1 Уравнение конвекции с диффузией

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}); t > 0; x \in [-L, L]$$

Уравнение конвекции с диффузией.

$$Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}}$$

- число Пекле

$$\frac{L}{U} = t_{\text{конв}}$$

$$\frac{L^2}{\mathcal{D}} = t_{\text{дифузионная}}$$

$$\frac{t_{\text{диф}}}{t_{\text{конв}}} = \frac{LU}{\mathcal{D}}$$

$$Re << 1$$

почти дифф процесс

$$Re >> 1$$

почти конв процесс

Сначала будем рассматривать стационарное уравнение.

$$\frac{d}{dx}(uQ) - \frac{d}{dx}(\mathcal{D}\frac{dQ}{dx}) = 0$$

На отрезке вводится разностная сетка

$$\Omega_n(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

.

Потоковые точки - точки с полуцелые точки

$$xi + \frac{1}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- потоковые узлы

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$$

$$h_i = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

Вводим сеточные функции.

$$Q_i = (x_{i+\frac{1}{2}}; x_{i-\frac{1}{2}})$$

константа на отрезке

$$[x_{i+\frac{1}{2}}\text{до}x_{i-\frac{1}{2}}]$$

D - константа в полуцелых точках (от x_i до x_{i+1} константа)

Считаем скорость и тепло в потоковых точках, где диффузия постоянна

$$Q_x = \frac{Q_{i+1}i = Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\overline{x}} = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\widehat{x}} = \frac{Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}$$

Между потоковыми точками интегрируем получаем формулу.

$$\int_{x_i+\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}[uQ - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}]dx =$$

$$= [uQ - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}]|_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} =$$

$$W^{tot}_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W^{tot}_{i-\frac{1}{2}} = U_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} = W^D_{i+\frac{1}{2}} - W^D_{i-\frac{1}{2}}$$

$$W^D_{i+\frac{1}{2}} = -D_{i+\frac{1}{2}} \frac{dQ}{dx}|_{i+\frac{1}{2}}$$

$$U_i i + 1/2 Q_{i+1/2} - D_{i+1/2} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} -$$

$$-[U_i i - 1/2 Q_{i-1/2} - D_{i-1/2} Q_{\overline{x}_{i-1/2}}] = 0$$

$$\frac{U_{i+1/2} Q_{i+1/2} - U_{i-1/2} Q_{i-1/2}}{\overline{h_i}} -$$

$$-\frac{D_{i+1/2} Q_x - D_{i-1/2} Q_{\overline{x}}}{\overline{h_i}} = 0$$

Интерполируем Q в полуцелые точки.

$$Q_{i+1/2} = \Theta_{i+1/2} Q_i + (1 - Q_{i+1/2}) \Theta_{i+1}$$

1.

$$\Theta = 1/2$$

$$W = ...$$

Получится схема с центральными разностями

$$u Q_x - D Q_{xwithlintx} = 0$$

2.

$$\Theta_{i+1/2} = 1/2(1 + \frac{|u_{i+1/2}|}{U_{i+1/2}})$$

$$W_{i+1/2} = u^{+}_{i+1/2}Q_i - \overline{U}_{i+1/2}Q_{i+1}$$

$$U'_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} + |U_{i+1/2}|)$$

$$Uwithlin_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} - |U_{i+1/2}|)$$

$$(u^{+}_{i+1/2}Q_i + \overline{u}^{+}_{i+1/2}Q_i + 1) - DQ_{\overline{x}\widehat{x}} = 0$$

2 Модельная задача

$$\frac{d(UQ)}{dx} - D\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

При увеличении числа Пекле график прижимается к координатам снизу.

3 Решение разностной задачи (центральные разности).

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_i = a + bq^i$$

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

Подставляем

$$\frac{U}{2h}b(q^{i+1}-q^{i-1})-Db\frac{q^{i+1}-2q^{i}+q^{i-1}}{h^2}=0$$

$$\frac{u}{2}(q^2-1)-\frac{D}{h}(q^2-2q+1)=0$$

4 Лекция 2

Точное решение

$$Q(x)=\frac{1-e^{\frac{Ux}{D}}}{1-e^{\frac{U}{D}}}=$$

$$Q(x)=\frac{1-e^{Pe\cdot i}}{1-e^{Pe_n N}}=$$

$$Q(x)=\frac{1-\overline{q}^{i}}{1-\overline{q}^{N}}$$

$$\overline{q}=e^{Pe_N}=1+\frac{Pe_n+Pe_n^2}{2}$$

Сеточная функция (Центральные разности)

$$q=\frac{1+\frac{Pe}{2}}{1-\frac{Pe}{2}}=$$

$$(1+\frac{Pe_N}{2}(1+\frac{1}{2}Pe_n+\frac{1}{4}Pe_n^2+...))=$$

$$1+Pe_n+\frac{Pe_n^2}{2}$$

Но число пекре должно быть меньше 2

Направленные разности

$$q + Pe_n$$

Для схемы с центральными разностями

$$U\frac{Q_{i+1}-Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1}-2Q_i-Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i+1}(\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) + Q_i(\frac{2\lceil}{h^2}) + Q_{i-1}(-\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i+1}(1-\frac{1}{2}\mathcal{D}) + 2Q_i - Q_{i-1}(1-\frac{1}{2}Pe_n) = 0$$

Для схеммы с направленными разностями

$$U\frac{Q_i-Q_{i-1}}{h} - \mathcal{D}\frac{Q_{i+1}-2Q_i+Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i-1}(-\frac{u}{h} - \frac{\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(\frac{u}{h} - \frac{2\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(-\frac{\mathcal{D}}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i-1}(1+Pe_n)...$$

Попробуем предсказать поведеение вышеописанных схем

$$Q_{i-1} = Q_i - h\frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 q}{\partial x} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + ...$$

$$Q_{i+1} = Q_i + h\frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 q}{\partial x} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + ...$$

Первое слагаемое:

$$\frac{U}{h}(\frac{\partial Q}{\partial x})_i - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}...$$

$$U\frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \frac{1}{2}Uh\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|_i/... = 0$$

$$U\frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \mathcal{D}(1+\frac{1}{2}Pe_n)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}|_i$$

ДЛя того чтобы коэф диффузии был похож на то что было в исходном уравнении $\frac{Pe_n}{2}$ « 1

5 Схема А.А.Самарского

$$U^+Q_{\overline{x}} + U^-Q_x - \frac{\mathcal{D}}{1+\frac{Pe_n}{2}}Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$\overline{D} = \frac{\mathcal{D}}{1+\frac{Pe_n}{2}} = \mathcal{D}(\infty - \frac{|\mathcal{P}]_\backslash|/\in}{\infty + \frac{|\mathcal{P}]_\backslash|}{\in}})$$

$$u^+Q_{\overline{x}} - u^-Q_x = uQ_{x0} - \frac{|U|_h}{2}Q_{\overline{x}x}$$

$$UQ_{x0} - \mathcal{D}[\frac{1}{1+\frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}]Q_{\overline{x}x} = 0$$

- Коэфф диффузии

$$\mathcal{D}[\frac{1}{1+\frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}] = \mathcal{D}^*$$

$$Pe_n^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \text{ - эффективное число Пикле}$$

$$f = Pe^*(Pe)$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}\frac{1+\frac{|Pe_n|}{2}+\frac{|Pe_n|^2}{4}}{1+\frac{|Pe_n|}{2}}$$

$$Pe^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \frac{1 + \frac{|Pe_n}{2}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}$$

$$Pe_n \to 0; Pe_n^* \to Pe_n$$

$$Pe_n \to \inf; Pe_n^* \to 2$$

$$|Pe * n| = \frac{Pe_n^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{|Pe_n|})}{Pe_n^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{2|Pe_n|} + \frac{1}{|Pe_n|^2})}$$

6 Экспоненциальная схема

$$u\frac{dQ}{dx} - \mathcal{D}\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$Q(x) = Q_i + (Q_{i+1} - Q_i)\frac{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}\frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}})}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$W^{tot} = u_{i+\frac{1}{2}}Q_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}|_{i+\frac{1}{2}} =$$

$$= u_{i+\frac{1}{2}}Q_i + u_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+\frac{1}{2}}Q_i)\frac{exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2} - 1)}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1)} -$$

$$-u_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+1} - Q_i)\frac{exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2})}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = uQ_{\overline{x}} + uh\frac{e^{P\frac{Pe_N}{2}} - 1}{e^{Pe_N} - 1}Q_{\overline{x}x} - uh\frac{e^{P\frac{Pe_n}{2}}}{e^{Pe_n} - 1}Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$uQ_{\overline{x}} = uQ_{x0} - \mathcal{D}\frac{Pe}{2}Q_{\overline{x}x}$$

$$uQ_{x0} - \mathcal{D}^2 Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}(\frac{Pe_N}{2}\frac{e^{Pe}+1}{e^{Pe}-1}) = \mathcal{D}\frac{Pe_n}{2}coth\frac{Pe}{2}$$

$$Pe_n = \frac{Uh}{\mathcal{D}} = 2th\frac{Pn_n}{2}$$

7 Схема Сполдинга

$$Pe^*_{h,i+\frac{1}{2}} = Pe_{h,i+\frac{1}{2}}, Pe_h \leq 2$$
$$= 2, Pe_h > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \Theta_{i+\frac{1}{2}}Q_i + (1 - \Theta_{i+\frac{1}{2}}Q_{i+1})$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_n, i+\frac{1}{2}}[Pe_{n,\frac{1}{2}} - 1 + max(-Pe_{n,i+\frac{1}{2}}, 1 - \frac{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}{2}, 0)]$$

1.
$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| \leq 2$$
$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
буквально схема с центральными разностями.

2.
$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| > 2$$

(a)

$$Pe_n > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}[Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 + 0] = 1 - \frac{1}{Pe}$$

(b)

$$Pe_n < -2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}[Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 - Pe_n] = -\frac{1}{Pe_n}$$

Или оба варианта в одной формуле

$$\frac{1}{2}(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) - \frac{1}{Pe_n}$$

Пподставляем Θ

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2}(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) = \frac{1}{Pe_n}]Q_i + [\frac{1}{2}(1 - \frac{|Pe_n|}{Pe_n} + \frac{1}{Pe_n})]Q_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} = uQ_{i+\frac{1}{2}} = U^+_{i+\frac{1}{2}}Q_i + U^-_{i+\frac{1}{2}}Q_i + 1 + DQ_x$$

$$\frac{d}{dx}uQ - D\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} = U^+Q_{\overline{x}} + \overline{u}Q_x + DQ_{\overline{x}x}$$

Таких схем множество, но суть такова, что до определенного момента рассматривается направленные разности, а потом переходят на константу

8 Схема Патанкара

Надо разобрать к экзамену! Есть в презентации.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i\frac{1}{2}}}[Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + max(0, Pe_n) + max(0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5)]$$

Теперь нужно определить в полуцелых точках.

9 Разностная схема на расширенных шаблонах

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i+1} + Q_i) - \eta(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})$$

1. $$u\frac{d}{dx} = uQ_{x^0} - \frac{Uh}{2}(Q_x\overline{x} - Q_{xx})\frac{1}{2}h^2Q_{\overline{xx}}$$

2. $$\eta = \frac{1}{2} \text{ - схема с направленными разностями}$$

3. $$\eta = \frac{1}{4} - \text{ схема Фрома}$$

4. $$\eta = \frac{1}{6} - \text{ схема с искуственной дисперсией}$$

5. $$\eta = \frac{1}{8} - \text{ схема QUICK}$$

10 Нестационарные задачи

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$u = const, Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}} >> 1$$

Сетка вводится аналогично стационарной задаче.

$$t_k = \tau_k$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial Q}{\partial t} dxdt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(uQ) dxdt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}) dxdt$$

По слагаемым

1. Выносим, так как не зависит от t, по x константа на отрезке интегрирования
$$h_i \cdot (Q_i^{k=1} - Q_i^k)$$

2. $$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} dt)$$
Воспользуемся квадратурной формулой
$$= \tau(W^{\sigma}_{i+\frac{1}{2}} + W^{\sigma}_{i-\frac{1}{2}})$$
$$f^{(\sigma)} = \sigma f^{t_k+1} + (1-\sigma) f^{t_k} = \sigma \hat{f} + (1-\sigma) f$$
Возникает ровно та же проблема определения W в полуцелых точках

3.
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}|_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}|_{i-\frac{1}{2}}]dt =$$
$$\tau[(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x})^{(\sigma)}_{i+\frac{1}{2}} - (\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x})^{(\sigma)}_{i-\frac{1}{2}}]$$

11 Решение модельной задачи

Отрезок от -L до L. Начальные данные: 1 при отрицательных значений, 0 при положительных.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$S = t, y = x - ut$$
$$Q(x,t) = Q(y(x,t), S(t))$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S}\frac{Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{dS} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} - u\frac{\partial Q}{i\partial y} + u\frac{\partial Q}{\partial y}\mathcal{D}\frac{\partial^Q}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \Rightarrow$$

интеграл Пуассона

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{y}{2sqrt\mathcal{DS}}} e^{-z^2}dz] =$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x-ut}{2\sqrt{\mathcal{D}t}}} e^{-z^2}dz]$$

Подставить это дома и убедиться, что оно является решением уравнения.

11.1 Направленные разности.

рисунок фронта

Самое большое размытие при использовании чисто неявной схемы ($\sigma = 1$)

Меньше всего размывается явная схема ($\sigma = 0$).

То есть неявная схема ухудшает проблемы направленных разностей

11.2 Центральные разности

**рисунок фронта

Чисто неявная схема снова размывает сильнее.

($\sigma = 0.5$)

12 Диффузия и дисперсия

Дисперсия - скорость убывания волны зависит от амплитуды.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

$$Q(t, x) = e^{-P(m)t}e^{im(x-q(m)t)}$$

m - волновое число, P(m) - скорость убывания амплитуды, q(m) - скорость распространения волны, $i^2 = -1$.

$$Q = e^{-Pt}e^{im(x-qt)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

Подставим Q и посмотрим каими должны быть P и m, для того чтобы оно удовлетворяло уравнениям.

$$-P - imq + Uim = -\mathcal{D}m^2 - im^3p + \gamma m^4$$

$$P = \mathcal{D}m^2 - \gamma m^4$$

- скорость убывания

$$q = u + M^2\beta$$

- скорость волны

На амплитуду влияют четные производные (но они чередуются уменьшает-увеличивает-уменьшает-...)

скорость движения от третьей производной (нечетныепроизводные) проверить с каким знаком.

13 Дифференциальное представление разностных схем

$$L(Q) = 0 \text{ Дифференциальное уравнение}$$

$$L_h^\tau(Q, \tau, h) = 0 \text{ - Разностная схема}$$

$$L_H^\tau(Q) = L(Q) + \epsilon(Q, \tau, h) = 0 \text{ - Погрешность аппроксимации}$$

Не будем убирать погрешность и будем его рассматривать как бесконечный ряд.

$$L_h^\tau(Q) = L(Q) + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial Q}{\partial x^i} = 0$$

Процедура по созданию подобного представления (в общих чертах):

13.1 Дифференциально приближение для схемы с направленными разностями.

$$Q_t + uQ^{(\sigma)}_{\overline{x}} - \mathcal{D}Q^{(\sigma)}_{\overline{x}}x = 0$$

$$Q^{(\sigma)} = Q^{0.5} + (\sigma - 0.5)\tau Q_t = \frac{\hat{Q} + Q}{2} + (\sigma - 0.5)(\hat{Q}Q)$$

$$Q_t + uQ^{(0.5)}_{\overline{x}} - \mathcal{D}Q^{(0.5)}_{\overline{x}x} + u(\sigma - 0.5)\tau Q_{t\overline{x}} - \mathcal{D}(\sigma - 0.5)Q_{t\overline{x}x}$$

Разложим в точке $(t_k + \frac{\tau}{2}, x_i Q(t_k + \frac{\tau}{2})Q^(0.5))$

$$Q_t = \frac{\partial\overline{Q}}{\partial t} + \frac{t^2}{2}\frac{\partial^3\overline{Q}}{\partial t^3} + \dots$$

$$Q^{(0.5)} = \overline{Q} + \frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dots$$

и тд.

Как избавиться от высоких производных и смешанных производных по t и x. Метод дифференциального представления.

14 Устойчивость разностных схем. Метод Неймана (Метод гармоник.)

$$Q(t,x) = e^{-p(m)t}e^{Im(x-qt)} \text{ - Бегущая волна } = a(t)e^{Imx}$$

$$a(t) = e^{-t[p(m)+Iqm]} \text{ Комплексная амплитуда}$$

$$p(m) = \mathcal{D}m^2, q = u \text{ Для нашего конкретного уравнения}$$

$$Q(t+\tau,x)=e^{-t+\tau}[\mathcal{D}m^2+(Imq)]e^{Imx}=GQ(t,x)$$

G - Множитель перехода

$$G=e^{-\tau(\mathcal{D}m^2=Imu)}$$

14.1 Явная схема с направленными разностями

$$Q_i^{k+1}=Q_i^k-c(Q_i^k-Q_{i-1}^k)+S(Q_{i+1}^k-2Q_i^k+Q_{i-1}^k)$$

$c=\dfrac{u\tau}{h}$ - число Куррента , $S=\dfrac{\mathcal{D}\tau}{h^2}$ - Тепловое число Куррента

$$Q_i^k=Q(t_k,x_i)=e^{-pt_k}e^{Im[x_i-qt_k]}=$$
$$=e^{\tau k[p-Imq]}e^{Imhi}=$$
$$=a_ke^{I\Theta i}$$

$$\tau k=t_k, ih=x_i, \Theta=mh$$

Надо выяснить при каких P и Q при подстановке бегущей волны данное уравнение является решением нашего уравнения.

$$a_{k+1}e^{I\Theta i}=a_ke^{I\Theta i}-ca_k(e^{I\Theta(i-1)})+Sa_k(e^{I\Theta(i-1)}-2e^{I\Theta i})+e^{I\Theta(i+1)}$$

$$e^{emi}; a_{k+1}=a_kG$$

$$G=1-c(1-e^{-I\Theta})+S(e^{I\Theta}-2+e^{-I\Theta})$$

$$c(1-e^{-I\Theta}) = 1 - cos\Theta + isin\Theta$$

$$(e^{I\Theta} - 2 + e^{-I\Theta}) = 2cos\Theta - 2$$

Напоминание:

$$e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$$
$$e^{-i\phi} = cos\phi - isin\phi$$

———————————————————

$14.1 = 1-(c+2S)(1-cos\Theta)+Icsin\Theta$ Множитель перехода со слоя на слой

Схема устойчива тогда, когда $|G| > 1$

$$\Theta = mh$$

$$\lambda_{min} = 2h = \frac{2\pi}{m}$$ - минимальная длинна волны

$$\Rightarrow mh = \pi$$ Короткие волны

$$mh \to 0$$ - Длинные волны

$$1 - (c+2S)(1-cos\Theta) - Icsin\Theta$$

$$|G|^2 = 1 - 4(c+2S)sim^2\frac{\Theta}{2} + (c+2S)^2 \cdot 4sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-(c+2S) + (c+2S)^2sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$-(c+2S)(sin^2\frac{\Theta}{2}+cos^2\frac{\Theta}{2})+(c+2S)^2sin^2\frac{\Theta}{2}+c^2cos^2\frac{\Theta}{2}<0$$

$$(c+2S)[(c+2S)-1]sin^2\frac{\Theta}{2}+[c^2-(c+2S)]cos^2\frac{\Theta}{2}<0;\forall\Theta\in[0,\pi]$$

$c+2S-1<0; c^2-(c+2S)<0$ - Условия устойчивости

Метод Неймана дает необходимое условие устойчивости, но вообще говоря не достаточное.

15 Изменение амплитуды волны.

$$|G|^2=1+4(c+2S)sin^2\frac{\Theta}{2}=4(c+2S)^2sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2}$$

Для волны $\Theta=mh\to 0$

$$|G|^2=1-4(c+2S)\frac{(mh)^2}{4}+4(c+2S)^2\frac{{(mh)^4}^4}{2}+4c^2\frac{(mh)^2}{4}=1+(mh)^2[c^2-(c+2S)]=$$

$$=1-(mh)^2[c+2S-c^2]$$

$$|G|=1-(mh)^2(S+\frac{1}{2}c(1-c))$$

$$|G|=1-(m^2h^2)(\frac{\mathcal{D}\tau}{h^2}+\frac{1}{2}c(1-c))=$$

$$=1-m^2\tau\mathcal{D}-\frac{1}{2}m^2h^2c(1-c)$$

$1 - m^2\tau\mathcal{D}$ То как убывает волна в исх уравнении

$\dfrac{1}{2}m^2h^2c(1-c)$ Добавка разностной схемы

$$|G| = e^{-\tau\mathcal{D}m^2} = 1 - \tau\mathcal{D}m^2$$

15.1 Коротко про устойчивость схемы с центральными разностями

$$Q_t + uQ_{x^0\mathcal{D}Q_{\overline{x}x}}$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - \frac{1}{2}c(Q_{i_k}^k - Q_{i-1}^k) + S(Q_{i-1}^k - 2Q_i^k + Q_{i+1}^k)$$

$$G = 1 - \frac{c}{2}(e^{I\Theta} - e^{-I\Theta}) + S(e^{-I\Theta} - 2 + e^{I\Theta}) =$$

$$= 1 - 4Ssin^2\frac{\Theta}{2} - 2cIsin\frac{\Theta}{2}cos\frac{\Theta}{2}$$

$$|G|^2 = 1 - 8Ssin^2\frac{\Theta}{2} + 16S^2sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-2S + 4S^2sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$sin^2\frac{\Theta}{2}[4S^2 - 2S] + cos^2\frac{\Theta}{2}[c^2 - 2S] < 0$$

$2S^2 - S < 0; c^2 - 2S < 0$ - Условие устойчивости

Рассмотрим для длинных волн

$$|G|^2 = 1 - 8Ssin^2\frac{\Theta}{2} + 16S^2sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2sin^2\frac{\Theta}{2}cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$\approx = 1 - 8S\frac{(mh)^2}{4} + 4c^2\frac{(mh)^2}{4} =$$
$$= 1 - (mh)^2(2S - c^2)$$

$$|G| \approx 1 - (mh)^2 S + (mh)^2\frac{c^2}{2} =$$
$$1 - \frac{m^2h^2\mathcal{D}\tau}{h^2} + m^2h^2\frac{c^2}{2}$$

Длинные волны убывают медленнее чем в дифференциальном случае. (В прошом примере было наоборот)

дз решить задачи из таблицы (хотя бы некоторые), позже возможно следует ей прислать.

16 Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho[\frac{\partial V}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v] = -\nabla p + \chi\triangle V = g\rho$$
$$divV = 0; (\nabla \cdot v) = 0$$
$$\rho = \rho(p, t) = \rho_0(1 + \beta T)$$

V - вектор скорости p - Давление χ - коэффициент вязкости

$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}x} = \text{ Полная производная}$$
$$= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathcal{V}_x\frac{\partial\rho}{\partial x} + \mathcal{V}_y\frac{\partial\rho}{\partial y} + \mathcal{V}_z\frac{\partial\rho}{\partial z}$$
$$\frac{\mathcal{D}\rho}{\mathcal{D}x} + \rho divV = 0$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathcal{V}_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mathcal{V}_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \mathcal{V}_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho div V = 0$$

Жидкость несжимаема тоже самое, что полная производная равна 0, это одновременно означает что дивергенция равна 0.

$$\frac{\partial \mathcal{V}_x}{\partial t} + \mathcal{V}_x \frac{\partial \mathcal{V}_x}{\partial x} + \mathcal{V}_y \frac{\partial \mathcal{V}_y}{\partial y} + \mathcal{V}_z \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\mathcal{V}_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{V}_x^2) - \mathcal{V}\frac{\partial \mathcal{V}_x}{}...$$