Разностные схемы для уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Лекция 8

О.С.Мажорова

Сентябрь 2020 г.

Разностная формула Грина.

$$(\Delta\omega,\psi)_h^{(0)} = \sum_{(i,j)\in I\times J} \hbar_i^x \hbar_j^y (\omega_{x\tilde{x}} + \omega_{y\tilde{y}})\psi_{ij} = \sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \sum_{i=1}^{N_x-1} (\omega_x - \omega_{\bar{x}})\psi_{ij} + \ldots =$$

$$\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \left[\sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_x\psi_{ij} - \sum_{i=0}^{N_x-2} \omega_x\psi_{i+1j}\right] \ldots = -\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \left[\sum_{i=1}^{N_x-2} \omega_x\psi_x h_{i+1/2}^x + \right.$$

$$\left. \omega_x(N_x-1,j)\psi_{N_x-1j} - \omega_x(0,j)\psi_{1j}\right] + \ldots = -\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \sum_{i=0}^{N_x-1} \omega_x\psi_x h_{i+1/2}^x + \ldots$$

$$-\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \sum_{i=0}^{N_x-1} (\omega_{i+1j} - \omega_{ij})\psi_x + \ldots = -\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \left[\sum_{i=1}^{N_x} \omega_{ij}\psi_{\bar{x}} - \sum_{i=0}^{N_x-1} \omega_{ij}\psi_x\right] + \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{N_y-1} \hbar_j^y \left[\sum_{i=1}^{N_x-1} \omega_{ij}(\psi_x - \psi_{\bar{x}}) + \omega_{N_x j}\psi_{\bar{x}}(N_x,j) - \omega_{0j}\psi_x(0,j)\right] + \ldots = -\sum_{(i,j)\in I\times J} dS_{ij}\omega_{ij}^2$$

Уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uT)+\frac{\partial}{\partial y}(vT)=\kappa\triangle T \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\omega)+\frac{\partial}{\partial y}(v\omega)=\frac{1}{Re}\triangle\omega$$

Уравнения переноса тепла и переноса завихренности имеют совершенно одинаковую структуру. Умножим уравнение (1) скалярно на T:

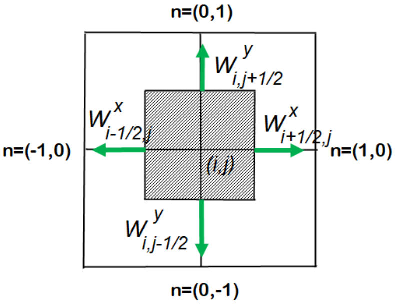
$$\int\limits_{\mathcal{D}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(T)^2dxdy+\int\limits_{\mathcal{D}}\frac{\partial}{\partial x}(uT)T+\frac{\partial}{\partial y}(vT)Tdxdy=\kappa\int\limits_{\mathcal{D}}\triangle T\cdot Tdxdy.$$

$$\int\limits_{\mathcal{D}}\frac{\partial}{\partial x}(uT)T+\frac{\partial}{\partial y}(vT)Tdxdy=-\int\limits_{\mathcal{D}}\left[uT\frac{\partial T}{\partial x}+vT\frac{\partial T}{\partial y}\right]dxdy \qquad (2)$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}}\left[u\frac{\partial T^2}{\partial x}+v\frac{\partial T^2}{\partial y}\right]dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}}T^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]dxdy=0$$

Как добиться, чтобы (2) выполнялось?

Аппроксимация конвективных членов.(Лекция 7)



Потоки в серединах сторон ячейки S_{ij} :

$$W^x_{i+1/2j}=0.5(u_{i+1j}\omega_{i+1j}+u_{ij}\omega_{ij})$$

$$=0.5(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}+\psi_{\mathring{y}}\omega_{ij})$$

$$W^y_{ij+1/2}=0.5(v_{ij+1}\omega_{ij+1}+v_{ij}\omega_{ij})$$

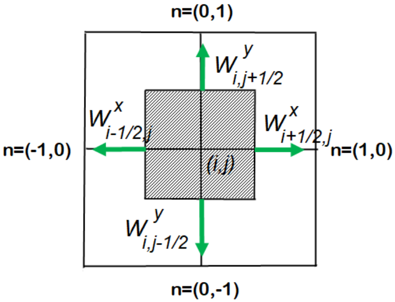
$$=-0.5(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)\omega_{j+1}+\psi_{\mathring{x}}\omega_{ij})$$

$$\mathcal{K}_h(\psi,\omega)\hbar^x_i\hbar^y_j=\left(W^x_{i+1/2j}-W^x_{i-1+1/2j}\right)\hbar^y_j+\left(W^y_{ij+1/2}-W^x_{ij-1/2}\right)\hbar^x_i=$$

$$0.5\left(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)\omega_{i+1j}-\psi_{\mathring{y}}(-1_x)\omega_{i-1j}\right)\hbar^y_j-0.5\left(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)\omega_{j+1}-\psi_{\mathring{x}}(-1_y)\omega_{j-1}\right)\hbar^x_i$$

$$\mathcal{K}^{(1)}_h(\psi,\omega)=(\psi_{\mathring{y}}\,\omega)_{\mathring{x}}-(\psi_{\mathring{x}}\,\omega)_{\mathring{y}}$$

Аппроксимация конвективных членов в уравнении теплопроводности.



Потоки в серединах сторон ячейки S_{ij} :

$$W^x_{i+1/2j}=\frac{u_{i+1j}+u_{ij}}{2}\cdot\frac{T_{i+1j}+T_{ij}}{2}$$
$$=\frac{1}{4}(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)+\psi_{\mathring{y}})(T_{i+1j}+T_{ij})$$
$$W^y_{ij+1/2}=\frac{v_{ij+1}+v_{ij}}{2}\cdot\frac{T_{ij+1}+T_{ij}}{2}$$
$$=-\frac{1}{4}(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)+\psi_{\mathring{x}})(T_{ij+1}+T_{ij})$$

$$\mathcal{K}_h^{(2)}(\psi,T)\hbar_i^x\hbar_j^y=(\psi_{\mathring{y}}(i+1/2)T_{i+1/2j}-\psi_{\mathring{y}}(i-1/2)T_{i-1/2j})\hbar_j^y-$$
$$(\psi_{\mathring{x}}(j+1/2)T_{ij+1/2}-\psi_{\mathring{x}}(j-1/2)T_{ij-1/2})\hbar_i^x$$

$$\mathcal{K}_h^{(2)}(\psi,T)=W^x_{\tilde{x}}+W^y_{\tilde{y}}$$

Проверим выполнение условия (2) для этой аппроксимации.
(С граничными условиями разберитесь, пожалуйста, самостоятельно)

Вычисление скалярного произведения.

$$\frac{1}{4}\sum_{ij}\hbar_j^y\Big[T_{ij}(\psi_{\mathring{y}}(+1_x)+\psi_{\mathring{y}})(T_{i+1j}+T_{ij})-T_{ij}(\psi_{\mathring{y}}+\psi_{\mathring{y}}(-1_x))(T_{ij}+T_{i-1j})\Big]-$$

$$\frac{1}{4}\sum_{ij}\hbar_i^x\Big[T_{ij}(\psi_{\mathring{x}}(+1_y)+\psi_{\mathring{x}})(T_{ij+1}+T_{ij})-T_{ij}(\psi_{\mathring{x}}+\psi_{\mathring{x}}(-1_y))(T_{ij}+T_{ij-1})\Big]$$

$$\overset{(1)}{\sum}=\frac{1}{4}\sum_{ij}\hbar_j^y\Big[\underline{T_{i-1j}\psi_{\mathring{y}}(T_{ij}+T_{i-1j})}+\underline{\underline{T_{ij}\psi_{\mathring{y}}(T_{i+1j}+T_{ij})}}\Big]-$$

$$\frac{1}{4}\sum_{ij}\hbar_j^y\Big[\underline{T_{ij}\psi_{\mathring{y}}(T_{ij}+T_{i-1j})}+\underline{\underline{T_{i+1j}\psi_{\mathring{y}}(T_{i+1j}+T_{ij})}}\Big]=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{ij}\hbar_j^y\Big[\psi_{\mathring{y}}(T_{i-1j}-T_{ij})(T_{i-1j}+T_{ij})+\psi_{\mathring{y}}(T_{ij}-T_{i+1j})(T_{ij}+T_{i+1j})\Big]=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{ij}\hbar_j^y\Big[\psi_{\mathring{y}}(T_{i-1j}^2-T_{i+1j}^2)\Big]=-\frac{1}{2}\sum_{ij}\hbar_i^x\hbar_j^y\psi_{\mathring{y}}T_{\mathring{x}}^2$$

$$\overset{(1)}{\sum}+\overset{(2)}{\sum}=\frac{1}{2}\sum_{ij}\hbar_i^x\hbar_j^y\Big[-\psi_{\mathring{y}}T_{\mathring{x}}^2+\psi_{\mathring{x}}T_{\mathring{y}}^2\Big]=\frac{1}{2}\sum_{ij}\hbar_i^x\hbar_j^y\Big[T_{ij}^2\psi_{\mathring{y}\mathring{x}}-T_{ij}^2\psi_{\mathring{x}\mathring{y}}\Big]=0$$

Аппроксимация $\mathcal{K}_h^{(2)}(\psi,T)$ годится для уравнения теплопроводности.

Аппроксимация по времени.

Рассмотрим семейство разностных схем с весами, полученное в результате дискретизации по времени дифференциально - разностного уравнения переноса завихренности (Лекция 6)

$$\omega_t + \mathcal{K}_h\left(\psi^{(\sigma_1)}, \omega^{(\sigma_2)}\right) = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\omega_{x\tilde{x}}^{(\sigma_3)} + \omega_{y\tilde{y}}^{(\sigma_3)}\right) \tag{3}$$

$$\psi_{x\tilde{x}} + \psi_{y\tilde{y}} = -\omega \tag{4}$$

На границе:

$$\mathcal{G}\left(\omega^{(\sigma_3)}, \psi^{(\sigma_4)}\right) = 0. \tag{5}$$

$$\psi = 0 \tag{6}$$

Здесь $\mathcal{G}\left(\omega^{(\sigma_3)}, \psi^{(\sigma_4)}\right)$ - определяет значение вихря на границе по формуле Тóма.

Аппроксимация по времени: $\sigma^{(1)}=0$, $\sigma^{(2)}=\sigma^{(3)}=1$, $\sigma^{(4)}=0$.

На каждом шаге по времени сначала решается уравнение (3) с граничным условием (5).

$$\begin{cases} \omega_t + \mathcal{K}_h\left(\psi, \widehat{\omega}\right) & = & \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\widehat{\omega}_{x\tilde{x}} + \widehat{\omega}_{y\tilde{y}}\right) \\ \mathcal{G}\left(\widehat{\omega}, \psi\right) & = & 0. \end{cases}$$

Затем $\widehat{\psi}$ находится из уравнения (4) с граничным условием (6).

$$\begin{cases} \widehat{\psi}_{x\tilde{x}} + \widehat{\psi}_{y\tilde{y}} & = & -\widehat{\omega} \\ \widehat{\psi} & = & 0 \end{cases}$$

Такой способ решения приводит к ограничению на величину шага по времени $\tau \le \tau^* = \gamma \min\left((h_i^x)^2, (h_j^y)^2\right) Re, \;\; \gamma \le \dfrac{3}{2}$.
Основной причиной ограничений на величину шага по времени является вычисление ω на границе по значениям ψ с предыдущего слоя, т.е. локальное задание граничных условий для вихря.

Аппроксимация по времени. Нарушение закона сохранения завихренности.

Должно быть: $\sum\limits_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})} \widehat{\omega}_{ij} dS_{ij} = 0$. Доказательство основано на том, что ψ и ω на границе принадлежат одному и тому же слою.

$$\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})} \widehat{\omega}_{ij} dS_{ij} =$$

$$\sum_{j\in J} \hbar_j^y \left[\left(-\widehat{\psi}_{\bar{x},N_x j} + \widehat{\omega}_{N_x j}\frac{h^x_{N_x-1/2}}{2}\right) + \left(\widehat{\psi}_{x,0j} + \widehat{\omega}_{0j}\frac{h^x_{1/2}}{2}\right)\right] +$$

$$\sum_{i\in I} \hbar_i^x \left[\left(-\widehat{\psi}_{\bar{y},iN_y} + \widehat{\omega}_{iN_y}\frac{h^y_{N_y-1/2}}{2}\right) + \left(\widehat{\psi}_{y,i0} + \widehat{\omega}_{i0}\frac{h^y_{1/2}}{2}\right)\right] = 0.$$

А у нас получилось

$$-\psi_{\bar{x},N_x j} + \widehat{\omega}_{N_x j}\frac{h^x_{N_x-1/2}}{2} = -\widehat{\psi}_{\bar{x},N_x j} - \tau\psi_{t\bar{x},N_x j} + \widehat{\omega}_{N_x j}\frac{h^x_{N_x-1/2}}{2} \dots .$$

Поэтому

$$\sum_{(i,j)\in(\overline{I}\times\overline{J})} \widehat{\omega}_{ij} dS_{ij} = -\tau F,$$

где $F = \sum\limits_{j\in J} \hbar_j^y \left[-\psi_{t\bar{x},N_x j} + \psi_{tx,0j}\right] + \sum\limits_{i\in I} \hbar_i^x \left[-\psi_{t\bar{y},iN_y} + \psi_{ty,i0}\right]$

Аппроксимация по времени: $\sigma^{(1)}=0$, $\sigma^{(2)}=\sigma^{(3)}=1$, $\sigma^{(4)}=1$.

$$\begin{cases} \omega_t + \mathcal{K}_h\left(\psi, \widehat{\omega}\right) & = & \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\widehat{\omega}_{x\tilde{x}} + \widehat{\omega}_{y\tilde{y}}\right) \\ \mathcal{G}\left(\widehat{\omega}, \widehat{\psi}\right) & = & 0. \\ \widehat{\psi}_{x\tilde{x}} + \widehat{\psi}_{y\tilde{y}} & = & -\widehat{\omega} \\ \widehat{\psi} & = & 0 \end{cases}$$

Это система сеточных уравнений относительно вектора $X = (\omega, \psi)^T$. Во внутренних узлах области она имеет вид:

$$\mathbf{A}_{ij}\widehat{X}_{i-1j}+\mathbf{D}_{ij}\widehat{X}_{ij}+\mathbf{B}_{ij}\widehat{X}_{i+1j}+\overline{\mathbf{A}}_{ij}\widehat{X}_{ij-1}+\overline{\mathbf{B}}_{ij}\widehat{X}_{ij+1}=\mathbf{F}_{ij} \qquad (7)$$

Здесь $\mathbf{A}_{ij}$, $\mathbf{B}_{ij}$, $\mathbf{D}_{ij}$, $\overline{\mathbf{A}}_{ij}$, $\overline{\mathbf{B}}_{ij}$ матрицы второго порядка. Например,

Матричный алгоритм.

Во внутренних узлах:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^y_j}{2}\psi_{\overset{\circ}{y}}\,(-1_x) - \frac{\hbar^y_j}{Reh^x_{i-1/2}} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^y_j}{h^x_{i-1/2}} \end{pmatrix};$$

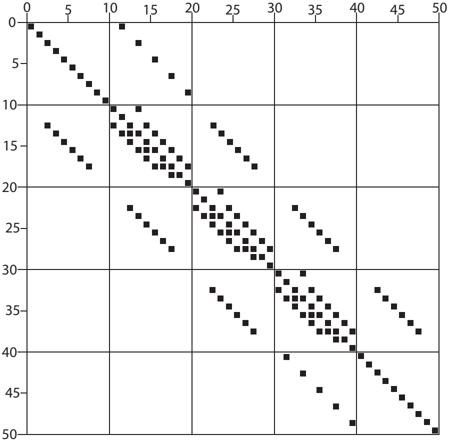
$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2\tau}{Re}\left(\frac{\hbar^x_i\hbar^y_j}{h^x_{i+1/2}h^x_{i-1/2}} + \frac{\hbar^x_i\hbar^y_j}{h^y_{j+1/2}h^y_{j-1/2}}\right) + \hbar^x_i\hbar^y_j & 0 \\ \hbar^x_i\hbar^y_j & \frac{2\hbar^x_i\hbar^y_j}{h^x_{i+1/2}h^x_{i-1/2}} + \frac{2\hbar^x_i\hbar^y_j}{h^y_{j+1/2}h^y_{j-1/2}} \end{pmatrix}$$

На границе $y = 0$:

$$\mathbf{D}_{i0}\widehat{X}_{i0} + \overline{\mathbf{B}}_{i0}\widehat{X}_{i1} = 0$$

$$\mathbf{D}_{i0} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^x_i h^y_{1/2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar^x_i h^y_{1/2}}{2} \end{pmatrix}; \qquad \overline{\mathbf{B}}_{i0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar^x_i}{h^y_{1/2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Структура матрицы системы линейных уравнений.



Структура матрицы системы линейных уравнений для определения вектора неизвестных $X_{ij} = (\omega_{ij}, \psi_{ij})^T$. Сетка 5×5.

Нелинейный матричный алгоритм: $\sigma^{(1)}=1$, $\sigma^{(2)}=\sigma^{(3)}=1$, $\sigma^{(4)}=1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)}_{ij} &= (\omega_{ij})_t + \mathcal{K}_h\left(\widehat{\psi}_{ij},\widehat{\omega}_{ij}\right) - \frac{1}{Re}\left((\widehat{\omega}_{ij})_{x\tilde{x}}+(\widehat{\omega}_{ij})_{y\tilde{y}}\right) = 0 \\ \mathcal{F}^{(2)}_{ij} &= \widehat{\omega}_{ij} + (\widehat{\psi}_{ij})_{x\tilde{x}} + (\widehat{\psi}_{ij})_{y\tilde{y}} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Пусть известны значения $\overset{(s)}{\omega}_{ij}$ и $\overset{(s)}{\psi}_{ij}$ на s – ой итерации по Ньютону. Тогда на следующей итерации $\overset{(s+1)}{\omega}_{ij}=\overset{(s)}{\omega}_{ij} + \overset{(s+1)}{\delta\omega}_{ij}$; $\overset{(s+1)}{\psi}_{ij}=\overset{(s)}{\psi}_{ij} + \overset{(s+1)}{\delta\psi}_{ij}$, где $\overset{(s+1)}{\delta\omega}_{ij}$, $\overset{(s+1)}{\delta\psi}_{ij}$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{l,m\in\mathcal{S}^{(1)}_{ij}} \frac{\partial \overset{(s)}{\mathcal{F}^{(1)}_{ij}}}{\partial\omega_{lm}} \overset{(s+1)}{\delta\omega}_{lm} + \frac{\partial \overset{(s)}{\mathcal{F}^{(1)}_{ij}}}{\partial\psi_{lm}} \overset{(s+1)}{\delta\psi}_{lm} = -\overset{(s)}{\mathcal{F}^{(1)}_{ij}} \tag{9}$$

$$\sum_{l,m\in\mathcal{S}^{(2)}_{ij}} \frac{\partial \overset{(s)}{\mathcal{F}^{(2)}_{ij}}}{\partial\omega_{lm}} \overset{(s+1)}{\delta\omega}_{lm} + \frac{\partial \overset{(s)}{\mathcal{F}^{(2)}_{ij}}}{\partial\psi_{lm}} \overset{(s+1)}{\delta\psi}_{lm} = -\overset{(s)}{\mathcal{F}^{(2)}_{ij}} \quad (ij)\in(\overline{I}\times\overline{J}) \tag{10}$$

$\mathcal{S}^{(\alpha)}_{ij}$, $\alpha = 1,2$ – шаблон разностной схемы в точке (ij)

Общие замечания

- Последовательные алгоритмы устойчивы при $\tau \leq \tau^* \sim h_{min}^2$
- Матричные алгоритмы (совместные алгоритмы = coupled algorithms) обладают большим запасом устойчивости, а нелинейный матричный алгоритм практически безусловно устойчивый.
- Эффективность использования матричных алгоритмов существенно зависит от метода решения системы линейных уравнений.