

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Содержание

Лекция 1	3
1.1 Уравнение конвекции с диффузией	3
1.2 Модельная задача	5
1.3 Решение разностной задачи (центральные разности).	5
Лекция 2	6
2.1 Схема А.А.Самарского	7
2.2 Экспоненциальная схема	8
2.3 Схема Сполдинга	9
2.4 Схема Патанкара	10
2.5 Разностная схема на расширенных шаблонах	10
Лекция 3	10
3.1 Нестационарные задачи	10
3.2 Решение модельной задачи	11
3.2.1 Направленные разности.	12
3.2.2 Центральные разности	12
3.3 Диффузия и дисперсия	12
3.4 Дифференциальное представление разностных схем	13
3.5 Дифференциально приближение для схемы с направленными разностями.	13
Лекция 4	14
4.1 Устойчивость разностных схем. Метод Неймана (Метод гармоник.)	14
4.1.1 Явная схема с направленными разностями	14
4.2 Изменение амплитуды волны.	16
4.2.1 Коротко про устойчивость схемы с центральными разностями	16
Лекция 5	17
5.1 Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости	17
Лекция 5	18
6.1 Переинтерполяции	20
6.1.1 Переинтерполяция 1	20
6.1.2 Переинтерполяция 2	20
6.1.3 Первый способ применение	20
6.2 Баланс кинетической энергии	22

Лекция 1

1.1 Уравнение конвекции с диффузией

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x}); t > 0; x \in [-L, L]$$

Уравнение конвекции с диффузией.

$$Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}}$$

- число Пекле

$$\frac{L}{U} = t_{\text{конв}}$$

$$\frac{L^2}{\mathcal{D}} = t_{\text{диффузионная}}$$

$$\frac{t_{\text{диф}}}{t_{\text{конв}}} = \frac{LU}{\mathcal{D}}$$

$$Re \ll 1$$

почти дифф процесс

$$Re \gg 1$$

почти конв процесс

Сначала будем рассматривать стационарное уравнение.

$$\frac{d}{dx}(uQ) - \frac{d}{dx}(\mathcal{D} \frac{dQ}{dx}) = 0$$

На отрезке вводится разностная сетка

$$\Omega_n(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

.

Потоковые точки - точки с полуцелые точки

$$xi + \frac{1}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- потоковые узлы

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$$

$$h_i = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

Вводим сеточные функции.

$$Q_i = (x_{i+\frac{1}{2}}; x_{i-\frac{1}{2}})$$

константа на отрезке

$$[x_{i+\frac{1}{2}} \text{ до } x_{i-\frac{1}{2}}]$$

D - константа в полуцелых точках (от x_i до x_{i+1} константа)

Считаем скорость и тепло в потоковых точках, где диффузия постоянна

$$Q_x = \frac{Q_{i+1}i - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\bar{x}} = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\hat{x}} = \frac{Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}$$

Между потоковыми точками интегрируем получаем формулу.

$$\int_{x_{i+\frac{1}{2}}}^{x_i+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} [uQ - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx}] dx =$$

$$= [uQ - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx}] \Big|_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i+\frac{1}{2}} =$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^{tot}$$

$$W_{i-\frac{1}{2}}^{tot} = U_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} = W_{i+\frac{1}{2}}^D - W_{i-\frac{1}{2}}^D$$

$$W_{i+\frac{1}{2}}^D = -D_{i+\frac{1}{2}} \frac{dQ}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}}$$

$$U_i i + 1/2 Q_{i+1/2} - D_{i+1/2} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} -$$

$$- [U_i i - 1/2 Q_{i-1/2} - D_{i-1/2} Q_{\bar{x}_{i-1/2}}] = 0$$

$$\frac{U_{i+1/2} Q_{i+1/2} - U_{i-1/2} Q_{i-1/2}}{\bar{h}_i} -$$

$$- \frac{D_{i+1/2} Q_x - D_{i-1/2} Q_{\bar{x}}}{\bar{h}_i} = 0$$

Интерполируем Q в полуцелые точки.

$$Q_{i+1/2} = \Theta_{i+1/2} Q_i + (1 - \Theta_{i+1/2}) \Theta_{i+1}$$

1.

$$\Theta = 1/2$$

$$W =$$

Получится схема с центральными разностями

$$uQ_x - DQ_{xwithlntx} = 0$$

2.

$$\Theta_{i+1/2} = 1/2(1 + \frac{|u_{i+1/2}|}{U_{i+1/2}})$$

$$W_{i+1/2} = u_{i+1/2}^+ Q_i - \bar{U}_{i+1/2} Q_{i+1}$$

$$U'_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} + |U_{i+1/2}|)$$

$$U_{withlin_{i+1/2}} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} - |U_{i+1/2}|)$$

$$(u_{i+1/2}^+ Q_i + \bar{u}_{i+1/2}^+ Q_i + 1) - DQ_{\widehat{xx}} = 0$$

1.2 Модельная задача

$$\frac{d(UQ)}{dx} - D \frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$

При увеличении числа Пекле график прижимается к координатам снизу.

1.3 Решение разностной задачи (центральные разности).

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_i = a + bq^i$$

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

Подставляем

$$\frac{U}{2h} b(q^{i+1} - q^{i-1}) - Db \frac{q^{i+1} - 2q^i + q^{i-1}}{h^2} = 0$$

$$\frac{u}{2}(q^2 - 1) - \frac{D}{h}(q^2 - 2q + 1) = 0$$

Лекция 2

Точное решение

$$Q(x) = \frac{1 - e^{\frac{Ux}{\mathcal{D}}}}{1 - e^{\frac{U}{\mathcal{D}}}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - e^{Pe \cdot i}}{1 - e^{Pe_n N}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - \bar{q}^i}{1 - \bar{q}^N}$$

$$\bar{q} = e^{Pe_N} = 1 + \frac{Pe_n + Pe_n^2}{2}$$

Сеточная функция (Центральные разности)

$$q = \frac{1 + \frac{Pe}{2}}{1 - \frac{Pe}{2}} =$$

$$(1 + \frac{Pe_N}{2}(1 + \frac{1}{2}Pe_n + \frac{1}{4}Pe_n^2 + \dots)) =$$

$$1 + Pe_n + \frac{Pe_n^2}{2}$$

Но число пекре должно быть меньше 2

Направленные разности

$$q + Pe_n$$

Для схемы с центральными разностями

$$U \frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i+1}(\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) + Q_i(\frac{2\lceil}{h^2}) + Q_{i-1}(-\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i+1}(1 - \frac{1}{2}\mathcal{D}) + 2Q_i - Q_{i-1}(1 - \frac{1}{2}Pe_n) = 0$$

Для схеммы с направленными разностями

$$U \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h} - \mathcal{D} \frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i-1}(-\frac{u}{h} - \frac{\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(\frac{u}{h} - \frac{2\mathcal{D}}{h^2}) + Q_{i+1}(\frac{\mathcal{D}}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i-1}(1 + Pe_n) \dots$$

Попробуем предсказать поведение вышеописанных схем

$$Q_{i-1} = Q_i - h \frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \dots$$

$$Q_{i+1} = Q_i + h \frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \dots$$

Первое слагаемое:

$$\frac{U}{h} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)_i - \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} \dots$$

$$U \frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \frac{1}{2} U h \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2}|_i / \dots = 0$$

$$U \frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \mathcal{D} \left(1 + \frac{1}{2} Pe_n \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}|_i$$

Для того чтобы коэф диффузии был похож на то что было в исходном уравнении $\frac{Pe_n}{2} \ll 1$

2.1 Схема А.А.Самарского

$$U^+ Q_{\bar{x}} + U^- Q_x - \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}} Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$\bar{D} = \frac{\mathcal{D}}{1 + \frac{Pe_n}{2}} = \mathcal{D} \left(\infty - \frac{|\mathcal{P}|_{\setminus} / \epsilon}{\infty + \frac{|\mathcal{P}|_{\setminus}}{\epsilon}} \right)$$

$$u^+ Q_{\bar{x}} - u^- Q_x = u Q_{x0} - \frac{|U|_h}{2} Q_{\bar{x}x}$$

$$U Q_{x0} - \mathcal{D} \left[\frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2} \right] Q_{\bar{x}x} = 0$$

- Коэфф диффузии

$$\mathcal{D} \left[\frac{1}{1 + \frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2} \right] = \mathcal{D}^*$$

$$Pe_n^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} - \text{эффективное число Пикле}$$

$$f = Pe^*(Pe)$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \frac{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2}}$$

$$Pe^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \frac{1 + \frac{|Pe_n|}{2}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}$$

$$Pe_n \rightarrow 0; Pe_n^* \rightarrow Pe_n$$

$$Pe_n \rightarrow \inf; Pe_n^* \rightarrow 2$$

$$|Pe * n| = \frac{Pe_n^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{|Pe_n|})}{Pe_n^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{2|Pe_n|} + \frac{1}{|Pe_n|^2})}$$

2.2 Экспоненциальная схема

$$u \frac{dQ}{dx} - \mathcal{D} \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$Q(x) = Q_i + (Q_{i+1} - Q_i) \frac{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}} \frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}})}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$\begin{aligned} W^{tot} &= u_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D} \frac{dQ}{dx} \Big|_{i+\frac{1}{2}} = \\ &= u_{i+\frac{1}{2}} Q_i + u_{i+\frac{1}{2}} (Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_i) \frac{\exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2} - 1)}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1} - \\ &- u_{i+\frac{1}{2}} (Q_{i+1} - Q_i) \frac{\exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2})}{\exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1} \end{aligned}$$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = u Q_{\bar{x}} + uh \frac{e^{\frac{P Pe_N}{2}} - 1}{e^{Pe_N} - 1} Q_{\bar{x}x} - uh \frac{e^{\frac{P Pe_n}{2}}}{e^{Pe_n} - 1} Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$u Q_{\bar{x}} = u Q_{x0} - \mathcal{D} \frac{Pe}{2} Q_{\bar{x}x}$$

$$u Q_{x0} - \mathcal{D}^2 Q_{\bar{x}x} = 0$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \left(\frac{Pe_N}{2} \frac{e^{Pe} + 1}{e^{Pe} - 1} \right) = \mathcal{D} \frac{Pe_n}{2} \coth \frac{Pe}{2}$$

$$Pe_n = \frac{Uh}{\mathcal{D}} = 2th \frac{Pn_n}{2}$$

2.3 Схема Сполдинга

$$Pe_{h,i+\frac{1}{2}}^* = Pe_{h,i+\frac{1}{2}}, Pe_h \leq 2 \\ = 2, Pe_h > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \Theta_{i+\frac{1}{2}} Q_i + (1 - \Theta_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+1})$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n,\frac{1}{2}} - 1 + \max(-Pe_{n,i+\frac{1}{2}}, 1 - \frac{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}{2}, 0)]$$

1.

$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| \leq 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

буквально схема с центральными разностями.

2.

$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| > 2$$

(a)

$$Pe_n > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 + 0] = 1 - \frac{1}{Pe}$$

(b)

$$Pe_n < -2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 - Pe_n] = -\frac{1}{Pe_n}$$

Или оба варианта в одной формуле

$$\frac{1}{2} (1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) - \frac{1}{Pe_n}$$

Подставляем Θ

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2} (1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) = \frac{1}{Pe_n}] Q_i + [\frac{1}{2} (1 - \frac{|Pe_n|}{Pe_n} + \frac{1}{Pe_n})] Q_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} = uQ_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+\frac{1}{2}}^+ Q_i + U_{i+\frac{1}{2}}^- Q_i + 1 + DQ_x$$

$$\frac{d}{dx} uQ - D \frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} = U^+ Q_{\bar{x}} + \bar{u} Q_x + DQ_{\bar{x}x}$$

Таких схем множество, но суть такова, что до определенного момента рассматривается направленные разности, а потом переходят на константу

2.4 Схема Патанкара

Надо разобрать к экзамену! Есть в презентации.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}} [Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + \max(0, Pe_n) + \max(0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5)]$$

Теперь нужно определить в полуцелых точках.

2.5 Разностная схема на расширенных шаблонах

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i+1} + Q_i) - \eta(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})$$

1.

$$u \frac{d}{dx} = u Q_{x^0} - \frac{Uh}{2}(Q_{x\bar{x}} - Q_{xx}) \frac{1}{2} h^2 Q_{x\bar{x}}$$

2.

$$\eta = \frac{1}{2} - \text{схема с направленными разностями}$$

3.

$$\eta = \frac{1}{4} - \text{схема Фрома}$$

4.

$$\eta = \frac{1}{6} - \text{схема с искусственной дисперсией}$$

5.

$$\eta = \frac{1}{8} - \text{схема QUICK}$$

Лекция 3

3.1 Нестационарные задачи

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$u = \text{const}, Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}} \gg 1$$

Сетка вводится аналогично стационарной задаче.

$$t_k = \tau_k$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial Q}{\partial t} dx dt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (uQ) dx dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x}) dx dt$$

По слагаемым

1. Выносим, так как не зависит от t , по x константа на отрезке интегрирования

$$h_i \cdot (Q_i^{k+1} - Q_i^k)$$

- 2.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}) dt$$

Воспользуемся квадратурной формулой

$$= \tau (W_{i+\frac{1}{2}}^\sigma + W_{i-\frac{1}{2}}^\sigma)$$

$$f^{(\sigma)} = \sigma f^{t_{k+1}} + (1 - \sigma) f^{t_k} = \sigma \hat{f} + (1 - \sigma) f$$

Возникает ровно та же проблема определения W в полуцелых точках

- 3.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} [\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x} |_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x} |_{i-\frac{1}{2}}] dt =$$

$$\tau [(\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x})_{i+\frac{1}{2}}^{(\sigma)} - (\mathcal{D} \frac{\partial Q}{\partial x})_{i-\frac{1}{2}}^{(\sigma)}]$$

3.2 Решение модельной задачи

Отрезок от $-L$ до L . Начальные данные: 1 при отрицательных значениях, 0 при положительных.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$S = t, y = x - ut$$

$$Q(x, t) = Q(y(x, t), S(t))$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - u \frac{\partial Q}{\partial y} + u \frac{\partial Q}{\partial y} \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \Rightarrow$$

интеграл Пуассона

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{y}{2\sqrt{q\tau t \mathcal{D} S}}} e^{-z^2} dz \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x-ut}{2\sqrt{\mathcal{D} t}}} e^{-z^2} dz \right]$$

Подставить это дома и убедиться, что оно является решением уравнения.

3.2.1 Направленные разности.

рисунок фронта

Самое большое размытие при использовании чисто неявной схемы ($\sigma = 1$)

Меньше всего размывается явная схема ($\sigma = 0$).

То есть неявная схема ухудшает проблемы направленных разностей

3.2.2 Центральные разности

**рисунок фронта

Чисто неявная схема снова размывает сильнее.

($\sigma = 0.5$)

3.3 Диффузия и дисперсия

Дисперсия - скорость убывания волны зависит от амплитуды.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

$$Q(t, x) = e^{-P(m)t} e^{im(x-q(m)t)}$$

m - волновое число, $P(m)$ - скорость убывания амплитуды, $q(m)$ - скорость распространения волны, $i^2 = -1$.

$$Q = e^{-Pt} e^{im(x-qt)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u \frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

Подставим Q и посмотрим какими должны быть P и m , для того чтобы оно удовлетворяло уравнениям.

$$-P - imq + Uim = -\mathcal{D}m^2 - im^3p + \gamma m^4$$

$$P = \mathcal{D}m^2 - \gamma m^4$$

- скорость убывания

$$q = u + M^2\beta$$

- скорость волны

На амплитуду влияют четные производные (но они чередуются уменьшает-увеличивает-уменьшает-...)

скорость движения от третьей производной (нечетные производные) проверить с каким знаком.

3.4 Дифференциальное представление разностных схем

$L(Q) = 0$ Дифференциальное уравнение

$L_h^\tau(Q, \tau, h) = 0$ - Разностная схема

$L_H^\tau(Q) = L(Q) + \epsilon(Q, \tau, h) = 0$ - Погрешность аппроксимации

Не будем убирать погрешность и будем его рассматривать как бесконечный ряд.

$$L_h^\tau(Q) = L(Q) + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial Q}{\partial x^i} = 0$$

Процедура по созданию подобного представления (в общих чертах):

3.5 Дифференциально приближение для схемы с направленными разностями.

$$Q_t + uQ_{\bar{x}}^{(\sigma)} - \mathcal{D}Q_{\bar{x}}^{(\sigma)}x = 0$$

$$Q^{(\sigma)} = Q^{0.5} + (\sigma - 0.5)\tau Q_t = \frac{\hat{Q} + Q}{2} + (\sigma - 0.5)(\hat{Q}Q)$$

$$Q_t + uQ_{\bar{x}}^{(0.5)} - \mathcal{D}Q_{\bar{x}x}^{(0.5)} + u(\sigma - 0.5)\tau Q_{t\bar{x}} - \mathcal{D}(\sigma - 0.5)Q_{t\bar{x}x}$$

Разложим в точке $(t_k + \frac{\tau}{2}, x_i Q(t_k + \frac{\tau}{2})Q^{(0.5)})$

$$Q_t = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{t^2}{2} \frac{\partial^3 \bar{Q}}{\partial t^3} + \dots$$

$$Q^{(0.5)} = \bar{Q} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dots$$

и тд.

Как избавиться от высоких производных и смешанных производных по t и x. Метод дифференциального представления.

Лекция 4

4.1 Устойчивость разностных схем. Метод Неймана (Метод гармоник.)

$$Q(t, x) = e^{-p(m)t} e^{Im(x-qt)} - \text{Бегущая волна} = a(t) e^{Imx}$$

$$a(t) = e^{-t[p(m)+Imq]} \text{ Комплексная амплитуда}$$

$$p(m) = \mathcal{D}m^2, q = u \text{ Для нашего конкретного уравнения}$$

$$Q(t + \tau, x) = e^{-t+\tau} [\mathcal{D}m^2 + (Imq)] e^{Imx} = GQ(t, x)$$

G - Множитель перехода

$$G = e^{-\tau(\mathcal{D}m^2 = Imu)}$$

4.1.1 Явная схема с направленными разностями

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - c(Q_i^k - Q_{i-1}^k) + S(Q_{i+1}^k - 2Q_i^k + Q_{i-1}^k)$$

$$c = \frac{u\tau}{h} - \text{число Куррента}, S = \frac{\mathcal{D}\tau}{h^2} - \text{Тепловое число Куррента}$$

$$\begin{aligned} Q_i^k &= Q(t_k, x_i) = e^{-pt_k} e^{Im[x_i - qt_k]} = \\ &= e^{\tau k[p - Imq]} e^{Imhi} = \\ &= a_k e^{I\Theta i} \end{aligned}$$

$$\tau k = t_k, ih = x_i, \Theta = mh$$

Надо выяснить при каких P и Q при подстановке бегущей волны данное уравнение является решением нашего уравнения.

$$a_{k+1} e^{I\Theta i} = a_k e^{I\Theta i} - ca_k (e^{I\Theta(i-1)} + Sa_k (e^{I\Theta(i-1)} - 2e^{I\Theta i} + e^{I\Theta(i+1)}))$$

$$e^{emi}; a_{k+1} = a_k G$$

$$G = 1 - c(1 - e^{-I\Theta}) + S(e^{I\Theta} - 2 + e^{-I\Theta})$$

$$c(1 - e^{-I\Theta}) = 1 - \cos\Theta + i\sin\Theta$$

$$(e^{I\Theta} - 2 + e^{-I\Theta}) = 2\cos\Theta - 2$$

Напоминание:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$$

$$?? = 1 - (c + 2S)(1 - \cos\Theta) + I c \sin\Theta \text{ Множитель перехода со слоя на слой}$$

Схема устойчива тогда, когда $|G| > 1$

$$\Theta = mh$$

$$\lambda_{min} = 2h = \frac{2\pi}{m} - \text{минимальная длина волны}$$

$$\Rightarrow mh = \pi \text{ Короткие волны}$$

$$mh \rightarrow 0 - \text{Длинные волны}$$

$$1 - (c + 2S)(1 - \cos\Theta) - I c \sin\Theta$$

$$|G|^2 = 1 - 4(c + 2S)\sin^2\frac{\Theta}{2} + (c + 2S)^2 \cdot 4\sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-(c + 2S) + (c + 2S)^2\sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$-(c + 2S)(\sin^2\frac{\Theta}{2} + \cos^2\frac{\Theta}{2}) + (c + 2S)^2\sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$(c + 2S)[(c + 2S) - 1]\sin^2\frac{\Theta}{2} + [c^2 - (c + 2S)]\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0; \forall \Theta \in [0, \pi]$$

$$c + 2S - 1 < 0; c^2 - (c + 2S) < 0 - \text{Условия устойчивости}$$

Метод Неймана дает необходимое условие устойчивости, но вообще говоря не достаточное.

4.2 Изменение амплитуды волны.

$$|G|^2 = 1 + 4(c + 2S)\sin^2\frac{\Theta}{2} = 4(c + 2S)^2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos^2\frac{\Theta}{2}$$

Для волны $\Theta = mh \rightarrow 0$

$$|G|^2 = 1 - 4(c + 2S)\frac{(mh)^2}{4} + 4(c + 2S)^2\frac{(mh)^4}{2} + 4c^2\frac{(mh)^2}{4} = 1 + (mh)^2[c^2 - (c + 2S)] =$$

$$= 1 - (mh)^2[c + 2S - c^2]$$

$$|G| = 1 - (mh)^2(S + \frac{1}{2}c(1 - c))$$

$$|G| = 1 - (m^2h^2)(\frac{\mathcal{D}\tau}{h^2} + \frac{1}{2}c(1 - c)) =$$

$$= 1 - m^2\tau\mathcal{D} - \frac{1}{2}m^2h^2c(1 - c)$$

$1 - m^2\tau\mathcal{D}$ То как убывает волна в исх уравнении

$\frac{1}{2}m^2h^2c(1 - c)$ Добавка разностной схемы

$$|G| = e^{-\tau\mathcal{D}m^2} = 1 - \tau\mathcal{D}m^2$$

4.2.1 Коротко про устойчивость схемы с центральными разностями

$$Q_t + uQ_{x^0\mathcal{D}Q_{\bar{x}x}}$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - \frac{1}{2}c(Q_{i_k}^k - Q_{i-1}^k) + S(Q_{i-1}^k - 2Q_i^k + Q_{i+1}^k)$$

$$G = 1 - \frac{c}{2}(e^{I\Theta} - e^{-I\Theta}) + S(e^{-I\Theta} - 2 + e^{I\Theta}) =$$

$$= 1 - 4S\sin^2\frac{\Theta}{2} - 2cI\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2}$$

$$|G|^2 = 1 - 8S\sin^2\frac{\Theta}{2} + 16S^2\sin^4\frac{\Theta}{2} + 4c^2\sin^2\frac{\Theta}{2}\cos^2\frac{\Theta}{2} < 1$$

$$-2S + 4S^2\sin^2\frac{\Theta}{2} + c^2\cos^2\frac{\Theta}{2} < 0$$

$$\sin^2 \frac{\Theta}{2} [4S^2 - 2S] + \cos^2 \frac{\Theta}{2} [c^2 - 2S] < 0$$

$$2S^2 - S < 0; c^2 - 2S < 0 - \text{Условие устойчивости}$$

Рассмотрим для длинных волн

$$|G|^2 = 1 - 8S \sin^2 \frac{\Theta}{2} + 16S^2 \sin^4 \frac{\Theta}{2} + 4c^2 \sin^2 \frac{\Theta}{2} \cos^2 \frac{\Theta}{2} < 1$$

$$\begin{aligned} \approx &= 1 - 8S \frac{(mh)^2}{4} + 4c^2 \frac{(mh)^2}{4} = \\ &= 1 - (mh)^2 (2S - c^2) \end{aligned}$$

$$|G| \approx 1 - (mh)^2 S + (mh)^2 \frac{c^2}{2} =$$

$$1 - \frac{m^2 h^2 \mathcal{D}\tau}{h^2} + m^2 h^2 \frac{c^2}{2}$$

Длинные волны убывают медленнее чем в дифференциальном случае. (В прошлом примере было наоборот)

дз решить задачи из таблицы (хотя бы некоторые), позже возможно следует ей прислать.

Лекция 5

5.1 Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\rho \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = -\nabla p + \chi \Delta V = g\rho \quad (1)$$

$$\operatorname{div} V = (\nabla \cdot v) = 0 \quad (2)$$

$$\rho = \rho(p, t) = \rho_0(1 + \beta T) \quad (3)$$

V - вектор скорости p - Давление χ - коэффициент вязкости

$$\frac{D\rho}{Dx} = \{ \text{Полная производная} \} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\frac{D\rho}{Dx} + \rho \operatorname{div} V = 0$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div} V = 0$$

Жидкость несжимаема тоже самое, что полная производная равна 0, это одновременно означает что дивергенция равна 0.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} V = 0$$

Перепишем уравнение 1 в виде:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = -\nabla \frac{p}{\rho_0} + \nu \Delta V + F$$

$$\eta = \frac{\chi}{\rho_0} - \text{Кинетическая вязкость} \quad (4)$$

Из 4 Исключаем давление.

$$\Delta V = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} V;$$

$$(V \cdot \nabla)V = \operatorname{rot} V \times V + \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{rot} V \times V = -\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{V^2}{2} \right) - \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} V + F \quad (5)$$

Применим ротор к 5

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \nu \Delta \Omega + \operatorname{rot} F \quad (6)$$

пусть $V = (V_x(t, x, y))$

Лекция 5

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(V\omega) = \nu \Delta \omega$$

$$(u\omega) = W^x$$

$$(V\omega) = W^y$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\operatorname{div} V = 0$$

$$\Delta \psi = -\omega$$

$$\psi, \omega \text{ в узлах сетки } , u(i, j + \frac{1}{2}), V(i + \frac{1}{2}, j)$$

Тогда дивергенция по ячейке автоматически равна нулю. Ячейки называются нулю.

$$div V|_{S_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}}$$

Ячейка с центром в $U \ S(i, j + \frac{1}{2})$ Ячейка с центром в $V \ S(i + \frac{1}{2}, j)$

Аппроксимация производной по ω

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}$$

$$\int_{S_{i,j}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dx dy + \int_{S_{i,j}} (W^x + \frac{\partial}{\partial y} W^y) dx dy = \mu \int_{S_{i,j}} \Delta \omega dx dy$$

\overline{S} означает площадь

$$\frac{\partial}{\partial t} [\omega_{ij}] \overline{S_{ij}} = \frac{\partial}{\partial t} \omega_{ij} \overline{h_i^x h_i^y}$$

$$W=(W^x,W^y)$$

$$I_2 = \int_{S_{ij}} (\frac{\partial}{\partial x} W^x + \frac{\partial}{\partial y} W^y) dx dy = \int_{\partial S_{ij}} (w, n) dl =$$

$$= W_{i+\frac{1}{2},j}^x \overline{h_i^y} + W_{ij+\frac{1}{2},\overline{h_i^x}}^y - W_{i-\frac{1}{2},j}^x \overline{h_i^y} - W_{ij-\frac{1}{2},\overline{h_i^x}}^y$$

Делим на $\frac{1}{\overline{h_i^x h_i^y}}$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}}^x - W_{i-\frac{1}{2}}^y}{\overline{h_i}}$$

$$u_{i,j} = \frac{h_{i,j+\frac{1}{2}}^y u_{ij+\frac{1}{2}} + h_{ij-\frac{1}{2}}^y u_{i,j-\frac{1}{2}}}{2h_j^y}$$

$$V_{i,j} = \frac{h_{i+\frac{1}{2},j}^x V_{i+\frac{1}{2},j} + h_{i-\frac{1}{2},j}^x V_{i,j-\frac{1}{2}}}{2h_j^y}$$

$$u_{ij} = \psi_{y^0} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\overline{h_j^y}}, V_{ij} = \psi_{x^0} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\overline{h_j^x}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x = (u\omega)_{i\frac{1}{2},j}$$

6.1 Переинтерполяции

6.1.1 Переинтерполяция 1

$$W_{i+\frac{1}{2}}^x = \frac{1}{2}(u_{i+1,j}\omega_{i+1j} + u_{ij} + \omega_{ij})$$

$$W_{ij+\frac{1}{2}}^y = \frac{1}{2}(V_{ij+1}\omega_{ij+1} + V_{ij}\omega_{ij})$$

6.1.2 Переинтерполяция 2

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x = \frac{u_{i+1,j} + u_{ij}}{2} + \frac{\omega_{i+1,j}\omega_{ij}}{2}$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^y = \frac{V_{i,j+1} + V_{ij}}{2} + \frac{\omega_{i,j+1}\omega_{ij}}{2}$$

6.1.3 Первый способ применение

Начнем с первого способа.

$$\mathcal{K}_h(\psi, \omega) \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y = (W_{i+\frac{1}{2}}^x - W_{i-\frac{1}{2},j}^x) \bar{h}_i^y + (W_{ij+\frac{1}{2}}^y - W_{i,j-\frac{1}{2}}^y) \bar{h}_i^x$$

$$u_{i+1,j} = \psi_{y^0}(+1_x); u_{ij} = \psi_{y^0}$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x = \frac{1}{2}[\psi_{y^0}(+1_x)\omega_{i+1j} + \psi_{y^0}\omega_{ij}]$$

$$W_{i-\frac{1}{2},j}^x = \frac{1}{2}[\psi_{y^0}\omega_{i+1j} + \psi_{y^0}(-1_x)\omega_{i-1,j}]$$

$$W_{i+\frac{1}{2},j}^x - W_{i-\frac{1}{2},j}^x$$

$$\mathcal{K}_h(\psi, \omega) \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y = (W_{i+\frac{1}{2}}^x - W_{i-\frac{1}{2},j}^x) \bar{h}_i^y + (W_{ij+\frac{1}{2}}^y - W_{i,j-\frac{1}{2}}^y) \bar{h}_i^x =$$

$$\frac{1}{2}[\psi_{y^0}(+1+x)\omega_{i+1j} - \psi_{y^0}\omega_{i-1,j}] \bar{h}_i^y - \frac{1}{2}[\psi_{x^0}(+1_y)\omega_{ij+1} - \psi_{x^0} - \psi_{x^0}(-1_y)\omega_{ij-1}] \bar{h}_i^x$$

$$\mathcal{K}_h(\psi, \omega) = (\psi_{y^0}\omega)_{x^0} - (\psi_{x^0}^0\omega)_{y^0}$$

Теперь осталось проинтегрировать оператор лапласа.

$$I = \nu \int \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{\partial S_{ij}} ((grad \omega, n) dl)$$

Еще есть условие, его тоже надо аппроксимировать

$$\omega = -\Delta \psi$$

$$\int_{S_{ij}} \omega dx dy = - \int_{S_{ij}} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx dy = - \int_{\partial S_{ij}} (grad \psi, n) dl$$

$$= - \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}\bar{h}_i^x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j} \bar{h}_i^y - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x \right]$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{ij}}{h_{i+\frac{1}{2}}^x} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{ij}}{h_{j+\frac{1}{2}}^y}$$

Но что происходит на границе?

$$\omega_{ij} S_{i0} = \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},0} \bar{h}_0^y + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{i\frac{1}{2}} \bar{h}_i^2 - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{i-\frac{1}{2},0} \bar{h}_0^h - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,0} \bar{h}_i^x \right]$$

$$S_{i0} = \bar{h}_i^x \bar{h}_0^y$$

$$\bar{h}_0^y = \frac{h_{\frac{1}{2}}^y}{2}$$

$$- \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^y \bar{h}_0^y + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{ij+\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}j} \bar{h}_i^y - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x \right]$$

ψ на границе равно нулю \Rightarrow

$$\omega_{ij} \bar{h}_i^x \bar{h}_0^y = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x$$

$$\omega_{ij} = - \frac{2}{h_{\frac{1}{2}}^y} \frac{(\psi_{i1} - \psi_{i0})}{h_{\frac{1}{2}}^y}$$

$$\omega_{Ij} = - \frac{2}{(h_{\frac{1}{2}}^y)^2} \psi_{i1} - \text{итоговое граничное условие (условие Тома (Thom))}$$

6.2 Баланс кинетической энергии

Переобозначим скалярные произведения

$$f(x_i, y_i) \rightarrow (f, g)^0 = \sum_{(i,j) \in \bar{I} \times \bar{J}} f_{ij} g_{ij} s_{ij} = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} f_{ij} g_{ij} \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y$$

$$(f, g)_h^{(1)} = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y-1} f_{i,j+\frac{1}{2}} g_{i,j+\frac{1}{2}} \bar{h}_i^x \bar{h}_j^y + \frac{1}{2}$$

$$(f, g)_h^{(2)} = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} f_{i,j+\frac{1}{2}} g_{i+\frac{1}{2},j} \bar{h}_{i+\frac{1}{2}}^x \bar{h}_j^y$$