1 Исторический экскурс

Лекции с 9:30 два часа.

Вариационная постановка для задача мат физики. задача - условие на границе + начальное. (Экстремум функционала энергии, поэтому энергетические пространства).

Соболев - прямые методы решения задач. позволяют найти решение с помощью СЛАУ. Наиболее известен метод Рица.

2 Метод Дирихле

Дана область $\omega \in \mathbb{R}^2$.

$$M = u : u_0(x,y), (x,y) \in \partial\Omega$$

$$\iint_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2] dxdy \to min$$

Интеграл Дирихле $\Rightarrow \overline{u}$ - гармонический в Ω

3 Контрпример Вейерштрасса.

$$M = y; y(x) \in c'[-1;1], y(-1) = -1, y(1) = 1$$

$$J(y) = int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, J(y) \geq 0$$

$$y_\epsilon(x) = \frac{arctg(\frac{x}{\epsilon})}{arctg(\frac{1}{\epsilon})}$$

$$y'_\epsilon(x) = \frac{1}{arctg(\frac{1}{\epsilon})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\epsilon^2}} \cdot \frac{1}{\epsilon} =$$

$$= \frac{\epsilon}{arctg(\frac{1}{\epsilon})} \cdot \frac{1}{\epsilon^2 + x^2}$$

$$J(y_\epsilon) = \int_{-1}^1 \frac{x^2\epsilon^2}{arctg^2(\frac{1}{\epsilon})} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx = frac2\epsilon arctg(\frac{1}{\epsilon}) = \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$$

$$J(\overline{y}) = \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Противоречие: $y(-1) = -1, y(1) = 1$

4 Контрпример Адамара

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\inf} \frac{\rho^2}{2^n} cos(2^n\Theta), x = \rho cos\Theta, y = \rho sin\Theta$$

$$\rho \leq 1$$

Непрерывны и гармоничны. Интеграл Дирихле в круге $\rho \leq r \leq 1$

$$\pi sum_{n=1}^{\inf} r^{2^{2n+1}} \to_{r\to 1} \inf$$

5 Метод Ритца

$$J(\omega) = int_a^b f(x, \omega, \omega', ..., \omega^{(k)})dx \to inf$$

$$\omega \in M \text{ класс допустимых функций}$$

$$\psi_0, \psi_1, ...\psi_n, ...(\text{ координатные функции })$$

Св-ва:

$$1)\forall a_1...a_n \in \mathbb{R}, \forall_n$$

$$\omega_n = \omega_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i \in M$$

$$2)\forall \omega \in M\text{и}\forall epsilon > 0$$

Уравнение полноты

$$H(\omega n) = F(a_1, ..., a_n) \to inf$$

$$||\omega - \psi_0 - \sum_{i=1} n a_i \psi_i|| < \epsilon$$

Рассмотрим:

$$J(\omega_n) = F(\alpha_1, ..., \alpha_n) \to inf$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}(\omega_n) = 0, ... \frac{\partial J}{\partial a_n}(\omega_n) = 0 - \text{ альтернативная система уранений}$$

$$\Rightarrow a_1, ..., a_n - \text{ решение}$$

Насколько хорошо приближает метод искомое решение? На примере задачи об упругой поластине.

$$\Omega_{\subset\mathbb{R}^2} - \text{ обл }, S = \partial\Omega$$

$$\text{изгиб } \omega(x,y) \text{ удовлетворяет ур-ю Сори Жульен}$$

$$\Delta^2\omega = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(xy)}{\mathcal{D}}; (x,y) \in \Omega$$

$$\mathcal{D} - \text{ жесткость пластины при упругом изгибе}$$

$$q(x,y), \text{- Интенсивность давления}$$

$$\omega(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial \omega(x,y)}{\partial \mathcal{D}} = 0 \leftarrow \text{ Производная по нормали к S}$$

$$J(\omega) = \iint_{Omega} (\frac{1}{2}(\Delta\omega)^2 - f(\omega)d\Omega \to inf)$$

$$f = \frac{q(x,y)}{\mathcal{D}} \in C'(\overline{\Omega})$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Рассмотрим без доказательства ограниченности снизу.

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 lnr f(\xi,\eta) d\xi\eta$$

$$(x,y)(\xi,\eta) - \text{ точки из } \Omega r - \text{ расстояние между } (x,y) \text{ и } (\xi,\eta)$$

$$J(\omega) = J_0 + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\Delta\omega_2)^2 dxdy$$

$$j(\omega) \geq J_0 \Rightarrow \exists inf J(\omega)$$

Введем $\psi_1(x,y), ..., \psi_n(x,y)$ - координатные ф-ции

$$1)\psi_n(x,y), \frac{\partial^{k+l}\psi_n}{\partial x^k \partial x^l} \in C(\overline{\Omega}), k \leq \epsilon, l \leq \epsilon$$

$$2)\psi_n(x,y) \text{ удовлетворяет краевым условиям}$$

$$3)\forall \text{ ф-ии } \zeta(x,y):$$

$$\text{а) удовлетворяет пункту 1}$$

$$\text{б) } \zeta(x,y) \equiv 0 (x,y) \in \Omega\rho$$

$$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1, ...\alpha_m \in \mathbb{R}:$$

$$|\zeta(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \psi_i(x_i, y_i)| < \epsilon$$

$$|\frac{\partial^{k+1}\zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^{k+l}\psi_i(x,y)}{\partial x^k \partial y^l}| < \epsilon$$

Условие полноты $k \leq \epsilon, l \leq \epsilon \Rightarrow$
приближенное решение :

$$\omega_n = \alpha_1\psi_1 + ... + \alpha_n\psi_n \to J(\omega)$$

$$J_n = \iint_\Omega (\frac{1}{2}(\Delta\omega_n)^2 - f(\omega_n))dxdy$$

$$\alpha_i \text{ выбираем : } J(\omega_n) \to J(\omega)$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}a_k = B_i, i = \overline{1,n}$$

$$A_{ik} = \iint_\Omega \Delta\psi_i \Delta\psi_k dxdy \Rightarrow$$

$$\exists! \text{ решение } a_1, ..., a_n \text{ в } \omega_n = ... \text{ приближение решение}$$

$$B_i = \iint_\Omega f\psi_i dxdy$$

$$\to \text{ Сущ ед решения } a_1, ..., a_n \text{в} \omega_n = ...(\text{ приближенное решение })$$

$$\text{Рассмотрим } \forall b_1, ...b_n$$

$$\zeta_n = b_1\psi_n + ... + b_n\xi_n$$

$$5b_i \text{ и } \sum_{i=1}^{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1} nA_{ik}a_k b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i B_i$$

$$\sum_{i=x}^{n}\sum_{k=1} n \iint_\Omega b_i\Delta\psi_i\Delta\psi_k a_k dxdy - \sum_{i=1}^{n}\iint_\Omega f b_i\psi_i dxdy = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\iint_\omega b_i\Delta\psi_i \sum_{k=1}^{n} a_k\Delta\xi_k dxdy - \iint_{\Omega f b_i\psi_i dxdy}] = 0$$

...

$$\int_O mega(\Delta\omega_n \sum_{i=1} nb_i\psi_i) - f(\sum_{i=1} nb_i\psi_i)dxdy = 0$$

$$\iint_O mega(\Delta\Omega_n\zeta_n - f\zeta)dxdy = 0$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\iint_\Omega (\Delta\omega_u)^2 dxdy \text{ не возрастает у } \geq inf$$

$$\forall\epsilon > 0 \text{ по критерию Коши } \Rightarrow N(\epsilon)\forall_n > N(\epsilon)$$

6 Продолжение примера Адамара

$$\Psi_1(x,y),...,\Psi_n(x,y), - \text{ координатные функции}$$

$$\omega_n = \alpha\psi_1 + ... + \alpha_n\psi_n$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\int_\Omega$$

$$\forall\epsilon > 0\text{сущ}N(\epsilon)\forall n >= N(\epsilon)\forall m$$

$$0 <= J_n^{(0)} < J_{n+m}^{(0)} <= \frac{1}{2}\epsilon$$

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\epsilon}} = \phi(x,y)$$

$$\iint_\Omega (\delta\phi)^2 dxdy < 1$$

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int(\phi\frac{\partial ln(r)}{\partial n}lnr\frac{\partial\phi}{\partial N})ds + \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \Delta\phi lnr d\zeta d\nu =$$

$$|\int_x f(x)\overline{g}(x)dx| <= (\int_x |f(x)|^2 dx)(\int_x |g(x)^2 dx)$$

$$|\phi(x,y)| <= \frac{1}{2\pi}(\iint_\Omega (\Delta\phi)^2 d\zeta d\nu)^2 (\iint_\Omega ln^2 r d\zeta d\eta)^2 \forall\epsilon > 0$$

$$|\phi(x,y)| <= c_1$$

$$|\omega_{m+n} - \omega n| <= c_1\sqrt{\epsilon}$$

$$\omega_n = \frac{\epsilon}{\Omega} \in C(\Omega)$$

7 Метод Бубнова-Галеркина

$$W\alpha_1\phi_1 + ... + \alpha_n\phi_n$$

выделить

$$L\omega - \lambda\omega = 0$$

$$L, M\text{- дифференцируемые операторы}$$

$$\iint_\Omega \omega L\omega dxdy$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{ik} - \lambda B_{i_k})a_k = 0, k = \overline{1,n}$$

матрица

$$A_{11} - \lambda B_{11} ... A_{1n} - \lambda B_1 n$$

$$A_{n1} - \lambda B_{n1} ... A_{1n} - \lambda B_m 1$$

$$N(, y = L\omega_n) - \lambda M\omega_n$$

$$N(x, y) \perp \phi_i, i = \overline{1, n}$$

1. $$f(x) =^{\text{и.т}=b} -> f(x)dx = 0$$

2. $$\int_{f(x)} dx = 0, f(x) >= 0 f(x) =^{\text{пв}} 0$$

3. ...

$$\phi^2_{n(x)} - \text{ сумм с квадр по Л} -> \exists \phi(x)$$

- сумм с пв.

$$lin_n k -> \inf \int_{|\phi_k(x) - \phi(x)|^2} dx = 0$$

$$V \text{лин про-во}$$

$$(\phi, \psi) - \text{скал произведение:}$$

1. $$(\phi, \psi) = (\psi, \phi)$$

2. $$(a_1\phi_1 + a_2\phi_2, \psi) = a_1(\phi_1, \psi) + a_2(\phi_2, \psi)$$

3. $$(\phi, \phi) >= 0$$

4. $$\phi, \phi = 0 <-> \phi = \Theta$$

$$||\phi|| = \sqrt{(\phi, \phi)}$$

Неравенство Коши-Буняковского

Н-во треугольника

$$L_2(\Omega)(\phi, \psi) = \int_\Omega \phi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$L_2(\Omega, \vartheta) : (\phi, \psi) = \int_\Omega \phi(x)\overline{\psi(x)}\vartheta(x)dX$$

$$_x\psi_k dx$$

Критерий не успел

$$\phi_1, ..., \phi_n \text{ЛЗ в } H$$

Опр M -плотно в H, если

$$\forall p \in H$$

$$n\forall\epsilon > 0 \exists\phi_n \in M:$$

$$||\phi_n - \phi < \epsilon$$

$$C_0^{\inf}(\Omega)\text{плотно в} L_2(\Omega)$$

$$C^{(k)}\text{плотно в} L_2(\Omega)$$

$$\forall : fo \in H$$

$$\exists\phi_n^1 \in C_0^{(\inf)}(\Omega)$$

$$||\phi_n^1 - \phi|| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists{\psi_n}^2 \in C_o^{n-1}(\epsilon)$$

$$||\phi_n^2 - \phi_n^2|| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$i\phi - \phi_n^2 < \epsilon$$

$$\{\phi_n\}\text{ОНС}$$

$$(\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm}$$

$$||\phi||^2 = ||\phi_1||^2 + ||\phi_2||^2 + ... + ||\phi_n||^2 +$$

$$0\{\phi_n\}\text{Полная в } H$$

$$\text{Если } (\phi_i, \phi_k) = 0 \forall k \in N$$

$$- > \phi = \Theta$$

$$\forall\phi \in H a_k = \{\phi, \phi_k\} - \text{ коэффициенты Фурье}$$

$$H - \text{ гильбертово} \{\phi\} - \text{ПОНС}$$

$$- > ||\phi||^2 \sum_{k=1}^{\inf} |\phi_1, \phi_k|^2$$

- Неравенство Персеваля

$$\exists a_k : \sum_{k=1}^{\inf} |a_k|^2$$

сх-ся

$$\phi_n \text{ ПОНС в H}$$

$$\sum_{k=1}^{\inf} a_k \phi_k$$

$$u||\phi|| = \sum_{k=1}^{\inf} |a_k|^2$$

H сепарабельно если $\exists M-$ счетное мн-во плотные в H.
H сепарабельно <-> $\exists$ ПОНС (счетное или конечное) в H.

1.
$$\{u : \int_{\Omega} udx = 0\}$$

- пример подпространства в $\alpha_2(\Omega)$.

H_1 - подпространство в H

$$\forall \phi \in H \exists ! \phi_1 \in H_1 : ||\phi - \phi_1|| = min_{\psi \in H_1} ||\phi - \psi|| \text{проекция} \phi \text{на } H_1$$

$$\phi - \phi_1 + \phi_2$$

$$H_2 = \Phi_1 \perp H_1 - \text{ ортогональное дополнение}$$

$$l - \text{лин нез фун-л} : M \in H -> R/C$$

$$|l_\phi <= ||l|| \cdot ||\phi||_A$$

$$lim_{\psi -> \phi} = l\phi$$

$$|l\psi - l\phi < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta :$$

$$||\psi = \phi||$$

...

8 Теорема рисса

$$\forall l - \text{ Непрерывен ли функционал в H } \exists ! \psi \in H :$$

$$l_\phi = (\phi, \psi)$$

$$\text{Существует} M - \text{плотно в } H \mathcal{F} : MxM -> C(R)$$

$$\mathcal{F}(\phi, \psi) : \mathcal{F}(\phi, \psi = (\psi, \phi))$$

$$\mathcal{F}(\phi, \phi)\text{- Квадратная форма}$$

$$H_1 : \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{H}\text{Область определения некоторого оператора A}$$

$$\mathcal{D}_A - \text{Область значений оператора A}$$

$$R_A - \text{обл значений A}$$

Начнем с единственности

9 Энергетическое пр-во

$$Au = f; u, f \in |\Omega \in \mathbb{R}^m$$
$$-\Delta y = f; f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$
$$u|_S = 0$$

$$let_A = u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}); u|_S = 0$$

Формула остроградского

$$\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}) d\Omega =$$
$$\int_S \overline{u}x + \psi cos(\overline{u} \cdot y) + \omega xos(\overline{u}x) dS$$

$$\int_\Omega difW d\Omega = \int_S W_h dS$$
$$\phi = uv, \psi = \omega = 0$$

$$\int_{\Omega_n} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_S uvcos(\overline{ux} dS)$$
$$\int_\Omega \frac{u \partial V}{\partial x_i} d\Omega = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uvcos(\overline{n} x_i) dS$$
$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i k(P) \frac{\partial W(P)}{\partial x_k}) + C(P)u(P)$$
$$\int_\Omega vLud\Omega = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i k(P) \frac{\partial W(P)}{\partial x_k}) d\Omega + \int_\Omega Cuvd\Omega$$
$$\text{в } (1) r \to v, v \to A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$\int_\Omega vLu = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{M} A_i k \frac{\partial u}{\partial u_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S V \sum_{i,k=0}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} cos(\overline{n}x_i)dS$$

$$\int_\Omega vLu = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{M} A_i k \frac{\partial u}{\partial u_k}\frac{\partial v}{\partial x_k} + C_i d\Omega - \int_S V \sum_{i,k=0}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k} cos(\overline{n}x_i)dS$$

$$(2) - (2)_{u \rightleftarrows x}$$

из второй формулы Грина вычитаем ее же, но поменяв местами u и v.

$$\int_\Omega (vLn - uLv) - \Omega =$$

$$(3): Tr = \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i} cos(\overline{u}x_i)$$

$$\int_\Omega (vLu - uLv)d\Omega = \int_S (uNv - vNu)dS$$

- третья формула Грина

Частный случай формулы грина, это оператор Лапласа

$$Lu = -\Delta u; A_{jj} = 1; A_{ik} = 0, i! = k; c = 0$$

$$5^1) = \int_\Omega v\Delta u d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial n}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega - \int_S v\frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$(5^2) - \int_\Omega u\Delta u d\Omega = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}^2 d\Omega = \int_S u\frac{\partial u}{\partial n} dS$$

$$(5^3) \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)d\Omega = \int_S (v\frac{\partial u}{\partial u} - u\frac{\partial v}{\partial u})dS$$

10 Положительные и положительно определенные операторы

H, A симметрична в H

Теорема $\forall u \in \mathcal{D} \in H(Au, u) >= 0;$

Пример 1 $\xi = \frac{d}{dx^2}$ в $L_2(0,1); \mathcal{D}_B = u \in c_0^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0$

$$(Bu,v) = -v\frac{d^2u}{dx^2}dx = \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - v\frac{du}{dx}|_0^1 = -\int_0^1 \frac{d^v}{dx^2} = (u, Bv)$$

$$(Bn,u) = \int_0^1 (\frac{du}{dx})dx = 0$$

$$(Bu,u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0$$

Пр 2

$$C = -\frac{d^2}{dx^2}u, \mathcal{D}_c = \{u \in C^2(0,1)\}$$

...

Пр 3

$$Au = -\Delta u, \mathcal{D}_A = \{u \in C^2(\Omega) : u|_s = 0\}$$

$$(-\Delta u, u) = -\int_\Omega u\Delta u d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^m (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 d\Omega - \int_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS >= 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} == 0 \rightleftarrows == const$$

Рассмотрим мембрану

$$z = \text{ в пл } (x,y); u(x,y) - \text{ изгиб мембраны}$$

$$-\Delta u = \frac{q}{T} \text{ (Поперечная нагрузка на натяжение мембраны)}$$

$$u|_S = 0$$

- Мембрана закреплена на краях

$$(Au,u) = (-\Delta u, u) = \iint_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 dxdy$$

Теорема симметричный A полный, определенный, если $\exists \gamma > 0 : (Au,u) >= \gamma^2||u||^2 (6)$

Пример

$$B : u(0) = 0u(x) = \int_0^x (u'(t))^2 dt = x\int_0^x (u'(t))dt$$

$$\text{Если проинтегрировать от 0 до 1 } \leq x\int_0^1 (u'(t)^2 dt)$$

$$\int_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$(Bu,u) \geq \gamma^2 ||j||^2; \gamma = \sqrt{2}$$

положительно определен

Пример 4

$$Lu = -\frac{d}{dx}(x^3 \frac{du}{dx}), L_2(0,1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0,1], u(1) = 0\}$$

$$(Lu,v) - (u,Lv) = \int_0^1 \frac{d}{dx} x^3 (u\frac{dv}{dx} - V\frac{du}{dx})]dx$$

$$(Luv) = \int_0^1 x^3 (\frac{du}{dx})^2 dx \geq 0$$

- положительный

$$\frac{(Au,u)}{||u||^2} \geq \gamma^2; u\delta(x) = \{...\}$$

$$u\delta \in \mathcal{D}_L$$

$$u\delta \in \mathcal{D}_L; \frac{(Lu\delta, u\delta)}{||u\delta||^2} = \frac{\int_0^1 x^3 (\frac{du\delta}{dx})dx}{\int_0^\delta x^3 (\delta - x)^4 dx}$$

- неверная формула

L не является положительно определенным

A - положительно определенный в H. На $D_A [u,v]_A = (Au,v)_H$ МОжно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1. $$[d,v] = [v,u]$$
$$(Au,v) = (u,Av) = \overline{(Av,u)} = \overline{[v,u]}$$

2. линейность $[a_1 u + a_2 u, v] = a_1 [u,v] + a_2 [u,v]$

3. $$[u,u] \geq \gamma ||i||^2 \geq 0$$

4. $$[u,u] = \rightleftarrows u = 0$$

D_A предгильбертово, дополним его по $|*| \Rightarrow$ гильбертово пр-во H_A

11 10.02 Энергетические пр-ва (2)

$$H_A - \text{ энергетическое пр-во}$$

(0)

$$||u||_H \leq \frac{1}{\gamma}||u||_A$$

$$u \in H_A -> u \in \mathcal{D}_A$$

$$-> \exists \{u_n\} \in \mathcal{D}_A lim_{n->\infty}||u_n - u||_A$$

Теорема

$\forall \exists u \in H_A ->$ злем из H различным $u_1 u_2 \in H_A$ отв разн. злем из H

Доказательство
...
2)

$$u_{1,n} \rightarrow_{||.||_A} u_n; u_{2,n} - \rightarrow_{||.||_A} u_2$$

$$u_1 \text{ и } u_2 \rightarrow u \text{ из H }; u = u_1 - u_2$$

...

$$r \in HA \in \{\in u_n \mathcal{D}_A ||u_n - n||_A \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0\}$$

$$||u_n||_A \rightarrow_{n\rightarrow\infty} ||u||_A$$

11.1 Пример

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u; D_B = u \in C^2(0,1], u(0) = u(1) = 0$$

$$H =:_2 (0,1);$$

$$u \in H_B; \exists \{u_n\} \in D_B ||u_h - u|| \rightarrow_{B\rightarrow\infty} \rightarrow 0$$

...
A - положительно, но не положительно определено.
Теорема

$$u \in H_A : u \in H \rightleftarrows \exists \{u_n\} \in D_A$$

$$||u = u_n|| \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$$

$$||u_k - u_n||_H \rightarrow_{u,k\rightarrow+\infty} 0$$

11.2 Пример 3

12 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f$$

$$A : \mathcal{D}(A) \in H \to H;$$

Теорема

А положителен в Н уравнении 12 $\exists$ не более одного решения.

Доказательство

$$u_1, u_2 - \text{ Решения 12...}$$

Теорема о функциональной энергии

А - положительный в Н; u - решение 12 $\rightleftarrows$ доставляет минимум функционала

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H$$

Доказательство

...

Пример 4

$$\Delta^2\omega = \frac{\partial^4}{\partial x^4}\omega + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial^2\omega\partial^2 y} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}$$

$$\mathcal{D}_A = \{\omega \in c^4(\overline{\Omega}); \omega|_S = 0; \frac{\partial\omega}{\partial n}|_S = 0\}$$

$$A - \omega = \frac{a(x, y)}{\mathcal{D}}$$

13 Обобщение решения задачи о min для ф.э.

$$A - \text{ Поллжительно определено в Н } Au = f12f \in H$$

фикс $f \in H \forall u \in H_A (u, f)_H :$ ф-ла $: H_A \to \mathcal{R}$

$$|(u, f)_H| \leq ||f||_H ||u||_H \leq ||f||_H \frac{1}{\gamma} ||u||_A ; \gamma ||f||_H - const$$

$$\text{Опр } (f, u) \Rightarrow \text{ по Т Рисса } \exists u_0 \in H_A (f, u)_H = [u, u_0]_A$$

$$F(u) = [u, u]_A - [u, u_0] - [u_0, u]_A$$

$$+ - [u_0, u_0]_A$$

$$F(u) = ||u - u_0||_A^2 - ||u_0||_A^2$$

$$argmin_{u \in H_A} F(u) = u_0 \text{ Обощенное решение } Au = f$$

Если H сепарабельно, энергетическое про-во тоже сепарабельно, $\exists \{\omega_n\}$ ПОНС

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n] \omega_n \mathbf{??}$$

$$u = \omega_n [u_0 \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \omega_n)_H \omega_n$$