Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра вычислительных методов

ВАРИАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Москва, 2024

Содержание

Лекция 1 **3**
1.1 Исторический экскурс . . . 3
1.2 Метод Дирихле . . . 3
1.3 Контрпример Вейерштрасса. . . . 3
1.4 Контрпример Адамара . . . 3
1.5 Метод Ритца . . . 4

Лекция 2 **7**
2.1 Метод Бубнова – Галеркина . . . 7
2.2 Повторение . . . 8

Лекция 3 **11**
3.1 Формулы Грина . . . 11
3.2 Положительные операторы . . . 13
3.3 Положительно определенные операторы . . . 14
3.4 Энергетическая норма . . . 15

Лекция 4 **16**
4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2) . . . 16
4.2 Пример . . . 16
4.3 Пример 3 . . . 17
4.4 Энергетический метод . . . 17
4.5 Обобщение решения задачи о min для ф.э. . . . 17

Лекция **18**
5.1 Применение энергетического метода для краевых задач . . . 18
5.1.1 Теорема . . . 20
5.1.2 Теорема . . . 20
5.2 Основные кр задачи для ур-я Пуассона . . . 21

Лекция 6 **22**

Лекция 1

1.1 Исторический экскурс

Лекции с 9:30 два часа.

Вариационная постановка для задача мат физики. задача - условие на границе + начальное. (Экстремум функционала энергии, поэтому энергетические пространства).

Соболев - прямые методы решения задач. позволяют найти решение с помощью СЛАУ. Наиболее известен метод Рица.

1.2 Метод Дирихле

Дана область $\omega \in \mathbb{R}^2$.

$$M = u : u_0(x,y), (x,y) \in \partial\Omega$$
$$\iint_\Omega [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2] dxdy \to min$$

Интеграл Дирихле $\Rightarrow \overline{u}$ - гармонический в Ω

1.3 Контрпример Вейерштрасса.

$$M = y; y(x) \in c'[-1;1], y(-1) = -1, y(1) = 1$$
$$J(y) = int_{-1}^1 x^2 (y')^2 dx, J(y) \geq 0$$
$$y_\varepsilon(x) = \frac{arctg(\frac{x}{\varepsilon})}{arctg(\frac{1}{\varepsilon})}$$
$$y'_\varepsilon(x) = \frac{1}{arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} =$$
$$= \frac{\varepsilon}{arctg(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2 + x^2}$$
$$J(y_\varepsilon) = \int_{-1}^1 \frac{x^2\varepsilon^2}{arctg^2(\frac{1}{\varepsilon})} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx = frac2\varepsilon arctg(\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{0}{\frac{\pi}{2}}$$
$$J(\overline{y}) = \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Противоречие: $y(-1) = -1, y(1) = 1$

1.4 Контрпример Адамара

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\inf} \frac{\rho^2}{2^n} cos(2^n\Theta), x = \rho cos\Theta, y = \rho sin\Theta$$
$$\rho \leq 1$$

Непрерывны и гармоничны. Интеграл Дирихле в круге $\rho \leq r \leq 1$

$$\pi sum_{n=1}^{\inf} r^{2^{2n+1}} \to_{r\to 1} \inf$$

1.5 Метод Ритца

$$J(\omega) = int_a^b f(x, \omega, \omega', ..., \omega^{(k)})dx \to inf$$

$\omega \in M$ класс допустимых функций

$\psi_0, \psi_1, ...\psi_n, ...($ координатные функции)

Св-ва:

$$1)\forall a_1...a_n \in \mathbb{R}, \forall_n$$

$$\omega_n = \omega_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i \in M$$

$$2)\forall \omega \in M \text{и} \forall varepsilon > 0$$

Уравнение полноты

$$H(\omega n) = F(a_1, ..., a_n) \to inf$$

$$||\omega - \psi_0 - \sum_{i=1} n a_i \psi_i|| < \varepsilon$$

Рассмотрим:

$$J(\omega_n) = F(\alpha_1, ..., \alpha_n) \to inf$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1}(\omega_n) = 0, ... \frac{\partial J}{\partial a_n}(\omega_n) = 0 - \text{ альтернативная система уранений}$$

$$\Rightarrow a_1, ..., a_n - \text{ решение}$$

Насколько хорошо приближает метод искомое решение? На примере задачи об упругой пластине.

$$\Omega_{\subset \mathbb{R}^2} - \text{ обл }, S = \partial\Omega$$

изгиб $\omega(x, y)$ удовлетворяет ур-ю Сори Жульен

$$\Delta^2\omega = \frac{\partial^4}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4} = \frac{q(xy)}{\mathcal{D}}; (x, y) \in \Omega$$

$\mathcal{D} -$ жесткость пластины при упругом изгибе

$q(x, y),$- Интенсивность давления

$$\omega(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial\mathcal{D}} = 0 \leftarrow \text{ Производная по нормали к S}$$

$$J(\omega) = \iint_{Omega} (\frac{1}{2}(\Delta\omega)^2 - f(\omega)d\Omega \to inf)$$

$$f = \frac{q(x, y)}{\mathcal{D}} \in C'(\overline{\Omega})$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

Рассмотрим без доказательства ограниченности снизу.

$$\omega_1 = \frac{1}{8\pi}\iint_\Omega r^2 lnr f(\xi,\eta) d\xi\eta$$

$(x,y)(\xi,\eta) -$ точки из $\Omega r -$ расстояние между (x,y) и (ξ,η)

$$J(\omega) = J_0 + \frac{1}{2}\iint_\Omega (\Delta\omega_2)^2 dxdy$$

$j(\omega) \geq J_0 \Rightarrow \exists inf J(\omega)$

Введем $\psi_1(x,y),...,\psi_n(x,y)$ - координатные ф-ции

$$1)\psi_n(x,y), \frac{\partial^{k+l}\psi_n}{\partial x^k \partial x^l} \in C(\overline{\Omega}), k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon$$

$2)\psi_n(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$3)\forall$ ф-ии $\zeta(x,y)$:

а) удовлетворяет пункту 1

б) $\zeta(x,y) \equiv 0 (x,y) \in \Omega\rho$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1,...\alpha_m \in \mathbb{R}$:

$$|\zeta(x,y) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \psi_i(x_i,y_i)| < \varepsilon$$

$$|\frac{\partial^{k+1}\zeta}{\partial x^k \partial y^l} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial^{k+l}\psi_i(x,y)}{\partial x^k \partial y^l}| < \varepsilon$$

Условие полноты $k \leq \varepsilon, l \leq \varepsilon \Rightarrow$
приближенное решение :

$$\omega_n = \alpha_1\psi_1 + ... + \alpha_n\psi_n \to J(\omega)$$

$$J_n = \iint_\Omega (\frac{1}{2}(\Delta\omega_n)^2 - f(\omega_n))dxdy$$

α_i выбираем : $J(\omega_n) \to J(\omega)$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} a_k = B_i, i = \overline{1,n}$$

$$A_{ik} = \iint_\Omega \Delta\psi_i \Delta\psi_k dxdy \Rightarrow$$

$\exists!$ решение $a_1,...,a_n$ в $\omega_n = ...$ приближение решение

$$B_i = \iint_\Omega f\psi_i dxdy$$

$\rightarrow$ Сущ ед решения $a_1,...,a_n$в$\omega_n = ...$(приближенное решение)

Рассмотрим $\forall b_1,...b_n$

$\zeta_n = b_1\psi_n + ... + b_n\xi_n$

??b_i и $\sum_{i=1}^{n}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1} nA_{ik}a_k b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i B_i$$

$$\sum_{i=x}^{n}\sum_{k=1} n\iint_{\Omega} b_i\Delta\psi_i\Delta\psi_k a_k dxdy - \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Omega} fb_i\psi_i dxdy = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\iint_{\omega} b_i\Delta\psi_i\sum_{k=1}^{n} a_k\Delta\xi_k dxdy - \iint_{\Omega fb_i\psi_i dxdy}] = 0$$

...

$$\int_{O} mega(\Delta\omega_n\sum_{i=1} nb_i\psi_i) - f(\sum_{i=1} nb_i\psi_i)dxdy = 0$$

$$\iint_{O} mega(\Delta\Omega_n\zeta_n - f\zeta)dxdy = 0$$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\iint_{\Omega}(\Delta\omega_u)^2 dxdy \text{ не возрастает у } \geq inf$$

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ по критерию Коши } \Rightarrow N(\varepsilon)\forall_n > N(\varepsilon)$$

Лекция 2

$\varphi_1(x,y),...,\varphi_n(x,y)$ — координатные функции, $\qquad w_n = \alpha\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$

$$J_n^{(0)} = -\frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(\Delta w_n)^2 dxdy$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall m : 0 \leq J_n^{(0)} - J_{n+m}^{(0)} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\frac{\omega_{m+n} - \omega_n}{\sqrt{\varepsilon}} = \varphi(x,y)$$

$$\iint\limits_{\Omega}(\Delta\varphi)^2 dxdy < 1$$

Обозначим $S = \partial\Omega$ — границу области Ω

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S\left(\varphi\frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)dS + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega}\Delta\varphi\ln r\ d\xi d\eta$$

$$\left|\int\limits_x f(x)\overline{g}(x)dx\right|^2 \leq \left(\int\limits_x |f(x)|^2 dx\right)\left(\int\limits_x |g(x)|^2 dx\right)$$

$$|\varphi(x,y)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\iint\limits_{\Omega}(\Delta\varphi)^2 d\xi d\eta\right)^{1/2}\left(\iint\limits_{\Omega}\ln^2 r\ d\xi d\eta\right)^{1/2}$$

$$|\varphi(x,y)| \leq C_1$$

$$|\omega_{n+m} - \omega_n| \leq C_1\sqrt{\varepsilon}$$

$$\omega_n \underset{\Omega}{\rightrightarrows} w_n(x,y) \in C(\Omega)$$

2.1 Метод Бубнова – Галеркина

$w_n = \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_n\varphi_n$
$Lw - \lambda Mw = 0$
L, M — дифференциальные операторы
$\sum\limits_{i=1}^{n}(A_{ik} - \lambda B_{i_k})a_k = 0, \quad k = \overline{1,n}$

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda B_{11} & \dots & A_{1n} - \lambda B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} - \lambda B_{n1} & \dots & A_{nn} - \lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$N(x,y) = Lw_n - \lambda Mw_n$ — невязка
$N(x,y) \perp \varphi_i, \quad i = \overline{1,n}$

2.2 Повторение

1. $f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0$

2. $\int\limits_{\Omega} f(x)dx = 0, \;\; f(x) >= 0 \;\;\Rightarrow\;\; f(x) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$

3. $|f(x)| < \varphi(x), \varphi$ — суммируема по Лебегу $\Rightarrow f(x)$ — суммируема по Лебегу

4. $\{\varphi_n(x)\}$ — суммируемы с квадратами по Лебегу

   $\lim\limits_{n,k\to\infty} \int\limits_{\Omega} |\varphi_k(x) - \varphi_n(x)|^2 dx = 0$

Обозначим V – линейное пространство

(φ, ψ) – скалярное произведение: $\;\;(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$

1. $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$

2. $(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2, \psi) = a_1(\varphi_1, \psi) + a_2(\varphi_2, \psi)$

3. $(\varphi, \varphi) \geq 0$

4. $(\varphi, \varphi) = 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi = \mathbf{0}$

$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}$

- Неравенство Коши-Буняковского
  $|(\varphi, \psi)| \leq \|\varphi\|\|\psi\|$
- Неравенство треугольника
  $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$

$$L_2(\Omega) : \quad (\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

$$L_2(\Omega, \sigma) : \quad (\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\sigma(x)dx$$

$$L_2(\Omega^m) : \quad (\varphi, \varphi) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(x)}dx$$

Критерий линейной зависимости системы функций

$\varphi_1, ..., \varphi_n$ линейно зависима (ЛЗ) в H

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \dots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix} = 0$$

Опр. M — плотно в H, если $\forall p \in H$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi_n \in M : \|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$.

$C_0^{(\infty)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$$\uparrow$$

$$\begin{array}{lll} \forall \varepsilon > 0 : & \forall \varphi \in H & \exists \varphi_n^1 \in C_0^{(\infty)}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^1 - \varphi\| < \varepsilon/2 \\ & & \exists \varphi_n^2 \in C_0^{\infty}(\Omega) : \quad \|\varphi_n^2 - \varphi_n^1\| < \varepsilon/2 \\ & & ... \end{array}$$

$C_0^{(k)}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$

$\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система (ОНС)
$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$
$\|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 + ... + \|\varphi_n\|^2 + ...$

$\{\varphi_n\}$ полная в H, если из $(\varphi, \varphi_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathbf{0}$
$\forall \varphi \in H : \quad a_k = (\varphi, \varphi_k) -$ коэффициенты Фурье

Теор. H — гильбертово, $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система (ПОНС)

$\Rightarrow \|\varphi\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_k)|^2$ — равенство Парсеваля

Теор. $\exists a_k : \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, $\{\varphi_n\}$ — ПОНС в H, тогда:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$ сходится по $\| \cdot \|$ к $\varphi \in H$, при этом $\|\varphi\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

Опр. H сепарабельно если $\exists M-$ счетное мн-во плотное в H.

Теор. H сепарабельно $\Leftrightarrow \exists$ ПОНС (счетная или конечная) в H.

$\{u : \int\limits_{\Omega} u dx = 0\}$ — пример подпространства в $L_2(\Omega)$.

Пусть H_1 — подпространство в H
$\forall \varphi \in H \quad \exists ! \varphi_1 \in H_1 : \|\varphi - \varphi_1\| = \min\limits_{\psi \in H_1} \|\varphi - \psi\|$ — проекция φ на H_1
$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad H_2 = \varphi \perp H_1$ — ортогональное дополнение

l — линейный функционал : $\quad M \subset H \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$
$|l_\varphi| \leq \|l\| \cdot \|\varphi\|_H$
$\lim\limits_{\psi\to\varphi} l_\psi = l_\varphi \qquad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta : \|\psi - \varphi\| < \delta : \quad |l_\psi - l_\varphi| < \varepsilon$

Теор. (Рисса) $\forall l$ — непрерывного линейного функционала в H $\exists!\psi \in H : l_\varphi = (\varphi, \psi)$

Пусть M — плотно в H, $\quad \Phi : M \times M \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$
$\Phi(\varphi, \psi) : \Phi(\varphi, \psi) = \overline{\Phi(\psi, \varphi)}$
$\Phi(\varphi, \varphi)$ — квадратичная форма

$H : D_A \subset H$ — область определения некоторого оператора A
Линейный оператор A ограничен $\Leftrightarrow$ A непрерывен
$\varphi \in D_A, \quad A\varphi \in R_A$ — область значений оператора A
$\varphi \in D_A \to! \ A\varphi \in R_A$

Лекция 3

$$\left.\begin{array}{l} Au = f \\ u, f \in H \end{array}\right| \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad H = L_2(\Omega)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & f \in C(\overline{\Omega}) \\ u|_s = 0 \end{cases}$$

$$D_A = \{u \in C^2(\overline{\Omega});\ \ u|_s = 0\}$$

$$A = -\Delta u$$

Формула Остроградского

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\right) d\Omega = \int\limits_{S} \Big(\varphi \cos(\overline{n} \cdot x) + \psi \cos(\overline{n} \cdot y) + \omega \cos(\overline{n} \cdot z)\Big) dS$$

$$W = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix} \qquad\qquad \int\limits_{\Omega} \mathrm{div} W d\Omega = \int\limits_{S} W_n dS$$

Пусть $\varphi = uv,\ \psi = \omega = 0$

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int\limits_{S} uv \cos(\overline{n} \cdot x) dS$$

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int\limits_{S} uvcos(\overline{n} \cdot x_i) dS \qquad \text{в } \mathbb{R}^m \tag{0}$$

3.1 Формулы Грина

$$Lu = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik}(P) \frac{\partial u(P)}{\partial x_k}\right) + C(P) u(P)$$

$$D_L = \{u \in C^2(\overline{\Omega})\}, \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad C(P) \in C(\overline{\Omega})$$

$$A_{ik}(P) \in C(\overline{\Omega}), \quad A_{ik}(P) = A_{ki}(P)\ \ \forall P, \quad i, k = \overline{1, n}$$

$$\int\limits_{\Omega} vLud\Omega = -\sum_{i,k=1}^{m}\int\limits_{\Omega} v\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)d\Omega + \int\limits_{\Omega} Cuvd\Omega$$

в (0) подставим $u \to v, v \to A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}$

$$\int\limits_{\Omega} vLud\Omega = \int\limits_{\Omega}\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega + \int\limits_{\Omega} Cuvd\Omega - \int\limits_{S} v\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{1}$$

$$\int\limits_{\Omega} uLud\Omega = \int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + Cu^2\right]d\Omega - \int\limits_{S} u\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i)dS \tag{2}$$

из (1) вычитаем ее же, но поменяв местами u и v: $\qquad (1) - (1)_{u\rightleftarrows v}$

$$\int\limits_{\Omega}(vLu - uLv)d\Omega = \int\limits_{\Omega}\left[\cancelto{0}{\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_k}}\right]d\Omega -$$
$$-\int\limits_{S}\left[v\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_i) - u\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}cos(\overline{n}\cdot x_k)\right]dS$$

$$N\bullet := \sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial\bullet}{\partial x_i}cos(\overline{n}\cdot x_i)$$

$$\int\limits_{\Omega}(vLu - uLv)\,d\Omega = \int\limits_{S}(uNv - vNu)\,dS \tag{3}$$

Частный случай формул Грина, это оператор Лапласа:

$$Lu = -\Delta u;\ A_{ii} = 1;\ A_{ik} = 0,\ i \neq k;\ C = 0$$

$$-\int\limits_{\Omega} v\Delta ud\Omega = \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}d\Omega - \int\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{4}$$

$$-\int\limits_{\Omega} u\Delta ud\Omega = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \int\limits_{S} u\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{5}$$

$$-\int\limits_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)d\Omega = \int\limits_{S}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS \tag{6}$$

3.2 Положительные операторы

Пусть оператор A симметричен в H

Опр. Оператор называется положительным, если $\forall u \in D_A \subset H, \qquad (Au,u) \geq 0 \Leftrightarrow u = 0$

Пр. 1

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u \qquad \text{в } L_2(0,1); \qquad D_B = \{u \in C_0^2(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}$$

$$(Bu,v) = -\int\limits_0^1 v\frac{d^2u}{dx^2}dx = \int\limits_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx - v\left.\frac{du}{dx}\right|_0^1 = -\int\limits_0^1 u\frac{d^2v}{dx^2} = (u,Bv) \quad \forall u,v \in D_B$$

$$(Bu,u) = \int\limits_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0$$

$$(Bu,u) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 \Rightarrow u = const, u(0) = 0 \Rightarrow u = 0$$

Пр. 2

$$Cu = -\frac{d^2}{dx^2}u, \qquad D_C = \left\{u \in C^2(0,1), \begin{cases} u'(0) + \alpha u(0) = 0 \\ u'(1) + \beta u(1) = 0 \end{cases} \alpha, \beta = const\right\}$$

$$(Cu,v) = \int\limits_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx + \alpha u(0)v(0) + \beta u(1)v(1) = (u,Cv)$$

$\alpha > 0, \beta \geq 0$

$$(Cu,u) = \int\limits_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \alpha u^2(0) + \beta u^2(1) \geq 0$$

$\alpha = \beta = 0, \quad u \equiv 1 \Rightarrow (Cu,u) = 0 \Rightarrow C$ не является положительным

Пр. 3

$$Au = -\Delta u, \qquad D_A = \{u \in C^2(\Omega) : \quad u|_s = 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^m, S = \partial\Omega, H = L_2(\Omega)\}$$

$$(Au,u) = (-\Delta u, u) = -\int\limits_\Omega u\Delta u d\Omega = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega - \cancelto{0}{\int\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS} \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = const, \; u|_s = 0 \Rightarrow u = 0$$

Рассмотрим мембрану
Ω в плоскости (x, y), $u(x, y)$ — изгиб мембраны

$$-\Delta u = \frac{q}{T}$$

q — поперечная нагрузка на единицу площади
T — натяжение мембраны
$u|_S = 0$ — мембрана закреплена на краях

$$(Au, u) = (-\Delta u, u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy$$

3.3 Положительно определенные операторы

Опр. Симметричный оператор A называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 : (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2 \tag{7}$$

Пр. 1 (продолжение)

$$B : u(0) = 0, u \in D_B$$

$$u(x) = \int\limits_0^x u'(t)dt, \quad x \in [0, 1]$$

$$u^2(x) \leq \int\limits_0^x 1^2 dt \cdot \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt = x \int\limits_0^x (u'(t))^2 dt \leq x \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$$\int\limits_0^1 u^2(x)dx \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (u'(t))^2 dt$$

$\gamma^2 \|u\|^2 \leq (Bu, u), \quad \gamma = \sqrt{2} \quad \Rightarrow B$ является положительно определенным

Пр. 4

$$Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^3 \frac{du}{dx}\right) \quad \text{в } L_2(0, 1)$$

$$D_L = \{u \in C^2[0, 1],\ u(1) = 0\}$$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dx}\left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right] dx = \left[x^3\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 0$$

$(Lu, u) = \int\limits_0^1 x^3 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \geq 0 \quad \Rightarrow L$ является положительно определенным

$$\frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} \geq \gamma^2, \qquad u_\delta(x) = \begin{cases} (\delta - x)^3, & 0 \leq x \leq \delta \\ 0, & \delta \leq x \leq 1 \end{cases}, \qquad u_\delta \in \mathcal{D}_L$$

$\frac{(Lu_\delta, u_\delta)}{\|u_\delta\|^2} = \frac{\int_0^1 x^3 (\frac{du_\delta}{dx})^2 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^3 dx} = \frac{9\int_0^1 x^3 (\delta - x)^4 dx}{\int_0^\delta (\delta - x)^6 dx} = \frac{9}{40}\delta \quad \Rightarrow L$ не явл. положительно опр.

3.4 Энергетическая норма

Пусть A — положительно определен в H (гильберт.)
На $D_A:\quad [u,v]_A = (Au,v)_H$
Можно показать что выполняются все аксиомы скалярного произведения

1. $[u,v]_A = \overline{[v,u]}_A$
   $(Au,v) = (u,Av) = \overline{(Av,u)} = \overline{[v,u]}$
2. $[a_1u + a_2u, v] = a_1[u,v] + a_2[u,v]$
3. $(Au,u) = [u,u] \geq \gamma\|i\|^2 \geq 0$
4. $[u,u] = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$|u| = [u,u]$ — энергетическая норма
D_A предгильбертово, дополним его по $|\cdot|_A \;\Rightarrow\;$ гильбертово пр-во H_A

$$u \in H_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u \in D_A \\ \exists u:\ \{u_n\} \in D_A:\ |u_n - u| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{array}\right.$$

Лекция 4

4.1 10.02 Энергетические пр-ва (2)

$H_A -$ энергетическое пр-во

(0)

$$||u||_H \leq \frac{1}{\gamma}||u||_A$$

$$u \in H_A -> u \in \mathcal{D}_A$$

$$-> \exists\{u_n\} \in \mathcal{D}_A lim_{n->\infty}||u_n - u||_A$$

Теорема

$\forall\exists u \in H_A ->$ злем из H различным $u_1 u_2 \in H_A$ отв разн. злем из H

Доказательство

...

2)

$$u_{1,n} \to_{||.||_A} u_n; u_{2,n} - \to_{||.||_A} u_2$$

u_1 и $u_2 \to u$ из H ; $u = u_1 - u_2$

...

$$r \in HA \in \{\in u_n \mathcal{D}_A ||u_n - n||_A \to_{n\to\infty} 0\}$$

$$||u_n||_A \to_{n\to\infty} ||u||_A$$

4.2 Пример

$$Bu = -\frac{d^2}{dx^2}u; D_B = u \in C^2(0,1], u(0) = u(1) = 0$$

$$H =:_2 (0,1);$$

$$u \in H_B; \exists\{u_n\} \in D_B ||u_h - u|| \to_{B\to\infty} \to 0$$

...

A - положительно, но не положительно определено.

Теорема

$$u \in H_A : u \in H \rightleftarrows \exists\{u_n\} \in D_A$$

$$||u = u_n|| \to_{n\to\infty} 0$$

$$||u_k - u_n||_H \to_{u,k\to+\infty} 0$$

4.3 Пример 3

4.4 Энергетический метод

(для положительно определенных операторов)

$$Au = f$$

$$A : \mathcal{D}(A) \in H \to H;$$

Теорема
А положителен в Н уравнении **??** $\exists$ не более одного решения.
Доказательство

$$u_1, u_2 - \text{ Решения } \mathbf{??}...$$

Теорема о функциональной энергии
А - положительный в Н; u - решение **??** $\rightleftarrows$ доставляет минимум функционала

$$F(u) = (Au, u)_H - (f, u)_H - (u, f)_H$$

Доказательство
...

Пример 4

$$\Delta^2\omega = \frac{\partial^4}{\partial x^4}\omega + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial^2\omega\partial^2 y} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4}$$

$$\mathcal{D}_A = \{\omega \in c^4(\overline{\Omega}); \omega|_S = 0; \frac{\partial\omega}{\partial n}|_S = 0\}$$

$$A - \omega = \frac{a(x, y)}{\mathcal{D}}$$

4.5 Обобщение решения задачи о min для ф.э.

$$A - \text{ Поллжительно определено в Н } Au = f\mathbf{??}f \in H$$

фикс $f \in H \forall u \in H_A (u, f)_H :$ ф-ла $: H_A \to \mathcal{R}$

$$|(u, f)_H| \leq ||f||_H ||u||_H \leq ||f||_H \frac{1}{\gamma} ||u||_A; \gamma ||f||_H - const$$

Опр $(f,u) \Rightarrow$ по Т Рисса $\exists u_0 \in H_A (f,u)_H = [u,u_0]_A$

$$F(u) = [u,u]_A - [u,u_0] - [u_0,u]_A$$

$$+ - [u_0,u_0]_A$$

$$F(u) = ||u-u_0||_A^2 - ||u_0||_A^2$$

$argmin_{u \in H_A} F(u) = u_0$ Обощенное решение $Au = f$

Если H сепарабельно, энергетическое про-во тоже сепарабельно, $\exists \{\omega_n\}$ ПОНС

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [u_0, \omega_n]\omega_n \mathbf{??}$$

$$u = \omega_n [u_0 \omega_n]_A = (f, \omega_n)_H$$

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f,\omega_n)_H \omega_n$$

Лекция

5.1 Применение энергетического метода для краевых задач

1. Немного опазадал, пример часть примера пропустил ...

   $$(Lu,u)_H = \sum_{k=0}^{m} \int_{x_1}^{x_2} p_k(x) (\frac{d^k u}{dx^k})^2 dx >= \int_{x_1}^{x^2} p_{n_1}(x) (\frac{d^m u}{dx^n} dx^3) >= p_0 \int_{x_1}^{x^2} (\frac{d^m u}{dx^m} dx = p_0 ||u_(m)||_H^2)$$

   ...

   $$(Lu_M) >= \partial^2 ||u||_H^2, \gamma = \sqrt{p_0} (\frac{\sqrt{2}}{x_2 - x_1})^m$$

   ...

   $$||u||_A \leq \sqrt{p_0} ||u||^{(m)}{}_H \exists \{u_N(x)\}$$

   $$lim_{n \to \infty} = 0; u_0 - \text{ точное решение}$$

   $$||u_n - u_k||_A <= ||u_n - u_0||_A + ||u_k - u_0||_A \to 0$$

   $$u_n^{(l)}(x_1) = u_k^(l)(x_1) = 0, l = \overline{0, m-1}$$

   ...

2. Изгиб балки

$$L_\omega = \frac{d^2}{dx^2}[EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2}] + K\omega = q(x)$$

$\omega -$ Прогиб балки

$E -$ модуль Юнга

$I(x) -$ момент инерции

$q(x) -$ интенсивность нагрузки на балку

$K -$ коэф податливости основания

$$\omega(0) = \omega(l) = 0$$

$\omega'(0) = \omega'(l) = 0; A -$ Положительно определен

Аналогично задачи минимизации функционала

$$F(\omega) = \int_0^l (EI(x)\omega''^2 + K\omega^2 - 2q(x\omega))dx = (L\omega, \omega) - 2(\omega, q)$$

Воспользуемся методом Рица

$u_n(x)_{n=1}^{\infty}, \phi_n(x) = (x-l)^2 x^{n+1},$ Полная система в H_A

$$\omega_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x) = (x-l)^2 \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k+1}$$

$$\sum_{n}^{k=1} a_k A_{1k} = b_{ij}; i = \overline{1,n}$$

$$b_j = (q, \phi_j)_H = \int_0^l a(x)(x-l)x dx$$

$$A_{ik} = (L\phi_i, \phi_k)_H = \int_0^l (EI(x)\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_k}{dx^2} + k\phi_i\phi_k)dx$$

...

$$\omega(0) = 0; \omega''(l) = 0$$

$$\omega'(0) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(EI(x)\frac{d^2\omega}{dx^2})_{x=0}^{x=l} = 0$$

Тут тоже можно доказать полажительную определенность

3. Краевая задача для систем ОДУ

$$-\sum_{k=1}^{s}[\frac{d}{dx}(p_{jk}(x)\frac{du_k(x)}{dx}) - q_{jk}(x)u_k(x)] = f_j(x)$$

краевые ...

$$-\frac{d}{dx}[P(x)\frac{du}{dx}] + Q(x)u(x) = f(x)$$

$$u(x_1) = u(x_2) = 0$$

$$(u,v)_{H=L_2(x_1,x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} u(x)\cdot v(x)dx = \int_{x_1}^{x_2}\sum_{k=1}^{s} u_k(x)v_k(x)dx$$

5.1.1 Теорема

$$P(x), Q(x) \text{ симметр. } x \in [x_1, x_2] \Rightarrow A \text{ Симметричный}$$

Доказательство

$$(Au,v)_H = -\int_{x_1}^{x^2} v(x)\cdot\frac{d}{dx}[P(x)\frac{du}{dx}]dx + \int_{x_1}^{x_2} v(x)\cdot Q(xu(xdx)) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} P\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx} + v(x\cdot Q(x)u(x))dx$$

$$Qu\cdot v = \sum_{j,k=1}^{s} q_{jku_k\cdot v_j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{s} q_{k,j}v_j\cdot v_k$$

Следовательно оператор симметричен

5.1.2 Теорема

$$P(x), Q(x) \text{ симметрич на } [x_1, x_2]$$

$$P(x) \text{ положит. опр. } Q(x) \text{ неотр на } (x_1, x_2] \Rightarrow A \text{ положительно определен}$$

доказательство

$$P(x) \text{ пол. опр } \forall x \Rightarrow \text{ пусть } \lambda_1(x) > 0$$

$$\exists\lambda > 0 = const; \lambda_1(x) > \hat{\lambda} > 0 x \in [x_1, x_2]$$

$$\forall t = (t, ..., s)$$

$$P(x)t\cdot t=\sum_{j,k=1}^{s}P_{jk}(x)t_jt_k\geq\lambda_1(x)\sum_{k=1}^{s}t_k^2\geq$$

$$\geq\hat{\lambda}\sum_{k=1}^{s}t_k^2$$

$$Q(x)t\cdot t=\sum_{k,k=1}^{s}q_{jk}t_jt_k\geq 0$$

$$(u,u)_H=\int_{x_1}^{x_2}(P\frac{du}{dx}\cdot\frac{du}{dx})dx\geq\hat{\lambda}\int_{k=1}^{s}(\frac{du_k}{idx}^2)dx$$

$$(Au,u)_H\geq\frac{2\hat{\lambda}}{(x_2-x_1)^2}\int_{x_1}^{x_2}(\sum_{k=1}^{s}u_k^2)dx=\frac{2\hat{\lambda}}{(x_2-x_1)^2}dx=\frac{\hat{\lambda}}{(x_2-x_1)^2}||u||_H^2$$

$$(Au,u)_H\geq\gamma^2||u||_H^2$$

...

5.2 Основные кр задачи для ур-я Пуассона

$$-\Delta u=f(p)\text{ в }\Omega\in\mathcal{R}^m$$

з. Дирихле

$$u|_{\partial\Omega}=0$$

$$Au=-\Delta u=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}$$

$$P_A=\{u\in c^2(\overline{\Omega}_1)u|_{2\Omega}=0\}$$

$$H=L_2(\Omega)$$

$$(-\Delta,u)_h=\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial n}{\partial x_i})^2d\Omega-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial n}dS=\int_\Omega(grubu)^2d\Omega\geq 0$$

$\rightleftarrows$

$$F(u)=(-\Delta u,u)_H-2(u,f)_H$$

$$F(u)=\int_\Omega((gradu)^2-2uf)d\Omega$$

$$[\frac{\partial u}{\partial n}+\gamma(P)u]|_{\partial\Omega}=0$$

$$(-\Delta u,u)_H=\int_\Gamma (gradu)^2 d\Omega+\int_{\partial u^2} dS\geq 0$$

$$(-\Delta u,u)_H=0\Rightarrow u=condt\int_{\partial\xi}\gamma c^2 dS=0\Rightarrow c=0\Rightarrow u=0$$

$$F(u)=\int_\Omega((gradu)^2-2uf)d\Omega+\int_{\gamma\Omega}\gamma n^2 dS$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}=0$$

з Неймана
5.2, 5.2

$$(-\Delta,u)_H=-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial n}dS+\int_\Omega(gradu)^2 d\Omega\geq$$

$$u==1(-\Delta u,u)_H=0$$

при $V==1$

$$\int_\Omega\Delta u d\Omega=\int_{\partial\overline{\Omega}}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$$

$$S_\Omega f d\Omega=0$$

Условие разрешимости 5.2 5.2

Лекция 6

**пропустил начало (почти треть) **
Уравнение Фридрехса в общем виде:

$$\int_\omega\sum_{k=1}^m(\frac{\partial n}{\partial x_k})^2 d\Omega\geq x^2\int_\Omega u^2 dx$$

$$u|_S = 0$$

$$\int_\Omega u^2 d\Omega = \leq c\{\int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \frac{\partial n}{\partial y} d\Omega) + \int_\Omega u^2 dS\}$$

$$(\frac{\partial(fv)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial(fv)}{\partial y})^2 = f^2[(\frac{\partial v}{\partial x} + (\frac{\partial v}{\partial y})^2)] - vf\Delta f + \frac{\partial}{\partial x}(v^2 f \frac{\partial f}{\partial x})\frac{\partial}{\partial y}(v^2 f \frac{\partial f}{\partial y})$$

Преобразуем правую и левую части

$$v^2((\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2) + f^2((\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2) + 23\frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$v^2(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + v^2(\frac{\partial f}{\partial y})^2 + 2v\frac{\partial v}{\partial x} f \frac{\partial f}{\partial x} + v^2 f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}^2_v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} - v^2 f\Delta f + f[(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2]$$

Это предполагается очевидным XD

$$\int((\frac{\partial(fv)}{\partial x})^2 + (\frac{\partial(fv)}{\partial y})^2) d\Omega \geq + \int_\Omega vf\Delta f d\Omega + \int_{\partial\Omega} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

$$-\int_\Omega vf\Delta f d\Omega \leq \int_\Omega ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS$$

$$f = \sin(\frac{\pi x}{a}) \cdot \sin(\frac{\pi y}{b})$$

$$\Delta f = -\pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \cdot f - \int_\Omega v^2 f \Delta u^2 = \int_\Omega u^2 s\Omega\pi^2()$$

$$|\int_{\partial u} v^2 f \frac{\partial f}{\partial n} dS| \leq \int_{\partial\Omega} v^2 f |\frac{\partial f}{\partial n}| dS \leq c_1 \int_{\partial\Omega} u^2 d\Omega$$

$$\pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \int_\Omega y^2 d\Omega \leq ((\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2) dx + c_1 \int_{\partial\Omega} v^2 dS$$

$$c = min\{\frac{c_1}{\pi^2(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}; \frac{1}{\pi}(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})\}$$

$$(-\Delta u, u)_H = \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geq \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega + \sigma \int_{\partial\Omega u^2 dS} \geq \sigma\{(gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS\}$$

$$\frac{1}{c}||u||_H^2 \leq \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\frac{\sigma_1}{c}||u||_H^2 \leq \int_\Omega (gradu)^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 dS$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma}{c}}$$