Задание для выполнения на совместном спецсеминаре кафедр ВМ и ОУ

Рассматривается задача граничного управления для параболического уравнения:

$$
\begin{gathered}
y_t(t,x) = y_{xx}(t,x), \quad t \in (0,T),\ x \in (0,l), \\
y(t,0) = 0, \quad y_x(t,l) + y(t,l) = u(t), \quad t \in (0,T), \\
y(0,x) = 0, \quad x \in (0,l).
\end{gathered}
$$

Целью управления является приблизиться в конечный момент времени к заданному положению $b = b(x)$:

$$
J(u) = \int\limits_0^l \big(y(T,x) - b(x)\big)^2\,dx \to \min_{u \in U}.
$$

Управления $u = u(t)$ при этом выбираются из допустимого множества управлений

$$
U = \{u \in L^2(0,T) \,|\, \alpha \leqslant u(t) \leqslant \beta,\ t \in (0,T)\}.
$$

Числа $l > 0$, $T > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и функция $b \in L^2(0,l)$ предполагаются заданными.

Необходимо:

1. Получить аналитически выражение для градиента $J'(u)$.

2. Построить его конечномерную аппроксимацию, используя разностные схемы.

3. Написать программу, использующую какой-либо из численных методов решения задач оптимизации и построенные конечные аппроксимации градиента для приближённого решения исходной задачи управления.