in C^2(\Omega) : u|_S = 0\}$$

$$(-\Delta u, u) = -\int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow \text{const}$$

Рассмотрим мембрану

$z =$ в пл (x, y) ; $u(x, y)$ — изгиб мембраны

$-\Delta u = \frac{q}{T}$ (Поперечная нагрузка на натяжение мембраны)

$$u|_S = 0$$

- Мембрана закреплена на краях

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx dy$$

Теорема симметричный A полный, определенный, если $\exists \gamma > 0 : (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ (6)

Пример

$$B : u(0) = 0, u(x) = \int_0^x (u'(t))^2 dt = x \int_0^x (u'(t)) dt$$

$$\text{Если проинтегрировать от } 0 \text{ до } 1 \leq x \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$(Bu, u) \geq \gamma^2 \|j\|^2; \gamma = \sqrt{2}$$

положительно определен

Пример 4

$$Lu = -\frac{d}{dx} \left(x^3 \frac{du}{dx} \right), L_2(0, 1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1], u(1) = 0\}$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 \frac{d}{dx} x^3 (u \frac{dv}{dx} - V \frac{du}{dx}) dx$$

$$(Luv) = \int_0^1 x^3 (\frac{du}{dx})^2 dx \geq 0$$

- положительный

$$\frac{(Au, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2; u\delta(x) = \{\dots\}$$

$$u\delta \in \mathcal{D}_L$$

$$u\delta \in \mathcal{D}_L; \frac{(Lu\delta, u\delta)}{\|u\delta\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 (\frac{du\delta}{dx})^2 dx}{\int_0^\delta x^3 (\delta - x)^4 dx}$$

- неверная формула

L не является положительно определенным

A - положительно определенный в H. На $D_A[u, v]_A = (Au, v)_H$ Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1.

$$[d, v] = [v, u]$$

$$(Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]}$$

2. линейность $[a_1 u + a_2 u, v] = a_1 [u, v] + a_2 [u, v]$

3.

$$[u, u] \geq \gamma \|u\|^2 \geq 0$$

4.

$$[u, u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

D_A предгильбертово, дополним его по $|\ast| \Rightarrow$ гильбертово пр-во H_A

Лекция 4

4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2)

H_A — энергетическое пр-во

(0)

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A$$

$$u \in H_A \Rightarrow u \in \mathcal{D}_A$$

$$- > \exists \{u_n\} \in \mathcal{D} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_A$$

Теорема

$$\forall \exists u \in H_A - > \text{злем из Н различным } u_1 u_2 \in H_A \text{ отв разн. злем из Н}$$

Доказательство

...

2)

$$u_{1,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_n; u_{2,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_2$$

$$u_1 \text{ и } u_2 \rightarrow u \text{ из Н ; } u = u_1 - u_2$$

...

$$r \in H_A \in \{ \in u_n \mathcal{D}_A \|u_n - n\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \}$$

$$\|u_n\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \|u\|_A$$

4.2 Пример

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u; D_B = u \in C^2(0, 1], u(0) = u(1) = 0$$

$$H = {}_2(0, 1);$$

$$u \in H_B; \exists \{u_n\} \in D_B \|u_n - u\| \rightarrow_{B \rightarrow \infty} 0$$

...

Δ - положительно, но не положительно определено.

Теорема

$$u \in H_A : u \in H \Leftrightarrow \exists \{u_n\} \in D_A$$

$$\|u - u_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|u_k - u_n\|_H \rightarrow_{u,k \rightarrow +\infty} 0$$

4.3 Пример 3

4.4 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f$$

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H;$$

Теорема

A положителен в H уравнению $Au = f$ \exists не более одного решения.

Доказательство

$$u_1, u_2 - \text{Решения } Au = f \dots$$

Теорема о функциональной энергии

A - положительный в H ; u - решение $Au = f \Leftrightarrow$ доставляет минимум функционала

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - \frac{1}{2}(u, f)_H$$

Доказательство

...

Пример 4

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \omega + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$$

$$\mathcal{D}_A = \{\omega \in C^4(\bar{\Omega}); \omega|_S = 0; \frac{\partial \omega}{\partial n}|_S = 0\}$$

$$A - \omega = \frac{a(x, y)}{\mathcal{D}}$$

4.5 Обобщение решения задачи о min для ф.э.

$$A - \text{Положительно определено в } H \quad Au = f \quad f \in H$$

фикс $f \in H \forall u \in H_A(u, f)_H : \Phi_A : H_A \rightarrow \mathcal{R}$

$$|(u, f)_H| \leq \|f\|_H \|u\|_H \leq \|f\|_H \frac{1}{\gamma} \|u\|_A; \gamma \|f\|_H - const$$

Опр $(f, u) \Rightarrow$ по Т Рисса $\exists u_0 \in H_A(f, u)_H = [u, u_0]_A$

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0] - [u_0, u]_A$$

$$+ - [u_0, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

$$\operatorname{argmin}_{u \in H_A} F(u) = u_0 \text{ Обобщенное решение } Au = f$$

Если H сепарабельно, энергетическое про-во тоже сепарабельно, $\exists \{\omega_n\}$ ПОНС

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \omega_n ??$$

$$u = \omega_n [u_0 \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H \omega_n$$