Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Москва, 2024

Содержание

Лекция 1

1.1 Принцип Дирихле

Дана область $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$$M = \{u: \ u = u_0(x,y), \ (x,y) \in \partial\Omega\}$$

Среди всех функций $u \in M$, та функция, которая доставляет минимум «интегралу Дирихле» (1.1) наименьшее значение, является гармонической.

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy \tag{1.1}$$

1.2 Контрпример Вейерштрасса

Наименьшее значение может и не достигаться

$$M = \{y: \ y(x) \in C'[-1;1], \quad y(-1) = -1, y(1) = 1\}$$

$$J(y) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 (y')^2 dx, \quad J(y) \geq 0, \ \exists \inf J(y)$$

Докажем, что нижняя граница равна нулю

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{arctg}(^x/_\varepsilon)}{\operatorname{arctg}(^1/_\varepsilon)}$$

$$y'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(^1/_\varepsilon)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{arctg}(^1/_\varepsilon)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_\varepsilon) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 (y'_\varepsilon)^2 dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 \varepsilon^2}{\operatorname{arctg}^2(^1/_\varepsilon)} \cdot \frac{1}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} dx < \frac{2\varepsilon}{\operatorname{arctg}(^1/_\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

$$J(\tilde{y}) = \int\limits_{-1}^{1} x^2 (y')^2 dx = 0 \ \Rightarrow \ y' = 0 \ \Rightarrow y = \text{const}$$

Противоречие: $y(-1) = -1, \quad y(1) = 1$

1.3 Контрпример Адамара

Гармоническая функция может обращать интеграл Дирихле в бесконечность

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{2^{2n}}}{2^n} \cos(2^n \theta); \quad x = \rho\cos\theta, \ y = \rho\sin\theta$$

Ряд сходится в круге $\rho \leq 1$, его сумма непрерывна и гармонична внутри этого круга. Однако интеграл Дирихле этой функции, взятый по кругу $\rho \leq r \leq 1$ равен

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n+1}} \xrightarrow{r \to 1} \infty$$

1.4 Метод Ритца

Рассмотрим функционал:

$$J(w) = \int\limits_a^b f(x, w, w', \ldots, w^{(k)})\, dx \to \inf$$

при условии:

$$w \in M \text{ — класс допустимых функций.}$$

Используются координатные функции:

$$\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$$

обладающие следующими свойствами:

1. Для любого n и любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, функция
$$w_n = \psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n \in M.$$
2. Для любого $w \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое что
$$\|w - \psi_0 - a_1\psi_1 - a_2\psi_2 - \ldots - a_n\psi_n\| < \varepsilon.$$

Рассматриваем функционал

$$J(w_n) = F(a_1, \ldots, a_n) \to \inf,$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial J(w_n)}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J(w_n)}{\partial a_n} = 0. \tag{1.2}$$

Это дает систему уравнений для определения коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$.

Пример (задача об упругой пластине)

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $S = \partial\Omega$. Изгиб $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению Софи Жермен:

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

где D — жесткость пластины, $q(x, y)$ — интенсивность давления.
Краевые условия:

$$w(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} = 0 \quad \text{(производная по нормали к } S\text{).}$$

Данную задачу можно привести к следующей вариационной:

$$J(w) = \iint\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}(\Delta w)^2 - f w\right] d\Omega \to \inf \tag{1.3}$$

где $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Положим в (1.3) $w = w_1 + w_2$, где

$$w_1 = -\frac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} r^2 \ln(r) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

и r — расстояние между точками (x, y) и $(\xi, \eta) \in \Omega$.
Функционал приводится к виду

$$J(w) = J_0 + \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} (\Delta w_2)^2\, dx\, dy \geq J_0.$$

Таким образом, функционал $J(w)$ ограничен снизу, а следовательно имеет точную нижнюю границу

Введем координатные функции $\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \ldots, \psi_n(x, y), \ldots$, удовлетворяющие:

1. $\psi_n(x, y)$ и их производные вида $\frac{\partial^{k+l}\varphi_n}{\partial x^k \partial y^l}$ до порядка $k, l \leq 3$ принадлежат $C(\overline{\Omega})$
2. $\psi_n(x, y)$ удовлетворяют краевым условиям
3. Для любой функции $\zeta(x, y) \in C^1(\Omega)$ найдется такое m, что выполняется:

   $$|\zeta(x, y) - \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i(x, y)| < \varepsilon,$$

   а также для производных:

   $$\left| \frac{\partial^{k+l}\zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial^{k+l}\psi_i(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \right| < \varepsilon, \quad k \leq 3, l \leq 3$$

Ищем приближенное решение в виде:

$$w_n = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_n\psi_n$$

Определяем коэффициенты a_i так, чтобы $J(w_n)$ был минимальным:

$$J_n = \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}(\Delta w_n)^2 - f w_n \right] dx\, dy$$

Уравнения (1.2) в данном случае имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k = B_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.4}$$

где

$$A_{ik} = \iint\limits_{\Omega} \Delta\psi_i \Delta\psi_k\, dx\, dy, \quad B_i = \iint\limits_{\Omega} f\psi_i\, dx\, dy$$

Эта система имеет единственное решение $a_1, \ldots, a_n$, определяющее приближенное решение.

Рассмотрим для произвольных $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$\zeta_n = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \ldots + b_n\psi_n$$

Умножив уравнение (1.4) на b_i и просуммируем по всем i:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}a_k b_i = \sum_{i=1}^{n} B_i b_i$$

Используя явный вид коэффициентов придем к:

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n \zeta_n - f\zeta_n)\, dx\, dy = 0 \tag{1.5}$$

Решение уравнений (1.4) при подстановке в J_n доставляет ему минимальное значение (обозначим его $J_n^{(0)}$). Можно показать, что оно равно

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} (\Delta w_n)^2\, dx\, dy$$

С возрастанием n величина $J_n^{(0)}$ не возрастает; в то же время она ограничена снизу. По теореме о монотонной переменной у нее есть предел. На основании критерия Коши:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m: \quad 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2}\varepsilon \tag{1.6}$$

Обозначим

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x, y)$$

Используя (1.5) и (1.6) с помощью некоторых преобразований можно прийти к

$$\iint\limits_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 dxdy < 1$$

К функции $\varphi(x, y)$ применим формулу

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\left(\varphi\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} \Delta\varphi \ln r\ d\xi d\eta$$

Поскольку $\varphi(x, y)$ является линейной комбинацией координатных функций, она удовлетворяет граничным условиям. Получим

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} \Delta\varphi \ln r\ d\xi d\eta$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к интегралу, получим

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left(\iint\limits_{\Omega} (\Delta\varphi)^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}}_{\leq 1}\underbrace{\left(\iint\limits_{\Omega} \ln^2 r\ d\xi d\eta\right)^{1/2}}_{\leq C}$$

$$|\varphi(x, y)| \leq C_1$$
$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1\sqrt{\varepsilon}$$
$$\omega_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} w_n(x, y) \in C(\Omega)$$

Лекция 2

2.1 Метод Бубнова – Галеркина

Рассмотрим приближенное решение в виде:

$$w_n = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \ldots + \alpha_n\varphi_n + \ldots$$

где L и M — дифференциальные операторы, задающие задачу:

$$Lw - \lambda Mw = 0$$

Приходим к системе уравнений вида:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{ik} - \lambda B_{ik})\alpha_k = 0, \quad k = \overline{1,n}$$

Чтобы решение было ненулевым, необходимо и достаточно, чтобы определитель равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \ldots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \ldots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$N(x,y) = Lw_n - \lambda Mw_n$ — невязка

$N(x,y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1,n}$

2.2 Повторение

1. $f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow \int\limits_\Omega f(x)dx = 0$
2. $\int\limits_\Omega f(x)dx = 0,\ f(x) \geq 0 \ \Rightarrow \ f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$
3. $|f(x)| < \varphi(x), \varphi$ — суммируема по Лебегу $\Rightarrow f(x)$ — суммируема по Лебегу
4. $\{\varphi_n(x)\}$ — суммируемы с квадратами по Лебегу

$$\lim_{n,k\to\infty} \int\limits_\Omega |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$$

Обозначим V – линейное пространство

(φ, ψ) – скалярное произведение: $\quad (\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$

1. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$
2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$
3. $(\varphi, \varphi) \geq 0$
4. $(\varphi, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{0}$

$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$

- Неравенство Коши-Буняковского
  $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\| \|\psi\|$
- Неравенство треугольника
  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$

$$L_2(\Omega): \quad (\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$L_2(\Omega, \sigma): \quad (\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\sigma(x)dx$$

$$L_2(\Omega^m): \quad (\varphi, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}dx$$

Критерий линейной зависимости системы функций

$\varphi_1, ..., \varphi_n$ линейно зависима (ЛЗ) в H

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0$$

Опр. M — плотно в H, если $\forall p \in H$ и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi_n \in M : \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$.

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$$\uparrow$$

$$\begin{array}{lll} \forall \varepsilon > 0: \quad \forall \varphi \in H & \exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega): & \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ & \exists \varphi_n^2 \in C_0^{\infty}(\Omega): & \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \\ & ... & \end{array}$$

$C_0^{(k)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система (ОНС)
$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$
$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + ... + \|\varphi_n\|^2 + ...$

$\{\varphi_n\}$ полная в H, если из $(\varphi, \varphi_k) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{0}$
$\forall \varphi \in H: \quad a_k = (\varphi, \varphi_k) -$ коэффициенты Фурье

Теор. H — гильбертово, $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система (ПОНС)

$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2$ — равенство Парсеваля

Теор. $\exists a_k: \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, $\{\varphi_n\}$ — ПОНС в H, тогда:
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ сходится по $\|\cdot\|$ к $\varphi \in H$, при этом $\|\varphi\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

Опр. H сепарабельно если $\exists M-$ счетное мн-во плотное в H.

Теор. H сепарабельно $\Leftrightarrow$ $\exists$ ПОНС (счетная или конечная) в H.

$\{u : \int\limits_{\Omega} u dx = 0\}$ — пример подпространства в $L_2(\Omega)$.

Пусть H_1 — подпространство в H
$\forall\varphi \in H \quad \exists! \varphi_1 \in H_1 : \|\varphi - \varphi_1\| = \min\limits_{\psi\in H_1} \|\varphi - \psi\|$ — проекция φ на H_1
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad H_2 = \varphi \perp H_1$ — ортогональное дополнение

l — линейный функционал : $\quad M \subset H \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$
$|l_\varphi| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|_H$
$\lim\limits_{\psi\to\varphi} l_\psi = l_\varphi \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta : \|\psi - \varphi\| < \delta : \quad |l_\psi - l_\varphi| < \varepsilon$

Теор. (Рисса) $\forall l$ — непрерывного линейного функционала в H $\exists! \psi \in H : l_\varphi = (\varphi, \psi)$

Пусть M — плотно в H, $\quad \Phi : M \times M \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$
$\Phi(\varphi, \psi) : \Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$
$\Phi(\varphi, \varphi)$ — квадратичная форма

$H : D_A \subset H$ — область определения некоторого оператора A
Линейный оператор A ограничен $\Leftrightarrow$ A непрерывен
$\varphi \in D_A, \quad A\varphi \in R_A$ — область значений оператора A
$\varphi \in D_A \to! \ A\varphi \in R_A$

Лекция 3

$$\left.\begin{aligned} &Au = f \\ &u, f \in H \end{aligned}\right| \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad H = L_2(\Omega)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in C(\overline{\Omega}) \\ u|_s = 0 \end{cases}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ \ u|_s = 0\}$$

$$A = -\Delta u$$

Формула Остроградского

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) d\Omega = \int\limits_S \Big(\varphi \cos(\overline{n} \cdot x) + \psi \cos(\overline{n} \cdot y) + \omega \cos(\overline{n} \cdot z)\Big) dS$$

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix} \qquad \int\limits_\Omega \operatorname{div} W d\Omega = \int\limits_S W_n dS$$

Пусть $\varphi = uv,\ \psi = \omega = 0$

$$\int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int\limits_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int\limits_S uv \cos(\overline{n} \cdot x) dS$$

$$\int\limits_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = -\int\limits_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int\limits_S uv cos(\overline{n} \cdot x_i) dS \qquad \text{в } \mathbb{R}^m \tag{3.0}$$

3.1 Формулы Грина

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik}(P) \frac{\partial u(P)}{\partial x_k}\right) + C(P) u(P)$$

$$D_L = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad C(P) \in C(\overline{\Omega})$$

$$A_{ik}(P) \in C(\overline{\Omega}), \quad A_{ik}(P) = A_{ki}(P)\ \ \forall P, \quad i, k = \overline{1, n}$$

$$\int\limits_\Omega v L u d\Omega = -\sum_{i,k=1}^m \int\limits_\Omega v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) d\Omega + \int\limits_\Omega C u v d\Omega$$

в (3.0) подставим $u \to v, v \to A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}$

$$\int\limits_{\Omega} vLud\Omega = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega + \int\limits_{\Omega} Cuvd\Omega - \int\limits_{S} v\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{\Omega} uLud\Omega = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]d\Omega - \int\limits_{S} u\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{3.2}$$

из (3.1) вычитаем ее же, но поменяв местами u и v: $\qquad (3.1)-(3.1)_{u\rightleftarrows v}$

$$\int\limits_{\Omega}(vLu-uLv)d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left[\cancelto{0}{\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}}\right]d\Omega -$$

$$-\int\limits_{S}\left[v\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i) - u\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_k)\right]dS$$

$$Nu := \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}cos(\overline{n}\cdot x_i)$$

$$\int\limits_{\Omega}(vLu-uLv)\,d\Omega = \int\limits_{S}(uNv-vNu)\,dS \tag{3.3}$$

Частный случай формул Грина, это оператор Лапласа:

$$Lu = -\Delta u;\ \ A_{ii}=1;\ \ A_{ik}=0,\ i\neq k;\ \ C=0$$

$$-\int\limits_{\Omega} v\Delta ud\Omega = \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega - \int\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{3.4}$$

$$-\int\limits_{\Omega} u\Delta ud\Omega = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{3.5}$$

$$-\int\limits_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)d\Omega = \int\limits_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \tag{3.6}$$

3.2 Положительные операторы

Пусть оператор A симметричен в H

Опр. Оператор называется положительным, если $\forall u \in D_A \subset H, \qquad (Au, u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

Пр. 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u \qquad \text{в } L_2(0,1); \qquad D_B = \{u \in C_0^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$(Bu, v) = -\int_0^1 v\frac{d^2u}{dx^2}dx = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - v\left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 = -\int_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2} = (u, Bv) \quad \forall u, v \in D_B$$

$$(Bu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = const, u(0) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Пр. 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \qquad D_C = \left\{u \in C^2(0,1), \begin{cases} u'(0) + \alpha u(0) = 0 \\ u'(1) + \beta u(1) = 0 \end{cases} \quad \alpha, \beta = const\right\}$$

$$(Cu, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1) = (u, Cv)$$

$$\alpha > 0, \beta \geq 0$$

$$(Cu, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geq 0$$

$\alpha = \beta = 0, \quad u \equiv 1 \Rightarrow (Cu, u) = 0 \Rightarrow C$ не является положительным

Пр. 3

$$Au = -\Delta u, \qquad D_A = \{u \in C^2(\Omega) : \quad u|_s = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, S = \partial\Omega, H = L_2(\Omega)\}$$

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = -\int_\Omega u\Delta u d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \cancelto{0}{\int_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS} \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = const, \; u|_s = 0 \Rightarrow u = 0$$

Рассмотрим мембрану

Ω в плоскости (x,y), $u(x,y)$ — изгиб мембраны

$$-\Delta u = \frac{q}{T}$$

q — поперечная нагрузка на единицу площади

T — натяжение мембраны

$u|_S = 0$ — мембрана закреплена на краях

$$(Au,u) = (-\Delta u, u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy$$

3.3 Положительно определенные операторы

Опр. Симметричный оператор A называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Au,u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \tag{1}$$

Пр. 1 (продолжение)

$$B : u(0) = 0, u \in D_B$$

$$u(x) = \int\limits_0^x u'(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

$$u^2(x) \leq \int\limits_0^x 1^2 dt \cdot \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt = x \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt \leq x \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int\limits_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\gamma^2 \|u\|^2 \leq (Bu,u), \quad \gamma = \sqrt{2} \quad \Rightarrow B \text{ является положительно определенным}$$

Пр. 4

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{du}{dx}\right) \quad \text{в } L_2(0,1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0,1],\ u(1) = 0\}$$

$$(Lu,v) - (u,Lv) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dx}\left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]dx = \left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 0$$

$$(Lu,u) = \int\limits_0^1 x^3 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq 0 \quad \Rightarrow L \text{ является положительно определенным}$$

$$\frac{(Lu,u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2, \qquad u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}, \qquad u_\delta \in \mathcal{D}_L$$

$$\frac{(Lu_\delta, u_\delta)}{\|u_\delta\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 (\frac{du_\delta}{dx})^2 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^3 dx} = \frac{9\int_0^1 x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^6 dx} = \frac{9}{40}\delta \quad \Rightarrow L \text{ не явл. положительно опр.}$$

3.4 Энергетическая норма

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)
На D_A : $\quad [u,v]_A = (Au,v)_H$
Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1. $[u,v]_A = \overline{[v,u]}_A$
   $(Au,v) = (u,Av) = \overline{(Av,u)} = \overline{[v,u]}$

2. $[a_1 u + a_2 u, v] = a_1[u,v] + a_2[u,v]$

3. $(Au,u) = [u,u] \geq \gamma \|u\|^2 \geq 0$

4. $[u,u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$|u| = [u,u]$ — энергетическая норма
D_A предгильбертово, дополним его по $|\cdot|_A \;\Rightarrow\;$ гильбертово пр-во H_A

$$u \in H_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u \in D_A \\ \exists u : \; \{u_n\} \in D_A : \; |u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{array}\right.$$

Лекция 4

4.1 Энергетическое пространство

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)

На D_A : $\begin{array}{l} [u,v]_A = (Au,v)_H \\ \|u\|_A = [u,u]_A \end{array}$

H_A — энергетическое пространство

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma}\|u\|_A \tag{4.0}$$

$$u \in H_A \begin{cases} u \in D_A \\ \exists\{u_n\} \in D_A : \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_A = 0 \end{cases}$$

Теор. $\forall u \in H_A \to$ только один элемент из H, причем различные $u_1, u_2 \in H_A$ отвечают различным элементам из H

Док-во.

1. $u_n : \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_A = 0$
   $\|u_n - u_m\|_A \leq \|u_n - u\|_A + \|u_m - u\|_A \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$
   $\Rightarrow \|u_n - u_m\|_H \to 0$ при $n, m \to \infty$
   $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_H = 0$
2. $u_{1,n} \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_1, \quad u_{2,n} \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_2$
   u_1 и $u_2 \to u \in H, \qquad u = u_1 - u_2$
   $\exists\{u_n\} \in H_A \qquad \|u_n - u\|_A \to 0$
   $\forall f \in H \qquad |(f, u_n)| \overset{\text{КБ}}{\leq} \|f\| \cdot \|u_n\| \leq \|f\|_A \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \|u_n\|_A \to 0$
   $\forall \varphi \in D_A \qquad A\varphi = f \in H$
   Тогда $(A\varphi, u_n) \to 0$
   $[\varphi, u_n]_A = (A\varphi, u_n) \to 0$
   Переходя к пределу: $[\varphi, u]_A = 0 \ \forall\varphi \qquad \Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$ $\square$

Неравенство (4.0) выполняется не только в D_A, но и во всем пространстве H_A. Пусть $u \notin D_A$, тогда:

$$\exists\{u_n\} \in D_A \qquad \|u_n - u\|_A \to 0, \text{ при этом } \|u_n - u\|_H \to 0$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_n\|_A \to \|u\|_A \qquad \|u_n\|_H \to \|u\|_H$$

Так как, $u_n \in M$, то для u_n справедливо $\|u_n\|_H \leq \frac{1}{\gamma}\|u_n\|_A$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ получим

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma}\|u\|_A$$

Пример 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \qquad D_B = \{u \in C^2[0,1],\ u(0) = u(1) = 0\}$$

$H = L_2(0,1),\ u \in H_B$

$u \in H_B, \quad \exists \{u_n\} \in D_B \quad \|u_n - u\|_B \to 0$

$\|u_n - u_k\|_B \leq \|u_n - u\|_B + \|u_k - u\|_B \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$

$$\|u_n - u_k\|_B^2 = \int\limits_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$\Rightarrow \left\{\dfrac{du_n}{dx}\right\}$ фундаментальна в $L_2(0,1) \Rightarrow \exists v(x) \in H$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int\limits_0^x u_n^{'}(t)dt, \quad u_n \in D_B, \qquad \text{при } x = 0:\ u_n(0) = 0$$

Переходя к пределу: $u(x) = \displaystyle\int\limits_0^x v(t)dt$ и $u(0) = 0$

$$u(1) = \int\limits_0^1 v(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 u_n^{'}(t)dt = \lim_{n\to\infty} (u_n(1) - u_n(0)) = 0$$

Следовательно, u абсолютно непрерывная на $[0,1]$, удовлетворяет граничным условиям

$u' \in L_2(0,1)$

Пример 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u(x); \qquad u'(0) + \alpha u(0) = 0,\ u'(1) + \beta u(1) = 0$$

$\exists \{u_n\} \in D_C, \quad \alpha > 0,\ \beta \geq 0$

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{du_n}{dx} - \frac{du_k}{dx}\right)^2 dx \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$$

$|u_n(0) - u_k(0)| \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$

$$u_n(x) = u_n(0) + \int\limits_0^x u_n'(t)dt$$

$$u(x) = c_0 + \int\limits_0^x v(t)dt$$

Теор. Пусть оператор A положительный, но не положительно определенный. Тогда

$u \in H_A: \quad u \in H \Leftrightarrow \exists \{u_n\} \in D_A$

$\|u = u_n\|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0$ и $\|u_k - u_n\|_H \underset{n,k\to\infty}{\to} 0$

Пример 3

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{du}{dx}\right), \qquad u(1) = 0$$

$$D_L = \{u \in C^2[0,1],\ u(1) = 0\}$$

$$H_L = \left\{u \text{ абсолютно непрерывна на } [0,1], \quad u(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 x^3 u'^2 dx = 0\right\}$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{x} - 1$$

4.2 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f, \qquad A:\ D(A) \subset H \to H \tag{4.1}$$

Теор. A положителен в H, тогда уравнение (4.1) имеет не более одного решения.
Док-во.

Пусть u_1, u_2 — решения (4.1), $\quad \tilde{u} = u_1 - u_2, \quad Au_1 = f, \quad Au_2 = f$

$$A\tilde{u} = 0$$

$$(A\tilde{u}, \tilde{u}) = [\tilde{u}, \tilde{u}]_A = \|\tilde{u}\|_A^2 = 0$$ □

Теор. (о функционале энергии) Если A — является положительным в H; u — решение уравнения (4.1) $\Leftrightarrow$ u доставляет минимум функционалу

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H \tag{4.2}$$

Док-во.
Заметим, что $D_A = D_F$ (вытекает из выражения (4.2)). Также $F(u) = (Au, u) - 2\,\mathrm{Re}(u, f)$, и так как A положительный оператор, то $F(u)$ принимает только вещественные значения.

$\Rightarrow$

$$u_0:\ Au_0 - f = 0$$

$$\forall v \in D_A = D_F, \quad v = u_0 + \eta$$

$$\begin{aligned} F(v) &= (A(u_0 + \eta), u_0 = \eta) - (u_0 + \eta, f) - (f, u_0 + \eta) \overset{\text{симм.}A}{=} \\ &= F(u_0) + (Au_0 - f, \eta) + (\eta, Au_0 - f) + (A\eta, \eta) \overset{Au_0 - f = 0}{=} \\ &= F(u_0) + A(\eta, \eta) \geq F(u_0) \Rightarrow u_0 = \underset{D_F}{\mathrm{argmin}} F \end{aligned}$$

$\Leftarrow$

$$u_0 = \underset{D_F}{\mathrm{argmin}} F$$

$$\forall \eta \in D_A:\ v = u_0 + \lambda\eta \in D_A = D_F, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$F(v) \geq F(u_0)$$

Используя симметричность A приведем к виду

$$2\lambda \operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] + \lambda^2 (A\eta, \eta) \geq 0$$

Это возможно только тогда, когда

$$\operatorname{Re}[(Au_0 - f, \eta)] = 0$$

Заменив η на $i\eta$, получим

$$\operatorname{Im}[(Au_0 - f, \eta)] = 0$$

Получаем

$$(Au_0 - f, \eta) = 0 \quad \forall u \in D_A \Rightarrow Au_0 - f = 0 \qquad \square$$

Замеч. Если пространство вещественное, получим $F(u) = A(u,u) - 2(u,f)$

Пример 4

$$A\omega = \Delta^2 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$$

$$D_A = \left\{ \omega \in C^4(\overline{\Omega}); \quad \omega\big|_S = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_S = 0 \right\}$$

$$A\omega = \frac{q(x,y)}{\mathcal{D}}$$

4.3 Обобщение решения задачи о min для функционала

A — положительно определенный в H, $\quad Au = f$ (4.1), $f \in H$

фикс. $f \in H \quad \forall u \in H_A \quad (u,f)_H :$ ф-ла $H_A \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$

$|(u,f)_H| \overset{\text{КБ}}{\leq} \|f\|_H \|u\|_H \leq \|f\|_H \frac{1}{\gamma} \|u\|_A; \qquad \gamma, \ \|f\|_H - const \qquad \Rightarrow$ ограничен

огр. $(f,u) \Rightarrow$ по теор. Рисса $\exists\, u_0 \in H_A : \ (f,u)_H = [u, u_0]_A$

$$F(u) = [u,u]_A - [u,u_0]_A - [u_0,u]_A \tag{4.*}$$

$\pm \ [u_0, u_0]_A \qquad$ в (4.*)

$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$

$\underset{u \in H_A}{\operatorname{argmin}} F(u) = u_0$ — обобщенное решение $Au = f$

H — сепарабельно $\Rightarrow H_A \ \exists \{\omega_n\}$ ПОНС

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n]\ \omega_n$$

$u = \omega_n, \qquad [u_0, \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H\ \omega_n$$

Лекция 5

Пример (задача о кручении стержня)

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 2G\Theta \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

G — модуль сдвига

Θ — угол закручивания

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le b \end{cases}$$

$$Au = -\Delta u$$

$$D_A = \left\{ u \in C^2(\Omega), \;\; u|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$[u, v]_A = \int\limits_0^a \int\limits_0^b -\Delta v(x, y) u(x, y) dxdy$$

$$\|u\|_A^2 = -\int\limits_0^a \int\limits_0^b \Delta u(x, y) u(x, y) dxdy$$

$$\psi_{m,n} = \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \in D_A$$

$$\Delta\psi_{m,n} = -\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \psi(x, y)$$

$$\|u\|_A^2 = \frac{\pi^2(b^2m^2 + a^2n^2)}{4ab}$$

$$w_{m,n} = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2m^2 + a^2n^2}} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$$

$$(2G\Theta, w_{m,n}) = \frac{16abG\Theta}{\pi^3 mn} \sqrt{\frac{ab}{b^2m^2 + a^2n^2}}$$

$$\psi(x, y) = \frac{32G\Theta a^2 b^2}{\pi^4} \sum_{m,n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)}{mn(b^2m^2 + a^2n^2)}$$

5.1 Минимизация последовательностей

$\Phi(u)$ ограничен снизу на M, $\quad \exists d = \inf\limits_{u \in M} \Phi(u)$

u_n — минимизирующая, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(u_n) = d$

Пусть u_0 — обобщенное решение $Au = f$

$F(u) = \|u - u_0\|_A - \|u_0\|_A$

$\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = F(u_0) = -\|u_0\|_A$

Теор. Если A положительно определенный оператор в H, то для $\forall$ минимизирующей $\{u_n\}$ для $F(u)$:

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_A = 0 \qquad \Rightarrow \|u_n - u_0\|_A \to 0$$

$$F(u_n) = \|u_n - u_0\|_A - \|u_0\|_A \to -\|u_0\|_A$$

Если $u_0 \in H_A$, то теорема верна и для положительного A

5.2 Расширение положительно определенного оператора

$[u, f]_H = [u, u_0]_A \qquad \forall f \in H \to \exists!\ u_0 \in H_A$

$\Rightarrow$ определен линейный оператор $G : D_G = H \to H_A \supset R_A \qquad u_0 = Gf$

$\exists\ G^{-1}$ — расширение A

1. Ограниченность

$$\forall u \in H_A :\ \ |[u, Gf]_A| \le |(u, f)_H| \le \|f\|_H \cdot \|u\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_H \cdot \|u\|_A$$

   Пусть $u = Gf$

$$\|Gf\|_A^2 \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_H \cdot \|Gf\|_A$$

$$\|Gf\|_A \le \frac{1}{\gamma}\|f\|_H$$

$$\|Gf\|_H \le \frac{1}{\gamma}\|Gf\|_A$$

$$\|Gf\|_H \le \frac{1}{\gamma^2}\|f\|_H$$

2. Положительность

$$(Gf, h)_H = [Gf, Gf]_A = \|Gf\|_A^2 \ge 0$$ □

$G :\ H_A \to H_A\ \ \forall f \in H_A$

$[Gf, f]_A = [f, GF]_A = \overline{(f, f)_H} = \|f\|_H \ge 0$

Пусть $Gf = 0 \Rightarrow (u, f)_H = [u, Gf]_A = 0\ \ \forall u \in H_A \quad \Rightarrow \quad f = 0$

$\Rightarrow G^{-1}$ — расширение A

$\forall \tilde{u} \in D_A :\ G^{-1}\tilde{u} \qquad A\tilde{u}$

$A\tilde{u} = f\ \ \Rightarrow\ \ \tilde{u}$ — доставляет $\min F(u)$

$\tilde{u} = Gf, \qquad A\tilde{u} = f = G^{-1}\tilde{u} \Rightarrow G^{-1}$ — расширение A

Если A положительно определенный, то и G^{-1} положительно определенный

5.3 Некоторые методы построения мин. последовательности

1. Процесс Ритца

   H — вещественное гильбертово пространство, A — положительно определенный

$$Au = f$$

$$\min_{u \in H_A} F(u) = [u, u]_A - 2(u, f)_H$$

   Введем координатные функции $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$

   - $\varphi_i \in H_A$

- $\forall n \; \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — линейно независимые
- $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$ полно в H_A

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

$$F(u_n) = \left[\sum_{j=1}^n a_j \varphi_j, \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\right] - 2\left(\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, f\right) = \sum_{j,k=1}^n a_j a_k [\varphi_j, \varphi_k] - 2\sum_{k=1}^n a_k(\varphi_k, f)$$

Необходимое условие: $\min \frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j} = 0, \; j = \overline{1,n}$. Для положительного A является и достаточным условием

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_j} = 2\sum_{k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k]_A a_k - 2(f, \varphi_j) = 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

Получим СЛАУ относительно $a_1, ..., a_n$

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k]_A a_k = (f, \varphi_j) \to a_1, ..., a_n \text{ — решение}$$

$$\big([\varphi_k, \varphi_j]_A\big)_{k,j=\overline{1,n}} \text{ — определитель Грама}$$

$\exists!$ решение $u_n = \sum\limits_{k=1}^n a_k \varphi_k$

$$\{\varphi_n\} \to \{w_n\} \qquad \text{ПОНС в норме } \|\cdot\|_A$$

$$[w_k, w_j]_A = \delta_{kj} \quad \Rightarrow \quad a_k = (f, w_k)_H = c_k$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$$

$$\|u_n\|_A^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 (u_n, f) = \sum_{k=1}^n c_k^2$$

$$F(u_n) = \|u_n\|_A^2 - 2(u_n, f)_H = -\sum_{k=1}^n c_k^2 = -\|u_n\|_A^2$$

$$\|u_n\|_A^2 \le \|u_0\|_A^2, \qquad \|u_n\|_A^2 \underset{n\to\infty}{\to} \|u_0\|_A^2$$

$$\text{Пусть } n > k: \; \|u_n - u_k\|_A^2 = \left\|\sum_{i=k+1}^n c_i w_i\right\|_A^2 = \sum_{i=k+1}^n c_i^2 = \|u_0\|_A^2 - \|u_k\|_A^2$$

$$\forall u \in H_A, \qquad w_1 = \frac{u}{\|u\|_A}$$

$$n = 1, \qquad u_1 = c_1 w_1, \quad c_1 = (f, w_1)_H$$

$$\|u_0\|_A^2 \ge \|u_1\|_A^2 = c_1^2 = \big((f, w_1)_H\big)^2 = \big((f, u_1)_H\big)^2 \cdot \frac{1}{\|u_1\|_A^2}$$

$$\|u_0\|_A^2 \ge \frac{\big((f, u)_H\big)^2}{\|u\|_A^2} \quad \forall u \in H_A$$

2. Метод Куранта

$$Au = f, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^m + \text{ граничные условия } \partial\Omega$$

$$\Phi(u) = F(u) + \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=j} \left\| \frac{\partial^j (Au - f)}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_n}^{\alpha_n}} \right\|_H^2}_{\geq 0}, \qquad f \in C^k(\Omega)$$

$$\Phi(u) \geq F(u)$$

$$u_0 = \underset{H_A}{\operatorname{argmin}}\, F(u)$$

$$\{u_n\} \text{ — минимизирует } \Phi(u)$$

Пример

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Положим $k = 0$

$$\Phi(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H + \|\Delta u + f\|_H^2$$

$$\Phi(u) = \int\limits_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2uf + (\Delta u + f)^2 \right\} d\Omega$$

$$\{u_n\} \text{ — минимизирующая для } \Phi, \qquad \int\limits_\Omega (\Delta u_n + f)^2 d\Omega \to 0$$

$$u_n(x, y) - u(x, y) = -\int\limits_\Omega G(x, y; \xi, \eta)(\Delta u_n + f) d\Omega$$

$$|u_n(x, y) - u(x, y)| \leq \sqrt{\int\limits_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta} \sqrt{\int\limits_\Omega (\Delta u + f)^2 d\Omega}$$

$$|u_n(x, y) - u(x, y)| \leq C \sqrt{\int\limits_\Omega (\Delta u + f)^2 d\Omega}$$

$$\{u_n\} \overset{\Omega}{\rightrightarrows} u(x, y)$$

3. Метод наискорейшего спуска

$$Au = f$$

$$m\|u\|_H^2 \leq (Au, u)_H \leq M\|u\|_H^2$$

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

1 $\quad \forall u_1 : \qquad v_1 = Au_1 - f, \qquad u_2 = u_1 - a_1 v_1$

$$F(u_1 - a_1 v_1) = F(u_1) - 2a_1 \Big[(Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H \Big] + a_1^2 (Av_1, v_1)_H$$

$$a_1 (Av_1, v_1)_H - \Big[(Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H \Big] = 0$$

$$(Au_1, v_1)_H - (f, v_1)_H = (Au_1 - f, v_1)_H = (v_1, v_1)_H = \|v_1\|_H^2$$

$$a_1 = \frac{\|v_1\|_H^2}{(Av_1, v_1)_H}$$

② $\forall u_2 : \qquad v_2 = Au_2 - f_1, \qquad u_3 = u_2 - a_2 v_2$

...

ⓝ $\|u_{n+1} - u_0\|_A \le \|u_1 - u_0\|_A \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n$

5.4 Краевые задачи для ОДУ

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(\Phi(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u'(x)$$

$$Lu = f(x), \qquad x_1 < x \le x_2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(x_1) + \beta_1 u(x_1) = 0 \\ \alpha_2 u'(x_2) + \beta_2 u(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$D_L = \{C^2[x_1, x_2] + \text{ граничные условия}\}$$

Пусть

- $p(x) \ge 0, \;\; q(x) \ge 0, \quad x \in [x_1, x_2]$
  (p может обращаться в 0 в некоторых точках) $p(x) \ge p_0 > 0$
- $p \in C^1[x_1, x_2], q \in C[x_1, x_2]$
- $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{p(x)}$ сходится на $[x_1, x_2]$
- $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \quad i = 1, 2$

$$(Lu, v) = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[p(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + q(x)u(x)v(x)\right]dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1)u(x_1)v(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}p(x_2)u(x_2)v(x_2)$$

$$(Lu, u) = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + q(x)u^2(x)\right]dx + \frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1)u^2(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}p(x_2)u^2(x_2)$$

► $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$$(Lu, u) \ge p_0 \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[p(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]dx = p_0\|u'\|_H^2 \ge \gamma^2\|u\|_H^2, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{2p_0}}{x_2 - x_1}$$

$$u(x_1) = 0 \;\rightarrow\; u(x) = \int\limits_{x_1}^{x} u'(t)dt$$

$$u^2(x) \le (x_2 - x_1)\|u'\|_H^2$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (...)\; dx \quad \Rightarrow \quad \|u\|_H^2 \le \frac{x_2 - x_1}{2}\|u'\|_H^2$$

► $\beta_1 > 0$

$$(Lu,u) \geq \frac{B}{C}\|u\|_H^2$$

$$C = \max\left\{2A(x_2-x_1), 2(x_2-x_1)\right\}, \quad B = \min\left\{\frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1), 1\right\}$$

$$F(u) = (Lu,u)_H - 2(u,f)_H = \frac{\beta_1}{\alpha_1}p(x_1)u^2(x_1) + \frac{\beta_2}{\alpha_2}p(x_2)u^2(x_2) + \\ + \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[p(x)u'(x)^2 + q(x)u^2(x) - 2f(x)u(x)\right]dx$$

$$u_n(x) \underset{\|\cdot\|_A}{\to} u_0(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u_0\|_A = 0, \qquad \|u_n - u_m\|_A^2 \to 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}[u_n(x) - u_m(x)] = 0$$

$$\lim_{n,m\to\infty}\int\limits_{x_1}^{x_2}[u'_n(x) - u'_m(x)]^2 dx = 0$$

$$u_n(x) - u_m(x) = u_n(x_1) - u_m(x_1) - \int\limits_{x_1}^{x_2}[u'_n(t) - u'_m(t)]^2 dt$$

Используя неравенство Буняковского и $a + b^2 \leq a^2 + b^2$

$$|u_n(x) - u_m(x)|^2 \leq 2(u_n(x_1) - u_m(x_1))^2 + 2(x_2 - x_1)\int\limits_{x_1}^{x_2}[u'_n(t) - u'_m(t)]^2 dt$$

$$u_n(x) \rightrightarrows u(x)$$

$$u'_n \overset{\text{ср}}{\to} u'(x)$$

Лекция 6

6.1 Применение энергетического метода для краевых задач

Пример 1

$$Lu = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right], \qquad Lu = f$$

$$\begin{cases} u(x_1) = u'(x_1) = ... = u^{(m-1)}(x_1) = 0 \\ u(x_2) = u'(x_2) = ... = u^{(m-1)}(x_2) = 0 \end{cases}$$

$$p_k(x) \geq 0, \quad x \in [x_1, x_2], \qquad f \in L_2(x_1, x_2)$$

$$D_L = \left\{ u \in C^{2m}[x_1, x_2] + \text{ граничные условия} \right\}$$

$$(Lu, u)_H = \sum_{k=0}^{m} \int_{x_1}^{x_2} p_k(x) \left(\frac{d^k u}{dx^k} \right)^2 dx \geq \int_{x_1}^{x_2} p_m(x) \left(\frac{d^m u}{dx^m} \right)^2 dx \geq p_0 \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d^m u}{dx^m} \right)^2 dx = p_0 \|u^{(m)}\|_H^2$$

Так как выполняется $u(x_1) = u'(x_1) = ... = u^{(m-1)}(x_1) = 0$, то

$$\|u\|_H^2 \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} \|u'\|_H^2$$

$$\|u\|_H \leq \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \|u'\|_H, \quad ..., \quad \|u^{(l-1)}\|_H \leq \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \|u^{(l)}\|_H, \qquad l = \overline{1, m}$$

$$\|u^{(m)}\|_H^2 \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \right)^m \|u\|_H^2$$

$$(Lu_m) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2, \quad \gamma = \sqrt{p_0} \left(\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1} \right)^m \qquad \Rightarrow \qquad L \text{ — положительно определенный}$$

$$\|u\|_A \leq \sqrt{p_0}\ \|u^{(m)}\|_H, \quad \exists\ \{u_n(x)\}$$

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u_0\| = 0, \quad u_0 \text{ — точное решение}$$

$$\|u_n - u_k\|_A \leq \|u_n - u_0\|_A + \|u_k - u_0\|_A \to 0$$

$$u_n^{(l)}(x_1) = u_k^{(l)}(x_1) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}$$

$$u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) = \int_{x_1}^{x} \left(u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t) \right)\ dt$$

$$\left| u_n^{(m-1)}(x) - u_k^{(m-1)}(x) \right| \overset{\text{КБ}}{\leq} (x - x_1) \int_{x_1}^{x} \left(u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t) \right)^2\ dt \leq$$

$$\leq (x_2 - x_1) \int_{x_1}^{x_2} \left(u_n^{(m)}(t) - u_k^{(m)}(t) \right)^2\ dt \leq (x_2 - x_1) \left\| u_n^{(m)} - u_k^{(m)} \right\|_H^2$$

Пример 2 (задача об изгибе балки)

$$L\omega = \frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}\right] + K\omega = q(x)$$

ω — прогиб балки
E — модуль Юнга
$I(x)$ — момент инерции сечения
$q(x)$ — интенсивность нагрузки на балку
K — коэффициент податливости основания

$$\omega(0) = \omega(l) = 0$$

$$\omega'(0) = \omega'(l) = 0$$

Из предыдущей задачи известно, что L положительно определен

$$F(\omega) = \int\limits_0^l \Big(EI(x)\omega''^2 + K\omega^2 - 2q(x)\omega\Big)\,dx = (L\omega, \omega) - 2(\omega, q)$$

Воспользуемся методом Ритца

$$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \varphi_n(x) = (x-l)^2 x^{n+1}, \quad \text{полная система в } H_A$$

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) = (x-l)^2\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k A_{ik} = b_{ij}, \quad i = \overline{1,n}$$

$$b_j = (q, \varphi_j)_H = \int\limits_0^l q(x)(x-l)^2 x^{j+1} dx$$

$$A_{ik} = (L\varphi_i, \varphi_k)_H = \int\limits_0^l \left(EI(x)\frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\frac{d^2\varphi_k}{dx^2} + k\varphi_i\varphi_k\right)dx$$

$$\omega_n(x) \underset{[0;l]}{\rightrightarrows} w_0(x), \qquad {\omega'}_n(x) \underset{[0;l]}{\rightrightarrows} {w'}_0(x), \qquad {\omega''}_n(x) \overset{\text{ср}}{\rightrightarrows} {w''}_0(x),$$

$$\omega(0) = 0, \qquad \omega''(l) = 0, \qquad \omega'(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} = 0$$

Пример 3 (краевая задача для систем ОДУ)

$$-\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{d}{dx}\left(p_{jk}(x)\frac{du_k(x)}{dx}\right) - q_{jk}(x)u_k(x)\right] = f_j(x)$$

$$u_j(x_1) = u_j(x_2) = 0$$

$$u(x) = \big(u_1(x), ..., u_j(x)\big)^T, \qquad f(x) = \big(f_1(x), ..., f_j(x)\big)^T$$

$$\big(p_{jk}(x)\big)_{j,k=1} \subset P(x), \qquad \big(q_{jk}(x)\big)_{j,k=1} \subset Q(x)$$

$$-\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right]+Q(x)u(x)=f(x)$$

$$u(x_1)=u(x_2)=0$$

$$p_{jk}(x),\ q_{jk}(x),\ p'_{jk}(x)\in C[x_1,x_2]$$

$$(u,v)_{H=L_2(x_1,x_2)}=\int\limits_{x_1}^{x_2}u(x)v(x)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{k=1}^{s}u_k(x)v_k(x)dx$$

$$D_A=\Big\{u=\big(u_1,...,u_j\big)^T,\ u_i(x)\in C[x_1,x_2],\ u_i(x_1)=u_i(x_2)=0\Big\}$$

Теор. $P(x),Q(x)$ симметричны на $x\in[x_1,x_2]\quad\Rightarrow\quad A$ симметричный

Док-во.

$$(Au,v)_H=-\int\limits_{x_1}^{x_2}v(x)\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right]dx\ +\int\limits_{x_1}^{x_2}v(x)Q(x)u(x)dx=$$

$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[P\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+v(x)Q(x)u(x)\right]dx=(u,Av)_H\quad\Rightarrow\quad\text{симметр.}$$

$$Quv=\sum_{j,k=1}^{s}q_{jk}u_kv_j=\sum_{i,j=1}^{s}q_{kj}v_ju_k$$

□

Теор. $P(x),Q(x)$ симметричны на $[x_1,x_2]$, $P(x)$ — полож. опр., $Q(x)$ неотр. на $[x_1,x_2]\Rightarrow A$ положительно определен

Док-во.

$$P(x)\text{ пол. опр }\forall x\Rightarrow\text{ пусть }\lambda_1(x)>0$$

$$\exists\ \tilde\lambda>0=const,\quad\lambda_1(x)>\tilde\lambda>0,\quad x\in[x_1,x_2]$$

$$\forall\ t=\big(t_1,...,t_s\big)^T$$

$$P(x)t\cdot t=\sum_{j,k=1}^{s}P_{jk}(x)t_jt_k\geq\lambda_1(x)\sum_{k=1}^{s}t_k^2\geq\tilde\lambda\sum_{k=1}^{s}t_k^2$$

$$Q(x)t\cdot t=\sum_{j,k=1}^{s}q_{jk}t_jt_k\geq0$$

$$(Au,u)_H=\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(P\frac{du}{dx}\cdot\frac{du}{dx}+Qu\cdot u\right)dx\geq\tilde\lambda\int\limits_{x_1}^{x_2}\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{du_k}{dx}\right)^2dx$$

$$(Au,u)_H\geq\frac{2\tilde\lambda}{(x_2-x_1)^2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\sum_{k=1}^{s}u_k^2\right)dx=\frac{2\tilde\lambda}{(x_2-x_1)^2}\|u\|_H^2$$

$$(Au,u)_H\geq\gamma^2\|u\|_H^2$$

□

$$\begin{matrix}u'(x_1)-M_1u(x_1)=0\\ u'(x_2)-M_2u(x_2)=0\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad A\text{ — полож. опр.,}\quad M_1,M_2\text{ — ?? неотриц.}$$

6.2 Основные краевые задачи для ур-я Пуассона

$$-\Delta u = f(p) \qquad \text{в} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m \tag{6.1}$$

► <u>задача Дирихле</u>

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.2}$$

$$Au = -\Delta u = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_k}^2}$$

$$D_A = \left\{u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \quad u|_{\partial\Omega} = 0\right\}$$

$$H = L_2(\Omega)$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \cancelto{0}{\int\limits_{S} u \frac{\partial u}{\partial n} dS} = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \geq 0 \tag{6.3}$$

$$(Au, u)_H = 0 \Leftrightarrow u = const = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A \text{ — положительный}$$

$$\Leftrightarrow \min F(u)$$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H \tag{6.4}$$

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left((\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\right) d\Omega \tag{6.5}$$

► <u>задача Робена</u>

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P)u\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.6}$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \geq 0, \qquad \sigma(P) \not\equiv 0, \ \sigma(P) \geq 0$$

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Leftrightarrow u = const = c, \qquad \int\limits_{\partial\Omega} \sigma c^2 dS = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left((\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \sigma u^2 dS \tag{6.7}$$

► <u>задача Неймана</u>

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \tag{6.8}$$

Аналогично (6.3)

$$(-\Delta u, u)_H = -\cancelto{0}{\int\limits_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS} + \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \geq 0$$

Но, этого недостаточно, например:

$$u \equiv 1, \quad (-\Delta u, u)_H = 0$$

Интегрируем $\int\limits_{\Omega}(...)d\Omega$ уравнение (6.1):

$$-\int\limits_{\Omega}\Delta u d\Omega = \int\limits_{\Omega} f d\Omega$$

(3.6) при $v = 1$

$$\int\limits_{\Omega}\Delta u\, d\Omega = \int\limits_{\partial\overline{\Omega}}\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$$

$$\int\limits_{\Omega} f\, d\Omega = 0 \quad \text{— условие разрешимости}$$

$$\int\limits_{\Omega} u(P)\, d\Omega = 0 \tag{6.9}$$

$$D_A = \left\{u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right), \quad u : (6.8), (6.9)\right\}$$

С учетом условия (6.9)

$$(-\Delta u, u)_H = 0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} u = 0 \Rightarrow u = c \overset{(6.9)}{\Rightarrow} u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A \text{ — положительный}$$

$$\Leftrightarrow \min F(u)$$

$$F(u) = (-\Delta u, u)_H - 2(u, f)_H$$

$$F(u) = \int\limits_{\Omega}\left((\operatorname{grad} u)^2 - 2uf\right)\, d\Omega$$

Лекция 7

① задача Дирихле

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega$$

При $n = 2$

$$(-\Delta u, u)_H = \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) d\Omega$$

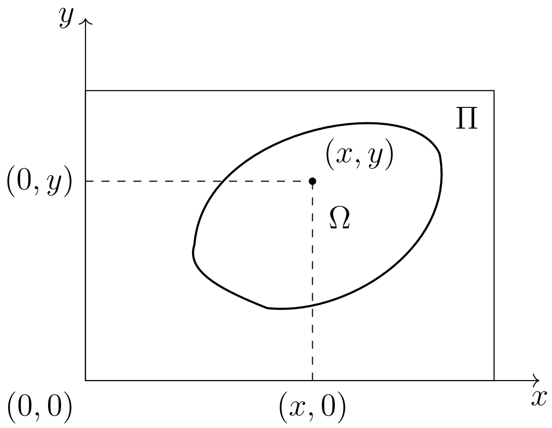

Рис. 1

Заключим Ω внутрь некоторого прямоугольника Π (Рис. 1). Продолжим $u(x, y)$ на весь прямоугольник, полагая ее равной нулю вне Ω

$$\forall\ A(x_1, y_1) \in \Pi :$$

$$\int\limits_{x_{min}}^{x_1} \frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x} dx = u(x_1, y_1) - u(x_{min}, y_1)$$

$$u^2(x_1, y_1) \overset{\text{КБ}}{\leq} (x_1 - x_{min}) \int\limits_{x_{min}}^{x_1} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx \leq a \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx \tag{7.1}$$

Проинтегрируем это неравенство

$$\int\limits_{\Pi} u^2(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \leq a^2 \int\limits_{\Pi} \left[\frac{\partial u(x, y_1)}{\partial x}\right]^2 dx dy_1 \leq \int\limits_{\Pi} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) d\Omega$$

$$\int\limits_{\Pi} u^2(x, y) d\Omega \leq \int\limits_{\Pi} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) d\Omega$$

$$(Au, u)_H \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

Получаем, что A положительно определен на D_A

Неравенство Фридрихса в общем виде:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \geq \gamma^2 \int\limits_{\Omega} u^2 dx, \qquad u|_S = 0$$

② задача Робена

$$\begin{cases} -\Delta u = f \qquad \text{в } \Omega \\ \left[\dfrac{\partial u}{\partial n} + \sigma(P) u(P)\right]\Bigg|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma(P) \geq \sigma_0 = const > 0$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \leq C \left\{ \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS \right\}$$

$$u = f \cdot v$$

$$\left(\frac{\partial (fv)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (fv)}{\partial y}\right)^2 = f^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] - \\ - v^2 f \Delta f + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{(*)} \qquad (7.2)$$

Преобразуем правую и левую части:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} f\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial y} f\right)^2 = v^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) + f^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right) + \\ + 2v \frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(*) = 2v \frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2v \frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y} + v^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(f \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Получим

$$v^2 \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) = -v^2 f \Delta f + v^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + v^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(f \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

что при дальнейшем упрощении очевидно оказывается верным равенством.
Отбрасывая первое слагаемое справа в (7.2):

$$\left(\frac{\partial (fv)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (fv)}{\partial y}\right)^2 \geq -v^2 f \Delta f + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Проинтегрируем получившееся $\int\limits_{\Omega}(...)d\Omega$

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial(fv)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(fv)}{\partial y}\right)^2\right)d\Omega \geq -\int\limits_{\Omega} v^2 f\Delta f\, d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS$$

$$-\int\limits_{\Omega} vf\Delta f d\Omega \leq \int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)d\Omega+\left|\int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS\right|$$

$$f=\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

$$\Delta f=-\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)f$$

$$-\int\limits_{\Omega} v^2 f\Delta f d\Omega=-\int\limits_{\Omega} -v^2 f\Delta u^2(\cdot)d\Omega=\int\limits_{\Omega} u^2\pi^2(\cdot)d\Omega$$

$$\left|\int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\frac{\partial f}{\partial n}dS\right| \leq \int\limits_{\partial\Omega} v^2 f\left|\frac{\partial f}{\partial n}\right|dS \leq c_1\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \leq \int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)d\Omega+c_1\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$c=\min\left\{\frac{c_1}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)},\frac{1}{\pi^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}\right\}$$

$$(-\Delta u,u)_H=\int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega-\int\limits_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}dS \overset{(6.6)}{\geq} \int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega+\sigma_0\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS \geq$$
$$\geq \sigma_1\left\{\int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS\right\}$$

$$\sigma_1=\min\{\sigma_0,1\}$$

$$\frac{\sigma_1}{c}\|u\|_H^2 \leq \int\limits_{\Omega}(\operatorname{grad} u)^2 d\Omega+\int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{\sigma_1}{c}}$$

$$-(\Delta u,u)_H \geq \frac{\sigma_1}{c}\|u\|_H$$

Лекция 8

② <u>задача Робена</u>

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

8.1 Неравенство Пуанкаре

TODO

$$(x_1, y_1), (x_2, x_2) \in \Omega$$

$$\Omega u^2 d\Omega \in A \int\limits_\Omega (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega + B(\int\limits_\Omega u d\Omega)^2$$

$$\int\limits_\Omega u^2 d\Omega \le (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + B(\int\limits_\Omega d\Omega)^2$$

$$u^2(x_2, y_2) + u^2(x_1, y_1) - 2u(x_2, y_2)\, u(x_1, u_1) =$$
$$= \left(\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx\right)^2 + \left(\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy\right)^2 + 2\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) \le$$
$$\le 2\left(\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1) dx\right)^2 + 2\left(\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}(x_2, y) dy\right)^2 \le$$
$$\le 2\left\{|x_2 - x_1| \int\limits_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1)\right)^2 dx + |y_2 - y_1| \int\limits_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, y)\right)^2 dy\right\}$$

Проинтегрируем $\iiiint (...) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2$

$$\iiiint u^2(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = ab \int\limits_\Omega u^2 d\Omega$$

$$\iiiint u(x_2, y_2) u(x_1, y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \left(\int\limits_\Omega u d\Omega\right)^2$$

$$2ab \int\limits_\Omega u^2 d\Omega - 2\left(\int\limits_\Omega u d\Omega\right)^2 \le ab\left\{a^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\Omega + b^2 \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 d\Omega)\right\}$$

$$A = \max\{a^2, b^2\}, \quad B = \frac{1}{ab}$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega \leq A \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) d\Omega + B \left(\int\limits_{\Omega} u d\Omega \right)^2$$

$$D_N = D(A_N) = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int\limits_{\Omega} u d\Omega = 0 \right\}$$

$$\|u\|_H^2 \leq A \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega = \widetilde{A}\ (Au, u)_H, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{A}}} (A_N u, u) \geq \gamma^2 \|u\|_H^2$$

Далее $A:\quad A_N$ или $A_D \qquad [u,v]_A = \int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\ d\Omega$

$$\|u\|_A = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega$$

$$u, v \in L_2(\Omega), \quad \psi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$$

Если $\forall \psi \in C_0^\infty$ справедливо тождество

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} d\Omega = - \int\limits_{\Omega} v_j \psi\, d\Omega$$

то функция v_j называется TODO

Пусть $u \in H_{A_D}, \qquad \exists \{u_n\} \in D_{A_D}$ такая, что

$$\|u_n - u\|_H \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\|u_n - u\|_A \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u_n - \operatorname{grad} u_l)^2 d\Omega = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^2 d\Omega \to 0$$

$$\exists\, v_j \in L_2(\Omega): \qquad \left\| \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - v_j \right\|_H \to 0$$

Покажем, что $v_k = \dfrac{\partial u}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,m}$

Пусть $\psi(P) \in C_0^\infty(\overline{\Omega}), \qquad \{u_n\} \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int\limits_{\Omega} u_n \frac{\partial \psi}{\partial x_k} d\Omega = - \int\limits_{\Omega} \psi \frac{\partial u_n}{\partial x_k} d\Omega$$

$$\left(u_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)_H = - \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_k}, \psi \right)_H \qquad \to \qquad \left(u, \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right)_H = -(\psi, v_k)_H$$

8.2 Неоднородные краевые условия

$$\Delta u = 0 \tag{8.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \psi \tag{8.2}$$

Пусть $\exists\ \psi(P)$, удовлетворяет следующим условиям:

- $\psi \in C(\overline{\Omega})$
- $\psi(P)|_{\partial\Omega} = \varphi(P)$
- $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_k} \in C(\Omega),\ k = \overline{1, m}$
- $$\Phi(u) = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega \tag{8.3}$$

$$D_\Phi = \{u : ref7_*\}\Phi(P) + \eta(P),$$

$$\eta : \mathbf{??} + \eta|_{\partial\Omega} = 0$$

Пусть функция $u_0(P)$ достигает $\min \Phi(u) : u_0(P)$ реш. $(8.1), (8.2)$
** 1-3 и еще на границе ноль

$$u_0 + t\eta \in D_\Phi, \forall t \in \mathcal{R}, \eta : 8.2$$

$\Phi(u_0 + t\eta)$ достигает min при $t = 0$ как скал функция от t

$$\left[\frac{d}{dt}\Phi(u_0 + t\eta)\right]\Bigg|_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial(u_0 + t\eta)}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\right)^2 + 2\frac{\partial u_0}{\partial x_k}\cdot t\frac{\partial\eta}{\partial x_k} + t^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right)^2\right) d\Omega\right]\Bigg|_{t=0} = \ldots =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u_0 \operatorname{grad} \eta d\Omega = 0$$

Применяя формулу Грина (**??**) и используя краевое условие (**??**), получим

$$\int\limits_{\Omega} \eta\, \Delta u_0\, d\Omega = 0$$

Множество функций η плотно в $L_2(\Omega)$. Тогда из последнего следует:

$$\Delta u_0 = 0$$

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 d\Omega$$

$$u = \psi - v, \qquad v|_{\partial\Omega} = 0$$

$$\Phi(u) = \Phi(\psi - v) = \int\limits_{\Omega} \big(\mathrm{grad}(\psi - v)\big)^2 d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}\,\psi)^2 d\Omega - 2\int\limits_{\Omega} \mathrm{grad}\,\psi \cdot \mathrm{grad}\,v d\Omega + \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}\,v)^2 d\Omega$$

$$F(v) = \|v\|^2_{A_D} - 2\int\limits_{\Omega} \mathrm{grad}\,v \cdot \mathrm{grad}\,\psi \; d\Omega, \qquad v \in H_D = H_{A_D}$$

Линейный функционал

$$lv = \int\limits_{\Omega} \mathrm{grad}\,v \cdot \mathrm{grad}\,\psi \; d\Omega$$

$$|lv|^2 \leq \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}\,\psi)^2 d\Omega \int\limits_{\Omega} (\mathrm{grad}\,v)^2 d\Omega = c\,\|v\|_{H_{A_D}} \quad \Rightarrow \quad l \text{ — ограничен}$$

Из этого следует, что существует решение задачи о минимуме функционала. FIX

$$\psi \in H(\Omega): \quad \exists! \text{ Обобщен. реш Дирихле}$$

$$u \in H(\Omega)$$

8.3 Уравнения с переменными коэффициентами

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + C(P)u, \qquad Lu = f, \quad \Omega \in \mathbb{R}^m \tag{7.5}$$

Краевые условия одного из трех типов

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7.6}$$

$$[N[u] + \sigma(P)u]|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7.7}$$

$$N(u)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7.8}$$

Формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} (vLu - uLv)\, d\Omega = -\int\limits_{\partial\Omega} (vN(u) - uN(v))\, dS \tag{7.9}$$

При условиях (7.6) и (7.8) интеграл очевидным образом обращается в 0, поэтому остается рассмотреть случай (7.7).

$$N(u) + \sigma u = 0, \quad N(v) + \sigma v = 0$$

$$vN(u) + v\sigma u - uN(v) - u\sigma v = 0$$

$$[vN(u) - uN(v)]|_{\partial\Omega} = 0$$

Получаем, что при любых граничных условиях (7.6)-(7.8) правая часть (7.9) обращается в ноль, а следовательно $(Lu, v) = (u, Lv)$ и оператор симметричен.

Оператор L называется эллиптическим в $\overline{\Omega}$, если

$$\exists\, \mu_0 = const > 0 \quad \forall t_1, ...t_m \in \mathbb{R}, \quad \forall P \in \overline{\Omega}: \quad \sum_{j,k=0}^{m} A_{jk}(P) t_j t_k \geq \mu_0 \sum_{j,k=1}^{m} t_k^2$$

Пример (оператор Трикоми)

$$Ly = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$A_{11} = y, \quad A_{21} = A_{12} = 0, \quad A_{22} = 1$$

$$yt_1^2 + 1 \cdot t_2^2 \geq B\, t_1^2 + t_2^2 \geq \widetilde{B}(t_1^2 + t_2^2), \qquad \widetilde{B} = \min\{B, 1\}$$

$$\forall\, \Omega: \quad \overline{\Omega} \subset \mathbb{R} \times (0, +\infty) \qquad L \text{ эллиптический в } \overline{\Omega}$$

Если коэффициент $C(P)$ ограничен снизу некоторым положительным числом, то оператор L положительно определенный. Действительно, по формуле Грина (**??**):

$$(Lu, u)_H = \int\limits_{\Omega} uLu\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{j,k=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2 \right] d\Omega - \int\limits_{\partial\Omega} uN(u) dS$$

При краевых условиях (7.6), (7.8):

$$\int\limits_{\partial\Omega} (...)\, dS = 0, \qquad \Rightarrow \gamma = \sqrt{c_0}$$

$$(Lu, u)_H \geq c_0 \int\limits_{\Omega} u^2 d\Omega = \gamma^2 \|u\|_H^2$$

При условии (7.7):

$$N(u) = -\sigma u \text{ на } \partial\Omega, \qquad \sigma(P) \geq \sigma_0 > 0$$

$$(Lu, u)_H \geq \sigma_0 \int\limits_{\partial\Omega} u^2 dS \geq \sigma_0 \|u\|_H^2$$

FIX

Лекция 9

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{jk}(P)\frac{\partial n}{\partial x_k} + c(P)u = f(P))$$

1. з Дирихле

$$(Lu,u) = \mu\sum_{j=1}^{m}\int_{\Sigma}(\frac{\partial n}{\partial x_j})^2 d\Omega \geq \Sigma^2\|u\|_H^2; \sigma = \sqrt{ae\mu_0}$$

2. з Робэна

$$(Lu,u) \geq (\alpha(\int_{\Sigma}\sum_{j=1})^{n}(\frac{\partial u}{\partial x_i})^2)d\Omega + \int_{\partial\Omega} n^2 dS); \Rightarrow (Lu,u) \geq \alpha\|u\|^2$$

3. з Неймана

$$C(P) = 0$$

$$Lu = -\sum_{j,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x_k}l) = f(P)$$

$$\int_{\Omega}(\cdot)d\Omega + \text{ ф-ла Остроградского}$$

$$-\int_S\sum_{j,k=1}^{m}A_j\frac{\partial n}{\partial x_k}cos(\overline{n},x)dS = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f(P)d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} ud\Omega = 0$$

$$D_{L_N} = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), N(u)|_{\partial\Omega} = 0, \int_{\Omega} ud\Omega = 0\}$$

$$(L_N u, n) = -\int_{\Omega} u\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x})d\Omega =$$

$$= \int_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{m}A_{jk}\frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial n}{\partial x_n}d\Omega \geq \mu_0\int_{k=1}^{m}(\frac{\partial n}{\partial x_k})^2 d\Omega$$

$$\int_{\Omega} u^2 d\Omega \leq A\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{m}(\frac{\partial n}{\partial x_0}dS + B(\int_{\Omega} u\Omega)^2)$$

9.1 Энергетический метод для положительных операторов

$Au = f, u, f \in H, A$ положительный

Все еще работает теорема о функциональной энергии

$$F(u) = (Au, u)_H - 2(u, f)_H$$

Энергетическое пространство порожденное оператором H_A, вообще говоря его элементам нельзя сопоставить элементы из Гильбертова.

$$H_A - \text{ Энергетическое пр-во}$$

$$(u, f) \text{ на } D_A - \text{ плотно в H и в } H_A$$

$$(u, f) = lu \text{ Функционал } \to \text{ может быть ограничен или не ограницен}$$

Если ограничен в H_A продолжим на H_A
в H_A по теореме Рисса $\exists u_0 \in H_A (u, f) = [u, u_0]A$

$$[u - u_0, u - u_0] = \|u\|_A^2 + \|u_0\|_A^2 - 2[u, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u\|_A^2 - 2[u, u_0]_A = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

Минимум достигается на элементе $F(u) = u_0$. Но u_0 может не лежать в энергетическом про-ве. Обобщенное решение с конечной энергией.

Если H сепарабельно $\Rightarrow H_A$ сепарабельно $\Rightarrow \{\phi_n\}$ в H_A

$$u_o = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \phi]_A \phi$$

$$[\phi_n, u_0] = l\phi_n$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)\phi_n$$

$$u_k \sum_{n=1}^{k} (f, \phi_n) \|u_k - u_0\|_A \to_{k \to \infty} 0$$

$$\text{Если } \{\phi\} \in D_A \Rightarrow l\phi_n - (f, \phi_n) \Rightarrow u_o = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)\phi_n \Rightarrow = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \phi_n)\phi_n$$

9.2 Эллиптические уравнения в бесконечной области

Пусть Ω — бесконечная область

$$-\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{jk}(P)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(P)$$

при краевом условии задачи Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

Допустим, что коэффициенты A_{jk} ограничены

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0, b(P = 0), |P| >> 1\}$$

Оператор A является лишь положительным
Задача (**??**), (**??**) имеет решение с конечной энергией тогда, когда

$$\exists\, g(P): \quad f(P) = \operatorname{div} g(P), \quad \int\limits_{\Omega} |g(P)|^2 d\Omega < \infty$$

$\operatorname{div} g$ понимается в смысле "обобщенной дивергенции"

$$\|u_0\|_A^2 \leq C \int\limits_{\Omega} |g(P)|^2 d\Omega$$

Можно указать более простое достаточное условие:

$$m \geq 3: \qquad \int\limits_{\Omega} |P|^2 f^2(P) d\Omega < \infty \quad \Rightarrow \quad \|u_0\|_A^2 \leq C^2 \int\limits_{\Omega} |P|^2 f(P) d\Omega$$

$$m \geq 2: \qquad \int\limits_{\Omega} f^2(P) d\Omega < \infty$$

Перейдем к задаче Неймана:

$$H_{A_D} = \{u \in H'(\Omega) \text{ и } u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$$H_{A_H} = \{\exists 0 \delta \frac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)\}$$

$$F(u) = \int\limits_{k,j=1}^{m} A_{jk} \frac{\partial n}{\partial x_j}\frac{\partial n}{\partial x_k} d\Omega - 2lu$$

В случае задачи Неймана lu определяется формулой:

$$l_N u = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot g \; d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} u g_n dS$$

В случае задачи Дирихле:

$$l_D u = -\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot g \; d\Omega$$

Если сходится интеграл (**??**), то:

$$lu = \int_\Omega u(P)f(P)d\Omega$$

TODO

$$Au = f$$

$$B_j u = 0; j = 1, q$$

$$H > D_A$$

знак принадлежит в обратную сторону

$$H_A$$

При условии $u \in D_A$, но не обязательно $u \in H_A$ естественные $B_j : u \in H_A$ главные гр условия для A.

$$-\Delta u = f$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \partial u = 0, \sigma > 0$$

$$(-\Delta u, v)_H = -\int v\Delta u d\Omega$$

$$\int grudgradvd\Omega - \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

$$F(u,u) = \|u\|_A^2 - 2(f,u) = \int_\Omega (grud^2 u - 2u)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \partial u^2 dS$$

$$u_0 = \operatorname{argmin} F;$$

$$\frac{d}{dt}(F(u_0 + t\eta))|_{t=0}' = 0$$

$$-\int_\Omega \eta(\Delta u_0 + f)d\Omega + \int_{\partial\Omega} \eta(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \partial u_0)dS = 0$$

Лекция 10

10.1 Метод Бубнова-Галеркина

Пусть линейный оператор L (не обязательно положительный) определен на множестве, плотном в H (гильбертовом)

$$Lu = f \tag{10.1}$$

Выбираем последовательность элементов $\{\varphi_n\}, \quad \varphi_n \in D_A$, которые назовем координатными функциями. Все они удовлетворяют некоторым однородным краевым условиям задачи (10.1)

Будем считать, что как и (10.1), так и все краевые условия линейные. Тогда и функция

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_n \varphi_k(P) \tag{10.2}$$

будет удовлетворять всем краевым условиям задачи (10.1)

a_k выбирается таким образом, чтобы после подстановки $(Au_n - f) \perp \varphi_1, .., \varphi_n$

$$\sum_{k=1}^{n} a_j (L\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \qquad j = \overline{1, n} \tag{10.3}$$

10.2 Применение метода Б-Г к интегральному уравнению Фредгольма

$$u(P) - \int\limits_{\Omega} K(P, Q)\, u(Q)\, d\Omega = f(P) \tag{10.4}$$

Предполагаем следующее

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(P, Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q < \infty, \qquad \int f^2(P) d\Omega < \infty \tag{10.5}$$

а также единственность решения (10.4) в $H = L_2(\Omega)$

Возьмем систему $\{\varphi_n\}$ полную и ортонормированную (ПОНС)

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} \tag{10.6}$$

Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(P)$$

Подставляя в (10.4) и требуя ортогональности, а также учитывая (10.6) получим СЛАУ

$$a_m - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} a_k = (f, \varphi_m) \tag{10.7}$$

$$\gamma_{mk} = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K(P, Q) \varphi_m(P) \varphi_k(Q)\, d\Omega_P\, d\Omega_Q$$

Введем обозначения:

$$K_n(P,Q) = \sum_{k,m=1}^{n} \gamma_{mk}\, \varphi_m(P)\, \varphi_k(Q)$$

$$f_n(P) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k(P)$$

Система $\{\varphi_n\}$ — ПОНС, поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} [K_n(P,Q) - K(P,Q)]^2\, d\Omega_P\, d\Omega_Q = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} [f_n(P) - f(P)]^2 d\Omega = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$v_n(P) - \int\limits_{\Omega} K_n(P,Q) v_n(Q) d\Omega = f_n(P) \tag{10.9}$$

Из теории интегральных уравнений из (10.8) следует, что при достаточно большом n уравнение (10.9) разрешимо и имеет единственное решение

$$\|v_n - v\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Интегральное уравнение (10.9) можно решить. Заменяя $K_n(P,Q)$ и $f_n(P)$ их значениями, получим

$$v_n(P) = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi_K(P)$$

$$A_m = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{mk} \int\limits_{\Omega} v_n(Q)\, \varphi_k(Q)\, d\Omega + (f, \varphi_m)$$

$$A_m - \sum_{l=1}^{n} \gamma_{mk} A_k = (f, \varphi_m), \qquad m = \overline{1,n}$$

10.3 Элементы теории приближения

TODO

$H_A \supset H_N$ - конечномерное

$\exists$ норм про-во X: $\exists$ элемент наилучшего приближения

$\forall u \in X : \rho(u, H_N) = inf_{v\in H_N} \rho(u,v) X = C[a,b]$

$1, x, x^2, ..., x^N, ...$

$|C[a,b] \to P_{N-1}(x)$

$$L_N(x) = \sum_{n=1}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

$\{l_k(x)\}-$ система фундаментальных многочленов

$$l_k(x) = \frac{(x-x^1)...(x-x_N)}{(x_k-x_1)...(x_k-x_N)} = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_K)}$$

$l_k(x_m) = \delta_{km}; \omega(x) = {}_{k=1}^{m}(x = x_k)$

$\|f - L_N(x)\|_C \le (1+\|P\|)\rho_N(f, H_N)$

$$\|P\| = max_{x\in[a,b]}\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)| = \Lambda_N -$$ построение Лебега

Λ_N- неограниченно возрастает при $n\to\infty$ для всего $C[a,b]$и сущ зависит от выбора сетки $x_1, ..., x_N$

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{2}{b-a}t_k; t_K = -cos\{\frac{\pi}{2N}(2k-1)\}$$

$$\Lambda_N \approx \frac{2}{\pi}lnN + 1 - q_N, 0 << q_N < \frac{1}{4}$$

$$Lu = -\frac{d}{dx}(p(x\frac{du}{dx}) + q(x)u)$$

$Lu = f$ + гр у $u(a) = u(b) + 0$

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k l_k(x); a_k = u_N(x_k)$$

$$\sum_{p=1}^{n} a_p(Ll_p, l_K) = (f, l_k) = \int_a^b f(x)ln(x)dx = f_K$$

$l_k(x_m) = \delta_{km}, \omega(x) = {}_{k=1}^{m}(x-x_k)$ СЛАУ с mуравнений

$$a_{kl} = (Ll_k, l_p) = \int_a^b p(x)\frac{dl_n(x)}{dx}\frac{dlp(x)}{dx} + \int_a^b a(x)q(x)l_k(x)f(x)dx$$

$x_1 = a; x_N = b \Rightarrow$

$l_1(x_1) = 0; l_N(X_N) = 0$

$$u_n(x) = \sum_{k=2}^{N-1} u(x_K)l_N(x)$$

$$\sum_{p=1}^{N-1} u_k a_{Kp} = f_k$$

$p = w$

Пример

$p \equiv 1, a \equiv 0$

$f(x) = \{1, x \ge 0; -1, x < 0\}$

$$N = 5; x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{2}, x_5 = 1$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)x(x-\frac{1}{2})(x-1)}{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})-1-\frac{3}{2}}$$

$$l_3(x) = (x+1(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}))$$

$$l_4(x) = \frac{(x+1(x+\frac{1}{2})x(x-1))}{\frac{3}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}$$

$$u_N - u_2l_2(x) + u_3l_3(x) + u_4l_4(x)$$

$$a_{kp} = \int\limits_{-1}^{1}\frac{dl_k}{dx}\frac{dl_P}{dx}dx$$

период гр у

$$[a,b] = [0,2\pi]$$

$$u_N = \frac{a}{2} + \sum_{k=1} a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

$$x_k = \frac{2\pi}{x}(k-1)a_0, a_k, b_k \text{ Упр.}$$

$$dim H_N - 2N - 1$$

$$a_k cos(kx) + b_k sin(kx)$$

$$\Lambda_N \frac{1}{\pi} ln N + \delta(2-\frac{2}{\pi}), 0 < \delta < 1$$

10.4 Введение в теорию степенных сплайнов

$$[a,b] a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b, h_K = s_k - x_{k-1} k = \overline{0, N-1}\, h_k = x+1-x_k$$

Определение
Сплайн степени n, дефекта ν:

$$S_{n\nu} = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_p^(k)(x-x_k)^P = \sum_{p=0}^{n} b'_P(x_{k+1}-x)^P$$

$$(x-x_K)_t^P = \{(x-x_k)^P, x \geq x_k; 0, x \leq x_k\}$$

Лекция 11

11.1 Кусочно постоянные сплайны

Рассмотрим случай одной переменной

$$\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

Введем на $[a, b]$ сетку

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad h = \max_{i=1,N} h_i$$

Зададим на каждом отрезке (x_{i-1}, x_i) функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i) \end{cases}$$

Линейную оболочку таких функций обозначим H_N

1. Система линейно независима
2. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \ \ (i \neq j), \qquad (\varphi_i, \varphi_i) = h_i$

Теор. Для любой функции $u(x) \in W_p^1(\Omega) \quad \exists v(x) \in H_N$:

$$\|u - v\|_{L_2(a,b)} \leq ch\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

где $c = const$ не зависит от h, u, а норма в W_p^1 задается выражением

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \|u\|_{L_p(\Omega)} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_p(\Omega)}$$

Док-во

$$v = \int\limits_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x), \qquad u_i = \frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi)d\xi$$

Тогда при $p < \infty$

$$\|u - v\|_{L_p(a,b)}^p = \int\limits_a^b |u - v|^p dx = \sum_{i=1}^N \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left| u(x) - \frac{1}{h_i} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} u(\xi)d\xi \right|^p dx =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u(x) - u(\xi)\big)d\xi \right|^p dx = \sum_{i=1}^N \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int\limits_{\xi}^{x} \frac{du}{d\eta} d\eta \right|^p dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left|\frac{du}{d\eta}\right| d\eta \right|^p dx = \sum_{i=1}^N h_i \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left|\frac{du}{d\eta}\right| d\eta \right)^p$$

Используя неравенство Гельдера:

$$\left| \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int\limits_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} 1\cdot\left|\frac{du}{d\eta}\right|d\eta \le \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} 1^q d\eta\right)^{1/q}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta\right)^{1/p}$$

$$\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|d\eta\right)^p \le h_i^{p/q}\int\limits_{x_i-1}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta$$

$$\|u-v\|_{L_p}^p \le \sum_{i=1}^N h_i^{1+p/q}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta \le h^{1+p/q}\int\limits_a^b\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta = h^p\int\limits_a^b\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta \le h^p\|u\|_{W_p^1}^p$$

Для L_∞ рассмотрим

$$|u-v| = \left|u(x)-\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}u(\xi)d\xi\right| = \left|\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\big(u(x)-u(\xi)\big)d\xi\right| = \left|\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}d\xi\int\limits_{\xi}^{x}\frac{du}{d\eta}d\eta\right| \le$$

$$\le h_i\sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}\left|\frac{du}{d\eta}\right| \le h\|u\|_{W^1_\infty(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|u-v\|_{L_\infty(\Omega)} \le h\|u\|_{W^1_\infty(\Omega)}$$

$\square$

Для устойчивости нам необходимо, чтобы собственные значения матрицы Грама $\widehat{M} = \big(M_{ij} = (\varphi_i,\varphi_j)\big)$ были ограничены сверху и снизу положительными числами $a_1 < \lambda < a_2$, не зависящими от N

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h_i}}\begin{cases}1, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_i)\end{cases}$$

$$\Omega\subset\mathcal{R}^m, \Omega = \cup_{i=1}^N\Omega_i$$

$$max_{i=\overline{1,N}}sup_{x_{ij}\le\Omega_i}|x-y| \le h$$

11.2 Кусочно линейные базисные функции

Введем на $[a,b]$ сетку

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b, \qquad h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad h = \max_{i=1,N} h_i$$

Зададим на каждом отрезке (x_{i-1},x_i) функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & x\in(x_i,x_{i+1})\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_{i+1})\end{cases} \qquad i=\overline{1,N-1}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1}, & x \in (x_0, x_1) \\ 0, & x \notin (x_0, x_1) \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in (x_{N-1}, x_N) \\ 0, & x \notin (x_{N-1}, x_N) \end{cases}$$

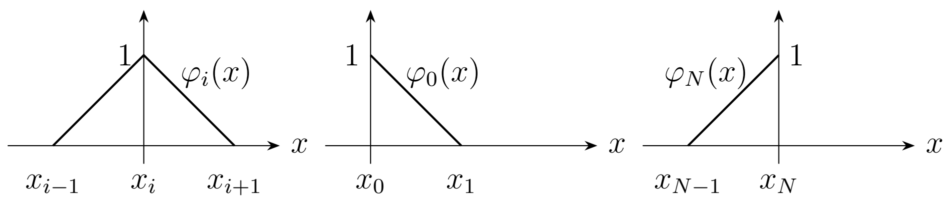

Рис. 2: Базисные функции

$$(\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ 1, & |i-j| \le 1 \end{cases}$$

$$v_N = \sum_{i=0}^{N} a_i \varphi_i(x) \quad \in H_N$$

Теор. Для любой функции $u(x) \in W_2^2(\Omega) \quad \exists v(x) \in H_N = W_2^{1,h}(\Omega)$:

$$\|u - v\|_{L_2(\Omega)} \le c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

$$\|u - v\|_{W_2^1(\Omega)} \le c_2 h \|u\|_{W_2^2(\Omega)}$$

где $c_1, c_2 = const$ не зависят от h, u

Док-во

$$v(x) = \sum_{i=0}^{N} u(x_i)\varphi_i(x)$$

Оценим разность $u - v$ в произвольной точке $x \in (x_{i-1}, x_i)$. С учетом того, что функция $v(x)$ кусочно-линейная и $dv(x)/dx = (u(x_i) - u(x_{i-1}))/h_i$

$$u(x) - v(x) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \frac{d}{d\xi}(u - v)d\xi = \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \left[\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i}\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} d\xi \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{du(\xi)}{d\xi} - \frac{du(\eta)}{d\eta}\right] d\eta = \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} d\xi \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} d\eta \int\limits_{\eta}^{\xi} \frac{d^2u(t)}{dt^2} dt$$

Применяя к (**??**) неравенство КБ и расширяя пределы интегрирования

$$|u(x) - v(x)|^2 \le h_i^3 \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left|\frac{d^2u}{dt^2}\right|^2 dt$$

Суммируя по $i = 1, ..., N$ получим (**??**). Если же сначала продифференцировать, а затем провести те же самые рассуждения и оценки, то получим (**??**).

$$\sum_{i=1}^{N}(\cdot)\|u-v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 h^2 \|u\|_{W_2^2}(\Omega)$$

TODO: добавить переходов

Лекция 12

Теор. Если $u(x) \in W^2_\infty(\Omega)$, то $\exists v \in H_N$:

$$\|u - v\|_{L_\infty(\Omega)} \leq c_3 h^2 \|u\|_{W^2_\infty(\Omega)}$$

$$\|u - v\|_{W^1_\infty} \leq c_4 h \|u\|_{W^2_\infty(\Omega)}$$

Если $u \in C^2(\Omega)$, то

$$\|u - v\|_{C(\Omega)} \leq c_5 h^2 \|u\|_{C^2(\Omega)}$$

Упр. Доказать теорему.

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases} \qquad i = \overline{1, N-1}$$

$$v(x) = \sum_{i=0}^{N} \sqrt{h} u(x_i) \varphi_i(x)$$

Пример

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \qquad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad f \in L_2(a,b) \\ u(a) = \dfrac{du}{dx}(b) = 0 \end{cases}$$

$$H_A: \quad \|u\|_A = \sqrt{\int_a^b \left(p\left|\frac{du}{dx}\right|^2 + q|u|^2\right) dx}$$

$$H_N = L(\varphi_0, ..., \varphi_N)$$

12.1 Билинейные базисные функции в $\mathbb{R}^2$

Пусть Ω — некоторая прямоугольная область в $\mathbb{R}^2$

$$A_0 = x_0 < x_1 < ... < x_{N_x} < A_1, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta x = \max_{i=1,N_x} \Delta x_i$$

$$B_0 = y_0 < y_1 < ... < y_{N_y} = B_1, \qquad \Delta y_1 = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta y = \max_{i=1,N_y} \Delta y_i$$

$$h = \max(\Delta x, \Delta y)$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\Delta x_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{\Delta x_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

$$\varphi_j(y) = \begin{cases} \dfrac{y_j - y_{j-1}}{\Delta y_j}, & y \in (y_{j-1}, y_j) \\ \dfrac{y_{j+1} - y}{\Delta y_{j+1}}, & y \in (y_j, y_{j+1}) \\ 0, & y \notin (y_{j-1}, y_{j+1}) \end{cases}$$

$$Q_{ij}(x,y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

$$u^h(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} Q_{ij}(x,y), \qquad (x_i, y_j) \in \overline{\Omega}$$

$$L(Q_{ij}) = W_2^{1,h} \cap W_2^1$$

Теор. Если $u \in C^{(2)}(\Omega)$, то существует $u^h \in W_2^{1,h}$ такая, что

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} \leq ch^2 \|u\|_{C^{(2)}(\Omega)}$$

$$\|u - u^h\|_{W_2^1(\Omega)} \leq ch \|u\|_{C^{(2)}(\Omega)}$$

где $c = const$ не зависит от h, u

<u>Док-во</u>

$$u^h(x,y) = \sum_{i,j} u(x_i, y_j) Q_{ij}(x,y)$$

$$\xi(x,y) = u(x,y) - u^h(x,y)$$

$$\xi(x,y) = (x - x_l)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) + (y - y_k)\frac{\partial \xi}{\partial y}(x_k, y_k) + \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' +$$
$$+ \int\limits_{y_k}^{y} dy' \int\limits_{y_k}^{y'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y''^2}(x_l, y'') dy'' + \underbrace{\int\limits_{x_l}^{x}\int\limits_{y_k}^{y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y') dx' dy'}_{C}$$

$$\frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y')\, dy',$$

Ⓐ $$(x - x_l)\frac{\partial \xi}{\partial x}(x_l, y_k) = \frac{x - x_l}{\Delta x_{l+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int\limits_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'',$$

Ⓑ $$\int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x''^2}(x'', y_k) dx'' = \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'',$$

$$\copyright \quad \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{y_k}^{y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x' \partial y'}(x', y')\, dy' =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{y_k}^{y'} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''}(x'', y'') \right) dy'$$

Следовательно выражение для $\xi(x, y)$ принимает вид

$$\xi(x, y) = \frac{x - x_l}{\Delta x_{l+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx' \int\limits_{x'}^{x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'' + \frac{y - y_k}{\Delta y_{k+1}} \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy' \int\limits_{y'}^{y_k} \frac{\partial^2 u}{\partial y''^2}(x_l, y'')\, dy'' +$$

$$+ \int\limits_{x_l}^{x} dx' \int\limits_{x_l}^{x'} \frac{\partial^2 u}{\partial x''^2}(x'', y_k)\, dx'' + \int\limits_{y_k}^{y} dy' \int\limits_{y_k}^{y'} \frac{\partial^2 u}{\partial y''^2}(x_l, y'')\, dy'' +$$

$$+ \frac{1}{\Delta x_{l+1} \Delta y_{k+1}} \int\limits_{x_l}^{x_{l+1}} dx'' \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} dy'' \int\limits_{x_l}^{x} dx' \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'}(x', y') - \frac{\partial^2 u}{\partial x'' \partial y''}(x'', y'') \right) dy'$$

Отсюда следует, что

$$|\xi(x, y)| \leq c \left(\Delta x_{l+1}{}^2 + \Delta y_{k+1}{}^2 \right) \sum_{|i|=2} \left\| D^{|i|} u \right\|_{C(\Omega_{l+1,k+1})} \leq c \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 \right) \sum_{i=2} \left\| D^{(i)} u \right\|_{C(\Omega)}$$

$$\|u - u^h\|_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |u - u^h|^2 dx dy \leq c \big(\Delta x^2 + \Delta y^2 \big)^2 \left(\sum_{i=2} \left\| D^{(i)} u \right\|_{C(\Omega)} \right)^2$$

Упр. Получить вторую оценку
Упр*. Доказать более сильную оценку:

$$\|u - u^h\|_{C(\Omega)} \leq c(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sum_{i=2} \left\| D^{(i)} u \right\|_{C(\Omega)}$$

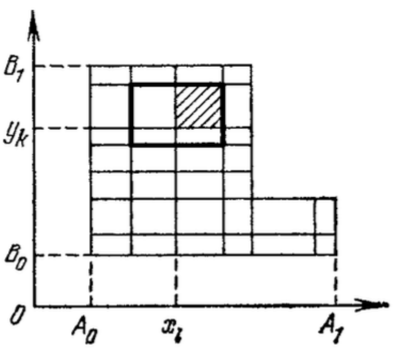

Рис. 3: Область Ω

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & f \in L_2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

$$F(u) = \int\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u^2 - 2uf \right) dxdy$$

$$H_A = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,h} = \left\{ u^h : u^h \in W_2^{1,h}, \quad u^h = \sum_{i,j} a_{ij} Q_{ij}, \quad \|u^h\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,h}} = \|u^h\|_{W_2^{1,h}}, \quad (x_i, y_j) \in \Omega \right\}$$

Теор. Для любой $u \in W_2^1(\Omega) \cap C^{(2)}(\Omega)$ существует $u^h \in W_2^{1,h}$ такая, что справедливы оценки (**??**).

12.2 Построение проекционно сеточной схемы для ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) = f(x), & f \in L_2(a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 & 0 < p_0 \le p(x) \le p_1, \ 0 \le q(x) \le q_1 \end{cases}$$

$$Au = f$$

$$H = L_2(a,b) \ \Rightarrow \ A \text{ положительно определен } \Rightarrow \ \exists A^{-1} \ \Rightarrow \ \exists! \text{ решение } (\textbf{??})$$

Пусть $u(x)$ — решение (**??**)

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \le c\,\|f\|_H$$

$$H_A = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \qquad c_0\|u\|_{W_2^1} \le \|u\|_A \le c_1\|u\|_{W_2^1}$$

$$F(u) = [u,u] - 2(u,f) \to \min \quad \text{на } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \begin{cases} ... \end{cases}$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^{1,h} = \left\{ v = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x) \right\} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1 = H_A$$

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(x) \text{ — минимизирует } F(v) \text{ на } \overset{\circ}{W}{}_2^{1,h}$$

Находим a_j из $\dfrac{\partial F}{\partial a}(u_h) = 0, \quad i = \overline{1, N-1}$

Приходим к системе уравнений

$$\widehat{A}a = f, \qquad \hat{A} = (A_{ij})$$

$$A_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] = \int\limits_{\Omega_{ij}} \left(p\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} + q\varphi_i\varphi_j \right) dx$$

$$a = (a_1, ..., a_{N-1})^T, \qquad f = (f_1, ..., f_{N-1})^T$$

$$f_i = \int\limits_{\Omega_i} f\varphi_i dx$$

Существует единственное решение $(a_1, ..., a_{N-1})^T$, которое однозначно определяет решение $u^h \leftarrow \underset{v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,h}}{\operatorname{argmin}} F(v)$

Отметим, что так как $A_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$, то матрица $\widehat{A}$ оказывается трехдиагональной.

Упр. Найти A_{ij} в случае кусочно-постоянных p и q на сетке

$$p_{i-\frac{1}{2}} = p(x), \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \qquad i = \overline{1, N}$$

$$q_{i-\frac{1}{2}} = ...$$

Лекция 13

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right] + q(x)u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$$\|u - u_h\|_A \leq \|u - v_n\|, \quad \text{где } v_h = \sum_{i=1}^{N-1} b_i\varphi_i; \quad \forall v_h \in H_A^{(N)} = \mathring{W}_2^{1,h}$$

$$c_0\|u\|_{W_2^1} \leq \|u\|_A \leq c_1\|u\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq c\|u - v_h\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq c \inf_{v_h \in H_A^{(N)}} \|u - v_h\|_{W_2^1}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch\|u\|_{W_2^2} \leq ch\|f\|_{H=L_2}$$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \leq ch\|f\|_H$$

$$\|u - u_h\|_{H=L_2} \leq c_2h\|f\|_H \qquad \text{(в силу неравенства Фридрихса)}$$

$$[u, v]_A = (f, v), \quad \forall v \in \mathring{W}_2^1$$

$$[u_h, v_h]_A = (f, v_h), \quad \forall v_h \in \mathring{W}_2^{1,h} = H_A^{(N)}$$

$$[u - u_h, v_h] = 0 \quad \forall v_n \in \mathring{W}_2^{1,h}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу $A\Phi = F,\ F = u - u_h$
по свойствам A $\exists!$ решение Φ:

$$\|\Phi\|_{W_2^2} \leq c\|F\| = C\|u - u_h\|$$

и Φ удовлетворяет: $[\Phi, v] = (F, v)\ \forall v \in \mathring{W}_2^1$
Рассмотрим $v = u - u_h$

$$(F, v) = (u - u_h, u - u_h) = (A\Phi, u - u_h) = [\Phi, u - u_h] - [u - u_h, \Phi_h] = [\Phi - \Phi_h, u - u_h] \leq$$
$$\leq \|\Phi - \Phi_h\|_A \cdot \|u - u_h\|_A \leq ch\|f\|\|\Phi - \Phi_h\|_A \leq \tilde{c}h\|f\| \cdot \|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1}$$

Из результатов аппроксимации можно выбрать Φ_h:

$$\|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1} \leq \tilde{c}h\ \|\Phi\|_{W_2^2}$$

$$\|u - u_h\|^2 \leq ch\|f\| \cdot \|\Phi - \Phi_h\|_{W_2^1} \leq ch^2\|f\| \cdot \|\Phi\|_{W_2^2} \leq ch^2\|f\| \cdot \|u - u_h\|$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\| \leq ch^2\|f\| \cdot \|u - u_h\|$$

Рассмотрим задачу с другими граничными условиями

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x) \\ u(a) = 0, \quad \dfrac{du}{dx}(b) = 0 \end{cases}$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i$$

Упр. Проверитть оценки в W'_2
Упр. Найти $\hat{A}$ при $h_i = h, i = overline1, N, \Phi = 0, P = const$

13.1 Применение ВП к з. Дирихле для ур-я Лапласа

$$\Omega = \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,y) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$$Au = -\Delta u$$

$$D(A) = \{u \in W_2^2(\Omega),\ \ u|_{\partial\omega} = 0\}, \qquad f \in L_2(\Omega)$$

A — симметричный положительно определенный

$$\Rightarrow \forall f \in L_2 \quad \exists!\ n \in \mathring{W}_2^1 \cap W_2^2$$

$$\|u\|_{W_2^2} \le c\,\|f\|$$

$$H_A = \mathring{W}_2^1(\Omega), \quad (u,v)_A = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega$$

$$[u,v]_A = (f,v), \quad \forall v \in H_A$$

TODO: картинка + дополнить

$$\phi_i j = \frac{1}{\sqrt{h_x h_y}} \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{u}{h_y} - j\right), & x_j \le x \le x_{i+1} \\ ... \\ ... \\ \textbf{Упр.} \end{cases}$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_x-1}\sum_{j=1}^{N_y-1} a_{ij}\varphi_{ij}(x,y), \qquad H_A^{(N)} = \mathring{W}_2^{1,h} \subset H_A = \mathring{W}_2^1$$

a_{ij} — решение СЛАУ, $\qquad [u_h, \varphi_{kl}]_A = (f, \varphi_{kl})$

$$\hat{A}a = f, \qquad \hat{A} = (A_{ijkl}), \qquad A_{ijkl} = [\varphi_{ij}, \varphi_{kl}]_A, \qquad \varphi_{ij} \text{ — кусочно линейные}$$

$$a = \left(a_{1,1}, a_{2,1}, ..., a_{N_x-1,1}, ..., a_{1,N_y-1}, ..., a_{N_x-1,N_y-1}\right), \qquad \textbf{Упр. } A_{ijkl} = ?$$

Оценки:

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \le ch\,\|f\|$$

$$\|u - u_h\| \le ch^2\,\|f\|$$

$$A = -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u$$

Упр. показать предыдущее выражение

$$\frac{2a_{ij} - a_{i-1,j} - a_{j+1,i}}{h_x^2} + \frac{2a_{ij} - a_{i,j-1} - a_{i,j+1}}{h_y^2} = f_{ij} = (f, \varphi_{ij})_H, \quad i = \overline{1, N_x - 1},\ j = \overline{1, N_y - 1}$$

TODO:картинка

$$\partial\Omega_h \subset \partial\Omega$$

h — max сторона $\triangle$
θ_0 — $\min \angle$

$$\|u - u_h\|_{W_2^1(\Omega)} \le c\,\frac{h}{sin\theta_0}\|f\|$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i(x,y)$$

13.2 Подходы к решению неоднородной краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega \leftarrow \text{выпуклая, } \partial\Omega \text{ гладкая} \\ u|_{\partial\Omega} = g, & f \in L_2(\Omega),\ g \in W_2^{3/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

$$c_3(\|f\|_L 2 + \|g\|_{W_2^{3/2}}) \le \|u\|_{W_2^2(|omega)} \le c_u()$$

① Сведение к однородным граничным условиям
Пусть $\exists\,\Phi \in D(A):\quad \Phi = g \;\text{ на }\; \partial\Omega$

$$v = u - \Phi$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{f} = f + \Delta\Phi & \in L_2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

$$u_h = v_h + \Phi$$

$$\Phi \in W_2^1(\Omega)$$

② "Снос" граничных условий (с $\partial\Omega$ на $\partial\Omega_h$)

$$u_h = \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} a_i\varphi_i(x,y), \qquad \varphi_1, ..., \varphi_N \text{ — внутренние узлы, } \varphi_{N+1}, ..., \varphi_{\widetilde{N}} \text{ — граничные узлы}$$

$$i = \overline{1,N}: \quad [u_h, \varphi_i]_A = (f, \varphi_i)$$

$$i = \overline{N+1, \widetilde{N}}: \quad a_i\varphi_i(x_i, y_i) = g(x_i, y_i)$$

③ Метод штрафа
Рассмотрим модифицированную 3 краевую задачу

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{в}\Omega \\ u_\varepsilon + \varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial n} = g & \text{на } \partial\Omega \end{cases}, \qquad \varepsilon > 0 \text{ мало}$$

Для нее:

$$[u,v]_A = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{1}{\varepsilon} uv\, dS$$

$$u_{\varepsilon,h} = \sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i(x)$$

a_i находится из

$$[u_h, \varphi_i]_A = (f, \varphi_i) + \int\limits_{\partial\Omega} g\varphi_i\, dS$$

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{ch}{\sin\theta_0}\left(1+\frac{h}{\varepsilon}\right)\left(\|f\|_{L_2}+\frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$$

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,h}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{ch^2}{\sin^2\theta_0}\left(1+\frac{h}{\varepsilon}\right)^2\left(\|f\|_{L_2}+\frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$$

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\,\varepsilon\left(\|f\|_{L_2}+\frac{1}{\varepsilon}\|g\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}\right)$$

Лекция 14

14.1 Вариационная постановка задачи на собственные значения симметрично положительного оператора

$$A\varphi = \lambda\varphi, \qquad D(A) \subset H \tag{14.1}$$

A — симметричный, $\qquad \lambda$ — собственные значения, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{— собств. знач. } A \quad \Rightarrow \quad (\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

$$(A\varphi, \varphi) = \lambda(\varphi, \varphi)$$

$$\lambda = \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

Опр. A ограничен снизу, если $\forall \varphi \in D(A)$:

$$(A\varphi, \varphi) \geq k(\varphi, \varphi), \quad k \in \mathbb{R} \text{ (не обязательно } k > 0) \tag{14.2}$$

Далее A — ограничено снизу $\Rightarrow \dfrac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \geq k \Rightarrow \exists \inf\limits_{\varphi \in D(A)} \dfrac{(A\varphi, \varphi)}{\varphi, \varphi} = d \geq k$

$$F(\varphi) = \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \tag{14.4}$$

Теор. Пусть A — симметричн., огр. снизу, $\quad d = \inf\limits_{\varphi \in D(A)} \dfrac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$

Если $\exists\ \varphi_0 \neq 0 \in D(A)$: $\quad F(\varphi_0) = \dfrac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = d \Rightarrow \exists \min \lambda_1 = d, \quad \varphi_0$ — собств. функция

Док-во.

Пусть $\eta \in D(A), \quad \forall t \in R, \quad \varphi_0 + t\eta \in D(A)$

$$\psi(t) = \frac{\big(A(\varphi_0 + t\eta), \varphi_0 + t\eta\big)}{(\varphi_0 + t\eta, \varphi_0 + t\eta)} = F(\varphi_0 + t\eta) = \frac{t^2(A\eta, \eta) + 2t \operatorname{Re}(A\varphi_0, \eta) + (A\varphi_0, \varphi_0)}{t^2(\eta, \eta) + 2t \operatorname{Re}(\varphi_0, \eta) + (\varphi_0, \varphi_0)}$$

Так как $\varphi_0 = \operatorname{argmin} F(\varphi) \Rightarrow \psi(t)$ в $t = 0$ min $\Rightarrow \psi'(0) = 0$

$$(\varphi_0, \varphi_0) : \quad \operatorname{Re}(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0$$

Аналогично, заменив (η) на $(i\eta)$:

$$\operatorname{Im}(A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0 \Rightarrow (A\varphi_0 - d\varphi_0, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in D(A) \Rightarrow A\varphi_0 - d\varphi_0 = 0 \Rightarrow A\varphi_0 = d\varphi_0$$

Следовательно d — собственное значение, φ_0 — собственная функция

Покажем min

Пусть λ_1 — с. зн. A

$$\lambda_1 = \frac{(A\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} \geq \frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = d \tag{14.5}$$

$\square$

Теор. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ — собств. знач. симм., огр. снизу A

Пусть $\exists\ \varphi_{n+1} \neq 0 \in D(A): \quad \varphi_{n+1} = \underset{\varphi \in D(A)}{\operatorname{argmin}} \dfrac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$ при условии:

$$(\varphi_{n+1}, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, n} \tag{14.6}$$

$$\Rightarrow \lambda_{n+1} = \frac{(A\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})}{(\varphi_{n+1}, \varphi_{n+1})} \text{ — следующее собств. знач.,} \quad \varphi_{i+1} \text{ — собств. функц.}$$

TODO: 7, 8

Док-во.

$$\forall \zeta \in D(A)$$

$$\eta = \zeta - \sum_{k=1}^{n} (\zeta, \varphi_k)\varphi_k$$

η удовлетворяет усл (14.6)
$t\eta$ удовлетворяет усл (14.6)
$\varphi_{n+1} + t\eta \in D(A)$ удовлетворяет усл (14.6)

$$\psi(t) = \frac{\big(A(\varphi_{n+1} + tn), \varphi_{n+1} + t\eta\big)}{(\varphi_{n+1} + t\eta, \varphi_{n+1} + t\eta)}$$

Аналогично $\quad (A\varphi_{n+1} - \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}, \zeta) = 0 \qquad \forall \zeta \in D(A)$ (плотно в H)

$$\Rightarrow A\varphi_{n+1} = \lambda_{n+1}\varphi_{n+1}$$

Пусть $\exists \lambda'$ — собств. знач.: $\quad \lambda' > \lambda_n, \quad \varphi'$ — соответствующая собств. функц.

$$\lambda' = \frac{(A\varphi', \varphi')}{(\varphi', \varphi')} \geq \lambda_{min} = \min_{\varphi \in D_A + (14.6)} \frac{(A\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}$$

λ_{n+1} следующее собственное значение после λ_n

$\square$

Теор.
Пусть оператор опр снизу симм A, содержит тоолько собственные значения $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists min$ с зн A λ_0 и φ_0 - с ф
$\frac{(A\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \lambda_0$

$$A\varphi - \lambda B\varphi = 0$$

A, B - симметричные, Ф - огр. снизу B - положительно опр., $D(A) \subset D(B) \subset H$
Если $\lambda_0 \varphi_0$ - удовлетворяет **??** $\Rightarrow \lambda_0$ с зн, φ_0 с ф

$$\lambda_0 = \frac{A\varphi_0, \varphi_0}{(B\varphi_0, \varphi_0)}$$

Теорема
Пусть $\lambda_k \neq \lambda_m$ - с зн **??**

$$(B\varphi_k, \varphi_m) = 0; k \neq m$$

- (огр. снизу A не требуется)

Теорема

Пусть $d - \varphi \in \underset{inf}{D(A)} \frac{(A\varphi,\varphi)}{B\varphi,\varphi}$

Если $\exists \varphi_0 : \frac{(A\varphi_0,\varphi_0)}{(B(\varphi_0,\varphi_0))} = d$

$\Rightarrow d - min$ - с зн **??**, φ_0 - с ф

Теорема

Пусть $\lambda \leq \lambda \leq ... \leq \lambda$ - с зн **??**

$\varphi_1, ..., \varphi_n$ соответствующие собств функции

Пусть $\exists \varphi_{n+1} = \varphi \in \underset{argmin}{D(A)} \frac{(A\varphi,\varphi)}{B\varphi,\varphi}$

$\lambda_n \Rightarrow \lambda_{n+1} = \frac{(A\varphi_{n+1},\varphi_{n+1})}{(B,\varphi_{n+1},\varphi_{n+1})}$

$$(B\varphi, \varphi_k) = 0, k = \overline{1, n}$$

14.2 Метод Ритца в задаче собственных значений

Пусть A — ограниченный снизу оператор

$$d = \inf_{u \in D(A)} \frac{(Au, u)}{(u, u)} \tag{14.11}$$

По теор. (**??**). Если $\exists u_0 : \inf\limits_{D(A)} \dfrac{A\varphi_0, \varphi_0}{\varphi_0, \varphi_0} = d$, то задачу можно свести к

$$M = \{u : \varphi \in D(A) \cap \|\varphi\| = 1\}$$

$$\inf_{u \in M} (Au, u) \tag{14.12}$$

$$(u, u) = 1 \tag{14.13}$$

TODO

Система $\{\varphi_n\} \subset D(A)$ полна в H

$$\forall u \in D(A) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ и } \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$$

$$\|u - u^*\| < \varepsilon, \qquad u^* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

Положим

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

Выберем коэффициенты a_k так, чтобы u_n удовлетворяло (14.13) и $(Au_n, u_n) \to \min$

$$(Au_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (A\varphi_n, \varphi_m) a_k \overline{a_m}$$

удовлетворяющих уравнению

$$(u_n, u_n) = \sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k \overline{a_m} = 1 \tag{14.14}$$

Метод множителей Лагранжа

$$\Phi = (Au_n, u_n) - \lambda(u_n, u_n)$$

λ — пока неопределенный параметр

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \left[(A\varphi_k, \varphi_m) - \lambda(\varphi_k, \varphi_m)\right] = 0, \qquad m = \overline{1, n} \tag{14.15}$$

Однородное СЛАУ относительно $a_1, ..., a_n$ (одновременно не обр. в ноль) $\Rightarrow$ $\det(...) = 0 \Rightarrow$ уравнение на λ

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda(\varphi_1, \varphi_1) & (A\varphi_2, \varphi_1) - \lambda(\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) - \lambda(\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) - \lambda(\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda(\varphi_2, \varphi_2) & \vdots & (A\varphi_n, \varphi_2) - \lambda(\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) - \lambda(\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) - \lambda(\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda(\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0 \tag{14.16}$$

Если последовательность $\{\varphi_n\}$ ортонормирована, то уравнение упрощается

$$\begin{vmatrix} (A\varphi_1, \varphi_1) - \lambda & (A\varphi_2, \varphi_1) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2) & (A\varphi_2, \varphi_2) - \lambda & \dots & (A\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n) & (A\varphi_2, \varphi_n) & \dots & (A\varphi_n, \varphi_n) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14.17}$$

Получаем уравнение n-й степени по λ. Коэффициент при $(-1)\lambda^n$ равен определителю матрице Грама для $\{\varphi_1, ...\varphi_n\}$. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно n корней

Пусть λ_0 — корень. Пусть $a_k^{(0)}, \quad k = \overline{1, n}$ — нетривиальное решение. Тогда $\forall \eta : \eta a_k^{(0)}$ также будет решением. Под $a_k^{(0)}$ теперь будем понимать $\underline{\eta a_k^{(0)}}$. Подставив $\eta a_k^{(0)}$ в (14.14) найдем η. Подставив в (14.15) $\lambda = \lambda_0$ и $a_k = a_k^{(0)}$, умножим на $\overline{a_m^{(0)}}$ и просуммируем $\sum\limits_m (...)$, получим:

$$\underbrace{\sum_{k,m=1}^{n} a_k^{(0)} \overline{a_m^{(0)}} (A\varphi_k, \varphi_m)}_{=\left(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right)} = \lambda_0 \underbrace{\sum_{k,m=1}^{n} (\varphi_k, \varphi_m) a_k^{(0)} \overline{a_m^{(0)}}}_{=1 \ (14.14)}$$

$$\lambda_0 = \left(Au_n^{(0)}, u_n^{(0)}\right), \qquad u_n^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(0)} \varphi_k$$

$$\min_M (Au, u) = \min \text{ из } \lambda \text{ корней}$$