Struktur Diskrit Pertemuan

PAIK6105

ARGUMEN (TEKNIK) PENCACAHAN

- Prinsip Inklusi dan Eksklusi—Part 1

(The Principle of Inclusion-Exclusion)

Departemen Informatika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

Outline

- Review Himpunan

- Prinsip Inklusi dan Eksklusi

Outline

- Review Himpunan

- Prinsip Inklusi dan Eksklusi
  - 2 himpunan
  - 3 himpunan
  - lebih dari 3 himpunan

Berapa banyak elemen di dalam gabungan sebanyak n himpunan berhingga ?

(untuk suatu bilangan bulat n)

Bagian 1.

Review Himpunan

Himpunan

Himpunan adalah kumpulan dari objek tertentu yang memiliki **definisi yang jelas** dan dianggap sebagai satu kesatuan.

Objek di dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota.

Himpunan semesta adalah himpunan yang berisikan semua anggota atau objek yang sedang menjadi pembahasan atau dibicarakan.

Aturan dalam representasi himpunan

- $\{a, b, c, d, e\} \rightarrow$ Himpunan

Urutan penulisan elemen di dalam himpunan tidak penting.
Contoh: $\{a, b, c, d, e\} = \{b, a, d, e, c\}$

Penyajian Himpunan

Enumerasi

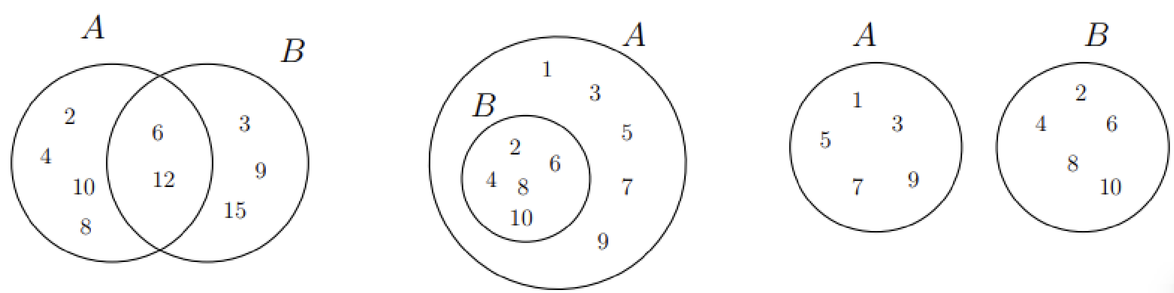
A adalah himpunan bilangan positif genap yang kurang dari 10.
Maka $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Notasi Himpunan

$\{x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x\}$

Contoh
$A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 5\}$

Diagram Venn



$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$A = \{x | x \in N, x \leq 10\}$
$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Kardinalitas

Kardinalitas suatu himpunan A adalah banyaknya elemen pada himpunan A, yang dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$.

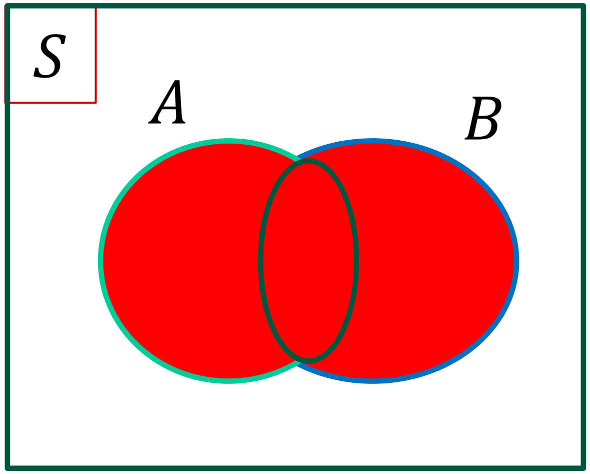
Contoh

Himpunan $A = \{2x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 5\}$ *memiliki kardinalitas 4.*

Operasi Gabungan Dua Himpunan (Union)

Gabungan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap elemennya (anggotanya) termuat di dalam himpunan A atau B.

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$$



Contoh.

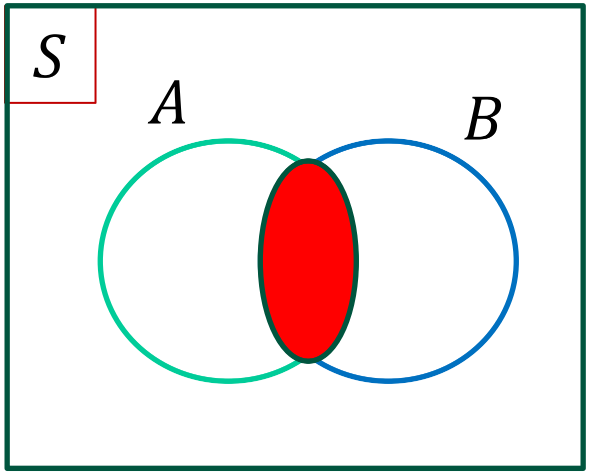
(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka
$A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

Operasi Irisan Dua Himpunan (Intersection)

Irisan dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya (anggotanya) termuat di dalam himpunan A dan B.

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$$



Contoh 14.

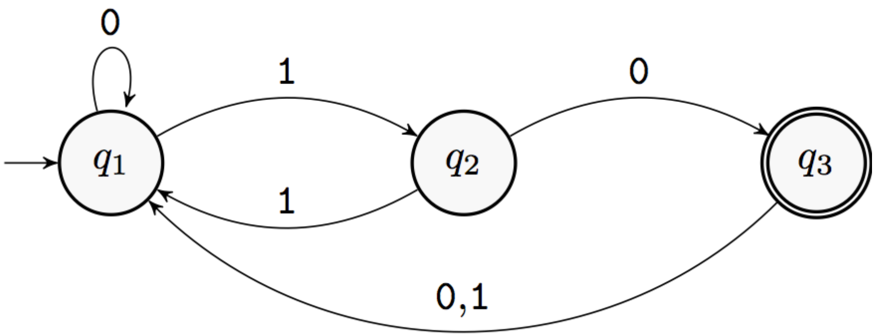
(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$, maka $A \cap B = \{2, 4\}$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$

Intermezzo ----Penggunaan Himpunan

- **Teori Bahasa dan Automata**

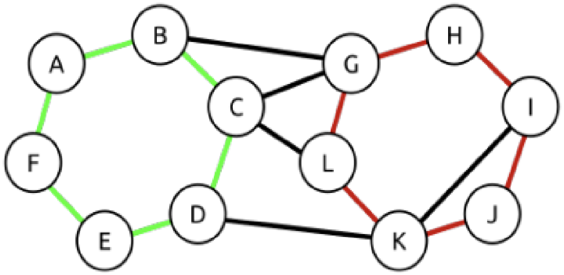
  <u>(di semester-semester berikutnya)</u>

  Alfabet, Bahasa (Language),... dll



- **Teori Graf**

  <u>(di beberapa pertemuan berikutnya)</u>



Bagian 2.

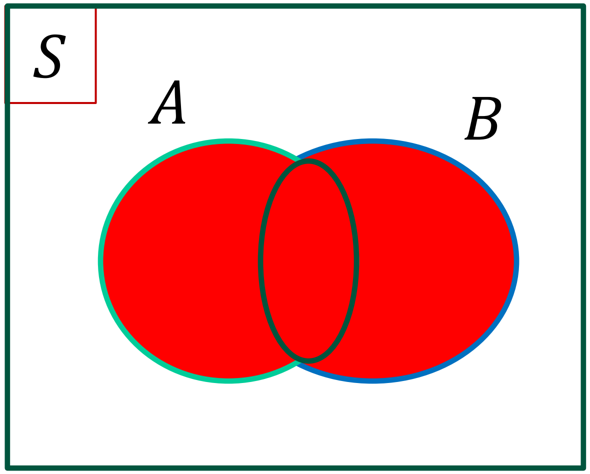
Prinsip Inklusi dan Eksklusi

Prinsip Inklusi-Eksklusi

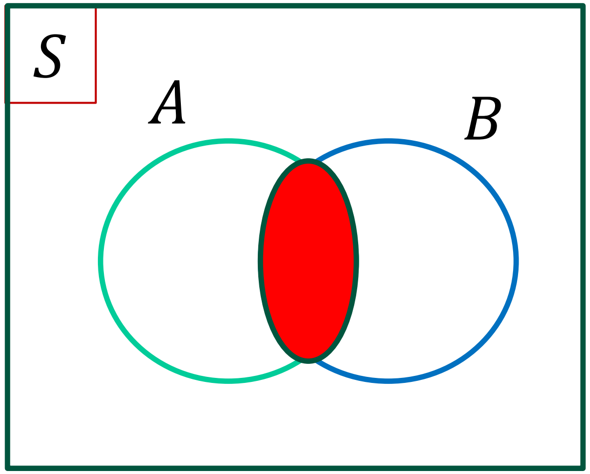
2 Himpunan Berhingga

Untuk dua himpunan berhingga A dan *B*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$A \cup B$



$A \cap B$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

2 Himpunan Berhingga

Untuk dua himpunan berhingga A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Catatan:

--- Himpunan A dan B mungkin saja memiliki elemen yang sama.

--- Setiap elemen yang sama itu dihitung dua kali,
- sekali pada |A|
- sekali pada |B|,

meskipun seharusnya dihitung satu kali sebagai elemen di $A \cup B$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

2 Himpunan Berhingga

Untuk dua himpunan berhingga A dan B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Catatan:

Banyak elemen di masing-masing himpunan,
dikurangi dengan jumlah elemen
di dalam irisannya

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Latihan Soal.

Berapa banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Latihan Soal.

Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Penyelesaian: Misalkan
A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5
(yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

Yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.
Jawab :

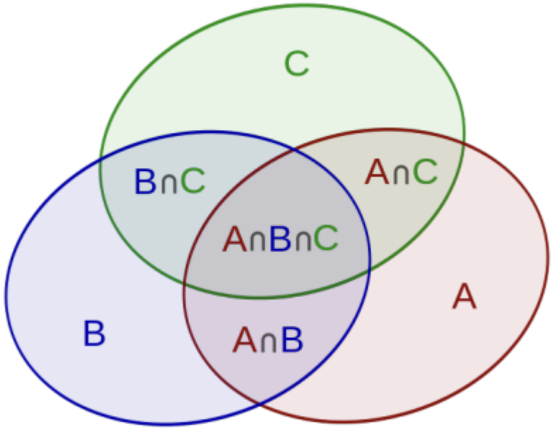
$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$
$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$
$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

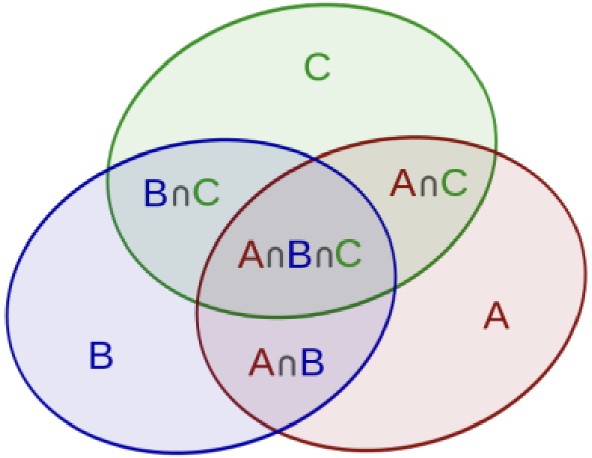
Untuk tiga himpunan, perumumannya adalah:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Prinsip Inklusi-Eksklusi

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Notes (ilustrasi di catatan/papan tulis)

Pada $|A| + |B| + |C|$, dihitung:

- elemen yang tepat di salah satu himpunan sebanyak satu kali
- elemen yang tepat dalam dua himpunan sebanyak dua kali
-elemen di ketiga himpunan sebanyak tiga kali

Latihan Soal.

Terdapat 1232 mahasiswa mengambil kelas bahasa Spanyol, 879 mahasiswa mengambil kelas bahasa Prancis, dan 114 mahasiswa mengambil kelas bahasa Rusia. Kemudian, 103 mahasiswa mengambil kelas bahasa Spanyol dan Prancis, 23 mahasiswa mengambil kelas bahasa Spanyol dan Rusia, serta 14 mahasiswa mengambil kelas bahasa Prancis dan Rusia. Jika 2092 mahasiswa telah mengambil setidaknya satu dari kelas bahasa Spanyol, Prancis, dan Rusia, maka berapa banyak mahasiswa yang sudah mengambil kelas bahasa ketiganya?

Petunjuk :

- Misalkan himpunan yang terkait dengan permasalahan
- Gambarkan permasalahan tersebut dalam diagram Venn
- Hitung berdasarkan persamaan di prinsip inkulusi-eksklusi tiga himpunan

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk **dua** himpunan:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Untuk **tiga** himpunan:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Bagaimana dengan 4 himpunan? 5 himpunan?, dst...?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Tahapan penghitungan kardinalitas dari gabungan n himpunan

1. Sertakan kardinalitas setiap himpunan.
2. Kecualikan kardinalitas dari irisan dua himpunan.
3. Sertakan kardinalitas dari irisan tiga himpunan.
4. Kecualikan kardinalitas dari irisan empat himpunan.
5. Sertakan kardinalitas dari irisan lima himpunan.
6. Lanjutkan, sampai kardinalitas perpotongan n-tuplewise diperhitungkan (jika n ganjil) atau dikecualikan (n genap).

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk himpunan berhingga A_1, A_2, dan A_3 berlaku:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan berhingga $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r$, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le r} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r|$$

Intermezzo– Embracing Failure in Math

It is not how many answers you know, but it is how you behave when you don't know.

Sumber Foto: https://www.math.ucla.edu/~tao/

"There may be clues in your failed process that lead to breakthroughs later."

-Terence Tao-

To value the process and what we learn from the journey

Failures Are Clues

The only reason why experts seem so competent is that because they've already screwed up in every conceivable way. Thus, in the future, they know how to do and not to do that. (credit to : Niels Bohr—physicist)

In Learning Math, **Failure Is Cheap** It is OK, try again. FREDOM to try + PERSISTENCE!

When you fail on a task, may be you blame yourself and exc.

In Learning Mathematics, when you fail, figure out what doesn't work and why. It will often tell you clues as to what the working solution should look like.

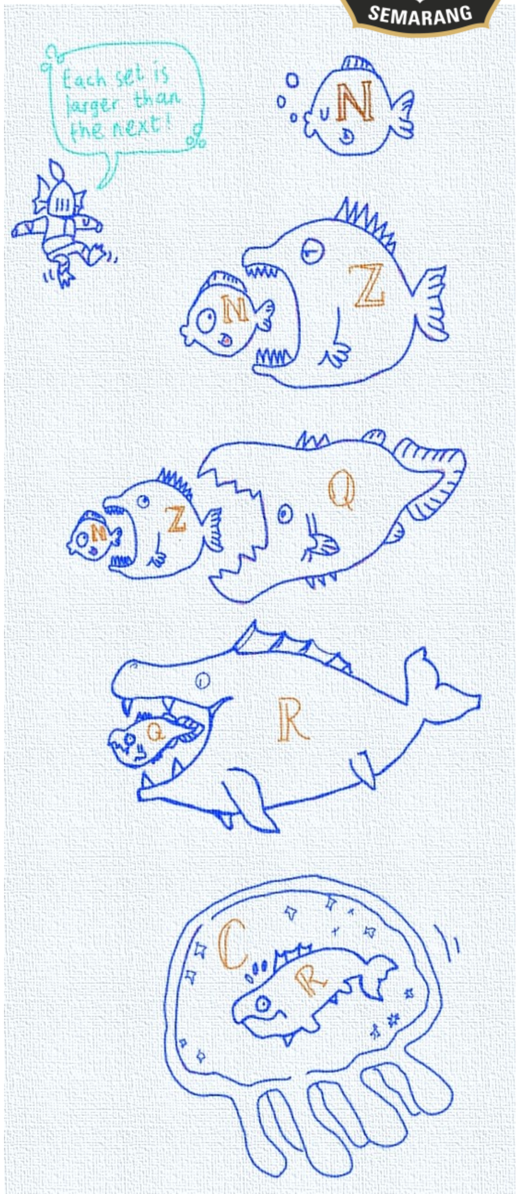
Struktur Diskrit Pertemuan

PAIK6105

ARGUMEN (TEKNIK) PENCACAHAN

- Prinsip Inklusi dan Eksklusi-Part 2

(The Principle of Inclusion-Exclusion)



Departemen Informatika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

Outline

- Latihan Soal Prinsip Inklusi dan Eksklusi

Sumber soal Latihan dan Kuis __ Nurdin Bahtian, MT_ Slide Perkuliahan Struktur Diskrit 2022

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk himpunan berhingga A_1, A_2, dan A_3 berlaku:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan berhingga $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_r$, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le r} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le r} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r|$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

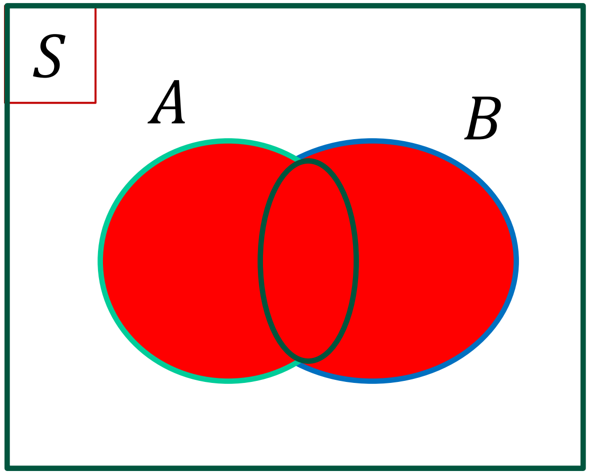
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

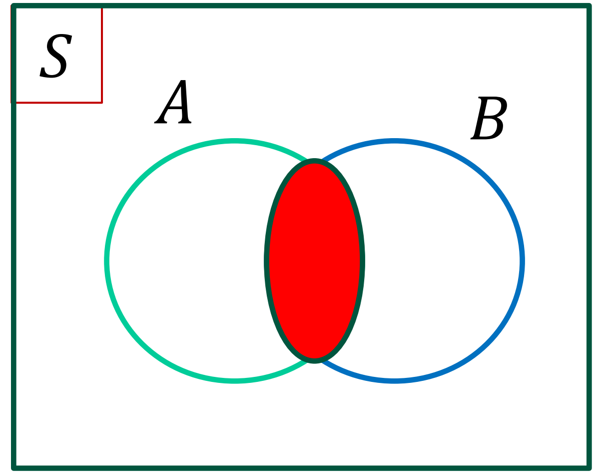
Untuk himpunan berhingga A_1, A_2, ..., A_r, berlaku:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r| = ?$$

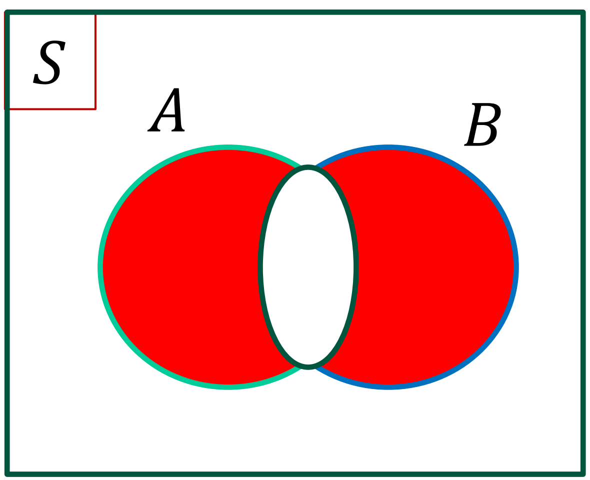
Prinsip Inklusi-Eksklusi



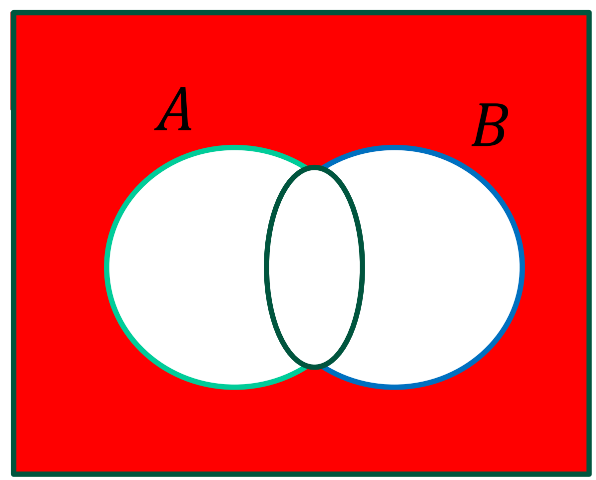
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \oplus B$



$\overline{A \cup B} = (A \cup B)^c$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Latihan Soal. 1

Berapa banyak elemen yang ada dalam $A_1 \cup A_2$, jika terdapat 12 elemen dalam A_1, 18 elemen A_2, dan

a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$?

b) $|A_1 \cap A_2| = 1$?

c) $|A_1 \cap A_2| = 6$?

d) $A_1 \subseteq A_2$?

Petunjuk : - Hitung berdasarkan persamaan di prinsip inkulusi-eksklusi gabungan dua himpunan

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Latihan Soal. 2

Setiap *byte* disusun oleh 8-bit. Berapa banyak *byte* yang dimulai dengan ‘11’ atau berakhir dengan ‘11’?

Catatan :
- Bit (binary digit) merupakan satuan terkecil dalam system penyimpanan komputasi. Bit adalah symbol dengan dua nilai yang mungkin yaitu 0 atau 1. Istilah bit diperkenalkan oleh John Tukey pada tahun 1946.
- 1 Byte terdiri dari 8 bit. Istilah byte untuk pertama kalinya diperkenalkan oleh ilmuwan computer Amerika Bernama Dr. Werner Buchholz pada tahun 1956 Ketika menjadi ilmuwan di IBM

Petunjuk :
- Misalkan himpunan yang terkait dengan permasalahan
- Ingat Kembali kaidah perkalian *(rule of product)*
- Hitung berdasarkan persamaan di prinsip inkulusi-eksklusi gabungan dua himpunan

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Latihan Soal. 3

Di kelas matematika diskrit, setiap mahasiswa merupakan jurusan ilmu komputer atau matematika, atau keduanya. Banyak mahasiswa yang jurusan ilmu komputer (mungkin juga matematika) adalah 25. Banyak mahasiswa yang jurusan matematika (mungkin juga ilmu komputer) adalah 13. Banyak mahasiswa yang jurusan keduanya adalah 8. Berapa banyak mahasiswa pada kelas tersebut? (Asumsinya tiap mahasiswa dapat mengambil lebih dari satu jurusan).

Petunjuk :

- Misalkan himpunan yang terkait dengan permasalahan
- Gambarkan permasalahan tersebut dalam diagram Venn
- Hitung berdasarkan persamaan di prinsip inkulusi-eksklusi gabungan dua himpunan

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Latihan Soal. 4

Misalkan ada 1807 mahasiswa baru di kampus. Diantaranya, 453 mengambil kelas ilmu komputer, 567 mengambil kelas matematika, dan 299 mengambil kelas keduanya. Berapa banyak mahasiswa yang tidak mengambil kelas ilmu komputer atau matematika?

Petunjuk :

- Misalkan himpunan yang terkait dengan permasalahan
- Gambarkan permasalahan tersebut dalam diagram Venn
- Hitung berdasarkan persamaan di prinsip inkulusi-eksklusi gabungan dua himpunan

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Latihan Soal. 5

Terdapat 1232 mahasiswa mengambil kelas bahasa Spanyol, 879 mahasiswa mengambil kelas bahasa Perancis, dan 114 mahasiswa mengambil kelas bahasa Rusia. Kemudian, 103 mahasiswa mengambil kelas bahasa Spanyol dan Perancis, 23 mahasiswa mengambil kelas bahasa Spanyol dan Rusia, serta 14 mahasiswa mengambil kelas bahasa Perancis dan Rusia. Jika 2092 mahasiswa telah mengambil setidaknya satu dari kelas bahasa Spanyol, Perancis, dan Rusia. Gambarkan permasalahan tersebut dalam diagram Venn! Berapa banyak mahasiswa yang sudah mengambil kelas bahasa ketiganya?

Petunjuk :

- Misalkan himpunan yang terkait dengan permasalahan
- Gambarkan permasalahan tersebut dalam diagram Venn
- Hitung berdasarkan persamaan di prinsip inkulusi-eksklusi tiga himpunan

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Post Test—Latihan Soal:

1. Misalkan A_1, A_2, A_3, dan A_4 adalah himpunan berhingga. Berikan rumus untuk banyak elemen dalam gabungan (union) dari empat himpunan.

2. Suatu survey rumah tangga di US mengatakan bahwa 96% memiliki minimum 1 TV, 98% memiliki layanan telepon, dan 95% memiliki layanan telepon dan minimum 1 TV. Berapa % dari rumah tangga di US yang tidak memiliki TV atau Telepon ?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Post Test—Latihan Soal:

3. Berapakah banyak elemen dalam $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, jika terdapat sebanyak 100 elemen dalam setiap himpunan dan

   a) semua himpunan tidak memiliki irisan (disjoint)?
   b) terdapat sebanyak 50 elemen dalam irisan setiap dua himpunan dan sebanyak 0 elemen dalam irisan tiga himpunan?
   c) Terdapat sebanyak 50 elemen dalam irisan setiap dua himpunan dan 25 elemen dalam irisan tiga himpunan ?
   d) Ketiga himpunan sama ?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Tambahan

Untuk dua himpunan berhingga A dan B:

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Latihan

Di antara bilangan bulat antara 101 – 600 (termasuk 101 dan 600 itu sendiri), berapa banyak bilangan yang tidak habis dibagi oleh 4 atau 5 namun tidak keduanya?

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Diketahui:

$$|S| = 500$$
$$|A| = \lfloor 600/4 \rfloor - \lfloor 100/4 \rfloor = 150 - 25 = 125$$
$$|B| = \lfloor 600/5 \rfloor - \lfloor 100/5 \rfloor = 120 - 20 = 100$$
$$|A \cap B| = \lfloor 600/20 \rfloor - \lfloor 100/20 \rfloor = 30 - 5 = 25$$

yang ditanyakan $|\overline{A \oplus B}| = ?$

Hitung terlebih dahulu

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 125 + 100 - 50 = 175$$

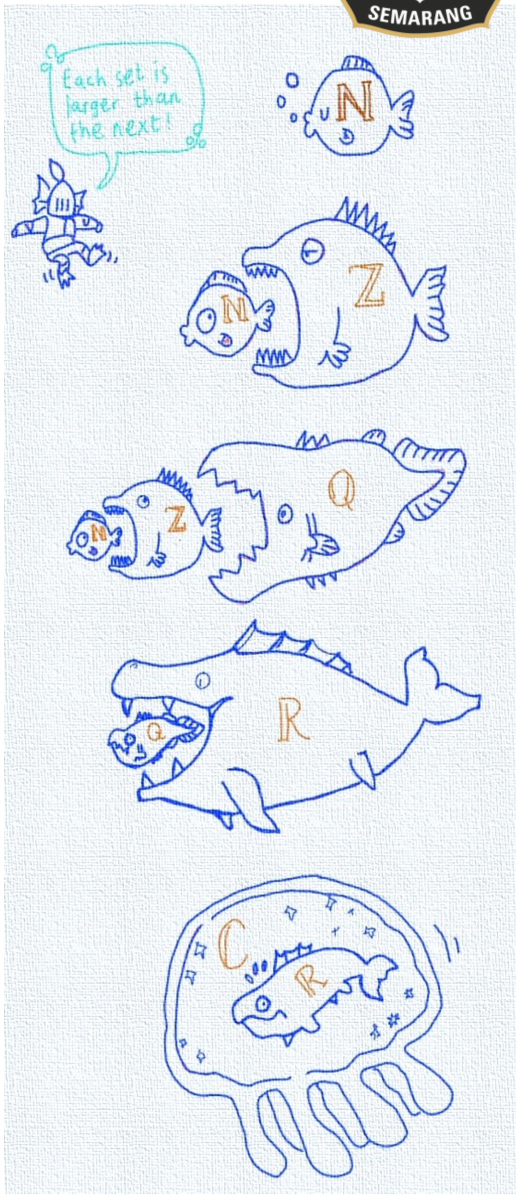
untuk mendapatkan

$$|\overline{A \oplus B}| = S - |A \oplus B| = 500 - 175 = 325$$

Struktur Diskrit

PAIK6105

RELATION
(RELASI)



Departemen Informatika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

Outline

Pengantar Matriks
Relasi (Relasi Biner dan Relasi pada sebuah Himpunan(Relasi Khusus))
Representasi Relasi
Sifat-sifat Relasi Khusus
Relasi Ekuivalen
Mengkombinasikan Relasi
Relasi Pengurutan Parsial
Relasi *n-ary*

Bagian 1.

Pengantar Matriks

Matriks

Matriks adalah adalah array berbentuk persegi panjang atau tabel, berisikan angka, simbol, atau ekspresi, yang disusun dalam baris dan kolom, yang digunakan untuk mewakili objek matematika atau properti dari objek tersebut.

Matriks dengan m baris dan n kolom dituliskan sebagai:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Catatan:

- Matriks biasanya dituliskan dengan $M = [a_{ij}]$.
- Elemen pada baris ke-i kolom ke-j matriks A disimbolkan dengan A_{ij}

Matriks persegi

Matriks persegi (bujur sangkar) adalah matriks dengan banyak baris dan kolom sama.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Matriks simetri

Matriks simetri adalah matriks $A_{n \times n}$ (i.e., matriks persegi) dimana untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ berlaku:

$$A_{ij} = A_{ji}$$

yakni, elemen baris i kolom j sama dengan elemen baris j kolom i

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks biner

Matriks biner atau 0/1 adalah matriks yang elemen-elemennya adalah 0 atau 1.

Contoh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bagian 2.

Relasi

Relasi

Misalkan terdapat dua himpunan yaitu himpunan A dan B.

Bagaimana cara untuk menyatakan hubungan antara anggota-anggota di kedua himpunan tersebut?

Relasi antar himpunan menggambarkan hubungan antara anggota di himpunan terkait

Dalam hal ini, relasi dari $a \in A$ dan $b \in B$ dapat dinyatakan dengan (a, b) pasangan terurut (ordered pairs).

Relasi

Contoh:

Misalkan

A = {Hasan, Ratna, Galih, Yusuf, Adit}

adalah himpunan mahasiswa,

B $=$ {SD = Struktur Diskrit, LI = Logika Informatika, ASA= Analisis dan Strategi Algoritma, PM = Pembelajaran Mesin, SC=Sistem Cerdas, AP=Algoritma dan Pemrograman, JK=Jaringan Komputer}

adalah himpunan mata kuliah.

Misalkan R menyatakan relasi antara himpunan A dan B, yaitu mata kuliah favorit mahasiswa.

{(Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI)}

Relasi

Misalkan R menyatakan relasi antara himpunan A dan B, yaitu mata kuliah favorit mahasiswa.

{(Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI)}

Dari contoh tersebut, dapat diamati beberapa hal berikut :

- Terdapat mahasiswa yang memiliki lebih dari satu mata kuliah favorit
- Terdapat mahasiswa yang tidak memiliki mata kuliah favorit
- Terdapat mata kuliah yang tidak menjadi mata kuliah favorit mahasiswa
- Terdapat mata kuliah yang disukai lebih dari satu mahasiswa

Dari pengamatan tersebut, apa beda relasi dengan fungsi?

Relasi Biner

Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

$$R \subseteq A \times B$$

$$A \times B = \{ (a, b) | \, a \in A \text{ dan } b \in B \}$$

Notasi:

- $a \; R \; b$ menotasikan $(a, b) \in R$, berarti a dihubungkan dengan b oleh R.
- $a \not R \; b$ menotasikan $(a, b) \notin R$, berarti a *tidak* dihubungkan dengan b oleh R.
- Pada relasi A ke B, himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dan himpunan B disebut daerah kawan (*codomain*).
- Himpunan yang dibentuk oleh elemen B yang memiliki relasi dengan suatu elemen di A disebut himpunan daerah hasil (*range*).

Contoh domain-codomain-range

Perhatikan Kembali contoh sebelumnya :

A = {Hasan, Ratna, Galih, Yusuf, Adit}

adalah himpunan mahasiswa,

B = {SD = Struktur Diskrit, LI = Logika Informatika, ASA= Analisis dan Strategi Algoritma, PM = Pembelajaran Mesin, SC=Sistem Cerdas, AP=Algoritma dan Pemrograman, JK=Jaringan Komputer}

adalah himpunan mata kuliah.

Misalkan R menyatakan relasi antara himpunan A dan B, yaitu mata kuliah favorit mahasiswa.

{(Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI)}

Dari relasi tersebut:

- Domain : {Hasan, Ratna, Galih, Yusuf, Adit} = A
- Codomain : {SD, LI, ASA, PM, SC, AP, JK} = B
- Range: {SD, LI, ASA, PM, SC, AP}

Relasi pada sebuah himpunan (Relasi Khusus)

Relasi pada sebuah himpunan A adalah relasi dari A ke A

- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$

$$R \subseteq A \times A$$

Contoh

Diberikan $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ *serta relasi:* $(x, y) \in R$ *jika* x *adalah faktor prima dari* y*. Maka:*

$$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), \\ (3,3), (3,6), (3,9), (5,5), (5,10), (7,7)\}$$

Latihan

1. Buatlah dua contoh himpunan dan bentuk relasi antara dua himpunan tersebut!

2. Perhatikan relasi berikut dalam himpunan bilangan bulat:

   $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$,

   $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,

   $R_3 = \{(a, b) \mid a = b$ atau $a = -b\}$,

   $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

   $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,

   $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$.

Manakah dari relasi tersebut yang mengandung masing-masing pasangan (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, −1), dan (2, 2)?

Bagian 3.

Representasi dari Relasi

Beberapa cara menuliskan relasi antar-himpunan:

1. Himpunan pasangan berurutan
2. Diagram panah
3. Tabel
4. Matriks
5. Graf berarah

Contoh

Perhatikan Kembali contoh sebelumnya :

A = {Hasan, Ratna, Galih, Yusuf, Adit}

adalah himpunan mahasiswa,

B = {SD = Struktur Diskrit, LI = Logika Informatika, ASA= Analisis dan Strategi Algoritma, PM = Pembelajaran Mesin, SC=Sistem Cerdas, AP=Algoritma dan Pemrograman, JK=Jaringan Komputer}

adalah himpunan mata kuliah.

Misalkan R menyatakan relasi antara himpunan A dan B, yaitu mata kuliah favorit mahasiswa.

{(Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI)}

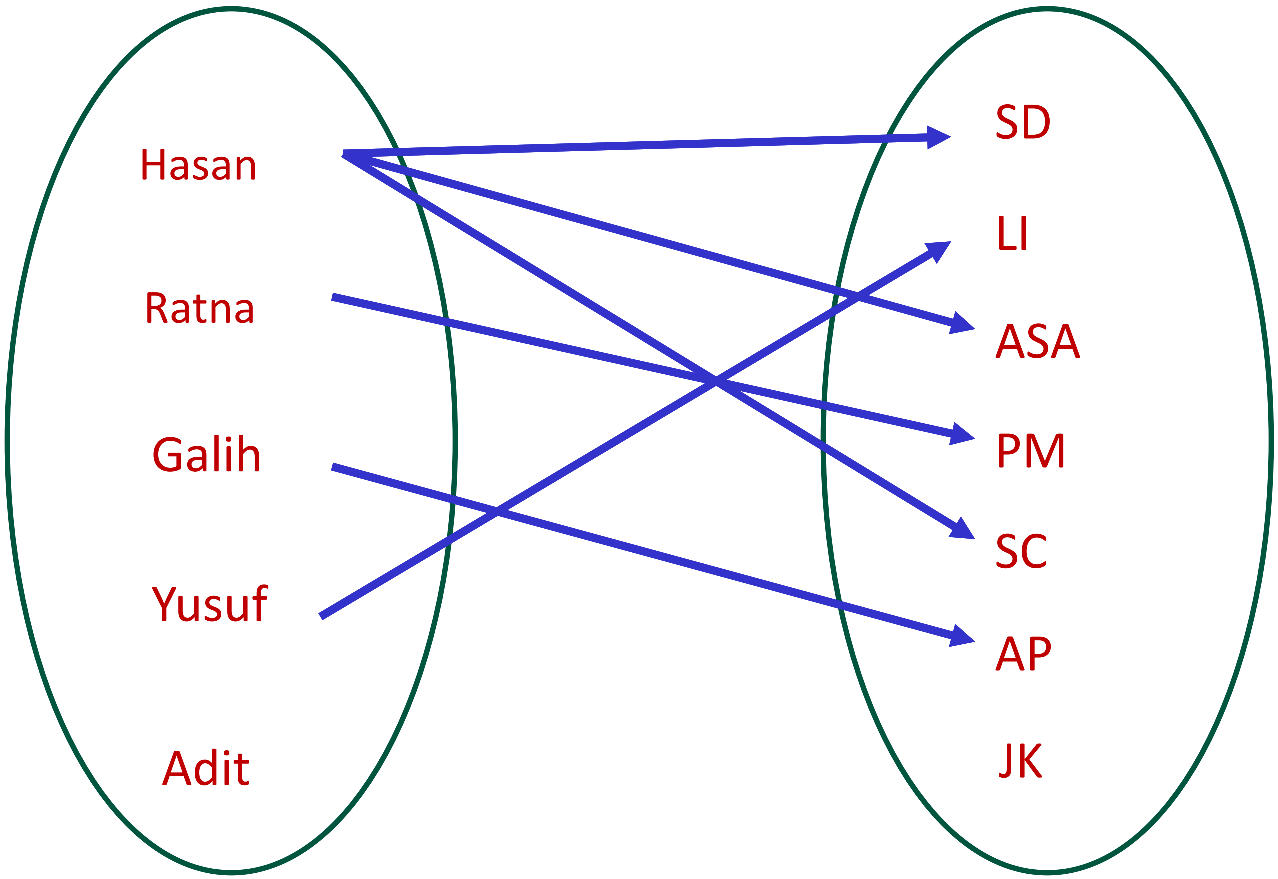
Himpunan pasangan berurutan

Menuliskan relasi dalam bentuk himpunan pasangan berurutan:

{ (Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI) }

Diagram panah

R = { (Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI) }



Tabel

R = { (Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI) }

A	B
Hasan	SD
Hasan	ASA
Hasan	SC
Ratna	PM
Galih	AP
Yusuf	LI
Adit	-

Domain

Range

Matriks

Relasi R dapat di representasikan dalam bentuk Matriks

$$M = [m_{ij}]$$

dengan $m_{ij} = \begin{cases} 1, (a_i, b_j) \in R \\ 0, (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

R = { (Hasan, SD), (Hasan, ASA), (Hasan, SC), (Ratna, PM), (Galih, AP), (Yusuf, LI) }

Dituliskan representasinya matriksnya di papan tulis

Graf berarah

Catatan: *diskusi lanjut tentang graf akan dibahas pada bab "Graf"*.

Sebuah graf adalah struktur matematis yang terdiri dari titik dan garis, dimana:

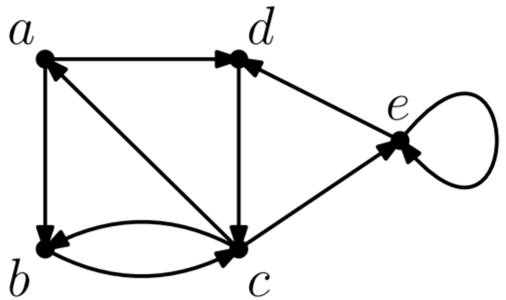
- Titik (simpul) merepresentasikan *objek*
- Garis (sisi) merepresentasikan *relasi*

Graf untuk menggambarkan relasi antar objek

Graf berarah *hanya* digunakan untuk menggambarkan relasi pada sebuah himpunan (bukan antar himpunan).

- Simpul menggambarkan elemen himpunan, misal a dan b.
- Busur menggambarkan relasi, misal $(a, b) \in R$ digambarkan dengan busur dari a ke b.
  - Simpul a disebut simpul asal (*intial vertex*)
  - Simpul b disebut simpul tujuan (*terminal vertex*)
- Relasi $(a, a) \in R$ digambarkan dengan garis berarah dari a ke a, yang disebut gelang (*loop*).
- Relasi $(a, b) \neq (b, a)$ di R, dan digambarkan dengan garis berarah menghubungkan a dan b, dengan arah berlawanan.

Contoh relasi pada graf berarah



Graf di atas menggambarkan relasi:

$$R = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, a), (c, b), (c, e), (d, c), (e, d), (e, e)\}$$

Latihan

Buatlah contoh relasi pada himpunan beberapa bilangan bulat, kemudian nyatakan relasi tersebut menggunakan

- Himpunan pasangan berurutan
- Diagram panah
- Tabel
- Matriks
- Graf berarah

Bagian 4.

Sifat Relasi

Sifat Relasi

Relasi R yang didefinisikan pada sebuah himpunan mempunyai beberapa sifat.

1. Refleksif
2. Transitif
3. Simetris
4. Anti-simetris

Sifat refleksif

Relasi R pada himpunan A disebut refleksif jika

$$(a, a) \in R \quad \text{untuk setiap } a \in A$$

Ada $a \in A$

Jika $\exists a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$, maka relasi dikatakan tidak refleksif.

Contoh

1. *Relasi "habis membagi" pada $\mathbb{Z}^+$ adalah relasi refleksif, karena $\forall a \in \mathbb{Z}^+$, berlaku a habis membagi a.*
2. *Relasi berikut bukan relasi refleksif, dapatkah Anda jelaskan mengapa?*
   - *relasi "lebih dari" pada $\mathbb{N}$*
   - *relasi "habis membagi" pada $\mathbb{Z}$*
   - *relasi $x + y = 3$ pada $\mathbb{Z}$*

Latihan

1. Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada himpunan A. Identifikasi mana relasi yang refleksif dan tidak refleksif (berikan alasannya)!

   a. $R = \{ (1,1), (1,3), (2, 1), (2,2), (3,3), (4,2), (4,3) \}$

   b. $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (4,3), (4,4)\}$

   c. $R = \{ (3,4)\}$

2. Perhatikan relasi berikut dalam himpunan bilangan bulat:

   $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$,

   $R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,

   $R_3 = \{(a, b) \mid a = b$ atau $a = -b\}$,

   $R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

   $R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,

   $R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$.

   Manakah dari relasi tersebut yang bersifat refleksif?

Sifat transitif

Relasi R pada himpunan A disebut transitif jika berlaku:

$$(a, b) \in R, \ (b, c) \in R \ \Rightarrow \ (a, c) \in R$$

Jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$ untuk setiap $a, b, c \in A$.

Contoh

Relasi "kurang dari" pada $\mathbb{R}$ adalah relasi transitif:

$$\textit{Jika } a < b \textit{ dan } b < c, \textit{ maka } a < c$$

yang berarti $(a, b), (b, c), (a, c) \in R$

Dapatkah Anda menyebutkan contoh lain dari relasi transitif?

Bagaimana dengan relasi berikut (transitif/tidak):

- $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
- $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$

Latihan

1. Perhatikan relasi-relasi berikut, manakah yang bersifat **transitif**? :

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$R_6 = \{(3, 4)\}$

2. Perhatikan relasi berikut dalam himpunan bilangan bulat:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$,

$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,

$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ atau } a = -b\}$,

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,

$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$.

Manakah dari relasi tersebut yang bersifat **transitif**?

Sifat simetris

Relasi R pada himpunan A dikatakan simetris jika berlaku:

$$(a, b) \in R \ \Rightarrow \ (b, a) \in R, \ \forall a, b, \in A$$

Jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$ untuk setiap $a, b \in A$.

Relasi R dikatakan tak-simetris jika:

$$\exists (a, b) \in R \ \ni \ (b, a) \notin R$$

Ada $(a, b) \in R$, tetapi $(b, a) \notin R$

Contoh

1. *Relasi "$a + b = 0$ untuk $a, b \in \mathbb{R}$" bersifat simetris, karena:*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ a + b = 0 \Rightarrow b + a = 0$$

Sifat anti-simetris

Relasi R disebut anti-simetris jika:

$$((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R) \Rightarrow (a = b)$$

Untuk setiap $a, b \in A$,

jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$, maka $a = b$.

Relasi R dikatakan tak-anti-simetris jika:

Ada $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$, tetapi $a \neq b$

Contoh:

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$

Didefinisikan relasi R pada A dengan $R = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$

Latihan

1. Perhatikan relasi-relasi berikut, manakah yang bersifat **simetris dan mana yang antisimetris** ? :

R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}

R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}

R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

R_6 = {(3, 4)}

2. Perhatikan relasi berikut dalam himpunan bilangan bulat:

$R_1 = \{(a, b) \mid a \le b\}$,

$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,

$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ atau } a = -b\}$,

$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,

$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,

$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \le 3\}$.

Manakah dari relasi tersebut yang bersifat **simetris dan mana yang antisimetris** ?

Latihan

1 Sebutkan pasangan terurut dalam relasi R dari $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{0, 1, 2, 3\}$, dimana $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika:

a) $a = b$

b) $a + b = 4$

c) $a > b$

d) $a \mid b$ (a membagi b / b dapat dibagi a / b kelipatan dari a, dengan $a \neq 0$)

Latihan

2 Untuk setiap relasi dalam himpunan {1, 2, 3, 4}, sebutkan apakah relasi tersebut refleksif, simetris, antisimetris, atau transitif!

a) {(2,2),(2,3),(2,4),(3,2)}

b) {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)}

c) {(2,4),(4,2)}

d) {(1,2),(2,3),(3,4)}

Latihan

3 Berikan sebuah contoh relasi yang bersifat:

a. Refleksif
b. Transitif
c. Simetris
d. Tak-simetris
e. Refleksif tetapi tidak transitif
f. Transitif tetapi tidak refleksif
g. Anti-simetris
h. Tak anti-simetris
i. Simetris tetapi tak anti-simetris
j. Tak simetris dan tak anti-simetris

Ringkasan

Pengantar Matriks
Relasi (Relasi Biner dan Relasi pada sebuah Himpunan)
Representasi Relasi

- Himpunan pasangan terurut
- Tabel
- Diagram Panah
- Graf berarah (untuk relasi pada sebuah himpunan)

Sifat-sifat Relasi

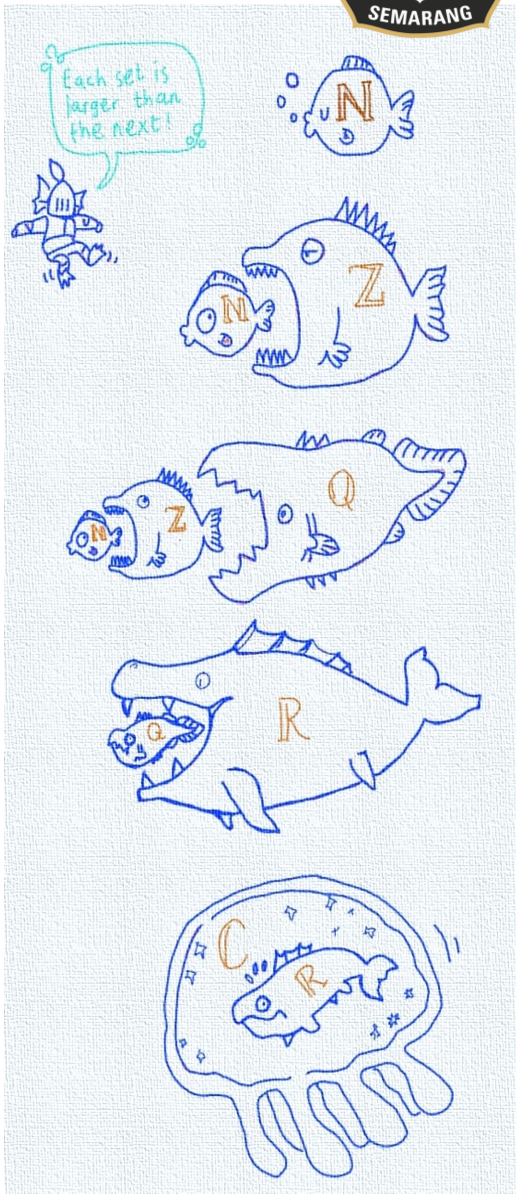
- Refleksif
- Transitif
- Simetris
- Antisimetris

Struktur Diskrit

PAIK6105

RELATION (RELASI)

Part 2



Departemen Informatika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

Outline

Review Sifat-sifat Relasi Khusus
Relasi Ekuivalen
Relasi Pengurutan Parsial
Mengkombinasikan Relasi

Bagian 1.

Review Sifat-sifat Relasi Khusus

Sifat-sifat Relasi pada sebuah Himpunan

Misalkan R adalah relasi pada sebuah himpunan A

Refleksif

$(a, a) \in R$, untuk setiap $a \in A$

Transitif

Jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$ untuk setiap $a, b, c \in A$.

Simetris

Untuk setiap $a, b \in A$,

jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$.

Anti-Simetris

Untuk setiap $a, b \in A$,

jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$, maka $a = b$.

Tidak Refleksif

Ada a $\in A$ sehingga $(a, a) \notin R$

Tidak Transitif

Ada a, b , c $\in A$ sehingga

$(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, tetapi $(a, c) \notin R$

Tidak Simetris

Ada $(a, b) \in R$, tetapi $(b, a) \notin R$

Tidak Anti-Simetris

Ada $a, b \in A$, sehingga

$(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$, tetapi $a \neq b$.

Bagian 2.

Relasi Ekuivalen

Relasi Ekuivalen

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan A. Suatu relasi dapat memiliki beberapa sifat sekaligus.

Relasi R pada himpunan A disebut *relasi ekuivalen* jika relasi R bersifat refleksif, simetris, dan transitif.

Notasi :

$a \sim b$, artinya a dan b adalah elemen yang ekuivalen dengan relasi ekuivalen tertentu

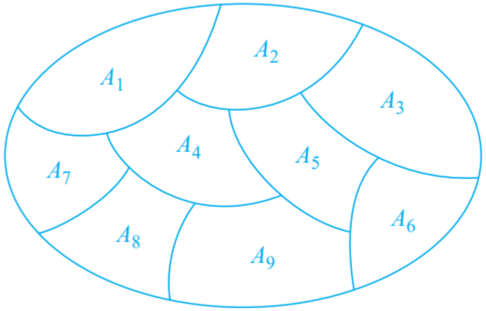
Relasi Ekuivalen

Contoh :

Misalkan R adalah relasi pada himpunan bilangan real sedemikian hingga aRb jika dan hanya jika $a - b$ adalah bilangan bulat. Apakah R adalah relasi ekuivalen?

Relasi Ekuivalen

Misalkan R merupakan relasi ekuivalen pada sebuah himpunan A. Relasi R membentuk partisi pada himpunan A. (Lebih lanjut dapat dieksplor/ dibaca dari buku Rosen (2012)*)



Sumber Gambar dari Rosen (2012)*)

* Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, 7^{th} Edition

Post Test

1. Untuk setiap relasi dalam himpunan A={1, 2, 3, 4}, sebutkan apakah relasi tersebut refleksif, simetris, anti-simetris, atau transitif! Tunjukkan mana relasi yang merupakan relasi ekuivalensi!
   a) R_1 = {(2,4),(4,2)}
   b) R_2 = {(1,1),(2,2),(3,3), (4,4)}

2. Apakah setiap relasi yang simetris pasti anti-simetris? Berikan contoh relasi R pada himpunan A yang bersifat simetris tetapi tidak antisimetris. Berikan contoh juga relasi R di himpunan A yang bersifat tidak simetris tetapi anti-simetris.

Bagian 3.

Relasi Pengurutan Parsial

Relasi Pengurutan Parsial

Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan A. Relasi sering digunakan untuk mengurutkan elemen-elemen di dalam himpunan.

Relasi R pada himpunan A disebut *relasi pengurutan parsial (parsial ordering)* jika R bersifat refleksif, antisimetris dan transitif.*

Dalam hal ini, (A, R) disebut himpunan terurut *parsial (partially ordered set)* atau *poset*.

*elemen-elemen pada himpunan A diurutkan berdasarkan sifat dan kriteria tertentu

Relasi Pengurutan Parsial

Contoh :

Tunjukkan bahwa relasi "lebih besar dari atau sama dengan“ (relasi (≥)) adalah *partial ordering* pada himpunan bilangan bulat.

Bagian 5.

Mengkombinasikan Relasi

Mengkombinasikan Relasi

Misalkan R merupakan relasi biner pada himpunan A dan B.

Karena R merupakan himpunan pasangan terurut dan subhimpunan/himpunan bagian $A \times B$, operasi himpunan seperti gabungan, irisan, selisih, dan sebagainya juga berlaku pada R.

Mengkombinasikan Relasi

Contoh :

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Relasi $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ dan $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

dapat dikombinasikan sehingga mendapatkan:

$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$

$R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$

$R_1 - R_2 = \{(2, 2), (3, 3)\}$

$R_2 - R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

Ringkasan

Review Sifat-sifat Relasi Khusus
Relasi Ekuivalen (Relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif)
Relasi Pengurutan Parsial (Relasi yang bersifat refleksif, antisimetris, dan transitif)
Mengkombinasikan Relasi