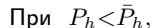


Разностные схемы для уравнения конвективной диффузии. Лекция 2

О.С.Мажорова

Сентябрь 2020 г.

Что такое, по существу, схемы с направленными разностями, схема А.А.Самарского и экспоненциальная схема?



При $P_h > \bar{P}_h$

– направленные
разности и $D=0$

Схема Д.Сполдинга

Эффективное сеточное число Пекле:

$$P_{h,i+\frac{1}{2}}^* = \begin{cases} P_{h,i+\frac{1}{2}}, & \text{если } |P_{h,i+\frac{1}{2}}| \leq 2; \\ 2, & \text{если } |P_{h,i+\frac{1}{2}}| > 2. \end{cases} \quad (1)$$

Интерполяции в полуцелую точку:

$$\theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{P_{h,i+\frac{1}{2}}} \left[P_{h,i+\frac{1}{2}} - 1 + \max(-P_{h,i+\frac{1}{2}}, 1 - \frac{P_{h,i+\frac{1}{2}}}{2}, 0) \right] \quad (2)$$

Если $|P_{h,i+\frac{1}{2}}| < 2$, то $\theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, $W_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}} \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}$, т.е. конвективные члены аппроксимируются центральными разностями.

Если $|P_{h,i+\frac{1}{2}}| \geq 2$, то

$$\theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|P_{h,i+\frac{1}{2}}|}{P_{h,i+\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{P_{h,i+\frac{1}{2}}}$$

Результат интерполяции:

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{|P_{h,i+\frac{1}{2}}|}{P_{h,i+\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{P_{h,i+\frac{1}{2}}} \right] Q_i + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{|P_{h,i+\frac{1}{2}}|}{P_{h,i+\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{P_{h,i+\frac{1}{2}}} \right] Q_{i+1};$$

Конвективный поток:

$$W_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} = \underbrace{u_{i+\frac{1}{2}}^+ Q_i + u_{i+\frac{1}{2}}^- Q_{i+1}}_{\text{направленные разности}} + DQ_x$$

$|P_{h,i+\frac{1}{2}}| \geq 2$ – диффузионный перенос осуществляется схемой

диффузией с коэффициентом $D_h = \frac{|u|h}{2}$,

Схема С.Патанкара

Эффективное сеточное число Пекле:

$$P_{h,i+\frac{1}{2}}^* = \begin{cases} \frac{P_{h,i+\frac{1}{2}}}{P_{h,i+\frac{1}{2}}/2 + (1 - 0.1P_{h,i+\frac{1}{2}})^5}, & \text{если } |P_{h,i+\frac{1}{2}}| \leq 10; \\ 2, & \text{если } |P_{h,i+\frac{1}{2}}| > 10. \end{cases}$$

Интерполяция в полуцелую точку:

$$\theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{P_{h,i+\frac{1}{2}}} \left[P_{h,i+\frac{1}{2}} - 1 + \max(0, -P_{h,i+\frac{1}{2}}) + \max(0, (1 - 0.1|P_{h,i+\frac{1}{2}}|)^5) \right]$$

При $|P_{h,i+\frac{1}{2}}| < 10$ ($u = \text{const} > 0$, сетка – равномерная)

$$\theta = \frac{1}{P_h} [P_h - 1 + (1 - 0.1P_h)^5].$$

Конвективный поток:

$$W_{i+\frac{1}{2}} = uQ_{i+\frac{1}{2}} = uQ_i + DQ_x - D((1 - 0.1P_h)^5 Q_x)$$

Получается схема с направленными разностями:

$$uQ_{\bar{x}} - D(1 - 0.1P)^5 Q_{\bar{x}x} = 0,$$

Переходя к центральным разностям,

$$uQ_{x^\circ} - D^* Q_{x\bar{x}} = 0, \quad \text{где } D^* = D \left[\frac{P_h}{2} + (1 - 0.1P_h)^5 \right].$$

$$\text{Эффективное число Пекле: } P_h^* = \frac{uh}{D^*} = \frac{P_h}{P_h/2 + (1 - 0.1P_h)^5}$$

Пусть $|P_{h,i+\frac{1}{2}}| > 10$, тогда $\theta = 1 - \frac{1}{P_h}$ и конвективный поток:

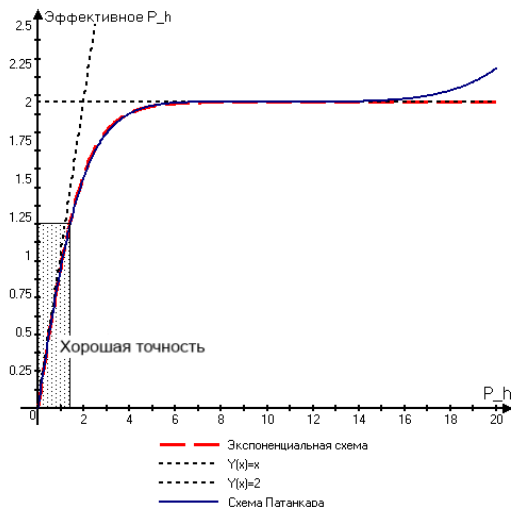
$$W_{i+\frac{1}{2}} = uQ_{i+\frac{1}{2}} = uQ_i + DQ_x$$

Полная схема:

$$\underbrace{uQ_{\bar{x}} + DQ_{\bar{x}x}}_{\text{КЧ}} - \underbrace{DQ_{\bar{x}x}}_{\text{ДЧ}} = 0.$$

Гибридные схемы просты в реализации, дают гладкие решения при любых P_h , соответствующие сеточные уравнения хорошо решаются, они включены в пакеты прикладных программ.

Но для хорошей точности в задачах с преобладающим влиянием конвекции нужен мелкий шаг.



Разностные схемы на расширенных шаблонах.

Здесь сетка равномерная и $u = \text{const} > 0$.

Схема с направленными разностями второго порядка. (SOU)

Интерполяция в полуцелую точку:

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i+1} + Q_i) - \eta(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}) \quad (3)$$

Аппроксимация конвективных членов

$$u \frac{dQ}{dx} \sim uQ_x^\circ - uh\eta(Q_{\bar{x}x} - Q_{\bar{x}\bar{x}}) \quad (4)$$

и разностная схема запишется следующим образом:

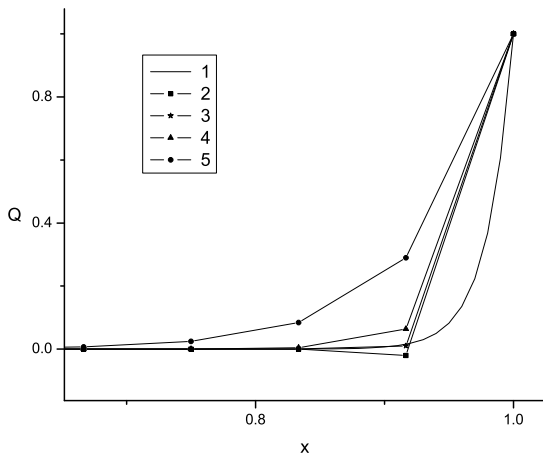
$$uQ_x^\circ - DQ_{\bar{x}x} - uh^2\eta Q_{\bar{x}x\bar{x}} = 0, \quad (5)$$

Задача. Почему при $\eta = \frac{1}{2}$ схема (5) называют схемой с направленными разностями второго порядка точности.

Семейство схем с третьей пространственной производной.

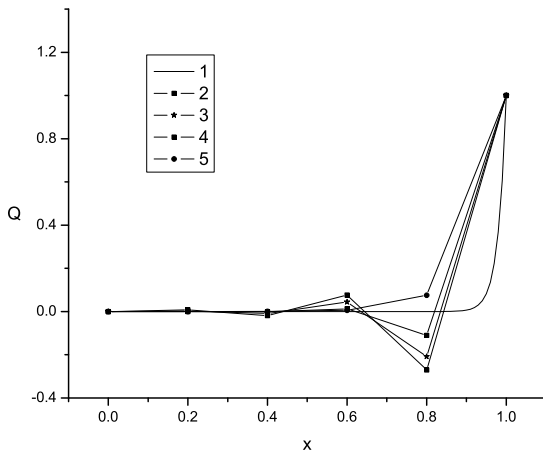
$uQ_x^\circ - DQ_{\bar{x}\bar{x}} - uh^2\eta Q_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} = 0$	η
Направленные разности второго порядка (SOU)	$\frac{1}{2}$
Метод Фромма	$\frac{1}{4}$
Схема с искусственной дисперсией	$\frac{1}{6}$
QUICK (<i>Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics</i>)	$\frac{1}{8}$

Примеры расчетов. $P_h = 4$



1 — точное решение, 2 — $\eta = \frac{1}{8}$; 3 — $\eta = \frac{1}{6}$; 4 — $\eta = \frac{1}{4}$; 5 — $\eta = \frac{1}{2}$.

Примеры расчетов. $P_h = 10$



1 — точное решение, 2 — $\eta = \frac{1}{8}$; 3 — $\eta = \frac{1}{6}$; 4 — $\eta = \frac{1}{4}$; 5 — $\eta = \frac{1}{2}$.

Третья производная как анти-дисперсия.

Пусть Q – бесконечно дифференцируемая функция. Используя ее разложение в ряд Тейлора, получим, что разностная схема (5) это

$$u \frac{dQ}{dx} - D \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{uh^2}{6}(1 - 6\eta) \frac{d^3Q}{dx^3} + \frac{uh^3}{12}(6\eta - \frac{1}{P_h}) \frac{d^4Q}{dx^4} + \dots = 0$$

Если $\eta = \frac{1}{6}$, то схема имеет третий порядок аппроксимации, с ростом η увеличивается влияние четвертой производной.

При $P_h = 10$ все схемы, кроме SOU ($\eta = \frac{1}{2}$), дают пилообразные решения.