Pertemuan 2

Vektor

Prajanto Wahyu Adi

prajanto@lecturer.undip.ac.id

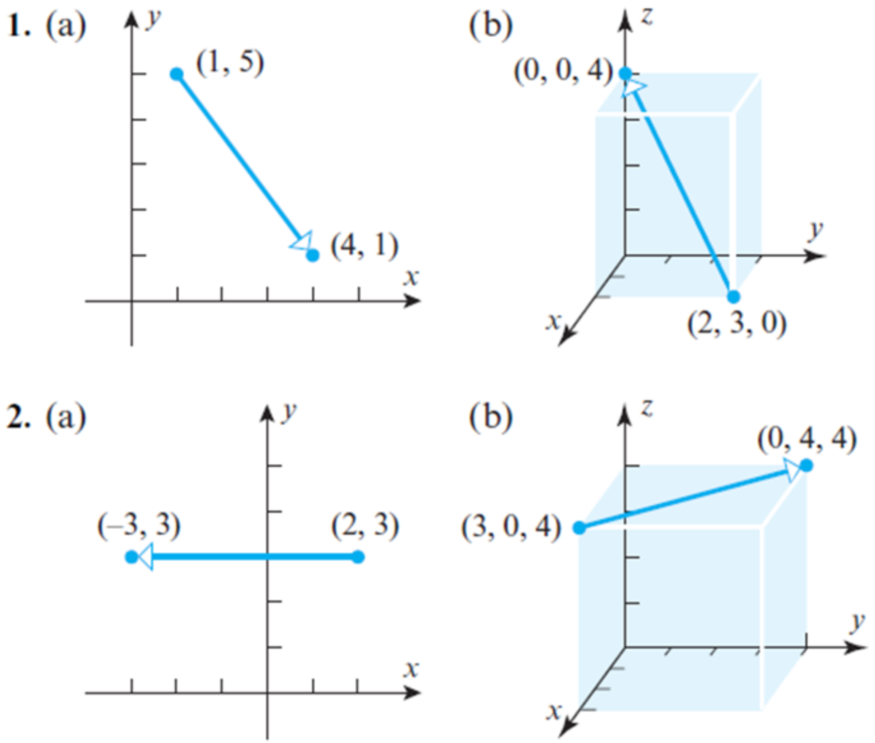
+62896 2635 7775

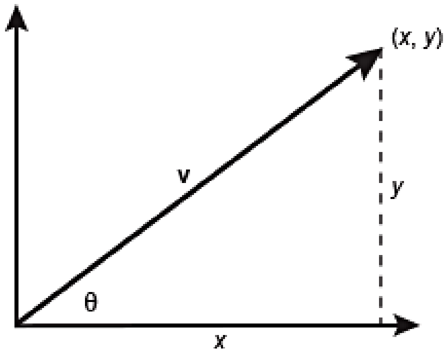
Materi

1. Vektor
2. Panjang dan Arah Vektor
3. Operasi Vektor
4. Jenis Vektor
5. Sifat-sifat Vektor
6. Dot Product
7. Cross Product
8. Kesamaan Vektor

1. Definisi Vektor

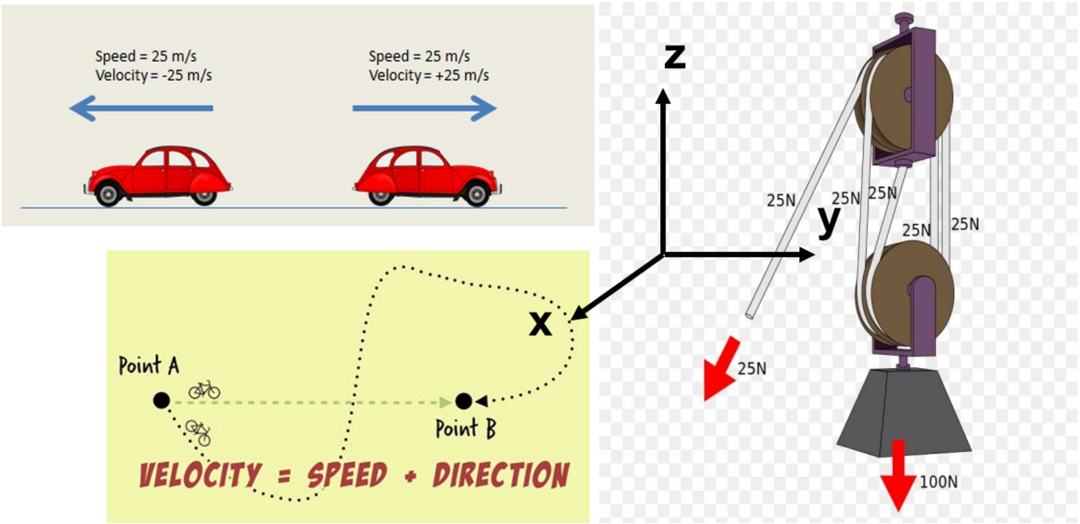
- **Vektor** adalah obyek geometri yang memiliki besaran (nilai) dan arah.
- Jika obyek geometri hanya memiliki besaran (nilai) saja, maka disebut **Skalar**.
- Vektor disajikan dalam bentuk ruas garis berarah (anak panah).





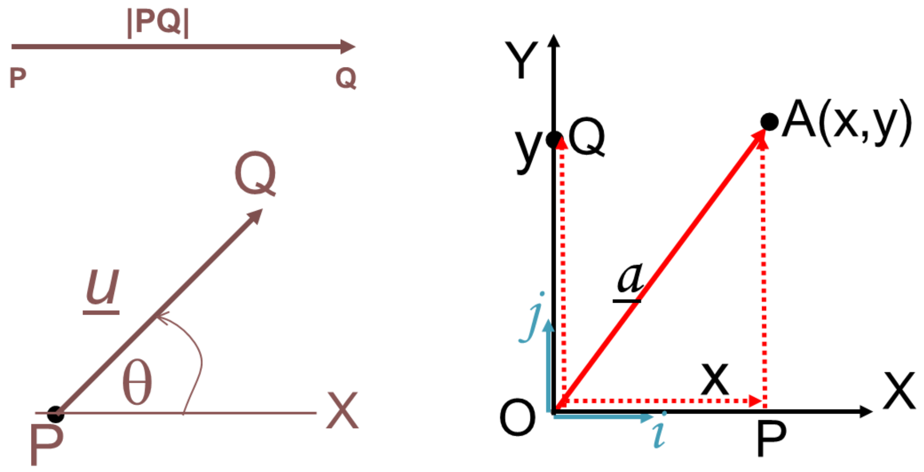
1.1 Vektor & Skalar

Vektor	Skalar
Memiliki nilai (besaran) dan arah	Hanya memiliki nilai (besaran)
Tergantung sistem koordinat	Tidak tergantung sistem koordinat
Contoh: Kecepatan, Percepatan, Gaya, dll	Contoh: Waktu, Berat, Volume, dll



1.2 Penyajian & Notasi Vektor

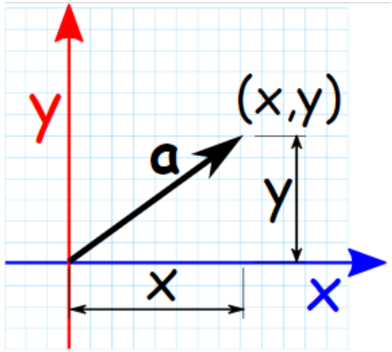
- **Vektor** secara grafis disajikan dalam bentuk garis berarah.
- Besaran vektor ditunjukkan oleh panjang garis.
- Arah vektor ditunjukkan oleh anak panah.
- Garis berarah memiliki titik pangkal dan ujung.



Titik P : Titik pangkal vektor
Titik Q : Ujung vektor
Tanda panah : Arah vektor
Panjang PQ = |PQ| : Besarnya (panjang) vektor (menggunakan tanda mutlak)
θ : sudut vektor terhadap sumbu X
i,j vektor basis : vektor satuan yang searah sumbu X dan Y

1.2 Penyajian & Notasi Vektor

- Menuliskan titik-titik pangkal dan ujung dengan tanda panah (biasanya menggunakan huruf besar) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \ldots$
- Menuliskan nama/label vektor (biasanya menggunakan huruf kecil) $\vec{u}, \underline{u}, \mathrm{u}, \ldots$
- Contoh penulisan vector
  - Vektor kolom: $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \mathrm{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
  - Vektor baris: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,4)$; $\mathrm{v}=(2,-1,2)$
- Kombinasi: $\underline{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$; $\underline{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$; $\underline{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$; $\underline{a} = (x,y)$

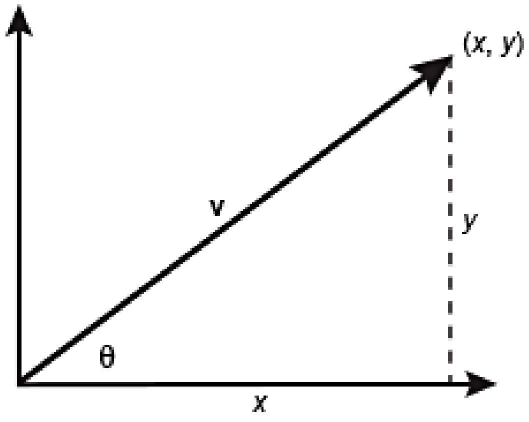


$$a = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}$$

2. Besaran & Arah Vektor

- Besaran (nilai) vektor menunjukkan panjang vektor (panjang garis) atau magnitude.
- Arah vektor menunjukkan sudut (θ) yang dibentuk dengan sumbu X positif.

$$tan(\theta) = \frac{y}{x}$$



x	y	Kuadran	Arah
3	4	Kuadran I	θ
-2	3	Kuadran II	β = 180° - θ
-3	-4	Kuadran III	γ = 180° + θ
4	-3	Kuadran IV	δ = 360° - θ

2.1 Panjang Vektor

- Panjang Vektor disebut juga dengan Norm atau Magnitude.
- Jika diketahui vektor v $\in$ Rn dimana v=(v1,v2,…,vn) maka panjang vektor dari v adalah:

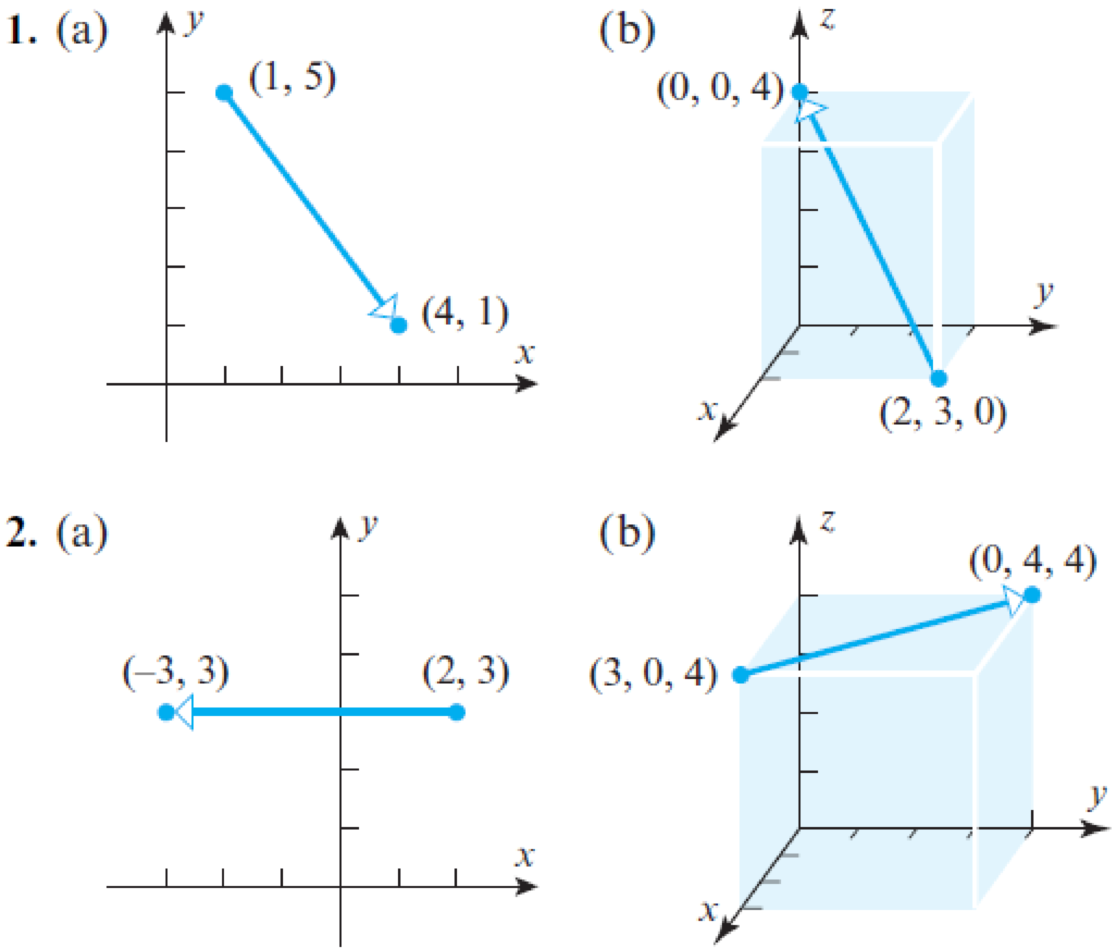
$$|\mathrm{v}| = \sqrt{\mathrm{v}_1^2+\mathrm{v}_2^2+\ldots+\mathrm{v}_\mathrm{n}^2}$$

- **Contoh.**
  - Diketahui u = (4,−1), v = (0, 5,1), dan w = (−3,−3,2,1) dimana u$\in$R^2, v$\in$R^3, dan u$\in$R^4.
  - Panjang masing-masing vektor adalah:

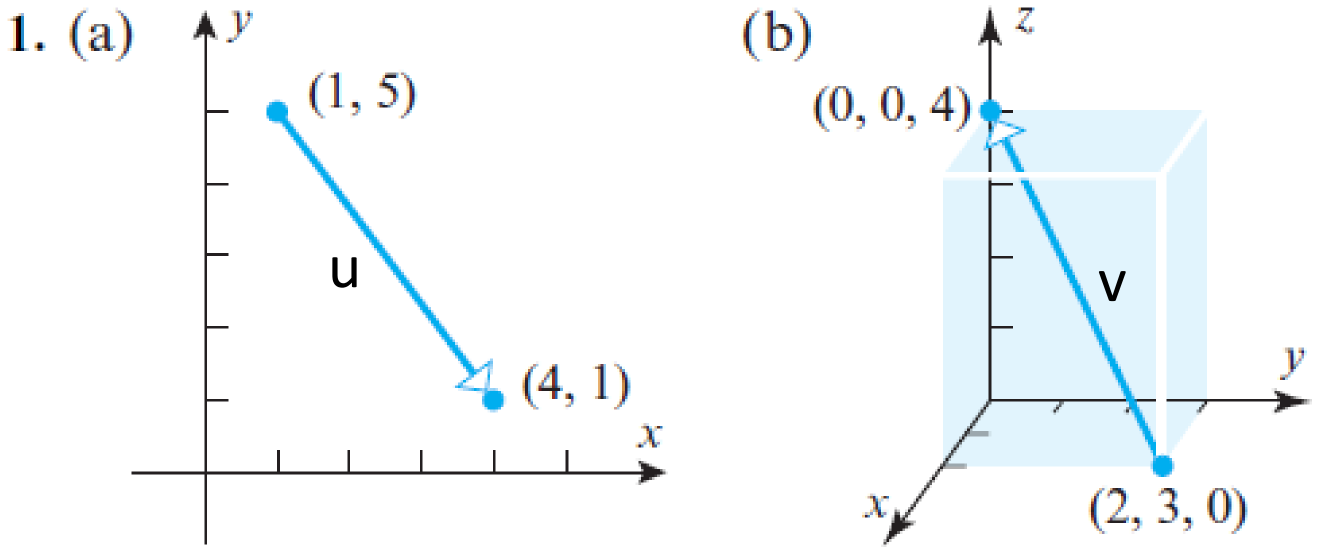
$$|\mathrm{u}| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$|\mathrm{v}| = \sqrt{0^2+5^2+1^2} = \sqrt{0+25+1} = \sqrt{26}$$
$$|\mathrm{w}| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+2^2+1^2} = \sqrt{9+9+4+1} = \sqrt{23}$$

2.1 Panjang Vektor

- Hitung Panjang masing-masing vektor berikut:



2.1 Panjang Vektor



$\mathrm{u} = (4 - 1, 1 - 5) = (3, -4);$

$|\mathrm{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\mathrm{v} = (0 - 2, 0 - 3, 4 - 0) = (-2, -3, 4);$

$|\mathrm{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

2.2 Arah Vektor

- Hitung besaran dan arah vektor berikut:
  - $\vec{a} = (5,5)$
  - $\vec{b} = (3\sqrt{3}, 3)$
  - $\vec{c} = (-4,4\sqrt{3})$

2.2 Arah Vektor

- $\vec{a} = (5,5)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

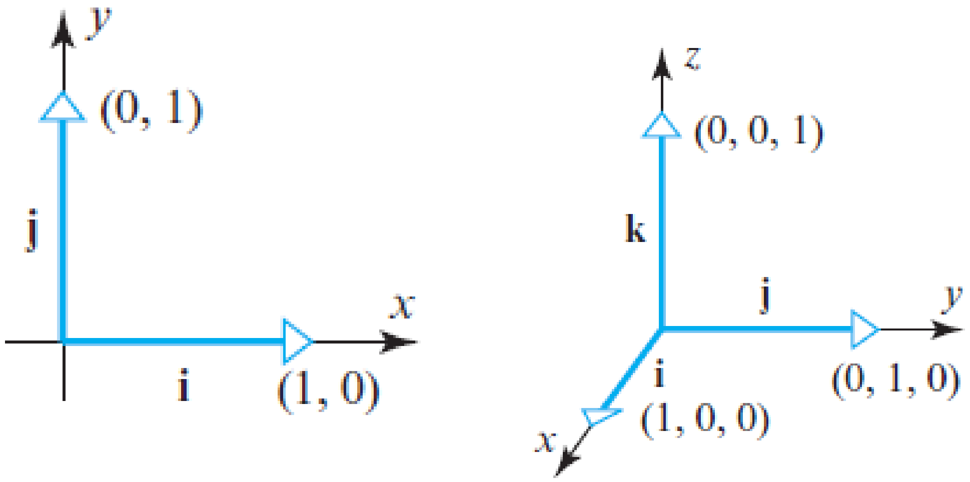
$$\theta_1 = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right) = tan^{-1}1 = 45^0$$

2.3 Vektor Unit

- **Vektor unit atau vektor satuan** adalah vektor dengan panjang 1 Vektor unit dari vektor v adalah:

$$\frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|}$$

- Vektor unit standar (disebut juga vektor basis) adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu koordinat.



2.3 Vektor 3 Dimensi

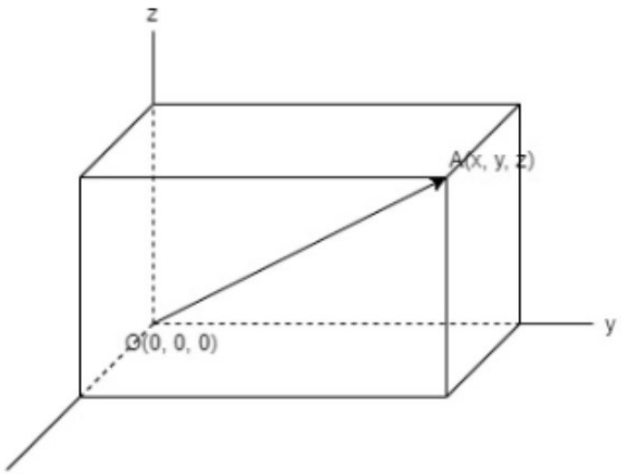
- Dalam sistem 3 dimensi suatu titik dinyatakan oleh pasangan tiga bilangan (tripel)
- Misalkan $P(x_1, y_1, z_1)$
- Sumbu x adalah absis, sumbu y adalah ordinat, dan sumbu z adalah aplikat
- Tiap dua sumbu menentukan sebuah bidang yang disebut koordinat, yaitu bidang XY, bidang YZ, dan bidang XZ, yang membagi ruang menjadi 8 ruang bagian dimana masing-masing disebut sebagai oktan.

2.3 Vektor 3 Dimensi

x	y	z	Koordinat Titik	Posisi Titik
3	4	4	A(3, 4, 2)	Oktan I
2	-3	4	B(2, -3, 4)	Oktan II
-3	-4	2	C(-3, -4, 2)	Oktan III
-4	3	2	D(-4, 3, 2)	Oktan IV
3	4	-2	E(3, 4, -2)	Oktan V
-2	3	-4	F(-2, 3, -4)	Oktan VI
-3	-4	-2	G(-3, -4, -2)	Oktan VII
4	-3	-2	H(4, -3, -2)	Oktan VIII

2.3 Vektor 3 Dimensi

- Besar vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ adalah $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2}}$
- Arah terhadap vektor $|\vec{\boldsymbol{a}}|$ adalah
  - Terhadap sumbu x adalah $\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}$
  - Terhadap sumbu y adalah $\cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}$
  - Terhadap sumbu z adalah $\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$



2.3 Vektor 3 Dimensi

- Hitung besaran serta arah vektor berikut:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \left(-\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}}\right)$$

  – Besaran vektor

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+4+8} = \sqrt{16} = 4$$

  – Arah vektor

    - $\cos\alpha = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^0$
    - $\cos\beta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^0$
    - $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 45^0$

2.3 Vektor 3 Dimensi

- Bagaimana dengan vektor dimensi > 3 ?

3. Operasi Vektor

Penjumlahan dan Pengurangan

- Hasil penjumlahan/pengurangan vektor disebut dengan vektor resultan (R)
- Resultan menghubungkan titik awal (head) dengan titik akhir (tail) dari penjumlahan/pengurangan.
- Resultan tidak menunjukkan total panjang lintasan seluruh vektor, tapi hanya menunjukkan panjang lintasan dari titik awal (vektor pertama) ke ujung vektor (vektor terakhir)

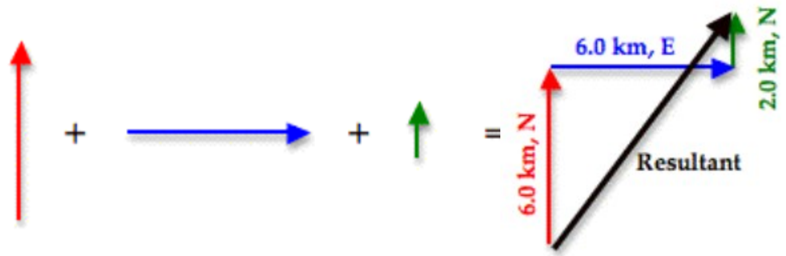
3. Operasi Vektor

Contoh

- Viktor melakukan *jogging* sejauh 6 km ke utara (N), lalu belok kanan sejauh 6 km ke timur (E). Setelah itu belok kiri sejauh 2 km ke utara (N) dan berhenti. Gambarkan resultan dari *jogging* Viktor, dan hitung berapa panjangnya.

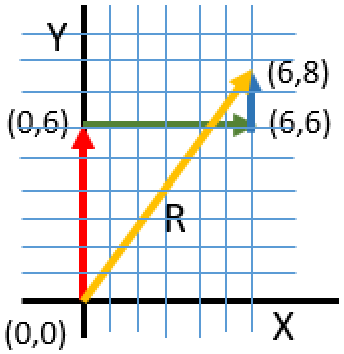
3. Operasi Vektor

Contoh



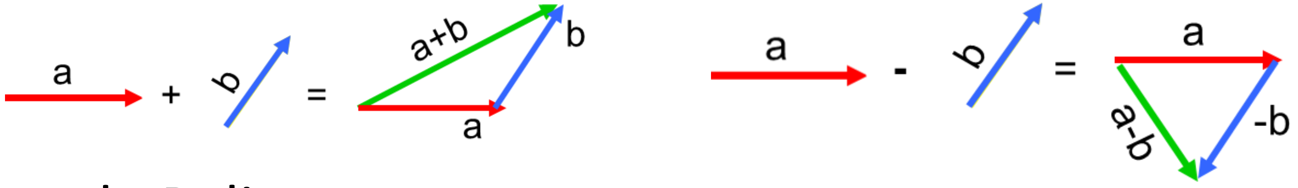
- Panjang resultan R

$$R^2 = X^2 + Y^2$$
$$= 6^2 + 8^2$$
$$= 36 + 64$$
$$= 100$$
$$R \ = \sqrt{100} \ = \ 10$$

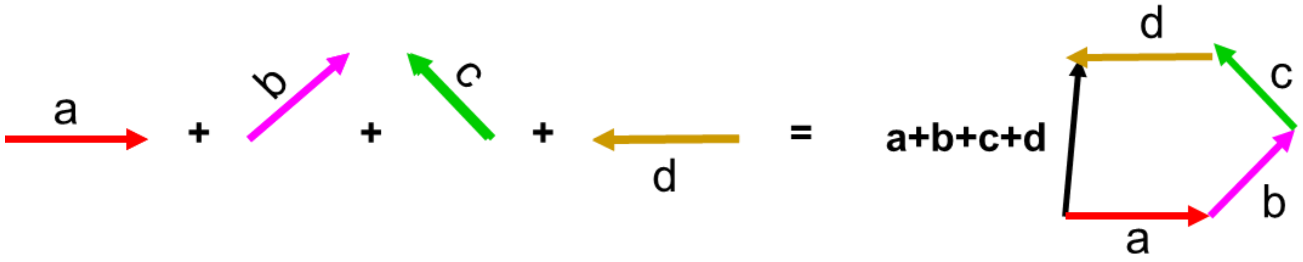


1. Metode Jajar genjang

2. Metode Segitiga

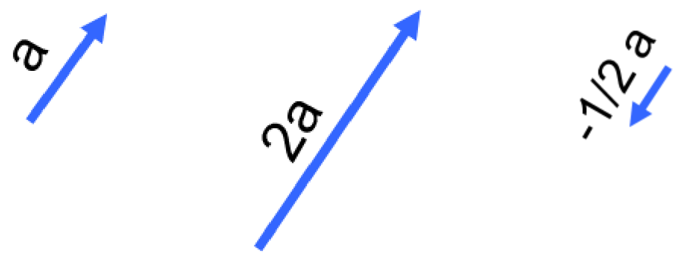


3. Metode Poligon



3. Metode Grafik

Perkalian Vektor dengan Skalar



4. Jenis-jenis Vektor

- Vektor Nol (0): Vektor yang semua nilai komponen-nya nol. Panjang vektor nol = 0. Disebut juga elemen identitas. atau

$$0 = (0{,}0) \text{atau } 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^2\ ; \quad 0 = (0{,}0{,}0) \text{ atau } 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^3$$

- Vektor Satuan $\hat{v}$: Vektor yang panjangnya 1 (satu).

$$\hat{v} = \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|}$$

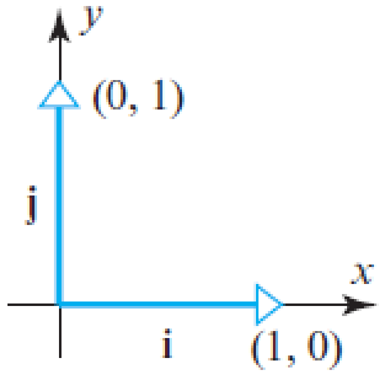
  – Contoh: u=(0,1); v=(0.6, 0.8); w=(0,1,0), dst.

4. Jenis-jenis Vektor

- Vektor Basis: Vektor satuan yang saling tegak lurus (menempel di sumbu koordinat).
  - Contoh:

    i=(1,0) dan j=(0,1) di R^2

    i=(1,0,0), j=(0,1,0), dan k=(0,0,1) di R^3



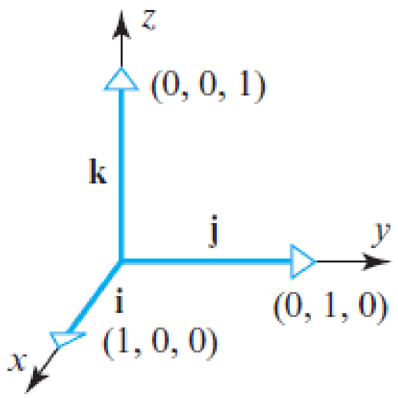
Sembarang vektor v di ruang R^n dapat dituliskan sebagai kombinasi linier dari vektor basis.

- Misal:

  u=(4,-1)=4i-j

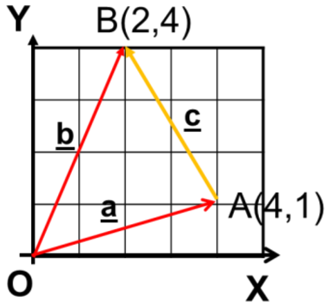
  v=(1,-5,2)=1i+(-5)j+2k=i-5j+2k

  w=(2,1,3,5)=2i+j+3k+5l



4. Jenis-jenis Vektor

- Vektor Posisi: Vektor yang titik awalnya di O(0,0) dan titik ujungnya berada di titik tertentu.



$a = \overrightarrow{OA}$ atau $a = (4,1)$ adalah vektor posisi dari titik $A(4,1)$

$b = \overrightarrow{OB}$ atau $b = (2,4)$ adalah vektor posisi dari titik $B(2,4)$

$c = \overrightarrow{AB}$ vektor yang bentuk dari titik $A(4,1)$ ke titik $B(2,4)$

$$c = \overrightarrow{AB} = b - a$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5. Sifat-sifat Vektor

Jika diketahui vektor-vektor u,v,w $\in R^n$ dimana $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$, serta k dan m adalah skalar (bilangan riil), maka:

1. $u \pm v = v \pm u$
2. $u \pm (v \pm w) = (u \pm v) \pm w$
3. $k(u \pm v) = ku \pm kv$
4. $(k \pm m)\, u = ku \pm mv$
5. $(km)\, u = k(mu) = m(ku) = (mk)\, u$
6. $u \pm 0 = u$; $u + (-u) = 0$; 0 = vektor nol
7. $m \mid u \mid = \mid mu \mid$
8. $\mid u+v \mid \leq |u| + |v|$

5. Sifat-sifat Vektor

- **Komutatif (Sifat 1)**:

$$u \pm v = v \pm u$$

  Sifat komutatif menunjukkan bahwa penjumlahan (atau pengurangan) vektor tidak bergantung pada urutan operasinya. Menukar posisi vektor tidak mengubah hasil.

- **Asosiatif (Sifat 2)**:

$$u \pm (v \pm w) = (u \pm v) \pm w$$

  Sifat asosiatif menunjukkan bahwa saat menambahkan (atau mengurangi) tiga atau lebih vektor, urutan pengelompokan tidak mempengaruhi hasil akhir.

- **Distribusi Skalar terhadap Penjumlahan Vektor (Sifat 3)**:

$$k(u \pm v) = ku \pm kv$$

  Skalar k dapat didistribusikan terhadap penjumlahan atau pengurangan vektor, yang artinya skalar dapat dikalikan dengan masing-masing vektor sebelum dijumlahkan atau dikurangkan.

5. Sifat-sifat Vektor

- **Distribusi Vektor terhadap Penjumlahan Skalar (Sifat 4)**:

$$(k \pm m)u = ku \pm mu$$

Jika dua skalar k dan m ditambahkan atau dikurangkan, hasilnya dapat dikalikan dengan vektor setelah operasi dilakukan, atau masing-masing skalar dapat dikalikan dengan vektor terlebih dahulu sebelum dijumlahkan atau dikurangkan

- **Asosiatif pada Perkalian Skalar (Sifat 5):**

$$(km)u = k(mu)$$

Sifat asosiatif juga berlaku pada perkalian skalar dengan vektor.

- **Identitas dan Invers Vektor (Sifat 6):**

$$u \pm 0 = u; u + (-u) = 0$$

Vektor 0 adalah identitas untuk penjumlahan vektor, yang berarti menambahkan vektor nol ke vektor u tidak mengubah u. Selain itu, setiap vektor memiliki invers −u yang jika ditambahkan ke vektor itu sendiri, akan menghasilkan vektor nol.

5. Sifat-sifat Vektor

- **Skalar Mutlak pada Vektor (Sifat 7)**:

$$m|u| \ = |mu|$$

Panjang (magnitude) dari vektor yang telah dikalikan dengan skalar mmm adalah sama dengan nilai mutlak dari mmm dikalikan dengan panjang vektor aslinya.

- **Inequality (Ketidaksamaan Segitiga) (Sifat 8):**

$$|u+v| \leq |u| + |v|$$

Ini adalah sifat yang dikenal sebagai ketidaksamaan segitiga. Panjang dari jumlah dua vektor tidak pernah lebih besar dari jumlah panjang kedua vektor tersebut. Ini mencerminkan fakta bahwa sisi segitiga tidak pernah lebih panjang dari jumlah dari dua sisi lainnya.

5.1 Jarak antara Dua Vektor

- Jika diketahui vektor-vektor u,v $\in$ R^n dimana u=(u_1,u_2,…,u_n) dan v=(v_1,v_2,…,v_n) maka jarak antara vektor u dan v adalah:

$$\begin{aligned} d(u,v) &= |u - v| \\ &= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2} \end{aligned}$$

- **Contoh.**
  - u = (1, 3) and v = (0, 7) maka

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2} \\ &= \sqrt{1+16} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

6. Dot Product

Interpreatasi Aljabar

- Jika diketahui vektor-vektor u,v $\in$ R^n dimana u=$(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ dan v=$(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ maka u · v dapat ditulis sebagai kombinasi linier antar komponen vektor:

$$u.\mathrm{v}=\mathrm{u}_1 v_1+\mathrm{u}_2 v_2+\ldots+\mathrm{u}_n v_n$$

- Sifat-sifat Operasi
  - u · v = v · u
  - u · (v+w) = u · v+u · w
  - k(u · v) = (ku) · v = u · (kv)
  - 0 · v = v · 0 = 0

6. Dot Product

Interpretasi Geometri

- Jika u,v adalah vektor-vektor bukan nol dan θ adalah sudut antara u dan v, maka dot product antara u dan v didefinisikan sebagai:

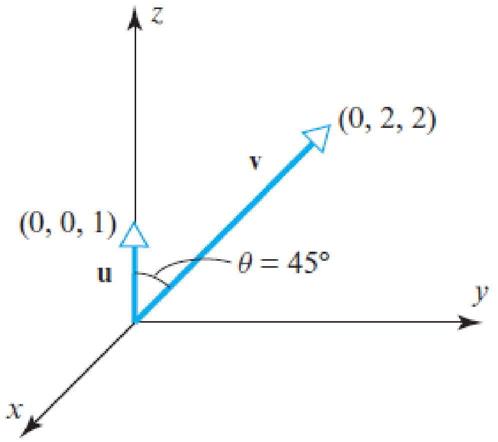
$$u \cdot v = |u||v|\cos\theta$$

- Vektor u dan v saling tegak lurus (orthogonal) jika $u \cdot v = 0$
  - Nol → $\theta = 90^0$
  - Positif → $\theta < 90^0$,
  - Negatif → $\theta > 90^0$
- Dot Product (disebut juga Euclidean Inner Product) biasanya digunakan untuk menganalisis sudut antar vektor.

6. Dot Product

Contoh

- Diketahui vektor u=(0,0,1) dan v=(0,2,2). Jika sudut antara u dan v adalah 45°, tentukan u · v



6. Dot Product

Contoh

$$|u| = \sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$$

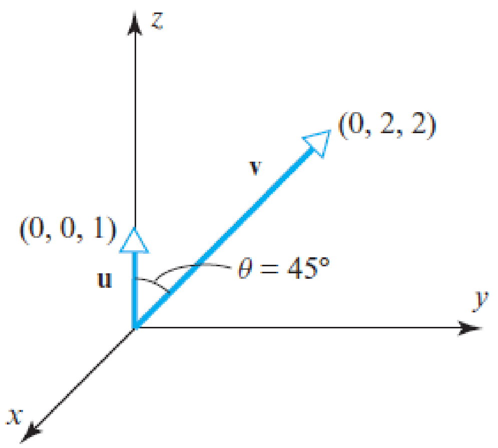
$$|v| = \sqrt{0^2+2^2+2^2} = \sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\mathrm{Cos}(45) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u \cdot \mathrm{v} = |u||v|\mathrm{Cos}(\theta)$$

$$= (1)(2\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$= 2$ → hasilnya akan sama contoh berikutnya (aljabar)



6. Dot Product

- Sudut antara vektor u dan v dapat ditulis sebagai:

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$$
$$= \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}}$$

6. Dot Product

Contoh

- Jika u=(0,0,1) dan v=(0,2,2) maka sudut antara u dan v:
  - u · v = (0)(0)+(0)(2)+(1)(2) = 2 → sama dengan contoh sebelumnya (geometri)
  - u · u = (0)(0)+(0)(0)+(1)(1) = 1
  - v · v = (0)(0)+(2)(2)+(2)(2) = 8

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{2}{\sqrt{1}\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = arc\ cos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 45^o$$

7. Cross Product

- Hanya berlaku di R^3.
- Jika diketahui vektor-vektor $u, v \in R^3$ dimana $u=(u_1,u_2,u_3)$ dan $v=(v_1,v_2,v_3)$ maka $u \times v$ didefinisikan sebagai:

$$u \times v=(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

- $u \times v$ menghasilkan vektor, sedangkan $u \cdot v$ menghasilkan skalar.

7. Cross Product

Contoh

- Tentukan hasil $u \times v$ dan $u \cdot v$, jika
  - $u = (1, 2, -2)$ dan $v = (3, 0, 1)$
  - $u = 3i+4j-k$ dan $v = -i+2j+2k$

7. Cross Product

Contoh

$$
\begin{aligned}
u \times v &= (u_2v_3 - u_3v_2, \mathrm{u}_3v_1 - u_1v_3, \mathrm{u}_1v_2 - u_2v_1) \\
&= ((2)(1) - (-2)(0), (-2)(3) - (1)(1), (1)(0) - (2)(3)) \\
&= (2 - 0, -6 - 1, 0 - 6) \\
&= (2, -7, -6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u \cdot v &= (1)(3) + (2)(0) + (-2)(1) \\
&= 3 + 0 - 2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

7. Cross Product

- **Arah Tegak Lurus:**
  - Hasil cross product $\vec{u} \times \vec{v}$ adalah vektor yang tegak lurus terhadap kedua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.
  - Arah dari vektor hasil ditentukan oleh aturan tangan kanan: Jika jari-jari tangan kanan kita menunjuk ke arah vektor $\vec{u}$ dan jari-jari kita diputar menuju vektor $\vec{v}$, ibu jari kita akan menunjukkan arah vektor hasil.
- **Panjang Vektor Hasil:**

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sin\theta$$

  - Di mana θ adalah sudut antara vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$
  - Sama dengan luas dari jajargenjang yang dibentuk oleh vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

7. Cross Product

- **Anti-Komutatif:**

  Jika kita menukar urutan vektor, vektor hasilnya akan berlawanan arah.

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{u} \times \vec{v})$$

- **Orthogonal (Tegak Lurus):**

  Jika $\vec{u} \times \vec{v} \ = \vec{0}$, maka $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah paralel atau salah satu vektor adalah nol.

8. Kesamaan Dua Buah Vektor

”Dua buah vektor dikatakan sama, jika panjang dan arahnya sama”

- Arah sama artinya mempunyai garis pembawa yang berimpit atau sejajar dengan arah panah sama.
- Misalkan u = (a,b) dan v = (c,d).
- Jika u = v, maka |u| = |v| dan arah u = arah v. Kondisi tersebut akan terpenuhi jika a=c dan b=d.

8. Kesamaan Dua Buah Vektor

- Diketahui vektor: u=(2,b) dan v=(a,6). Tentukan a dan b jika u=v.
  - Karena u=v maka (2,b)=(a,6). Sehingga a=2 dan b=6.

- Diketahui vektor: a = i + xj - 3k dan b = (x – y)i - 2j - 3k.
  - Jika a = b, maka x + y = ...
  - a = i + xj - 3k = 1i + xj - 3k
  - b = (x – y)i - 2j - 3k
  - Karena a=b, maka:
  - 1=x-y
  - x=-2
  - 1=(-2)-y atau y=-2-1; y=-3 dan x=-2.
  - Maka x+y = -2+(-3) = -5

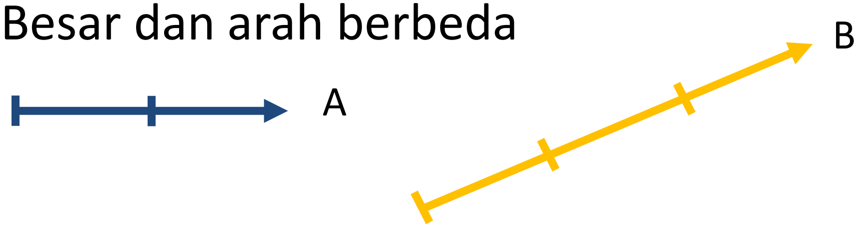
8. Kesamaan Dua Buah Vektor

- Dua vektor sama jika arah dan besarnya sama

- Dua vektor dikatakan tidak sama jika:
  - Besar sama, arah berbeda

  - Besar tidak sama, arah sama

  - Besar dan arah berbeda



TERIMAKASIH