

1 Исторический экскурс

Лекции с 9:30 два часа.

Вариационная постановка для задачи мат физики. задача - условие на границе + начальное. (Экстремум функционала энергии, поэтому энергетические пространства).

Соболев - прямые методы решения задач. позволяют найти решение с помощью СЛАУ. Наиболее известен метод Рунге.

2 Метод Дирихле

Дана область $\omega \in \mathbb{R}^2$.

$$M = u : u_0(x, y), (x, y) \in \partial\Omega$$
$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \rightarrow \min$$

Интеграл Дирихле $\Rightarrow \bar{u}$ - гармонический в Ω

3 Контрпример Вейерштрасса.

$$M = y; y(x) \in C'[-1; 1], y(-1) = -1, y(1) = 1$$

$$J(y) = \int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, J(y) \geq 0$$

$$y_{\epsilon}(x) = \frac{\arctg(\frac{x}{\epsilon})}{\arctg(\frac{1}{\epsilon})}$$

$$y'_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\arctg(\frac{1}{\epsilon})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\epsilon^2}} \cdot \frac{1}{\epsilon} =$$

$$= \frac{\epsilon}{\arctg(\frac{1}{\epsilon})} \cdot \frac{1}{\epsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_{\epsilon}) = \int_{-1}^1 \frac{x^2 \epsilon^2}{\arctg^2(\frac{1}{\epsilon})} \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{2\epsilon \arctg(\frac{1}{\epsilon})}{\pi} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$J(\bar{y}) = \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Противоречие: $y(-1) = -1, y(1) = 1$

4 Контрпример Адамара

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^2}{2^n} \cos(2^n \Theta), x = \rho \cos \Theta, y = \rho \sin \Theta$$

$$\rho \leq 1$$

Непрерывны и гармоничны. Интеграл Дирихле в круге $\rho \leq r \leq 1$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} r^{2^{2n+1}} \rightarrow_{r \rightarrow 1} \inf$$

5 Метод Ритца

$$J(\omega) = \int_a^b f(x, \omega, \omega', \dots, \omega^{(k)}) dx \rightarrow \inf$$

$\omega \in M$ класс допустимых функций

$\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$ (координатные функции)

Св-ва:

$$1) \forall a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}, \forall_n$$

$$\omega_n = \omega_0 + \sum_{i=1}^n a_i \omega_i \in M$$

$$2) \forall \omega \in M \forall \epsilon > 0$$

Уравнение полноты

$$H(\omega_n) = F(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \inf$$

$$\|\omega - \psi_0 - \sum_{i=1}^n a_i \psi_i\| < \epsilon$$

Рассмотрим:

$$J(\omega_n) = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \rightarrow \inf$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}(\omega_n) = 0, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_n}(\omega_n) = 0 - \text{альтернативная система уравнений}$$

$$\Rightarrow a_1, \dots, a_n - \text{решение}$$

Насколько хорошо приближает метод искомое решение? На примере задачи об упругой пластине.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2 - \text{обл}, S = \partial \Omega$$

изгиб $\omega(x, y)$ удовлетворяет ур-ю Сори Жульен

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(xy)}{D}; (x, y) \in \Omega$$

\mathcal{D} – жесткость пластины при упругом изгибе

$q(x, y)$, - Интенсивность давления

$$\omega(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \mathcal{D}} = 0 \leftarrow \text{Производная по нормали к } S$$

$$J(\omega) = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta \omega)^2 - f(\omega) \right) d\Omega \rightarrow \inf$$

$$f = \frac{q(x, y)}{\mathcal{D}} \in C'(\overline{\Omega})$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Рассмотрим без доказательства ограниченности снизу.

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$(x, y)(\xi, \eta)$ – точки из Ω r – расстояние между (x, y) и (ξ, η)

$$J(\omega) = J_0 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega)^2 dx dy$$

$$j(\omega) \geq J_0 \Rightarrow \exists \inf J(\omega)$$

Введем $\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y)$ - координатные ф-ции

$$1) \psi_n(x, y), \frac{\partial^{k+l} \psi_n}{\partial x^k \partial y^l} \in C(\overline{\Omega}), k \leq \epsilon, l \leq \epsilon$$

2) $\psi_n(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

3) \forall ф-ии $\zeta(x, y)$:

а) удовлетворяет пункту 1

б) $\zeta(x, y) \equiv 0(x, y) \in \Omega_\rho$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$:

$$|\zeta(x, y) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \psi_i(x_i, y_i)| < \epsilon$$

$$\left| \frac{\partial^{k+l} \zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial^{k+l} \psi_i(x, y)}{\partial x^k \partial y^l} \right| < \epsilon$$

Условие полноты $k \leq \epsilon, l \leq \epsilon \Rightarrow$

приближенное решение :

$$\omega_n = \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_n \psi_n \rightarrow J(\omega)$$

$$J_n = \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (\Delta \omega_n)^2 - f(\omega_n) \right) dx dy$$

$$\alpha_i \text{ выбираем : } J(\omega_n) \rightarrow J(\omega)$$

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} a_k = B_i, i = \overline{1, n}$$

$$A_{ik} = \iint_{\Omega} \Delta \psi_i \Delta \psi_k dx dy \Rightarrow$$

$\exists!$ решение a_1, \dots, a_n в $\omega_n = \dots$ приближение решение

$$B_i = \iint_{\Omega} f \psi_i dx dy$$

\rightarrow Сущ ед решения a_1, \dots, a_n в $\omega_n = \dots$ (приближенное решение)

Рассмотрим $\forall b_1, \dots, b_n$

$$\zeta_n = b_1 \psi_n + \dots + b_n \xi_n$$

$$5b_i \text{ и } \sum_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n n A_{ik} a_k b_i = \sum_{i=1}^n b_i B_i$$

$$\sum_{i=x}^n \sum_{k=1}^n n \iint_{\Omega} b_i \Delta \psi_i \Delta \psi_k a_k dx dy - \sum_{i=1}^n \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \left[\iint_{\omega} b_i \Delta \psi_i \sum_{k=1}^n a_k \Delta \xi_k dx dy - \iint_{\Omega} f b_i \psi_i dx dy \right] = 0$$

...

$$\int_O mega(\Delta \omega_n \sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) - f(\sum_{i=1}^n n b_i \psi_i) dx dy = 0$$

$$\iint_O mega(\Delta \Omega_n \zeta_n - f \zeta) dx dy = 0$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta \omega_u)^2 dx dy \text{ не возрастает у } \geq inf$$

$$\forall \epsilon > 0 \text{ по критерию Коши } \Rightarrow N(\epsilon) \forall_n > N(\epsilon)$$

6 Продолжение примера Адамара

$\Psi_1(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$, — координатные функции

$$\omega_n = \alpha\psi_1 + \dots + \alpha_n\psi_n$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega}$$

$$\forall \epsilon > 0 \text{ суш. } N(\epsilon) \forall n \geq N(\epsilon) \forall m$$

$$0 \leq J_n^{(0)} < J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2} \epsilon$$

$$\frac{\omega_{m+n}-\omega_n}{\sqrt{\epsilon}}=\phi(x,y)$$

$$\iint_{\Omega}(\delta\phi)^2dxdy<1$$

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int(\phi\frac{\partial\ln(r)}{\partial n}\ln r\frac{\partial\phi}{\partial N})ds+\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\Delta\phi\ln rd\zeta d\nu=$$

$$|\int_x f(x)\overline{g}(x)dx|\leq (\int_x |f(x)|^2dx)(\int_x |g(x)|^2dx)$$

$$|\phi(x,y)|\leq \frac{1}{2\pi}(\iint_{\Omega}(\Delta\phi)^2d\zeta d\nu)^{\frac{1}{2}}(\iint_{\Omega}\ln^2rd\zeta d\eta)^{\frac{1}{2}}\;\forall \epsilon>0$$

$$|\phi(x,y)|\leq c_1$$

$$|\omega_{m+n}-\omega_n|\leq c_1\sqrt{\epsilon}$$

$$\omega_n=\frac{\epsilon}{\Omega}\in C(\Omega)$$

7 Метод Бубнова-Галеркина

$$W\alpha_1\phi_1+\dots+\alpha_n\phi_n$$

выделить

$$L\omega-\lambda\omega=0$$

L, M - дифференцируемые операторы

$$\iint_{\Omega}\omega L\omega dxdy$$

$$\sum_{i=1}^n(A_{ik}-\lambda B_{ik})a_k=0,k=\overline{1,n}$$

матрица

$$A_{11}-\lambda B_{11}...A_{1n}-\lambda B_1n$$

$$A_{n1}-\lambda B_{n1}...A_{1n}-\lambda B_m1$$

$$N(,y=L\omega_n)-\lambda M\omega_n$$

$$N(x,y)\perp\phi_i,i=\overline{1,n}$$

1.

$$f(x)=^{\mathrm{n.т=}}b->f(x)dx=0$$

2.

$$\int_{f(x)}dx=0,f(x)\geq 0f(x)=^{\mathrm{пв}}0$$

3. ...

$$\phi_{n(x)}^2-\text{ сумм с квадр по }\mathbb{I}->\exists\phi(x)$$

- сумм с пв.

$$lin_nk->\inf\int_{|\phi_k(x)-\phi(x)|^2}dx=0$$

$$V_{\text{лин про-во}}$$

$$(\phi,\psi)-\text{скал произведение:}$$

1.

$$(\phi,\psi)=(\psi,\phi)$$

2.

$$(a_1\phi_1+a_2\phi_2,\psi)=a_1(\phi_1,\psi)+a_2(\phi_2,\psi)$$

3.

$$(\phi,\phi)\geq 0$$

4.

$$\phi,\phi=0<->\phi=\Theta$$

$$||\phi||=\sqrt{(\phi,\phi)}$$

Неравенство Коши-Буняковского

Н-во треугольника

$$L_2(\Omega)(\phi,\psi)=\int_{\Omega}\phi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$L_2(\Omega,\vartheta):(\phi,\psi)=\int_{\Omega}\phi(x)\overline{\psi(x)}\vartheta(x)dX$$

$$_x\psi_kdx$$

Критерий не успел

$$\phi_1,...,\phi_n\mathbb{L}\mathbb{Z}\text{ в }H$$

Опр М -плотно в Н, если

$$\forall p\in H$$

$$n\forall \epsilon>0\exists \phi_n\in M:$$

$$||\phi_n-\phi<\epsilon$$

$$C_0^{\mathrm{inf}}(\Omega)\text{плотно в}L_2(\Omega)$$

$$C^{(k)}\text{плотно в}L_2(\Omega)$$

$$\forall:fo\in H$$

$$\exists \phi_n^1\in C_0^{(\mathrm{inf})}(\Omega)$$

$$||\phi_n^1-\phi||<\frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists \psi_n^2\in C_o^{n-1}(\epsilon)$$

$$||\phi_n^2-\phi_n^2||<\frac{\epsilon}{2}$$

$$i\phi-\phi_n^2<\epsilon$$

$$\{\phi_n\}\mathrm{ОНС}$$

$$(\phi_n,\phi_m)=\delta_{nm}$$

$$||\phi||^2=||\phi_1||^2+||\phi_2||^2+...+||\phi_n||^2+$$

$$0\{\phi_n\}\text{Полная в }H$$

$$\text{Если }(\phi_i,\phi_k)=0\forall k\in N$$

$$->\phi=\Theta$$

$$\forall \phi\in H a_k=\{\phi,\phi_k\}-\text{коэффициенты Фурье}$$

$$H-\text{ гильбертово}\{\phi\}-\text{ПОНС}$$

$$->||\phi||^2\sum_{k=1}^{\inf}|\phi_1,\phi_k|^2$$

- Неравенство Персеваля

$$\exists a_k:\sum_{k=1}^{\inf}|a_k|^2$$

сх-ся

$$\phi_n\text{ ПОНС в Н}$$

$$\sum_{k=1}^{\inf} a_k \phi_k$$

$$u \|\phi\| = \sum_{k=1}^{\inf} |a_k|^2$$

H сепарабельно если $\exists M$ — счетное мн-во плотные в H .
 H сепарабельно $\Leftrightarrow \exists$ ПОНС (счетное или конечное) в H .

1.

$$\{u : \int_{\Omega} u dx = 0\}$$

- пример подпространства в $\alpha_2(\Omega)$.

H_1 - подпространство в H

$$\forall \phi \in H \exists! \phi_1 \in H_1 : \|\phi - \phi_1\| = \min_{\psi \in H_1} \|\phi - \psi\| \text{ проекция } \phi \text{ на } H_1$$

$$\phi - \phi_1 + \phi_2$$

$$H_2 = \Phi_1 \perp H_1 - \text{ ортогональное дополнение}$$

$$l - \text{ лин нез фун-л} : M \in H \rightarrow R/C$$

$$\|l\phi\| \leq \|l\| \cdot \|\phi\|_A$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \phi} l\psi = l\phi$$

$$\|l\psi - l\phi\| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta :$$

$$\|\psi - \phi\|$$

...

8 Теорема рисса

$\forall l$ — Непрерывен ли функционал в $H \exists! \psi \in H :$

$$l\phi = (\phi, \psi)$$

Существует M — плотно в $H \mathcal{F} : M \times M \rightarrow C(R)$

$$\mathcal{F}(\phi, \psi) : \mathcal{F}(\phi, \psi) = (\psi, \phi)$$

$\mathcal{F}(\phi, \phi)$ - Квадратная форма

$H_1 : \mathcal{D}_A \in \mathcal{H}$ Область определения некоторого оператора A

\mathcal{D}_A – Область значений оператора A

R_A – обл значений A

Начнем с единственности

9 Энергетическое пр-во

$$Au = f; u, f \in |\Omega \in \mathbb{R}^m$$

$$-\Delta y = f; f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

$$u|_S = 0$$

$$let_A = u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}); u|_S = 0$$

Формула остроградского

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega =$$

$$\int_S \bar{u}x + \psi \cos(\bar{u} \cdot y) + \omega \cos(\bar{u}x) dS$$

$$\int_{\Omega} difW d\Omega = \int_S W_h dS$$

$$\phi = uv, \psi = \omega = 0$$

$$\int_{\Omega_n} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uv \cos(\bar{u}x) dS$$

$$\int_{\Omega} \frac{u \partial V}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv \cos(\bar{n}x_i) dS$$

$$Lu = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i k(P) \frac{\partial W(P)}{\partial x_k}) + C(P)u(P)$$

$$\int_{\Omega} v L u d\Omega = - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} (A_i k(P) \frac{\partial W(P)}{\partial x_k}) d\Omega + \int_{\Omega} C u v d\Omega$$

$$\text{в } (1)r \rightarrow v, v \rightarrow A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$\int_{\Omega} vLu = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^M A_{ik} \frac{\partial u}{\partial u_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S V \sum_{i,k=0}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n}x_i) dS$$

$$\int_{\Omega} vLu = \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^M A_{ik} \frac{\partial u}{\partial u_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} + C_i d\Omega - \int_S V \sum_{i,k=0}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\bar{n}x_i) dS$$

$$(2) - (2)_{u \rightleftharpoons x}$$

из второй формулы Грина вычитаем ее же, но поменяв местами u и v .

$$\int_{\Omega} (vLn - uLv) - \Omega =$$

$$(3) : Tr = \sum_{i,k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\bar{u}x_i)$$

$$\int_{\Omega} (vLu - uLv) d\Omega = \int_S (uNv - vNu) dS$$

- третья формула Грина

Частный случай формулы Грина, это оператор Лапласа

$$Lu = -\Delta u; A_{jj} = 1; A_{ik} = 0, i \neq k; c = 0$$

$$5^1) = \int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$(5^2) - \int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial u^2}{\partial x_i} d\Omega = \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$(5^3) \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_S (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) dS$$

10 Положительные и положительно определенные операторы

H, A симметрична в H

Теорема $\forall u \in \mathcal{D} \in H (Au, u) \geq 0$;

Пример 1 $\xi = \frac{d}{dx^2}$ в $L_2(0, 1)$; $\mathcal{D}_B = u \in C_0^2(0, 1) : u(0) = u(1) = 0$

$$(Bu, v) = -v \frac{d^2 u}{dx^2} dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - v \frac{du}{dx} \Big|_0^1 = - \int_0^1 \frac{d^2 v}{dx^2} = (u, Bv)$$

$$(Bn, u) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right) dx = 0$$

$$(Bu, u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0$$

Пр 2

$$C = -\frac{d^2}{dx^2} u, \mathcal{D}_C = \{u \in C^2(0, 1)\}$$

...

Пр 3

$$Au = -\Delta u, \mathcal{D}_A = \{u \in C^2(\Omega) : u|_S = 0\}$$

$$(-\Delta u, u) = - \int_{\Omega} u \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega - \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \Leftrightarrow const$$

Рассмотрим мембрану

$z =$ в пл (x, y) ; $u(x, y)$ — изгиб мембраны

$-\Delta u = \frac{q}{T}$ (Поперечная нагрузка на натяжение мембраны)

$$u|_S = 0$$

- Мембрана закреплена на краях

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy$$

Теорема симметричный A полный, определенный, если $\exists \gamma > 0 : (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$ (6)

Пример

$$B : u(0) = 0, u(x) = \int_0^x (u'(t))^2 dt = x \int_0^x (u'(t)) dt$$

Если проинтегрировать от 0 до 1 $\leq x \int_0^1 (u'(t))^2 dt$

$$\int_0^1 u^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$(Bu, u) \geq \gamma^2 \|j\|^2; \gamma = \sqrt{2}$$

положительно определен

Пример 4

$$Lu = -\frac{d}{dx}(x^3 \frac{du}{dx}), L_2(0, 1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1], u(1) = 0\}$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int_0^1 \frac{d}{dx} x^3 (u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}) dx$$

$$(Luv) = \int_0^1 x^3 (\frac{du}{dx})^2 dx \geq 0$$

- положительный

$$\frac{(Au, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2; u\delta(x) = \{\dots\}$$

$$u\delta \in \mathcal{D}_L$$

$$u\delta \in \mathcal{D}_L; \frac{(Lu\delta, u\delta)}{\|u\delta\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 (\frac{du\delta}{dx}) dx}{\int_0^\delta x^3 (\delta - x)^4 dx}$$

- неверная формула

L не является положительно определенным

A - положительно определенный в H. На $D_A[u, v]_A = (Au, v)_H$ Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1.

$$[d, v] = [v, u]$$

$$(Au, v) = (u, Av) = \overline{(Av, u)} = \overline{[v, u]}$$

2. линейность $[a_1 u + a_2 u, v] = a_1 [u, v] + a_2 [u, v]$

3.

$$[u, u] \geq \gamma \|i\|^2 \geq 0$$

4.

$$[u, u] = \Rightarrow u = 0$$

D_A предгильбертово, дополним его по $|\ast| \Rightarrow$ гильбертово пр-во H_A

11 10.02 Энергетические пр-ва (2)

H_A – энергетическое пр-во

(0)

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\gamma} \|u\|_A$$

$$u \in H_A \Rightarrow u \in \mathcal{D}_A$$

$$\Rightarrow \exists \{u_n\} \in \mathcal{D}_A \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_A$$

Теорема

$\forall \exists u \in H_A \Rightarrow$ злем из H различным $u_1, u_2 \in H_A$ отв. злем из H

Доказательство

...

2)

$$u_{1,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_n; u_{2,n} \rightarrow_{\|\cdot\|_A} u_2$$

$$u_1 \text{ и } u_2 \rightarrow u \text{ из } H; u = u_1 - u_2$$

...

$$r \in H, A \in \{ \in u_n \mathcal{D}_A \mid \|u_n - n\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \}$$

$$\|u_n\|_A \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \|u\|_A$$

11.1 Пример

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u; D_B = u \in C^2(0, 1], u(0) = u(1) = 0$$

$$H = {}_2(0, 1);$$

$$u \in H_B; \exists \{u_n\} \in D_B \mid \|u_n - u\| \rightarrow_{B \rightarrow \infty} 0$$

...

A - положительно, но не положительно определено.

Теорема

$$u \in H_A : u \in H \Leftrightarrow \exists \{u_n\} \in D_A$$

$$\|u - u_n\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|u_k - u_n\|_H \rightarrow_{u, k \rightarrow +\infty} 0$$

11.2 Пример 3

12 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f$$

$$A : \mathcal{D}(A) \in H \rightarrow H;$$

Теорема

A положителен в H уравнении 12 \exists не более одного решения.

Доказательство

$$u_1, u_2 - \text{Решения 12...}$$

Теорема о функциональной энергии

A - положительный в H; u - решение 12 \Leftrightarrow доставляет минимум функционала

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H$$

Доказательство

...

Пример 4

$$\Delta^2 \omega = \frac{\partial^4}{\partial x^4} \omega + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial^2 \omega \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$$

$$\mathcal{D}_A = \{\omega \in C^4(\overline{\Omega}); \omega|_S = 0; \frac{\partial \omega}{\partial n}|_S = 0\}$$

$$A - \omega = \frac{a(x, y)}{\mathcal{D}}$$

13 Обобщение решения задачи о min для ф.э.

$$A - \text{Поллжительно определено в H } Au = f, f \in H$$

фикс $f \in H \forall u \in H_A(u, f)_H : \Phi\text{-ла} : H_A \rightarrow \mathcal{R}$

$$|(u, f)_H| \leq \|f\|_H \|u\|_H \leq \|f\|_H \frac{1}{\gamma} \|u\|_A; \gamma \|f\|_H - const$$

$$\text{Опр } (f, u) \Rightarrow \text{ по Т Рисса } \exists u_0 \in H_A(f, u)_H = [u, u_0]_A$$

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0] - [u_0, u]_A$$

$$+ - [u_0, u_0]_A$$

$$F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$$

$$\operatorname{argmin}_{u \in H_A} F(u) = u_0 \text{ Обобщенное решение } Au = f$$

Если H сепарабельно, энергетическое про-во тоже сепарабельно, $\exists \{\omega_n\}$
ПОНС

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \omega_n ??$$

$$u = \omega_n [u_0 \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H \omega_n$$