Разностные схемы для уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Лекция 7

О.С.Мажорова

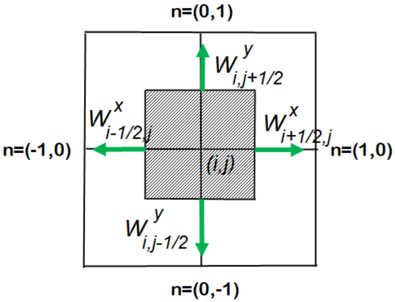
Сентябрь 2020 г.

Аппроксимация уравнения переноса вихря 1.

Проинтегрируем уравнение переноса вихря по ячейке S_{ij}, $(ij)\in I\times J$.

$$\underbrace{\int\limits_{S_{ij}} \frac{\partial\omega}{\partial t} dxdy}_{\mathcal{I}_1} + \underbrace{\int\limits_{S_{ij}} \mathcal{K}(\mathbf{V},\omega) dxdy}_{\mathcal{I}_2} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \underbrace{\int\limits_{S_{ij}} \Delta\omega dxdy}_{\mathcal{I}_3}$$

где $\mathcal{K}(\mathbf{V},\omega)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(W^x)+\frac{\partial}{\partial y}(W^y)\right]$, $\mathbf{W}=(W^x, W^y)$; $W^x=u\omega$, $W^y=v\omega$



$$\mathcal{I}_1 = \int\limits_{S_{ij}} \frac{\partial\omega}{\partial t} dxdy \approx \frac{\partial\omega_{ij}}{\partial t} dS_{ij}$$

$$\mathbf{W} = (W^x_{i+1/2j}, W^y_{i,j+1/2})$$

Компоненты вектора $\mathbf{W}$

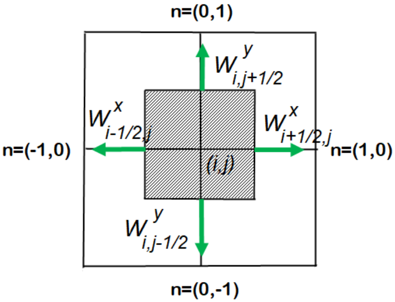
задаются на гранях ячейки S_{ij}

Аппроксимация конвективных членов 1.

$$\mathcal{I}_2 = \int\limits_{S_{ij}} \left(\frac{\partial}{\partial x} W^x + \frac{\partial}{\partial y} W^y \right) dxdy = \int\limits_{\partial S_{ij}} (W, n) dl \approx$$

$$\left(W^x_{i+1/2j} - W^x_{i-1/2j} \right) \hbar^y_j + \left(W^y_{ij+1/2} - W^y_{ij-1/2} \right) \hbar^x_i ;$$

$W^x = u\omega, W^y = v\omega$ – не определены в нужных точках



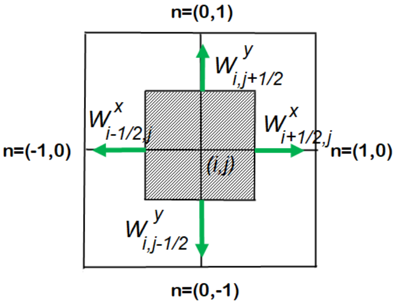
$$u_{ij} = \frac{h^y_{j+\frac{1}{2}} u_{ij+1/2} + h^y_{j-1/2} u_{ij-1/2}}{2\hbar^y_j}$$

$$v_{ij} = \frac{h^x_{i+1/2} v_{i+1/2j} + h^x_{i-1/2} v_{i-1/2j}}{2\hbar^x i}$$

$$u_{ij} = \psi_{\overset{\circ}{y}} = \frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij-1}}{2\hbar^y_j};$$

$$v_{ij} = -\psi_{\overset{\circ}{x}} = -\frac{\psi_{i+1j} - \psi_{i-1j}}{2\hbar^x_i}$$

Аппроксимация конвективных членов 2.



Потоки в серединах сторон ячейки S_{ij} :

$$W^x_{i+1/2j}=0.5(u_{i+1j}\omega_{i+1j}+u_{ij}\omega_{ij})$$

$$=0.5(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}+\psi_{\mathring{y}}\omega_{ij})$$

$$W^y_{ij+1/2}=0.5(v_{ij+1}\omega_{ij+1}+v_{ij}\omega_{ij})$$

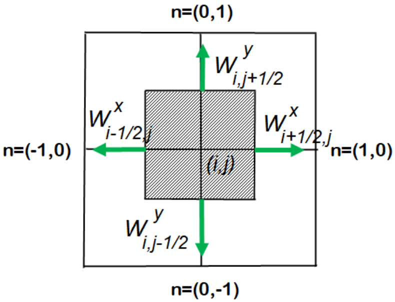
$$=-0.5(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)\omega_{j+1}+\psi_{\mathring{x}}\omega_{ij})$$

$$\mathcal{K}_h(\psi,\omega)\hbar^x_i\hbar^y_j=\left(W^x_{i+1/2j}-W^x_{i-1+1/2j}\right)\hbar^y_j+\left(W^y_{ij+1/2}-W^x_{ij-1/2}\right)\hbar^x_i=$$

$$0.5\left(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}-\psi_{\mathring{y}}(-1_x)\omega_{i-1j}\right)\hbar^y_j-0.5\left(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)\omega_{j+1}-\psi_{\mathring{x}}(-1_y)\omega_{j-1}\right)\hbar^x_i$$

$$\mathcal{K}^{(1)}_h(\psi,\omega)=(\psi_{\mathring{y}}\,\omega)_{\mathring{x}}-(\psi_{\mathring{x}}\,\omega)_{\mathring{y}}$$

Аппроксимация конвективных членов 3.



Потоки в серединах сторон ячейки S_{ij} :

$$W^x_{i+1/2j}=\frac{u_{i+1j}+u_{ij}}{2}\cdot\frac{\omega_{i+1j}+\omega_{ij}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)+\psi_{\mathring{y}})(\omega_{i+1j}+\omega_{ij})$$

$$W^x_{ij+1/2}=\frac{v_{ij+1}+v_{ij}}{2}\cdot\frac{\omega_{ij+1}+\omega_{ij}}{2}$$

$$=-\frac{1}{4}(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)+\psi_{\mathring{x}})(\omega_{ij+1}+\omega_{ij})$$

$$\mathcal{K}^{(2)}_h(\psi,\omega)\hbar^x_i\hbar^y_j=(\psi_{\mathring{y}}(i+1/2)\omega_{i+1/2j}-\psi_{\mathring{y}}(i-1/2)\omega_{i-1/2j})\hbar^y_j-$$
$$(\psi_{\mathring{x}}(j+1/2)\omega_{ij+1/2}-\psi_{\mathring{x}}(j-1/2)\omega_{ij-1/2})\hbar^x_i$$

$$\mathcal{K}^{(2)}_h(\psi,\omega)=W^x_{\tilde{x}}+W^y_{\tilde{y}}$$

Уравнение переноса завихренности.

Аппроксимация оператора Лапласа.

$$\mathcal{I}_3 = \frac{1}{Re} \int\limits_{S_{ij}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dxdy = \frac{1}{Re} \int\limits_{\partial S_{ij}} (grad\, \omega, n) dl \approx$$

$$\frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{i+1/2j} \hbar^y_j + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{ij+1/2} \hbar^x_i \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{i-1/2j} \hbar^y_j - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)_{ij-1/2} \hbar^x_i \right]$$

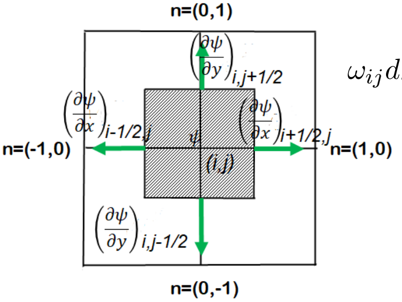
Дифференциально-разностное уравнение переноса завихренности:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial t} + (\psi_{\mathring{y}}\, \omega)_{\mathring{x}} - (\psi_{\mathring{x}}\, \omega)_{\mathring{y}} = \frac{1}{Re} (\omega_{x\tilde{x}} + \omega_{y\tilde{y}})$$

Аппроксимация кинематического уравнения 1.

$$\int\limits_{S_{ij}} \omega dx dy = -\int\limits_{S_{ij}} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) dx dy = -\int\limits_{\partial S_{ij}} (grad\,\psi, \mathbf{n}) dl. \qquad (1)$$

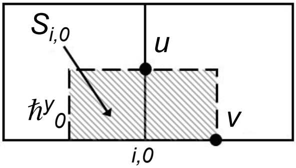
Если $\mathcal{S}_{ij}$ – внутренняя ячейка, $(ij) \in I \times J$, то интегралы в (1) аппроксимируются следующим образом:



$$\omega_{ij} dS_{ij} = -\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i+1/2j} \hbar^y_j + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{ij+1/2} \hbar^x_i - \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i-1/2j} \hbar^y_j - \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{ij-1/2} \hbar^x_i\right]$$

$$\omega = -(\psi_{x\tilde{x}} + \psi_{y\tilde{y}})$$

Аппроксимация кинематического уравнения на границе.



$$\omega_{i0} dS_{i0} = -\left[\underline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i+1/2,0}} \hbar^y_0 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,1/2} \hbar^x_i - \underline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{i-1/2,0}} \hbar^y_0 - \underline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i,0}} \hbar^x_i \right],$$

где подчеркнутые члены, в силу граничных условий

$\psi|_{\partial\mathcal{D}} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{\partial\mathcal{D}} = 0$, равны нулю.

Производную $\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_{i1/2}$ заменим на $\psi_{y,i0}$ и получим,

$$\omega_{i0} = -\frac{2}{(h^y_{1/2})^2}(\psi_{i1} - \psi_{i0}) = -\frac{2}{(h^y_{1/2})^2}\psi_{i1}. \qquad (2)$$

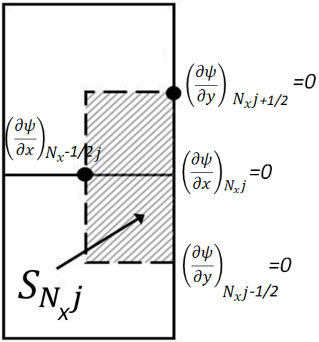
Аппроксимация кинематического уравнения 2.

Задача. Показать, что в угловых точках $\omega_{00} = \omega_{0N_y} = \omega_{N_xN_y}$ $= \omega_{N_x0} = 0$,
Разностное уравнение

$$\omega = -(\psi_{x\tilde{x}} + \psi_{y\tilde{y}}) \tag{3}$$

выполняется для всех узлов $(i, j) \in \overline{I} \times \overline{J}$.

Аппроксимация кинематического уравнения на правой границе границе.



$$\omega_{N_xj}dS_{N_xj}=-\left[-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{N_x-1/2,j}\hbar^y_j\right],$$

$$\omega_{N_xj}\frac{h^x_{N_x-1/2}}{2}\hbar^y_j-\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{N_x-1/2,j}\hbar^y_j=0$$

$$\omega_{N_xj}\frac{h^x_{N_x-1/2}}{2}-\psi_{\bar{x},N_xj}=0$$

Вспомним, что $\omega_{i0}\frac{h^y_{1/2}}{2}+\psi_{y,i0}=0$. Это граничные условия Тóма на завихренность. Они получены из кинематического уравнения с учетом граничных условий на функцию тока.

Скалярные произведения.

$$f(x_i, y_j), g(x_i, y_j) \Rightarrow (f, g)_h^{(0)} = \sum_{(i,j)\in \overline{I}\times\overline{J}} f_{ij} g_{ij} dS_{ij};$$

$$f(x_i, y_{j+1/2}), g(x_i, y_{j+1/2}) \Rightarrow (f, g)_h^{(1)} = \sum_{(i,j)\in \overline{I}\times\widetilde{J}} f_{ij+1/2} g_{ij+1/2} dS_{ij+1/2};$$

$$f(x_{i+1/2}, y_j), g(x_{i+1/2}, y_j) \Rightarrow (f, g)_h^{(2)} = \sum_{(i,j)\in \widetilde{I}\times\overline{J}} f_{i+1/2j} g_{i+1/2j} dS_{i+1/2j}$$

Закон сохранения завихренности 1.

Утверждение 1. *Пусть сеточная функция* ω_{ij} *при* $(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})$ *удовлетворяют уравнению* (3). *Тогда выполнен разностный аналог закона сохранения завихренности в форме*
$$\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})}\omega_{ij}dS_{ij}=0.$$
Доказательство. Из равенства (3) следует, что

$$\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})}\omega_{ij}dS_{ij}=-\sum_{(i,j)\in(I\times J)}(\psi_{x\tilde{x}}+\psi_{y\tilde{y}})dS_{ij}$$
$$+\sum_{j\in J}(\omega_{0j}dS_{0j}+\omega_{N_xj}dS_{N_xj})+\sum_{i\in I}(\omega_{i0}dS_{i0}+\omega_{iN_y}dS_{iN_y}). \tag{4}$$

$$-\sum_{(i,j)\in(I\times J)}(\psi_{x\tilde{x}}+\psi_{y\tilde{y}})\hbar_i^x\hbar_j^y=-\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\hbar_j^y(\psi_{x,ij}-\psi_{\bar{x},ij})+\ldots(y)=$$

Закон сохранения завихренности 2.

$$= -\sum_{j\in J} \hbar_j^y \left[\sum_{i=1}^{N_x-1} \psi_{x,ij} - \sum_{i=0}^{N_x-2} \psi_{x,ij} \right] - \sum_{i\in I} \hbar_i^x \left[\sum_{j=1}^{N_y-1} \psi_{y,ij} - \sum_{j=0}^{N_y-2} \psi_{y,ij} \right]$$

$$= -\sum_{j\in J} \hbar_j^y \left[\psi_{\bar{x},N_x j} - \psi_{x,0j} \right] - \sum_{i\in I} \hbar_i^x \left[\psi_{\bar{y},iN_y} - \psi_{y,i0} \right] \qquad (5)$$

Подставим (5) в (4).

$$\sum_{(i,j)\in(\bar{I}\times\bar{J})} \omega_{ij} dS_{ij} = -\sum_{j\in J} \hbar_j^y \left[\psi_{\bar{x},N_x j} - \psi_{x,0j} \right] - \sum_{i\in I} \hbar_i^x \left[\psi_{\bar{y},iN_y} - \psi_{y,i0} \right] +$$

$$\sum_{j\in J} \hbar_j^y \left(\omega_{0j} \frac{h^x_{1/2}}{2} + \omega_{N_x j} \frac{h^x_{N_x-1/2}}{2} \right) + \sum_{i\in I} \hbar_i^x \left(\omega_{i0} \frac{h^y_{1/2}}{2} + \omega_{iN_y} \frac{h^y_{N^y_{N_y-1/2}}}{2} \right)$$

Закон сохранения завихренности 3.

$$\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})} \omega_{ij} dS_{ij} =$$

$$\sum_{j\in J} \hbar_j^y \left[\left(-\psi_{\bar{x},N_x j} + \omega_{N_x j} \frac{h^x_{N_x-1/2}}{2} \right) + \left(\psi_{x,0j} + \omega_{0j} \frac{h^x_{1/2}}{2} \right) \right] +$$

$$\sum_{i\in I} \hbar_i^x \left[\left(-\psi_{\bar{y},iN_y} + \omega_{iN_y} \frac{h^y_{N_y-1/2}}{2} \right) + \left(\psi_{y,i0} + \omega_{i0} \frac{h^y_{1/2}}{2} \right) \right] \tag{6}$$

Все слагаемые в круглых скобках, в силу граничного условия Тóма, равны нулю. Откуда $\sum\limits_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})} \omega_{ij} dS_{ij} = 0.$

Утверждение доказано.

Баланс кинетической энергии 1.

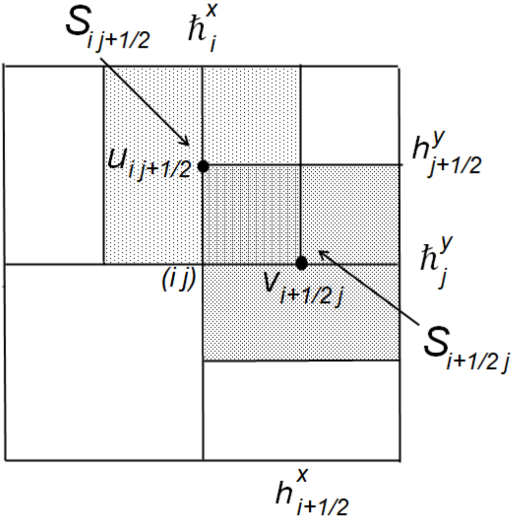
Утверждение 2. *Дифференциально-разностная аппроксимация уравнения переноса завихренности*

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial t} + (\psi_{\mathring{y}}\,\omega)_{\mathring{x}} - (\psi_{\mathring{x}}\,\omega)_{\mathring{y}} = \frac{1}{Re}(\omega_{x\tilde{x}} + \omega_{y\tilde{y}}) \qquad (7)$$

обеспечивает выполнение баланса кинетической энергии в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\widetilde{J})} u^2_{ij+1/2} dS_{ij+1/2} + \sum_{(i,j)\in(\widetilde{I}\times\overline{J})} v^2_{i+1/2j} dS_{i+1/2j}\right] = -\frac{1}{Re}\sum_{(i,j)\in\overline{I}\times\overline{J}} \omega^2_{ij} dS_{ij}$$

Сетка.



Баланс кинетической энергии 2.

Доказательство. По аналогии с дифференциальным случаем, умножим уравнение (7) скалярно на ψ_{ij}.

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t},\psi\right)_h^{(0)} + (\mathcal{K}_h(\psi,\omega),\psi)_h^{(0)} = \frac{1}{Re}(\Delta\omega,\psi)_h^{(0)} \tag{8}$$

и преобразуем последовательно входящие в (8) скалярные произведения.

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial t},\psi\right)_h^{(0)} = -\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})} \hbar_i^x\hbar_j^y\frac{\partial}{\partial t}(\psi_{x\tilde{x}}+\psi_{y\tilde{y}})\psi_{ij} =$$

$$-\sum_{(i,j)\in(I\times J)} \hbar_i^x\hbar_j^y\frac{\partial}{\partial t}(\psi_x-\psi_{\bar{x}})\frac{1}{\hbar_i^x}\psi_{ij}+\ldots=$$

$$-\sum_{j=1}^{N_y-1}\hbar_j^y\left[\sum_{i=1}^{N_x-1}\frac{\partial}{\partial t}\psi_x\psi_{ij}-\sum_{i=0}^{N_x-2}\frac{\partial}{\partial t}\psi_x\psi_{i+1j}\right]+\ldots=$$

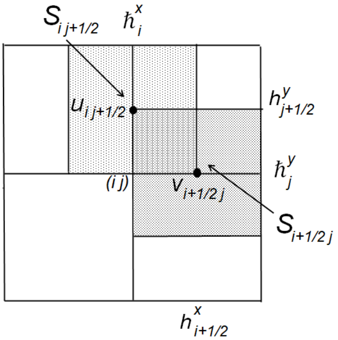
Баланс кинетической энергии 3.

$$-\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \left[\sum_{i=1}^{N_x-2} \frac{\partial}{\partial t}\psi_{x,ij}\frac{\psi_{ij}-\psi_{i+1j}}{h^x_{i+1/2}} h^x_{i+1/2} + \frac{\partial}{\partial t}\psi_{x,N_x-1j}\psi_{N_x-1j} - \frac{\partial}{\partial t}\psi_{x,0j}\psi_{1j}\right] + \ldots =$$

$$-\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \left[\sum_{i=1}^{N_x-2} -h^x_{i+1/2}\psi_{x,ij}\frac{\partial}{\partial t}\psi_{x,ij} + \frac{\partial}{\partial t}\psi_{x,N_x-1j}\frac{\psi_{N_x-1j}-\psi_{N_xj}}{h^x_{N_x-1/2}} h^x_{N_x-1/2} - \frac{\partial}{\partial t}\psi_{x,0j}\frac{\psi_{1j}-\psi_{0j}}{h^x_{1/2}} h^x_{1/2}\right] \ldots = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_y-1}\sum_{i=0}^{N_x-1} \hbar_j^y h^x_{i+1/2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi_x\right)^2 \ldots =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{(ij)\in(\widetilde{I}\times\overline{J})} \frac{\partial}{\partial t}\left(v\right)^2 dS_{i+1/2j} + \ldots$$

Баланс кинетической энергии 4.



$$\frac{1}{2}\left[\sum_{(ij)\in(\widetilde{I}\times\overline{J})}\frac{\partial}{\partial t}\left(v_{i+1/2j}\right)^2 dS_{i+1/2j}+\right.$$

$$\left.\sum_{(ij)\in(\overline{I}\times\widetilde{J})}\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{ij+1/2}\right)^2 dS_{ij+1/2}\right]$$

$$dS_{i+1/2j}=h^x_{i+1/2}\hbar^y_j;$$

$$dS_{ij+1/2}=\hbar^x_i h^y_{j+1/2}$$

Баланс кинетической энергии. Конвективные члены 1.

$$(\mathcal{K}_h(\psi,\omega),\psi)_h^{(0)} = \sum_{(ij)\in I\times J} \hbar_i^x \hbar_j^y [(\psi_{\overset{\circ}{y}}\,\omega)_{\overset{\circ}{x}} - (\psi_{\overset{\circ}{x}}\,\omega)_{\overset{\circ}{y}}]\psi_{ij}. \qquad (9)$$

Заменим здесь производные от потоков их представлением в индексных обозначениях:

$$\sum_{(ij)\in I\times J}\Bigg[\frac{\hbar_j^y}{2}\Big(\psi_{\overset{\circ}{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}\psi_{ij} - \psi_{\overset{\circ}{y}}(-1_x)\omega_{i-1j}\psi_{ij}\Big) - \frac{\hbar_i^x}{2}\Big(\psi_{\overset{\circ}{x}}(+1_y)\omega_{ij+1}\psi_{ij} - \psi_{\overset{\circ}{x}}(-1_y)\omega_{ij-1}\psi_{ij}\Big)\Bigg]$$

Баланс кинетической энергии. Конвективные члены 2.

$$\sum_{j=1}^{N_y-1}\frac{1}{2}\hbar_j^y\sum_{i=1}^{N_x-1}\left(\psi_{\overset{\circ}{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}\psi_{ij}-\psi_{\overset{\circ}{y}}(-1_x)\omega_{i-1j}\psi_{ij}\right)+$$

$$\sum_{j=1}^{N_y-1}\frac{1}{2}\hbar_j^y\left[\sum_{i=2}^{N_x}\underbrace{\psi_{\overset{\circ}{y}}\omega_{ij}\psi_{i-1j}}_{A_{ij}}-\sum_{i=0}^{N_x-2}\underbrace{\psi_{\overset{\circ}{y}}\omega_{ij}\psi_{i+1j}}_{B_{ij}}\right]=$$

$$\sum_{j=1}^{N_y-1}\frac{1}{2}\hbar_j^y\sum_{i=1}^{N_x-1}(\psi_{\overset{\circ}{y}}\omega_{ij}\psi_{i-1j}-\psi_{\overset{\circ}{y}}\omega_{ij}\psi_{i+1j})=-\sum_{j=1}^{N_y-1}\sum_{i=1}^{N_x-1}\hbar_i^x\hbar_j^y\psi_{\overset{\circ}{y}}\omega_{ij}\psi_{\overset{\circ}{x}}$$

Замечание.

$$\psi_{\overset{\circ}{y}}(N_xj)=0\Rightarrow A_{N_xj}=0,\ \psi_{0j}=0\Rightarrow A_{1j}=0$$

$$\psi_{\overset{\circ}{y}}(0j)=0\Rightarrow B_{0j}=0,\ \psi_{N_xj}=0\Rightarrow B_{N_x-1j}=0.$$

Баланс кинетической энергии. Конвективные члены 2.

Оставшийся кусок конвективных членов:

$$-\sum_{i=1}^{N_x-1} \frac{1}{2}\hbar_i^x \sum_{i=1}^{N_y-1} \left(\psi_{\overset{\circ}{x}}(+1_y)\omega_{ij+1}\psi_{ij} - \psi_{\overset{\circ}{x}}(-1_y)\omega_{ij-1}\psi_{ij}\right) =$$

$$-\sum_{j=1}^{N_y-1} \sum_{i=1}^{N_x-1} \hbar_i^x \hbar_j^y \psi_{\overset{\circ}{x}}\, \omega_{ij} \psi_{\overset{\circ}{y}}$$

$(\mathcal{K}_h(\psi,\omega),\psi)_h^{(0)} = 0 \;\Rightarrow$ – конвективные члены не вносят вклад в баланс кинетической энергии.

Баланс кинетической энергии. Диссипативные члены 1.

Скалярное произведение в правой части уравнения (8) перепишем помощью разностной формулы Грина в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Re}(\Delta\omega,\psi)_h^{(0)} = {} & \frac{1}{Re}\sum_{(i,j)\in I\times J} dS_{ij}\omega_{ij}(\psi_{x\tilde{x}}+\psi_{y\tilde{y}}) \\
& + \frac{1}{Re}\sum_{j\in J}\left(dS_{0j}\omega_{0j}\frac{\psi_{x,0j}}{\hbar_0^x} - dS_{N_xj}\omega_{N_xj}\frac{\psi_{\bar{x},N_xj}}{\hbar_{N_x}^x}\right) \\
& + \frac{1}{Re}\sum_{i\in I}\left(dS_{i0}\omega_{i0}\frac{\psi_{y,i0}}{\hbar_0^y} - dS_{iN_y}\omega_{iN_y}\frac{\psi_{\bar{y},iN_y}}{\hbar_{N_y}^y}\right)
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

В силу граничных условий То́ма $\dfrac{\psi_{x,0j}}{\hbar_0^x} = -\omega_{0j}$, $\dfrac{\psi_{\bar{x},N_xj}}{\hbar_{N_x}^x} = \omega_{N_xj}$,
$\dfrac{\psi_{y,i0}}{\hbar_0^y} = -\omega_{i0}$, $\dfrac{\psi_{\bar{y},iN_y}}{\hbar_{N_y}^y} = \omega_{iN_y}$

Баланс кинетической энергии. Диссипативные члены 2.

Из (10) следует, что

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}(\Delta\omega,\psi)_h^{(0)} = -\frac{1}{\mathrm{Re}} \sum_{(i,j)\in\overline{I}\times\overline{J}} \omega_{ij}^2 dS_{ij}. \qquad (11)$$

В результате получили уравнение баланса кинетической энергии в нашей дискретной модели:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\widetilde{J})} u_{ij+1/2}^2 dS_{ij+1/2} + \sum_{(i,j)\in(\widetilde{I}\times\overline{J})} v_{i+1/2j}^2 dS_{i+1/2j}\right] = -\frac{1}{Re}\sum_{(i,j)\in\overline{I}\times\overline{J}} \omega_{ij}^2 dS_{ij}$$

Утверждение доказано.