1 Уравнение конвекции с диффузией

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}); t > 0; x \in [-L, L]$$

Уравнение конвекции с диффузией.

$$Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}}$$

- число Пекле

$$\frac{L}{U} = t_{\text{конв}}$$

$$\frac{L^2}{\mathcal{D}} = t_{\text{дифузионная}}$$

$$\frac{t_{\text{диф}}}{t_{\text{конв}}} = \frac{LU}{\mathcal{D}}$$

$$Re << 1$$

почти дифф процесс

$$Re >> 1$$

почти конв процесс

Сначала будем рассматривать стационарное уравнение.

$$\frac{d}{dx}(uQ) - \frac{d}{dx}(\mathcal{D}\frac{dQ}{dx}) = 0$$

На отрезке вводится разностная сетка

$$\Omega_n(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

.

Потоковые точки - точки с полуцелые точки

$$xi + \frac{1}{2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

- потоковые узлы

$$h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$$

$$h_i = \frac{h_{i+\frac{1}{2}} - h_{i-\frac{1}{2}}}{2}$$

Вводим сеточные функции.

$$Q_i = (x_{i+\frac{1}{2}}; x_{i-\frac{1}{2}})$$

константа на отрезке

$$[x_{i+\frac{1}{2}}\text{до}x_{i-\frac{1}{2}}]$$

D - константа в полуцелых точках (от x_i до x_{i+1} константа)

Считаем скорость и тепло в потоковых точках, где диффузия постоянна

$$Q_x = \frac{Q_{i+1}i = Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\overline{x}} = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}$$

$$Q_{\widehat{x}} = \frac{Q_{i+\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2}}}{h_i}$$

Между потоковыми точками интегрируем получаем формулу.

$$\int_{x_i+\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}[uQ - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}]dx =$$

$$= [uQ - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}]|_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i+\frac{1}{2}} =$$

$$W^{tot}_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W^{tot}_{i-\frac{1}{2}} = U_{i+\frac{1}{2}} Q_{i+\frac{1}{2}} = W^D_{i+\frac{1}{2}} - W^D_{i-\frac{1}{2}}$$

$$W^D_{i+\frac{1}{2}} = -D_{i+\frac{1}{2}} \frac{dQ}{dx}|_{i+\frac{1}{2}}$$

$$U_i i + 1/2 Q_{i+1/2} - D_{i+1/2} \frac{Q_{i+1} - Q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} -$$

$$-[U_i i - 1/2 Q_{i-1/2} - D_{i-1/2} Q_{\overline{x}_{i-1/2}}] = 0$$

$$\frac{U_{i+1/2} Q_{i+1/2} - U_{i-1/2} Q_{i-1/2}}{\overline{h_i}} -$$

$$-\frac{D_{i+1/2} Q_x - D_{i-1/2} Q_{\overline{x}}}{\overline{h_i}} = 0$$

Интерполируем Q в полуцелые точки.

$$Q_{i+1/2} = \Theta_{i+1/2} Q_i + (1 - Q_{i+1/2}) \Theta_{i+1}$$

1.

$$\Theta = 1/2$$

$$W = ...$$

Получится схема с центральными разностями

$$u Q_x - D Q_{xwithlintx} = 0$$

2.

$$\Theta_{i+1/2} = 1/2(1 + \frac{|u_{i+1/2}|}{U_{i+1/2}})$$

$$W_{i+1/2} = u^{+}_{i+1/2} Q_i - \overline{U}_{i+1/2} Q_{i+1}$$

$$U'_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} + |U_{i+1/2}|)$$

$$Uwithlin_{i+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1/2} - |U_{i+1/2}|)$$

$$(u^{+}_{i+1/2} Q_i + \overline{u}^{+}_{i+1/2} Q_i + 1) - D Q_{\overline{x}\widehat{x}} = 0$$

2 Модельная задача

$$\frac{d(UQ)}{dx} - D\frac{d^2 Q}{dx^2} = 0$$

При увеличении числа Пекле график прижимается к координатам снизу.

3 Решение разностной задачи (центральные разности).

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_i = a + bq^i$$

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

Подставляем

$$\frac{U}{2h}b(q^{i+1} - q^{i-1}) - Db\frac{q^{i+1} - 2q^i + q^{i-1}}{h^2} = 0$$

$$\frac{u}{2}(q^2 - 1) - \frac{D}{h}(q^2 - 2q + 1) = 0$$

4 Лекция 2

Точное решение

$$Q(x) = \frac{1 - e^{\frac{Ux}{D}}}{1 - e^{\frac{U}{D}}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - e^{Pe \cdot i}}{1 - e^{Pe_n N}} =$$

$$Q(x) = \frac{1 - \overline{q}^i}{1 - \overline{q}^N}$$

$$\overline{q} = e^{Pe_N} = 1 + \frac{Pe_n + Pe_n^2}{2}$$

Сеточная функция (Центральные разности)

$$q = \frac{1 + \frac{Pe}{2}}{1 - \frac{Pe}{2}} =$$

$$(1 + \frac{Pe_N}{2}(1 + \frac{1}{2}Pe_n + \frac{1}{4}Pe_n^2 + ...)) =$$

$$1 + Pe_n + \frac{Pe_n^2}{2}$$

Но число пекре должно быть меньше 2

Направленные разности

$$q + Pe_n$$

Для схемы с центральными разностями

$$U\frac{Q_{i+1} - Q_i}{2h} - \frac{Q_{i+1} - 2Q_i - Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i+1}(\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) + Q_i(\frac{2\lceil}{h^2}) + Q_{i-1}(-\frac{u}{2h} - \frac{\lceil}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i+1}(1 - \frac{1}{2}\mathcal{D}) + 2Q_i - Q_{i-1}(1 - \frac{1}{2}Pe_n) = 0$$

Для схеммы с направленными разностями

$$U\frac{Q_i - Q_{i-1}}{h} - \mathcal{D}\frac{Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1}}{h^2} = 0$$

$$Q_{i-1}(-\frac{u}{h} - \frac{\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(\frac{u}{h} - \frac{2\mathcal{D}}{h^2}) + Q_i(-\frac{\mathcal{D}}{h^2}) = 0$$

$$-Q_{i-1}(1 + Pe_n)...$$

Попробуем предсказать поведеение вышеописанных схем

$$Q_{i-1} = Q_i - h\frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 q}{\partial x} - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + ...$$

$$Q_{i+1} = Q_i + h\frac{\partial q}{\partial x}|_i + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 q}{\partial x} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + ...$$

Первое слагаемое:

$$\frac{U}{h}(\frac{\partial Q}{\partial x})_i - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3}...$$

$$U\frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \frac{1}{2}Uh\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \mathcal{D}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|_i/... = 0$$

$$U\frac{\partial Q}{\partial x}|_i - \mathcal{D}(1+\frac{1}{2}Pe_n)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}|_i$$

ДЛя того чтобы коэф диффузии был похож на то что было в исходном уравнении $\frac{Pe_n}{2}$ « 1

5 Схема А.А.Самарского

$$U^+Q_{\overline{x}} + U^-Q_x - \frac{\mathcal{D}}{1+\frac{Pe_n}{2}}Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$\overline{D} = \frac{\mathcal{D}}{1+\frac{Pe_n}{2}} = \mathcal{D}(\infty - \frac{|\mathcal{P}]_\backslash|/\in}{\infty + \frac{|\mathcal{P}]_\backslash|}{\in}})$$

$$u^+Q_{\overline{x}} - u^-Q_x = uQ_{x0} - \frac{|U|_h}{2}Q_{\overline{x}x}$$

$$UQ_{x0} - \mathcal{D}[\frac{1}{1+\frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}]Q_{\overline{x}x} = 0$$

- Коэфф диффузии

$$\mathcal{D}[\frac{1}{1+\frac{|Pe|}{2}} + \frac{Pe_n}{2}] = \mathcal{D}^*$$

$$Pe_n^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \text{ - эффективное число Пикле}$$

$$f = Pe^*(Pe)$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}\frac{1+\frac{|Pe_n|}{2}+\frac{|Pe_n|^2}{4}}{1+\frac{|Pe_n|}{2}}$$

$$Pe^* = \frac{Uh}{\mathcal{D}} \frac{1 + \frac{|Pe_n}{2}}{1 + \frac{|Pe_n|}{2} + \frac{|Pe_n|^2}{4}}$$

$$Pe_n \to 0; Pe_n^* \to Pe_n$$

$$Pe_n \to \inf; Pe_n^* \to 2$$

$$|Pe * n| = \frac{Pe_n^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{|Pe_n|})}{Pe_n^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{2|Pe_n|} + \frac{1}{|Pe_n|^2})}$$

6 Экспоненциальная схема

$$u\frac{dQ}{dx} - \mathcal{D}\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$Q(x) = Q_i + (Q_{i+1} - Q_i)\frac{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}\frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}})}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$W^{tot} = u_{i+\frac{1}{2}}Q_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D}\frac{dQ}{dx}|_{i+\frac{1}{2}} =$$

$$= u_{i+\frac{1}{2}}Q_i + u_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+\frac{1}{2}}Q_i)\frac{exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2} - 1)}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1)} -$$

$$-u_{i+\frac{1}{2}}(Q_{i+1} - Q_i)\frac{exp(\frac{Pe_{i+\frac{1}{2}}}{2})}{exp(Pe_{n,i+\frac{1}{2}}) - 1}$$

$$\frac{W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}}}{h_i} = uQ_{\overline{x}} + uh\frac{e^{P\frac{Pe_N}{2}} - 1}{e^{Pe_N} - 1}Q_{\overline{x}x} - uh\frac{e^{P\frac{Pe_n}{2}}}{e^{Pe_n} - 1}Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$uQ_{\overline{x}} = uQ_{x0} - \mathcal{D}\frac{Pe}{2}Q_{\overline{x}x}$$

$$uQ_{x0} - \mathcal{D}^2 Q_{\overline{x}x} = 0$$

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}(\frac{Pe_N}{2}\frac{e^{Pe}+1}{e^{Pe}-1}) = \mathcal{D}\frac{Pe_n}{2}coth\frac{Pe}{2}$$

$$Pe_n = \frac{Uh}{\mathcal{D}} = 2th\frac{Pn_n}{2}$$

7 Схема Сполдинга

$$Pe^*_{h,i+\frac{1}{2}} = Pe_{h,i+\frac{1}{2}}, Pe_h \leq 2$$
$$= 2, Pe_h > 2$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \Theta_{i+\frac{1}{2}}Q_i + (1 - \Theta_{i+\frac{1}{2}}Q_{i+1})$$

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_n, i+\frac{1}{2}}[Pe_{n,\frac{1}{2}} - 1 + max(-Pe_{n,i+\frac{1}{2}}, 1 - \frac{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}{2}, 0)]$$

1.
$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| \leq 2$$
$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$
буквально схема с центральными разностями.

2.
$$|Pe_{n,i+\frac{1}{2}}| > 2$$

(a)

$$Pe_n > 2$$
$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}[Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 + 0] = 1 - \frac{1}{Pe}$$

(b)

$$Pe_n < -2$$
$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i+\frac{1}{2}}}[Pe_{n+\frac{1}{2}} - 1 - Pe_n] = -\frac{1}{Pe_n}$$

Или оба варианта в одной формуле

$$\frac{1}{2}(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) - \frac{1}{Pe_n}$$

Пподставляем Θ

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2}(1 + \frac{|Pe_n|}{Pe_n}) = \frac{1}{Pe_n}]Q_i + [\frac{1}{2}(1 - \frac{|Pe_n|}{Pe_n} + \frac{1}{Pe_n})]Q_{i+\frac{1}{2}}$$

$$W_{i+\frac{1}{2}} = uQ_{i+\frac{1}{2}} = U^+_{i+\frac{1}{2}}Q_i + U^-_{i+\frac{1}{2}}Q_i + 1 + DQ_x$$

$$\frac{d}{dx}uQ - D\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$
$$W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} = U^+Q_{\overline{x}} + \overline{u}Q_x + DQ_{\overline{x}x}$$

Таких схем множество, но суть такова, что до определенного момента рассматривается направленные разности, а потом переходят на константу

8 Схема Патанкара

Надо разобрать к экзамену! Есть в презентации.

$$\Theta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{Pe_{n,i\frac{1}{2}}}[Pe_{n,i+\frac{1}{2}} - 1 + max(0, Pe_n) + max(0, (1 - 0.1|Pe_n|)^5)]$$

Теперь нужно определить в полуцелых точках.

9 Разностная схема на расширенных шаблонах

$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(Q_{i+1} + Q_i) - \eta(Q_{i+1} - 2Q_i + Q_{i-1})$$

1. $$u\frac{d}{dx} = uQ_{x^0} - \frac{Uh}{2}(Q_x\overline{x} - Q_{xx})\frac{1}{2}h^2Q_{\overline{xx}}$$

2. $$\eta = \frac{1}{2} \text{ - схема с направленными разностями}$$

3. $$\eta = \frac{1}{4} - \text{ схема Фрома}$$

4. $$\eta = \frac{1}{6} - \text{ схема с искуственной дисперсией}$$

5. $$\eta = \frac{1}{8} - \text{ схема QUICK}$$

10 Нестационарные задачи

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uQ) = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$u = const, Pe = \frac{UL}{\mathcal{D}} >> 1$$

Сетка вводится аналогично стационарной задаче.

$$t_k = \tau_k$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial Q}{\partial t} dxdt + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(uQ) dxdt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}) dxdt$$

По слагаемым

1. Выносим, так как не зависит от t, по x константа на отрезке интегрирования
$$h_i \cdot (Q_i^{k=1} - Q_i^k)$$

2. $$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_{i+\frac{1}{2}} - W_{i-\frac{1}{2}} dt)$$
Воспользуемся квадратурной формулой
$$= \tau(W^{\sigma}_{i+\frac{1}{2}} + W^{\sigma}_{i-\frac{1}{2}})$$
$$f^{(\sigma)} = \sigma f^{t_k+1} + (1-\sigma) f^{t_k} = \sigma \hat{f} + (1-\sigma) f$$
Возникает ровно та же проблема определения W в полуцелых точках

3.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}[\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}|_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x}|_{i-\frac{1}{2}}]dt =$$

$$\tau[(\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x})^{(\sigma)}_{i+\frac{1}{2}} - (\mathcal{D}\frac{\partial Q}{\partial x})^{(\sigma)}_{i-\frac{1}{2}}]$$

11 Решение модельной задачи

Отрезок от -L до L. Начальные данные: 1 при отрицательных значений, 0 при положительных.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

$$S = t, y = x - ut$$

$$Q(x,t) = Q(y(x,t), S(t))$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial S}\frac{Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial Q}{dS} - \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - u\frac{\partial Q}{i\partial y} + u\frac{\partial Q}{\partial y}\mathcal{D}\frac{\partial^Q}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \Rightarrow$$

интеграл Пуассона

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{y}{2sqrt\mathcal{DS}}} e^{-z^2}dz] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{x-ut}{2\sqrt{\mathcal{D}t}}} e^{-z^2}dz]$$

Подставить это дома и убедиться, что оно является решением уравнения.

11.1 Направленные разности.

рисунок фронта

Самое большое размытие при использовании чисто неявной схемы ($\sigma = 1$)

Меньше всего размывается явная схема ($\sigma = 0$).

То есть неявная схема ухудшает проблемы направленных разностей

11.2 Центральные разности

**рисунок фронта

Чисто неявная схема снова размывает сильнее.

($\sigma = 0.5$)

12 Диффузия и дисперсия

Дисперсия - скорость убывания волны зависит от амплитуды.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

$$Q(t,x) = e^{-P(m)t}e^{im(x-q(m)t)}$$

m - волновое число, P(m) - скорость убывания амплитуды, q(m) - скорость распространения волны, $i^2 = -1$.

$$Q = e^{-Pt}e^{im(x-qt)}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} = \mathcal{D}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^3 Q}{\partial x^3} + \gamma\frac{\partial^4 Q}{\partial x^4}$$

Подставим Q и посмотрим каими должны быть P и m, для того чтобы оно удовлетворяло уравнениям.

$$-P - imq + Uim = -\mathcal{D}m^2 - im^3p + \gamma m^4$$

$$P = \mathcal{D}m^2 - \gamma m^4$$

- скорость убывания

$$q = u + M^2\beta$$

- скорость волны

На амплитуду влияют четные производные (но они чередуются уменьшает-увеличивает-уменьшает-...)

скорость движения от третьей производной (нечетныепроизводные) проверить с каким знаком.