

MATEMATIKA I

INTEGRAL

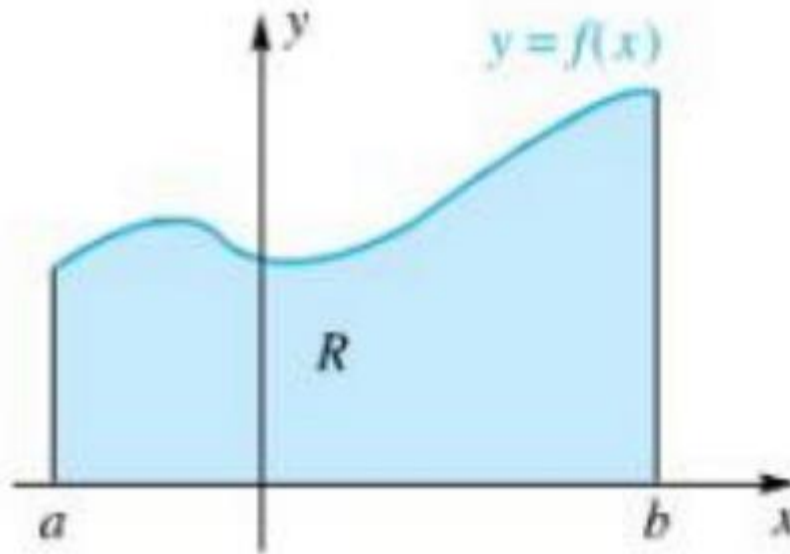
-6. Aplikasi Integral Tentu untuk menghitung
Luas Daerah-



6.1 Luas Daerah di Atas Sumbu-x

Berdasarkan pembahasan integral tentu, maka luas daerah arsiran (R) dibawah kurva dan diatas sumbu- x seperti pada gambar adalah :

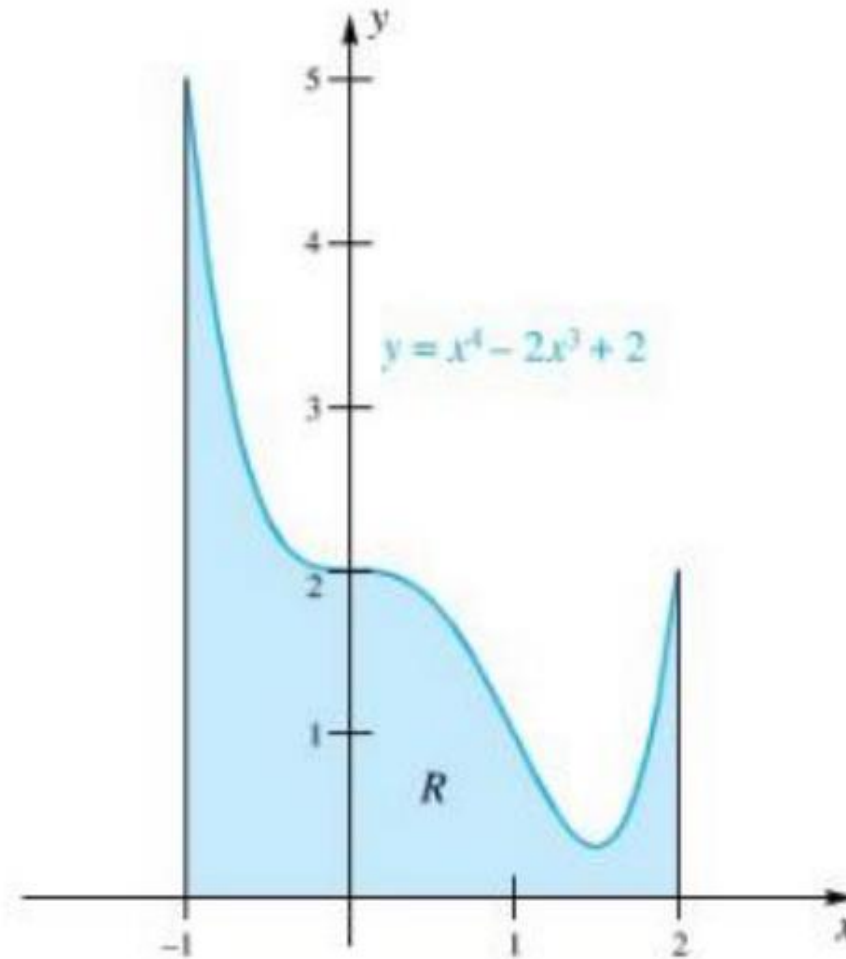
$$L_R = \int_a^b f(x) dx$$



6.1 Luas Daerah di Atas Sumbu-x

Contoh 1: Tentukan luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$, sumbu- x , garis $x = -1$ dan garis $x = 2$.

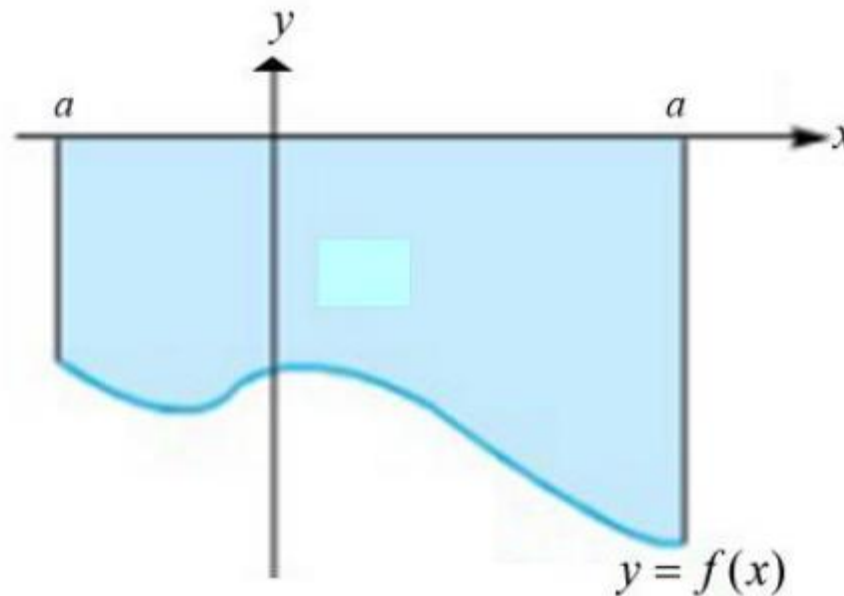
$$\begin{aligned} L_R &= \int_{-1}^2 (x^4 - 2x^3 + 2) dx \\ &= \frac{51}{10} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$



6.2 Luas Daerah di Bawah Sumbu-x

Berdasarkan pembahasan integral tentu, maka luas daerah arsiran di atas kurva dan dibawah sumbu-x seperti pada gambar adalah :

$$L = -\int_a^b f(x)dx$$



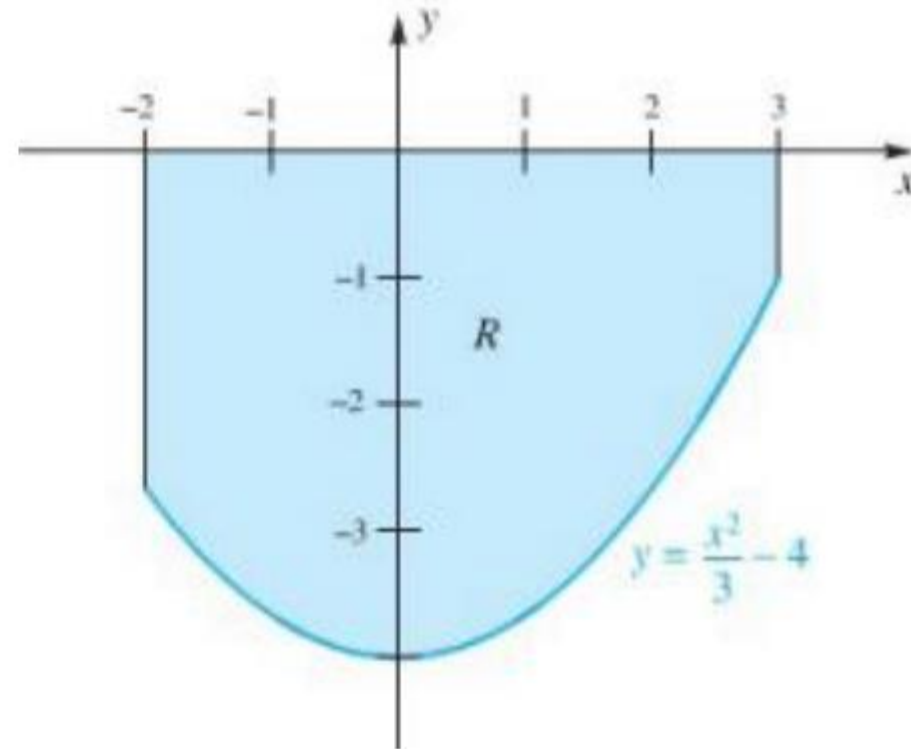
6.2 Luas Daerah di Bawah Sumbu-x

Contoh 2 : Hitung luas daerah yang dibatasi kurva

$$y = \frac{1}{3}x^2 - 4, \text{ sumbu-}x, \text{ garis}$$

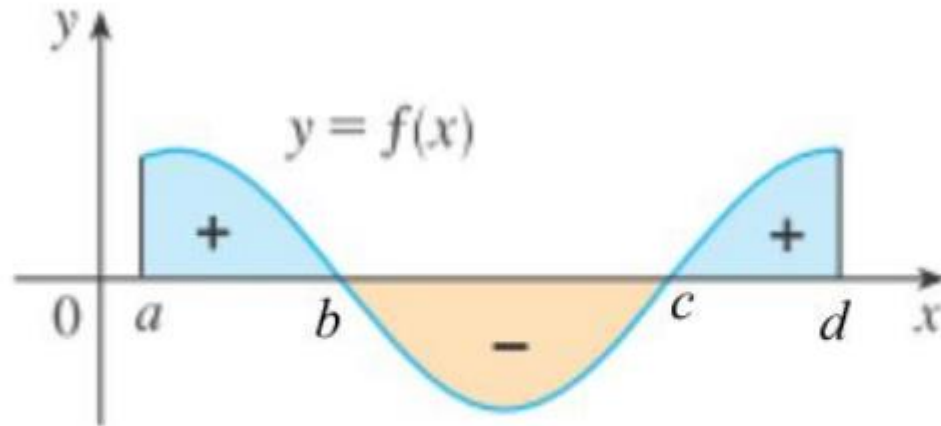
$x = -2$ dan garis $x = 3$.

$$\begin{aligned} L &= -\int_{-2}^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) dx \\ &= \frac{145}{9} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$



6.3 Luas Daerah di Atas dan di Bawah Sumbu-x

Berdasarkan kedua kasus diatas, luas daerah arsiran pada gambar adalah :



$$L = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx.$$

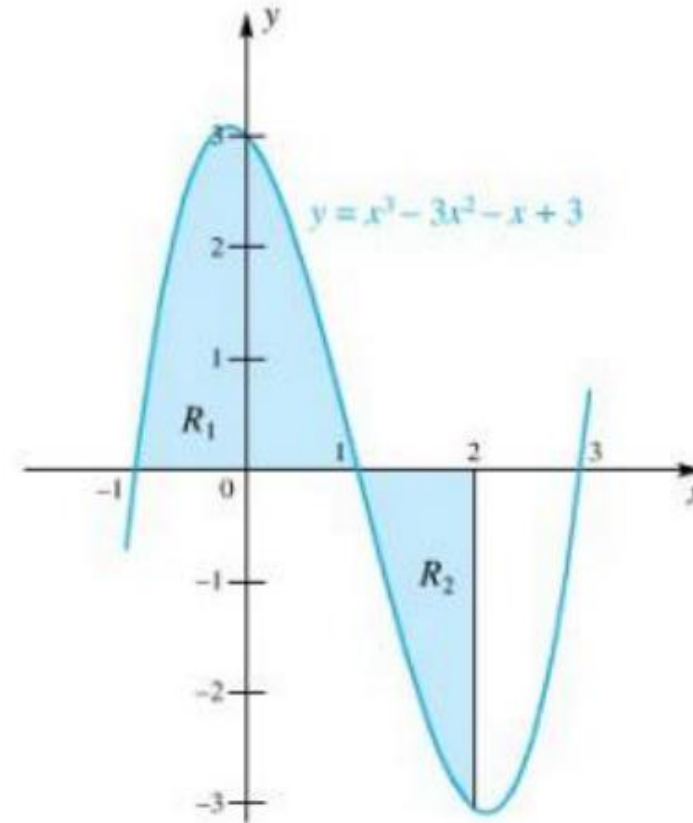
6.3 Luas Daerah di Atas dan di Bawah Sumbu-x

Contoh 3 : Hitung luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu-x dari $x = -1$ sampai $x = 2$, dan garis $x = 2$.

$$R_1 = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = 4$$

$$R_2 = -\int_1^2 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = \frac{7}{4}$$

$$\text{Luas} = R_1 + R_2 = \frac{23}{4} \text{ satuan luas}$$



6.4 Latihan Soal

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh :

1. Kurva $y = x^2$, sumbu- x , garis $x = 1$ dan garis $x = 2$
2. Kurva $y = x^2 + 2$, sumbu- x , garis $x = -1$ dan garis $x = 1$
3. Kurva $y = -x^2 + 3$, sumbu- x , garis $x = -2$ dan garis $x = 1$
4. Kurva $y = -x^2 - x + 2$ dan sumbu- x
5. Kurva $y = x^2 - 3x + 2$ dan sumbu- x
6. Kurva $y = x^2 - 1$, ruas sumbu- x dari $x = -1$ sampai $x = 2$
dan garis $x = 2$

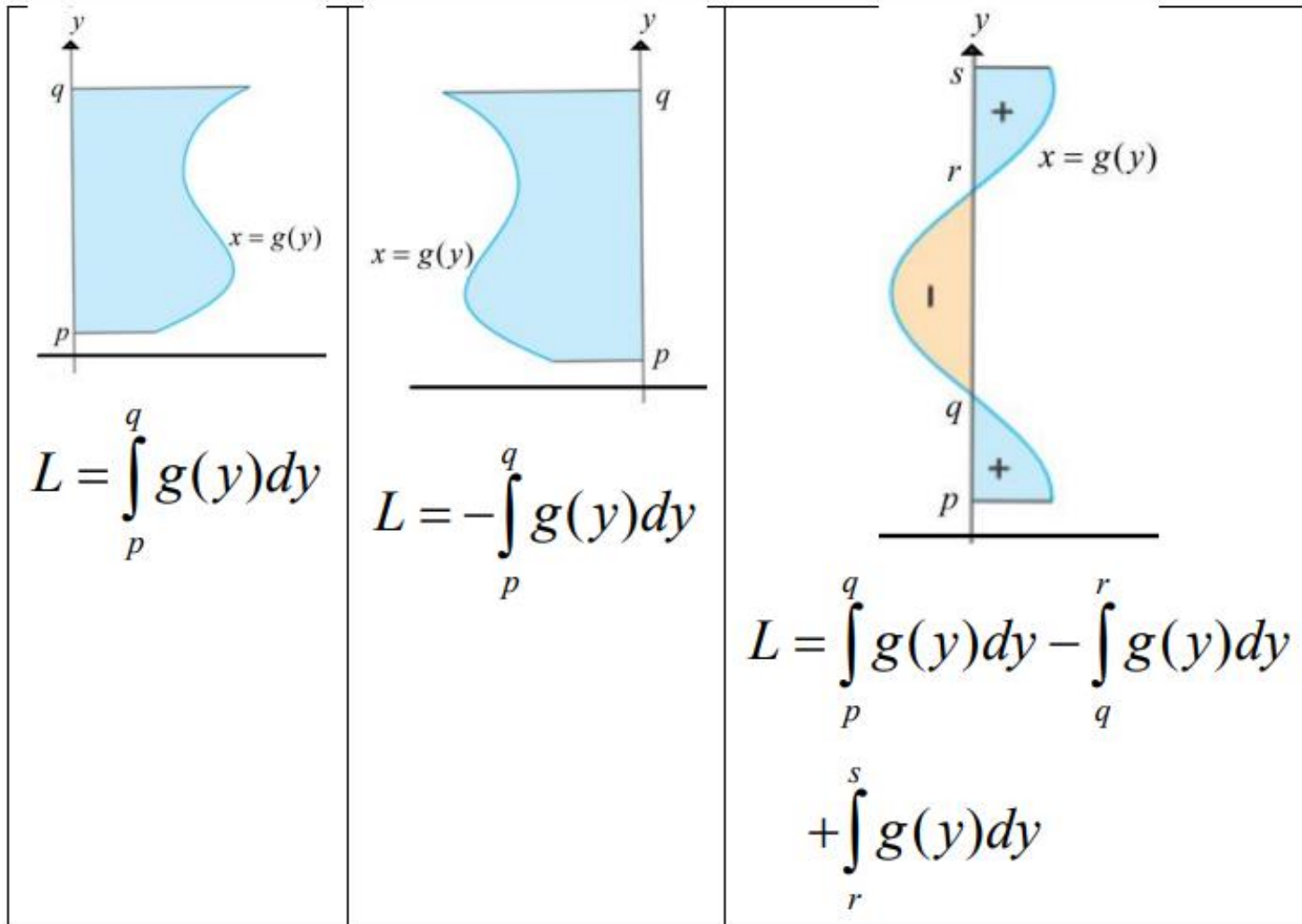


6.4 Latihan Soal

7. Kurva $y = x^3$, ruas sumbu- x dari $x = -2$ sampai $x = 1$, garis $x = -2$ dan garis $x = 1$
8. Kurva $y = \sqrt{x}$ dan garis $x = 1$
9. Kurva $y = \sin x$, ruas sumbu- x dari $x = 0$ sampai $x = 2\pi$
10. Kurva $y = \cos x$, ruas sumbu- x dari $x = 0$ sampai $x = \frac{3}{2}\pi$
dan garis $x = \frac{3}{2}\pi$.



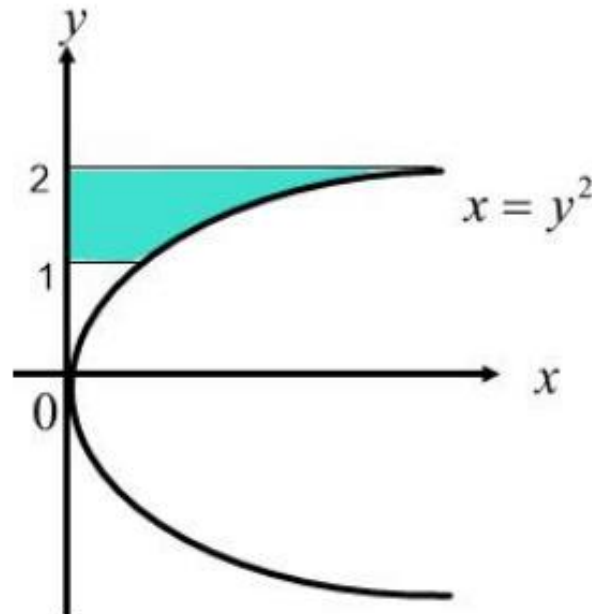
6.5 Menghitung Luas Daerah Diintegrasikan Terhadap dy



6.5 Menghitung Luas Daerah Diintegrasikan Terhadap dy

Contoh : Hitung luas yang dibatasi kurva $x = y^2$, sumbu- y , garis $y = 1$ dan garis $y = 2$.

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 y^2 dy \\ &= \frac{7}{3} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$



6.7 Luas Daerah di antara Dua Kurva

Lebih umum :

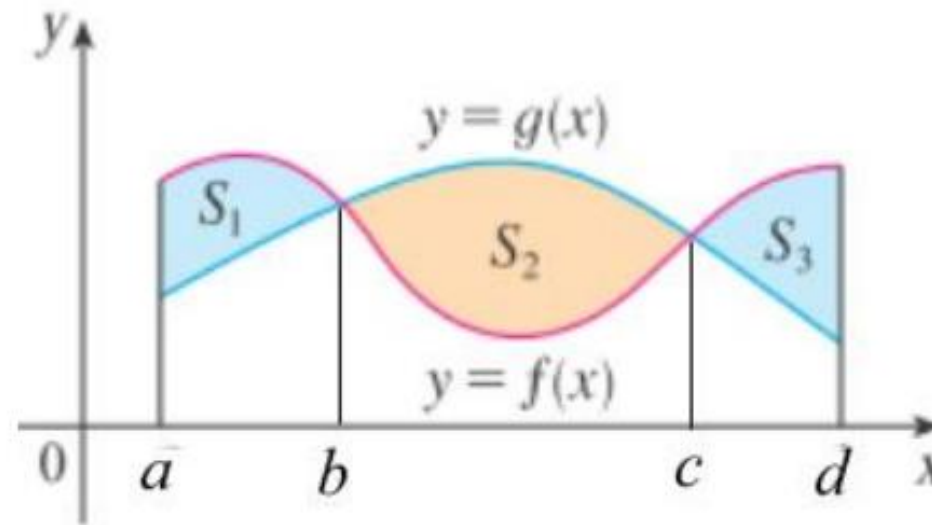
$$S_1 = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx,$$

$$S_2 = \int_b^c [g(x) - f(x)] dx$$

$$S_3 = \int_c^d [f(x) - g(x)] dx$$

$$L_{total} = S_1 + S_2 + S_3$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx + \int_b^c [g(x) - f(x)] dx + \int_c^d [f(x) - g(x)] dx$$



6.7 Luas Daerah di antara Dua Kurva

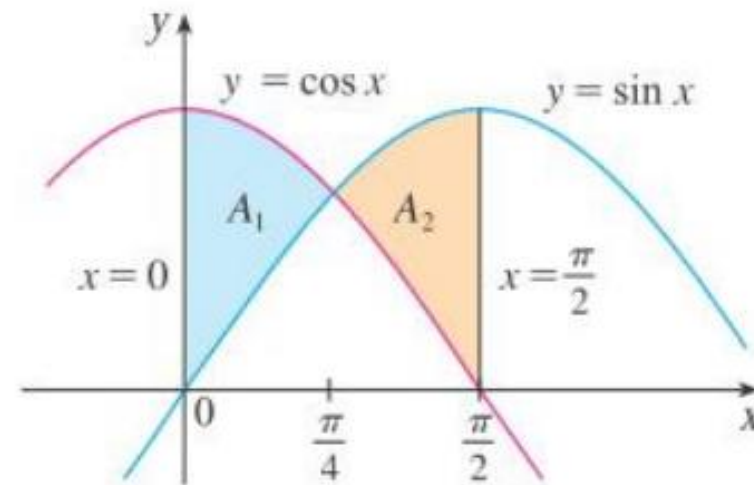
Contoh : Hitung luas yang dibatasi kurva $y = \sin x$, $y = \cos x$, garis $x = 0$ dan garis $x = \frac{\pi}{2}$.

$$L = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \sin x] dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - \cos x] dx$$

$$= (2\sqrt{2} - 2) \text{ satuan luas}$$



6.8 Soal Latihan

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva :

1. $y = x^2$ dan $y = -x + 2$
2. $y = x^2 - 2x + 1$ dan $y = x + 1$
3. $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 4$
4. $y = x^2 + 1$ dan $y = -x^2 + 3$
5. $y = 2x^2 + 1$ dan $y = -x^2 + 4$
6. $y = x^2 + 2x + 1$ dan $y = -x^2 + 3x + 1$
7. $y = x^3$ dan $y = -x^2 + x + 1$

