НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ
ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Рассмотренные ранее статистические критерии, такие как Z, T, F – критерии являются **параметрическими** критериями. **Параметрическими** называют статистические критерии о таких параметрах генеральной совокупности, как среднее, дисперсия или доля признака в предположении, что данные генеральные совокупности имеют нормальное распределение или распределение, близкое к нормальному.

В математической статистике разработаны так называемые **непараметрические** критерии для случаев, когда выборка извлекается из генеральной совокупности, которая имеет распределение, отличное от нормального, либо нет возможности проверить закон распределения совокупности на нормальность ввиду малого объема выборки.

Критерий знаков (G-критерий)

Критерий знаков – это простейший непараметрический критерий для проверки равенства медианы (а для симметричного распределения – и среднего) заданному значению. По сути критерий знаков осуществляет грубую проверку симметричности распределения: количество значений, меньших и больших гипотетической медианы у симметричного распределения должно быть одинаковым.

<u>Для одной выборки</u>

Пусть дана выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ из симметрично распределенной генеральной совокупности, имеющей медиану, равную *a*. Проверяется нулевая гипотеза H_0: $Me = a_0$, где a_0 –гипотетическое значение медианы генеральной совокупности.

Для нахождения расчетного значения статистического критерия предварительно находят знаки разностей $x_1 - a_0, x_2 - a_0, \dots, x_n - a_0$. Число положительных разностей обозначим как G_+, а число отрицательных – как G_- . Нулевые разности исключаются из рассмотрения!

Статистический критерий: $G = \min\{G_+, G_-\}$ (**В Excel**: G=МИН(ячейка с G+; ячейка с G-))

Данный статистический критерий имеет биномиальное распределение с параметрами *n* (объем выборки за вычетом количества нулевых разностей) и *p*=0,5.

Альтернативная гипотеза	Критическая область
H_1: $Me > a_0$	Правосторонняя: $G \geq n - b_\alpha$, где b_α – квантиль биномиального распределения уровня α **<u>В Excel:</u>** $b_\alpha = \text{БИНОМ.ОБР}(n; 0{,}5; \alpha)$
H_1: $Me < a_0$	Левосторонняя: $G \leq b_\alpha$, где b_α – квантиль биномиального распределения уровня α **<u>В Excel:</u>** $b_\alpha = \text{БИНОМ.ОБР}(n; 0{,}5; \alpha)$
H_1: $Me \neq a_0$	Двусторонняя: $G \leq b_{\alpha/2}$ и $G \geq n - b_{\alpha/2}$ где $b_{\alpha/2}$ – квантиль биномиального распределения уровня α/2 **<u>В Excel:</u>** $b_{\alpha/2} = \text{БИНОМ.ОБР}(n; 0{,}5; \alpha/2)$

Пример. Продавец мороженого уверен, что в среднем он продает 25 вафельных рожков с клубничным мороженым за день. Проверка за случайно выбранные 15 дней показала следующее количество ежедневно продаваемых рожков с клубничным мороженым:

33 8 22 21 34 26 25 24 26 27 30 12 20 9 26

При уровне значимости 0,05 выяснить, соответствует ли утверждение продавца действительности.

Решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	Кол-во рожков (шт.) xi	$x_i - a_0$	$G+$	G -	n	a_0									
2	33	8	9	5	14	25		H0:	Me=25						
3	8	-17						H1:	Me≠25						
4	22	-3	Расчетное значение статистики G =						**5**						
5	27	2						α=	0,05						
6	34	9						α/2=	0,025						
7	26	1	Левая критическая точка b_α =						**3**	- из таблицы					
8	25	0	Правая критическая точка $n - b_\alpha$ =						**11**						
9	28	3						H0 принимается, т.к.		**3**	**<**	**5**	**<**	**11**	
10	26	1						Вывод:	**утверждение продавца соответствует действительности**						
11	27	2													
12	30	5													
13	12	-13													
14	20	-5													
15	9	-16													
16	26	1													

Для парных выборок

Для парных выборок до/после, в которых исследуется уровень какого-либо признака до и после некоторого воздействия, критерий знаков позволяет установить направление сдвига исследуемого признака (в сторону усиления или ослабления).

Исходные данные представлены в виде n независимых случайным образом выбранных пар значений (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) из генеральных совокупностей X и Y, имеющих медианы a_X и a_Y соответственно.

В таком случае рассматривают новую выборку – выборку значений случайной величины D : d_1, d_2, …, d_n, где $d_i = y_i - x_i$. Предполагается, что случайная величина D имеет симметричное распределение с медианой, равной $Me = a_Y - a_X$. Таким образом, нулевая гипотеза H_0: $a_X = a_Y$ может быть переформулирована как гипотеза о равенстве нулю медианы совокупности D: H_0: $Me = 0$.

Для нахождения расчетного значения статистического критерия предварительно находят знаки разностей d_1, d_2, …, d_n. Число положительных разностей обозначим как G_+, а число отрицательных – как G_- . Нулевые разности исключаются из рассмотрения!

Статистический критерий: $G = \min\{G_+, G_-\}$

Альтернативная гипотеза	**Критическая область**
H_1: $Me > a_0$	Правосторонняя: $G \geq n - b_\alpha$, где b_α – квантиль биномиального распределения уровня α **B Excel:** $b_\alpha = \text{БИНОМ.ОБР}(n; 0{,}5; \alpha)$
H_1: $Me < a_0$	Левосторонняя: $G \leq b_\alpha$, где b_α – квантиль биномиального распределения уровня α **B Excel:** $b_\alpha = \text{БИНОМ.ОБР}(n; 0{,}5; \alpha)$
H_1: $Me \neq a_0$	Двусторонняя: $G \leq b_{\alpha/2}$ и $G \geq n - b_{\alpha/2}$ где $b_{\alpha/2}$ – квантиль биномиального распределения уровня α/2 **B Excel:** $b_{\alpha/2} = \text{БИНОМ.ОБР}(n; 0{,}5; \alpha/2)$

Пример. Проверяется эффективность методики обучения по новой развивающей программе для детей среднего дошкольного возраста. До начала обучения по данной программе и после его завершения группа детей была протестирована по вербальной шкале, результаты приведены в таблице:

№ испытуемого	Баллы до обучения x_i	Баллы после обучения y_i
1	11	14
2	10	13
3	11	9
4	11	15
5	12	11
6	10	14
7	12	15
8	10	13
9	9	8
10	11	12
11	10	14
12	10	11
13	12	10
14	11	15
15	12	16
16	12	13
17	11	15
18	10	12
19	10	10
20	11	11

Можно ли считать, что новая программа обучения действительно эффективна? Уровень значимости 0,01.

Решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	№ испытуемого	Баллы до обучения x_i	Баллы после обучения y_i	d_i	$G+$	$G-$	n						
2	1	11	14	3	14	4	18		H0:	Me=0			
3	2	10	13	3					H1:	Me>0			
4	3	11	9	-2	Расчетное значение статистики G =					**4**			
5	4	11	15	4					α=	0,01			
6	5	12	11	-1	Правая критическая точка $n - b_\alpha$ =					**15**	- из таблицы		
7	6	10	14	4					H0 принимается, т.к.		**4**	**<**	**15**
8	7	12	15	3				Вывод:	**нельзя считать, что программа эффективна**				
9	8	10	13	3									
10	9	9	8	-1									
11	10	11	12	1									
12	11	10	14	4									
13	12	10	11	1									
14	13	12	10	-2									
15	14	11	15	4									
16	15	12	16	4									
17	16	12	13	1									
18	17	11	15	4									
19	18	10	12	2									
20	19	10	10	0									
21	20	11	11	0									

Знаковый критерий рангов Вилкоксона (Wilcoxon Signed-Rank Test)

Знаковый критерий рангов Вилкоксона является более мощным по сравнению с критерием знаков, так как учитывает не только направленность отличий (больше/меньше), но и их выраженность (насколько больше/меньше).

<u>Для одной выборки</u>

Пусть дана выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ из симметрично распределенной генеральной совокупности, имеющей среднее и медиану, равные a. Проверяется нулевая гипотеза H_0: $a = a_0$, где a_0 –гипотетическое значение среднего (и медианы) генеральной совокупности.

Для нахождения расчетного значения статистического критерия предварительно находят абсолютные разности $|x_1 - a_0|, |x_2 - a_0|, \dots, |x_n - a_0|$, которые ранжируют в порядке возрастания.

Замечание. Если какие-то из абсолютных разностей равны по величине, то им присваивают ранг, равный среднему рангу этих разностей, если бы они были различны. Например, если вторая и третья разности одинаковы по величине, то им обеим присваивается ранг, равный $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$; если вторая, третья и четвертая разности равны по величине, то им всем присваивается ранг, равный $\frac{2+3+4}{3} = 3$.

Статистический критерий:

$$T_+ = \text{сумма рангов положительных разностей } (x_i - a_0)$$

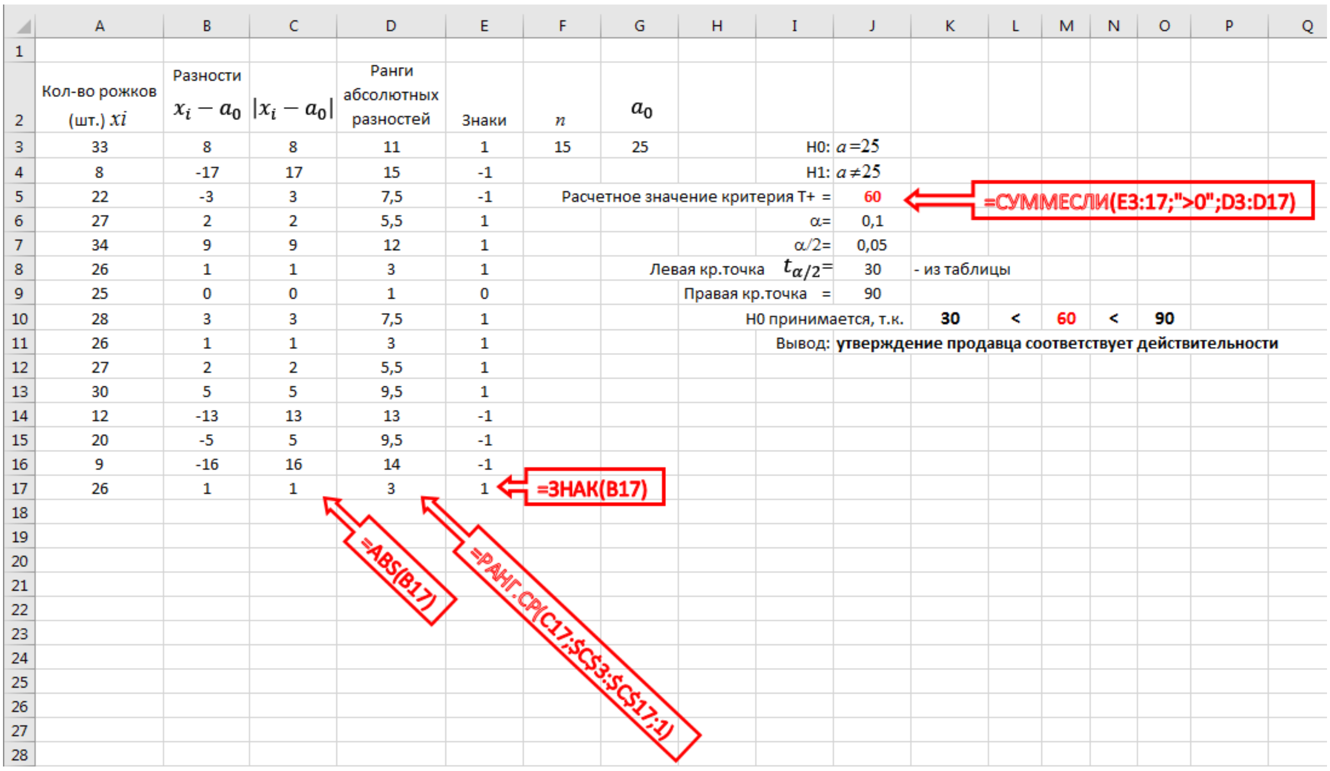
Альтернативная гипотеза	Критическая область
H_1: $a > a_0$	Правосторонняя: $T_+ \geq \frac{n(n+1)}{2} - t_\alpha$, где t_α – критическое значение (из таблицы) уровня α
H_1: $a < a_0$	Левосторонняя: $T_+ \leq t_\alpha$, где t_α – критическое значение (из таблицы) уровня α
H_1: $a \neq a_0$	Двусторонняя: или $T_+ \leq \frac{n(n+1)}{2} - t_{\alpha/2}$, или $s_+ \geq t_{\alpha/2}$, где $t_{\alpha/2}$ – критическое значение (из таблицы) уровня $\alpha/2$

Пример. Продавец мороженого уверен, что в среднем он продает 25 вафельных рожков с клубничным мороженым за день. Проверка за случайно выбранные 15 дней показала следующее количество ежедневно продаваемых рожков с клубничным мороженым:

33 8 22 21 34 26 25 24 26 27 30 12 20 9 26

При уровне значимости 0,10 выяснить, соответствует ли утверждение продавца действительности.

Решение.



	A	B	C	D	E	F	G
2	Кол-во рожков (шт.) xi	Разности $x_i - a_0$	$\lvert x_i - a_0 \rvert$	Ранги абсолютных разностей	Знаки	n	a_0
3	33	8	8	11	1	15	25
4	8	-17	17	15	-1		
5	22	-3	3	7,5	-1		
6	27	2	2	5,5	1		
7	34	9	9	12	1		
8	26	1	1	3	1		
9	25	0	0	1	0		
10	28	3	3	7,5	1		
11	26	1	1	3	1		
12	27	2	2	5,5	1		
13	30	5	5	9,5	1		
14	12	-13	13	13	-1		
15	20	-5	5	9,5	-1		
16	9	-16	16	14	-1		
17	26	1	1	3	1		

H0: a =25
H1: $a \neq 25$
Расчетное значение критерия T+ = 60
=СУММЕСЛИ(E3:17;">0";D3:D17)
α= 0,1
α/2= 0,05
Левая кр.точка $t_{\alpha/2}$= 30 - из таблицы
Правая кр.точка = 90
Н0 принимается, т.к. 30 < 60 < 90
Вывод: утверждение продавца соответствует действительности
=ЗНАК(B17)
=ABS(B17)
=РАНГ.СР(C17;$C$3:$C$17;1)

<u>Для парных выборок</u>

В данном случае Знаковый критерий рангов Вилкоксона является непараметрическим аналогом параметрического t-критерия, используемого для парных выборок.

Исходные данные представлены в виде n независимых случайным образом выбранных пар значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ из генеральных совокупностей X и Y, имеющих среднее a_X и a_Y соответственно.

В таком случае рассматривают новую выборку – выборку значений случайной величины D : $d_1, d_2, \ldots, d_n$, где $d_i = x_i - y_i$. Предполагается, что случайная величина D имеет симметричное распределение со средним и медианой, равными $a_D = a_X - a_Y$. Таким образом, нулевая гипотеза H_0: $a_X = a_Y$ может быть переформулирована как гипотеза о равенстве нулю математического ожидания совокупности D: H_0: $a_D = 0$.

Статистический критерий:

$$T_+ = \text{сумма рангов положительных разностей } d_i.$$

Альтернативная гипотеза	**Критическая область**
H_1: $a > a_0$	Правосторонняя: $T_+ \geq \frac{n(n+1)}{2} - t_\alpha$, где t_α – критическое значение (из таблицы) уровня α
H_1: $a < a_0$	Левосторонняя: $T_+ \leq t_\alpha$, где $c_2 = \frac{n(n+1)}{2} - c_1$, где t_α – критическое значение (из таблицы) уровня α
H_1: $a \neq a_0$	Двусторонняя: или $T_+ \leq \frac{n(n+1)}{2} - t_{\alpha/2}$, или $s_+ \geq t_{\alpha/2}$, где $t_{\alpha/2}$ – критическое значение (из таблицы) уровня $\alpha/2$

Пример. Руководство супермаркета хочет выяснить, изменится ли ежедневное количество краж в магазине, если удвоить число охранников. Усредненные данные по количеству краж по дням недели до и после удвоения числа охранников представлены в таблице. При уровне значимости 0,01 выяснить, повлияло ли усиление охраны на снижение количества краж в магазине.

	Количество краж за день	
День	**До**	**После**
Понедельник	7	5
Вторник	2	3
Среда	3	4
Четверг	6	3
Пятница	5	1
Суббота	8	6
Воскресенье	12	4

Решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		**До**	**После**													
2	**День**	**Xi**	**Yi**	**Di=Xi-Yi**	**|Di|**	Ранги абс.разностей	Знак	n								
3	Понедельник	7	5	2	2	3,5	1	7		H0:	$a_D = 0$					
4	Вторник	2	3	-1	1	1,5	-1			H1:	$a_D > 0$					
5	Среда	3	4	-1	1	1,5	-1	Расчетное значение критерия T+ =			25	=СУММЕСЛИ(G3:G9;">0";F3:F9)				
6	Четверг	6	3	3	3	5	1			α=	0,01					
7	Пятница	5	1	4	4	6	1			t_α=	0	- из таблицы				
8	Суббота	8	6	2	2	3,5	1			Правая кр.точка=	28					
9	Воскресенье	12	4	8	8	7	1				H0 принимается, т.к.	25	<	28		
10										Вывод:	число краж не сократилось					

Критерий Манна-Уитни
(U-критерий; Критерий Вилкоксона-Манна-Уитни)
(Mann-Whitney Test; Wilcoxon Mann-Whitney Test)

Это непараметрический критерий проверки принадлежности двух независимых выборок одной генеральной совокупности, другими словами, критерий проверки однородности двух выборок. Считается непараметрическим аналогом T-критерия Стьюдента для независимых выборок.

Исходные данные представлены в виде двух не связанных между собой выборок:

- $x_1, x_2, \dots, x_{n_X}$ - выборка объема n_X из генеральной совокупности X;
- $y_1, y_2, \dots, y_{n_Y}$ - выборка объема n_Y из генеральной совокупности Y;

где $n_X \le n_Y$.

Проверяется нулевая гипотеза H_0: выборки однородны при альтернативной H_1:выборки неоднородны. Неоднородность выборок подразумевает, что они извлечены из генеральных совокупностей с одной и той же формой распределения, но сдвинутых друг относительно друга на величину Δ. Поэтому нулевую гипотезу можно сформулировать как H_0:Δ=0 (т.е. сдвига распределений нет, распределения совпадают), а альтернативную как H_1:Δ>0, или H_1:Δ>0, или H_1:Δ≠0.

Для вычисления расчетного значения критерия Манна-Уитни обе выборки объединяются в одну выборку объема $n = n_X + n_Y$, и объединенная выборка ранжируется в порядке возрастания. Затем подсчитывается сумма рангов первой выборки R_X и сумма рангов второй выборки R_Y. Для контроля правильности подсчета рангов можно использовать формулу

$$R_X + R_Y = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Статистический критерий: $U = n_X \cdot n_Y + \frac{n_R \cdot (n_R+1)}{2} - R$

где R – значение большей суммы рангов, n_R – объем выборки, имеющей большую сумму рангов.

Альтернативная гипотеза	**Критическая область**
H_1: $\Delta < 0$, H_1: $\Delta > 0$	Левосторонняя: $U \le u_\alpha$, где u_α – критическое значение, взятое из таблицы $(n_1 = n_X,\ n_2 = n_Y)$
H_1: $\Delta \ne 0$	Двусторонняя (его левая часть): или $U \le u_{\alpha/2}$, где $u_{\alpha/2}$ – критическое значение, взятое из таблицы $(n_1 = n_X,\ n_2 = n_Y)$

Пример (Ермолаев). Психолог выясняет, влияет ли дополнительная мотивация в виде денежного вознаграждения на время решения определенной технической задачи. Две группы испытуемых решали данную задачу. Время решения (в секундах) дано в таблице:

Группа 1 (с денежной мотивацией)	Группа 2 (без мотивации)
41	46
38	8
44	50
6	45
25	30
25	41
30	41
41	32
	55

При уровне значимости 0,1 помогите психологу проверить гипотезу.

Решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Группа 1**	**Группа 2**												
2	**(с денежной мотивацией) xi**	**(без мотивации) yi**		**Ранги выборки xi**	**Ранги выборки yi**	**nx**	**ny**							
3	41	46		10,5	15	8	9		H0:	Δ=0				
4	38	8		8	2				H1:	Δ≠0				
5	44	50		13	16		Расчетное значение критерия		U =	19,5				
6	6	45		1	14				α=	0,1				
7	25	30		3,5	5,5				α/2=	0,05				
8	25	41		3,5	10,5	**Левая критическая точка $u_{\alpha/2}$ =**				**18**	- из таблицы			
9	30	41		5,5	10,5				H0 принимается, т.к.		**18**	**<**	**19,5**	
10	41	32		10,5	7		**Вывод: дополнительная мотивация не влияет на время решения задачи**							
11		55			17									
12				**Rx**	**Ry**									
13		Сумма рангов		**55,5**	**97,5**									
14														
15	Контроль правильности подсчета рангов			153	153									

Задания

1. Изучается уровень ситуационной тревожности учащихся выпускных классов по методике Ч.Д. Спилбергера до проведения коррекционной работы для ее снижения. При уровне значимости 0,01 с помощью критерия знаков проверьте, что уровень тревожности учащихся существенно превышает 56 баллов (нижняя граница интервала высокой степени тревожности). **В Excel:** используйте функцию СЧЁТЕСЛИ(...) для подсчета количества положительных и отрицательных разностей.

2. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу из п.1 с помощью знакового критерия рангов Вилкоксона. В Excel: используйте функцию ABS(...) для вычисления модуля, функцию РАНГ.СР(...) для

вычисления рангов, функцию СУММЕСЛИ(...) для подсчета условной суммы, функцию ЗНАК(...) для определения знака числа.

3. При уровне значимости 0,05 проверьте, способствовало ли проведение коррекционной работы снижению уровня ситуационной тревожности учащихся выпускных классов. Используйте критерий знаков.

4. При уровне значимости 0,05 проверьте гипотезу из п.3 с помощью знакового критерия рангов Вилкоксона.

5. Измерялись показатели эмоционального интеллекта у двух групп респондентов: с интернет-зависимостью и без нее. Данные (в баллах) приведены в таблице (см. файл «Исходные данные»). Используя критерий Манна-Уитни, проверить утверждение о том, что показатель эмоционального интеллекта у лиц с интернет-зависимостью существенно ниже, чем у лиц без интернет-зависимости. Принять уровень значимости равным 0,05.