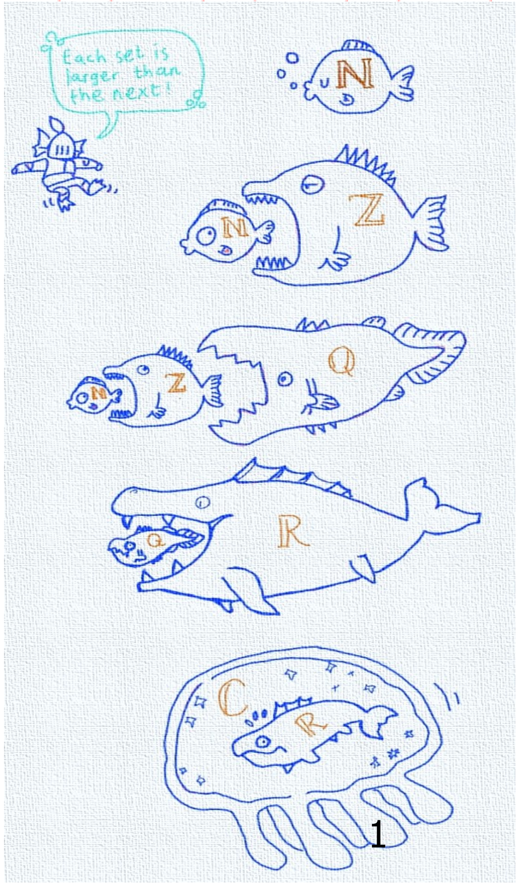
Struktur Diskrit

PAIK6105

PERMUTASI DAN KOMBINASI



Departemen Informatika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

Pendahuluan

- Sebuah kata-sandi (*password*) panjangnya 6 sampai 8 karakter. Karakter boleh berupa huruf atau angka. Berapa banyak kemungkinan kata-sandi yang dapat dibuat?

abcdef

aaaade

a123fr

…

erhtgahn

yutresik

…

????

Outline

- **Review Kaidah Penjumlahan dan Perkalian**
- **Permutasi**
- **Kombinasi**
- **Perluasan Permutasi dan Kombinasi**
- **Koefisien Binomial**

Kaidah Dasar Menghitung

- Kaidah perkalian (*rule of product*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **dan** percobaan 2: $p \times q$ hasil

- Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 **atau** percobaan 2: $p + q$ hasil

- **Contoh 1.** Ketua angkatan IF 2002 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Jumlah pria IF2002 = 65 orang dan jumlah wanita = 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

  Penyelesaian: 65 + 15 = 80 cara.

- **Contoh 2.** Dua orang perwakilan IF2002 mendatangai Bapak Dosen untuk protes nilai ujian. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tesrebut?

  Penyelesaian: $65 \times 15 = 975$ cara.

Perluasan Kaidah Dasar Menghitung

Misalkan ada n percobaan, masing-masing dg p_i hasil

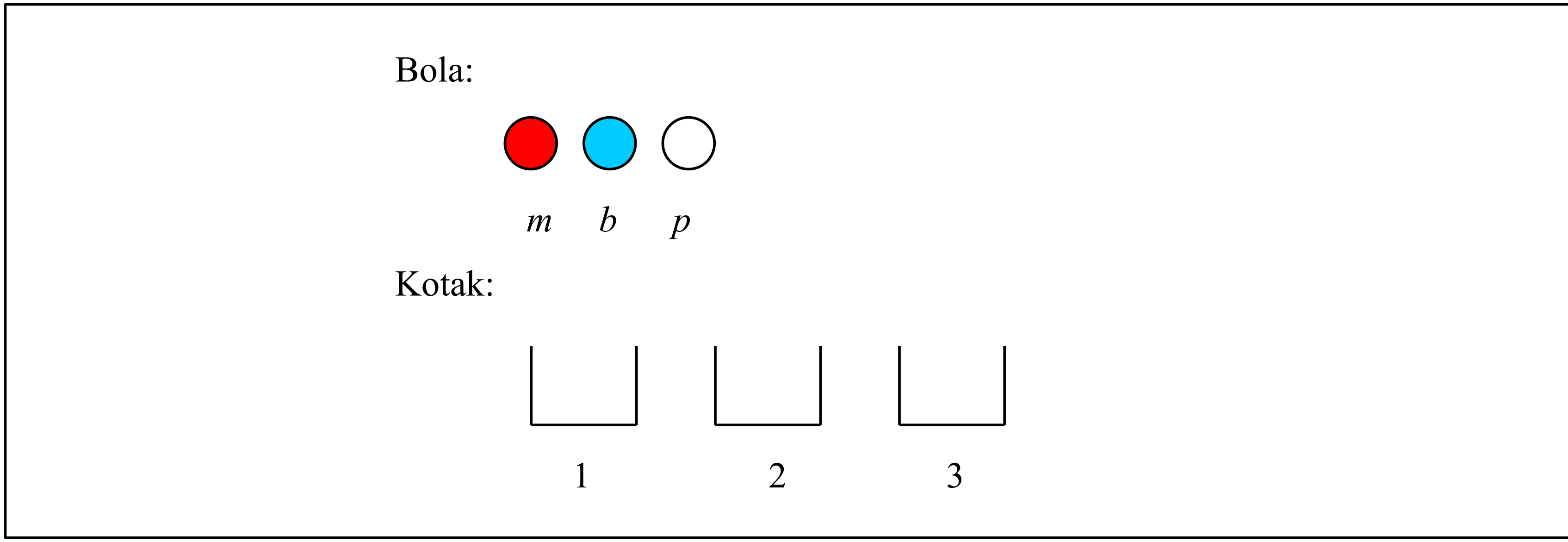
1. Kaidah perkalian (*rule of product*)

   $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ hasil

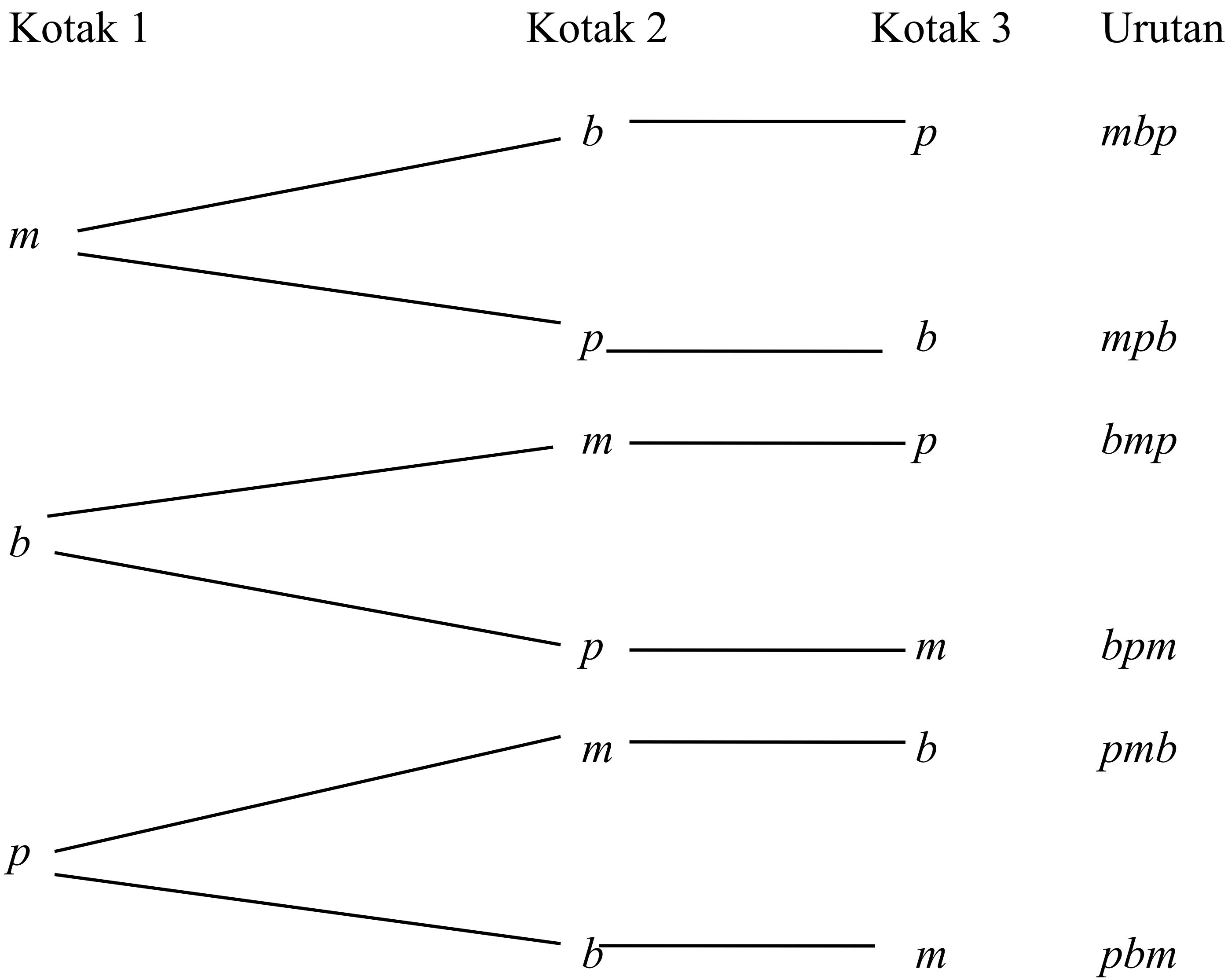
2. Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)

   $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ hasil

Permutasi



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah (3)(2)(1) = 3! = 6.

- **Definisi**: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.
- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah *n*, maka

✓ urutan pertama dipilih dari *n* objek,

✓ urutan kedua dipilih dari $n - 1$ objek,

✓ urutan ketiga dipilih dari $n - 2$ objek,

✓…

✓urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

Menurut kaidah perkalian, permutasi dari *n* objek adalah

$$n(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(2)(1) = n!$$

- **Contoh 6.** Berapa banyak "kata" yang terbentuk dari kata "HAPUS"?

  Penyelesaian:

  Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

  Cara 2: $P(5, 5) = 5! = 120$ buah kata

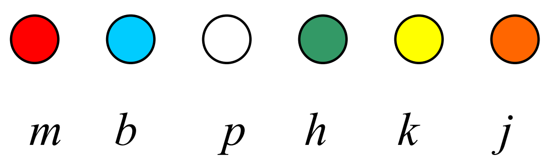
- **Contoh 7.** Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

  Penyelesaian: $P(25, 25) = 25!$

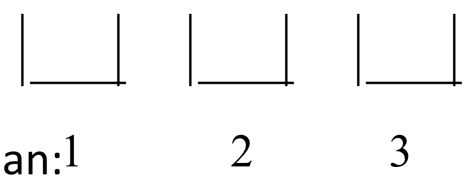
Permutasi *r* dari *n* elemen

- Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?

Bola:



Kotak:



<u>Penyelesaian</u>:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Perampatan:

Ada n buah bola yang berbeda warnanya dan r buah kotak ($r \leq n$), maka

kotak ke-1 dapat diisi oleh salah satu dari n bola → (ada n pilihan) ;

kotak ke-2 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 1) bola → (ada n – 1 pilihan);

kotak ke-3 dapat diisi oleh salah satu dari (n – 2) bola → (ada n – 2) pilihan;

…

kotak ke-r dapat diisi oleh salah satu dari (n – (r – 1) bola → (ada $n - r + 1$ pilihan)

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola adalah: $n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan r buah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)...(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 7. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk 3 angka dari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:
(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan
(b) boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:
(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 120 buah
Dengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 120

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.
Dengan kiadah perkalian: (5)(5)(5) = 5^3 = 125.

Contoh 8. Kode buku di sebuah perpustakaan panjangnya 7 karakter, terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?
Penyelesaian: $P(26, 4) \times P(10,3)$ = 258.336.000

Latihan:

1. Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?

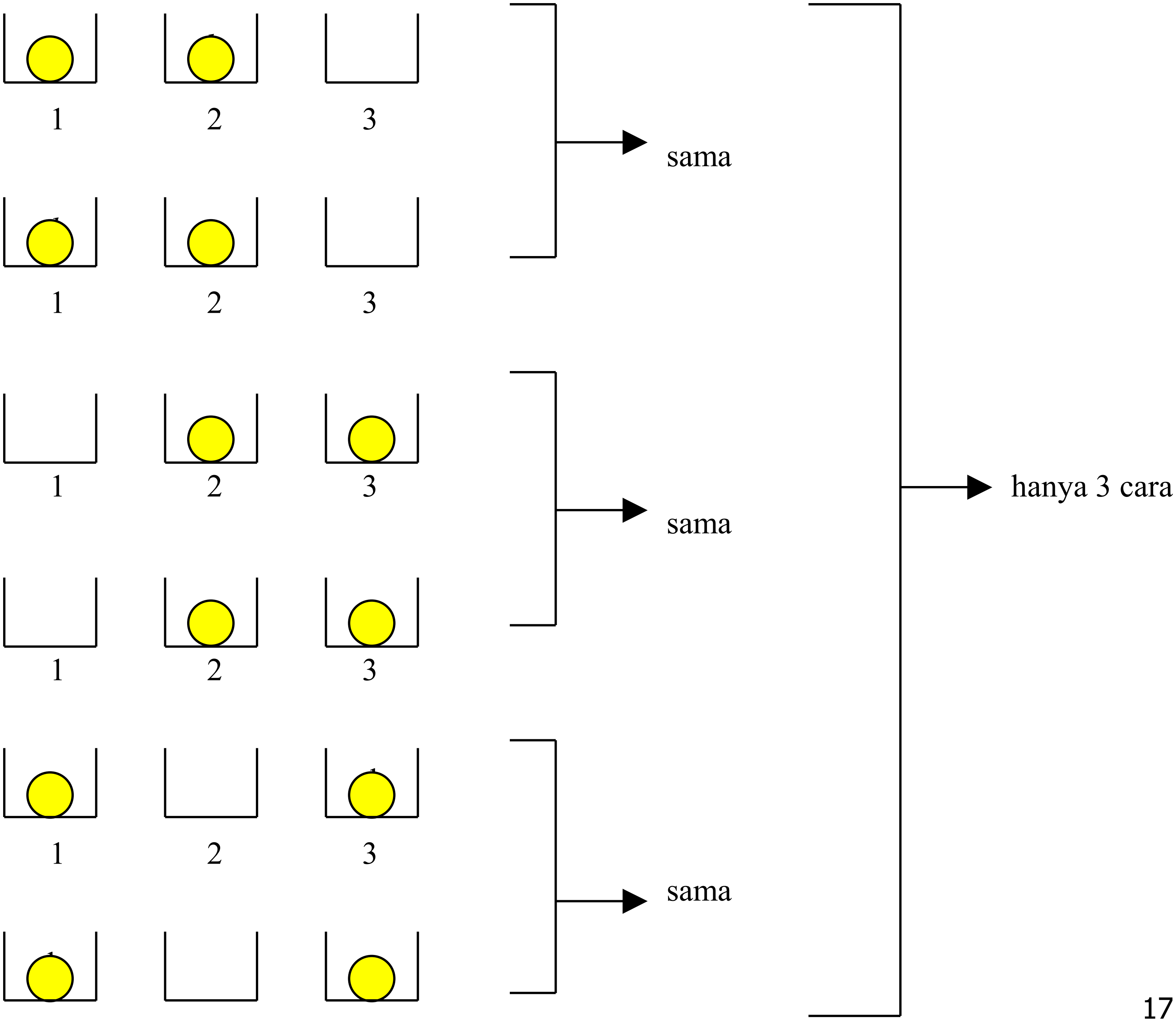
Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak 1 bola.

Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$


1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
1
2
3
sama
sama
sama
hanya 3 cara

- Bila sekarang jumlah bola 3 dan jumlah kotak 10, maka jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak adalah

$$\frac{P(10,3)}{3!} = \frac{\frac{10!}{7!}}{3!} = \frac{(10)(9)(8)}{3!}$$

karena ada 3! cara memasukkan bola yang warnanya sama.

- Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang berwarna sama ke dalam n buah kotak adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r) \text{ atau} \binom{n}{r}$$

- $C(n, r)$ sering dibaca "n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek.

- **Definisi 3.** Kombinasi r elemen dari n elemen, atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Interpretasi Kombinasi

1. $C(n, r)$ = banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari r elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan n elemen.

   Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$
   Jumlah Himpunan bagian dengan 2 elemen:

$$\left.\begin{matrix}\{1, 2\} = \{2, 1\} \\ \{1, 3\} = \{3, 1\} \\ \{2, 3\} = \{3, 2\}\end{matrix}\right\rangle \quad 3 \text{ buah}$$

   atau $\binom{3}{2} = \dfrac{3!}{(3-2)!2!} = \dfrac{3!}{1!2!} = 3$ buah

2. $C(n, r)$ = cara memilih r buah elemen dari n buah elemen yang ada, tetapi urutan elemen di dalam susunan hasil pemilihan tidak penting.

Contoh: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Penyelesaian:

Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Latihan:

1. Kursi-kursi di sebuah bioskop disusun dalam baris-baris, satu baris berisi 10 buah kursi. Berapa banyak cara mendudukkan 6 orang penonton pada satu baris kursi:

   (a) jika bioskop dalam keadaan terang

   (b) jika bioskop dalam keadaan gelap

2. Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Informatika. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang jika:

(a) tidak ada batasan jurusan

(b) semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika

(c) semua anggota panitia harus dari jurusan Informatika

(d) semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama

(e) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.

3. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?

Permutasi dan Kombinasi Bentuk Umum

Misalkan: ada n buah bola yang tidak seluruhnya berbeda warna (jadi, ada beberapa bola yang warnanya sama - *indistinguishable*).

n_1 bola diantaranya berwarna 1,
n_2 bola diantaranya berwarna 2,
$\vdots$
n_k bola diantaranya berwarna k,

dan $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Berapa jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam kotak-kotak tersebut (tiap kotak maks. 1 buah bola)?

Jika n buah bola itu kita anggap berbeda semuanya, maka jumlah cara pengaturan n buah bola ke dalam n buah kotak adalah:

$$P(n, n) = n!.$$

Dari pengaturan n buah bola itu,

ada $n_1!$ cara memasukkan bola berwarna 1

ada $n_2!$ cara memasukkan bola berwarna 2

$\vdots$

ada $n_k!$ cara memasukkan bola berwarna k

Permutasi n buah bola yang mana n_1 diantaranya berwarna 1, n_2 bola berwarna 2, …, n_k bola berwarna k adalah:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{P(n, n)}{n_1! n_2! ... n_k!} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Jumlah cara pengaturan seluruh bola kedalam kotak adalah:

$$C(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = C(n, n_1)\, C(n - n_1, n_2)\, C(n - n_1 - n_2 , n_3)$$
$$\ldots\, C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k\text{-}1}, n_k)$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$$

$$\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_k)!}$$

$$\ldots \frac{(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k}$$

Kesimpulan:

$$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = C(n; n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

Contoh 10. Berapa banyak "kata" yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

<u>Penyelesaian</u>:

$S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$

huruf M = 1 buah (n_1)
huruf I = 4 buah (n_2)
huruf S = 4 buah (n_3)
huruf P = 2 buah (n_4)
$n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ buah $= |S|$

Cara 1: Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)} = 34650 \text{ buah.}$$

Cara 2: Jumlah *string* = $C(11, 1)C(10, 4)C(6, 4)C(2, 2)$

$$= \frac{11!}{(1!)(10!)} \cdot \frac{10!}{(4!)(6!)} \cdot \frac{6!}{(4!)(2!)} \cdot \frac{2!}{(2!)(0!)}$$

$$= \frac{11!}{(1!)(4!)(4!)(2!)}$$

$= 34650$ buah

Contoh 11. Berapa banyak cara membagikan delapan buah mangga kepada 3 orang anak, bila Billy mendapat empat buah mangga, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah mangga.

Penyelesaian:

$n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, dan $n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh mangga = $\dfrac{8!}{(4!)(2!)(2!)} = 420$ cara

Contoh 12. 12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Penyelesaian:

$n = 18$; $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$, dan $n_4 = 6$ (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = $\dfrac{18!}{(4!)(3!)(5!)(6!)}$ cara

Latihan:

1. 100 orang mahasiswa dikirim ke 5 negara, masing-masing negara 20 orang mahasiswa. Berapa banyak cara pengiriman mahasiswa?

2. Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk dari huruf-huruf kata "CONGRESS" sedemikian sehingga dua buah huruf "S" tidak terletak berdampingan?

3. Tentukan banyaknya cara agar 4 buku matematika, 3 buku sejarah, 3 buku kimia, dan 2 buku sosiologi dapat disusun dalam satu baris sedemikian sehingga (untuk masing-masing soal)

(a) semua buku yang topiknya sama letaknya bersebelahan,

(b) urutan buku dalam susunan bebas.

Kombinasi Dengan Pengulangan

Misalkan terdapat r buah bola yang semua warnanya sama dan n buah kotak.

(i) Masing-masing kotak hanya boleh diisi paling banyak satu buah bola.

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n, r)$.

(ii) Masing-masing kotak boleh lebih dari satu buah bola (tidak ada pembatasan jumlah bola)

Jumlah cara memasukkan bola: $C(n + r - 1, r)$.

$$C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1).$$

Contoh 13. Pada persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, x_i adalah bilangan bulat ≥ 0. Berapa jumlah kemungkinan solusinya?

Penyelesaian:

- Analogi: 12 buah bola akan dimasukkan ke dalam 4 buah kotak (dalam hal ini, $n = 4$ dan $r = 12$).
- Bagilah keduabelas bola itu ke dalam tiap kotak. Misalnya,

Kotak 1 diisi 3 buah bola ($x_1 = 3$)
Kotak 2 diisi 5 buah bola ($x_2 = 5$)
Kotak 3 diisi 2 buah bola ($x_3 = 2$)
Kotak 4 diisi 2 buah bola ($x_4 = 2$)
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 + 5 + 2 + 2 = 12$

Ada C(4 + 12 – 1, 12) = C(15, 12) = 455 buah solusi.

Contoh 14. 20 buah apel dan 15 buah jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

Penyelesaian:

$n = 5$, $r_1 = 20$ (apel) dan $r_2 = 15$ (jeruk)
Membagi 20 apel kepada 5 anak: $C(5 + 20 – 1, 20)$ cara,
Membagi 15 jeruk kepada 5 anak: $C(5 + 15 – 1, 15)$ cara.

Jumlah cara pembagian kedua buah itu adalah

$$C(5 + 20 - 1, 20) \times C(5 + 15 - 1, 15) = C(24, 20) \times C(19, 15)$$

Latihan:

1. Ada 10 soal di dalam ujian akhir *Matematika Diskrit*. Berapa banyak cara pemberian nilai (bilangan bulat) pada setiap soal jika jumlah nilai keseluruhan soal adalah 100 dan setiap soal mempunyai nilai paling sedikit 5. (Khusus untuk soal ini, nyatakan jawaban akhir anda dalam $C(a, b)$ saja, tidak perlu dihitung nilainya)

2. Di perpustakaan Teknik Informatika terdapat 3 jenis buku: buku Algoritma dan Pemrograman, buku Matematika Diskrit, dan buku Basisdata. Perpustakaan memiliki paling sedikit 10 buah buku untuk masing-masing jenis. Berapa banyak cara memilih 10 buah buku?
3. Dari sejumlah besar koin 25-an, 50-an, 100-an, dan 500-an, berapa banyak cara lima koin dapat diambil?

Koefisien Binomial

$(x + y)^0 = 1$						1					
$(x + y)^1 = x + y$					1		1				
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$				1		2		1			
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$			1		3		3		1		
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$		1		4		6		4		1	
$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$	1		5		10		10		5		1

$$(x + y)^n = C(n, 0)\, x^n + C(n, 1)\, x^{n-1}\, y^1 + \ldots + C(n, k)\, x^{n-k}\, y^k + \ldots + C(n, n)\, y^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k}\, y^k$$

Koefisien untuk $x^{n-k}y^k$ adalah $C(n, k)$. Bilangan $C(n, k)$ disebut **koefisien binomial**.

Segitiga Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

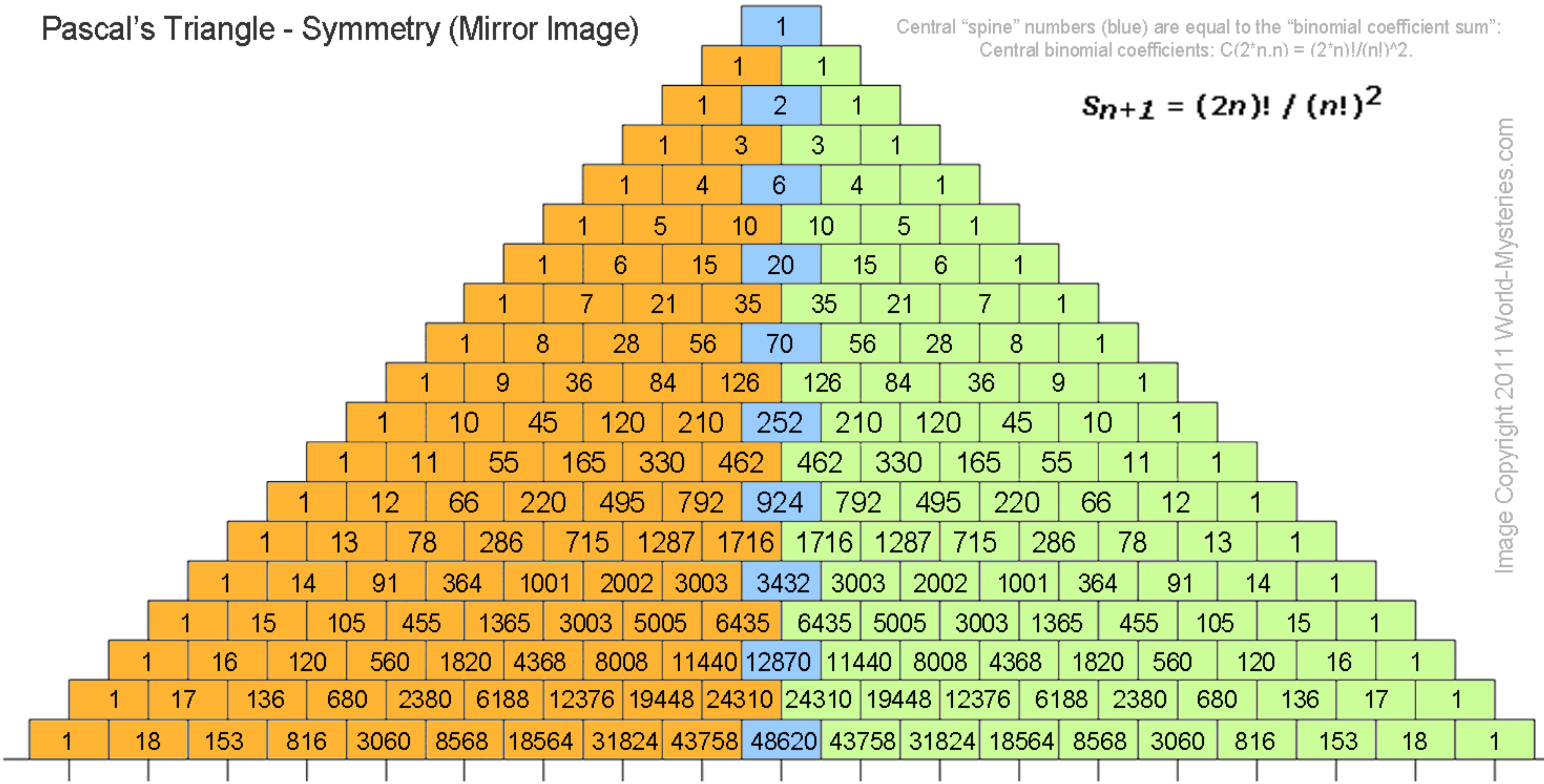
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Pascal's Triangle - Symmetry (Mirror Image)

Central "spine" numbers (blue) are equal to the "binomial coefficient sum":
Central binomial coefficients: C(2*n.n) = (2*n)!/(n!)^2.

$$S_{n+1} = (2n)! \; / \; (n!)^2$$



Contoh 15. Jabarkan $(3x - 2)^3$.

<u>Penyelesaian</u>:

Misalkan $a = 3x$ dan $b = -2$,

$$
\begin{aligned}
(a + b)^3 &= C(3, 0)\ a^3 + C(3, 1)\ a^2b^1 + C(3, 2)\ a^1b^2 + C(3, 3)\ b^3 \\
&= 1\ (3x)^3 + 3\ (3x)^2\ (-2) + 3\ (3x)\ (-2)^2 + 1\ (-2)^3 \\
&= 27\ x^3 - 54x^2 + 36x - 8
\end{aligned}
$$

Contoh 16. Tentukan suku keempat dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^5$.

Penyelesaian:

$(x - y)^5 = (x + (-y))^5$.

Suku keempat adalah: $C(5, 3)\, x^{5-3} (-y)^3 = -10x^2y^3$.

Contoh 17. Buktikan bahwa $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

Penyelesaian:

Dari persamaan (6.6), ambil $x = y = 1$, sehingga

$$\Leftrightarrow \; (x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, x^{n-k}\, y^k$$

$$\Leftrightarrow \; (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 1^{n-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

$$\Leftrightarrow \; 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

Latihan:

Perlihatkan bahwa $\sum_{k=0} 2^k C(n, k) = 3^n$