UNDIP | UNIVERSITAS DIPONEGORO
the excellent research university

ALJABAR LINIER

Vektor Bebas Linier, Vektor Bergantung Linier, Kombinasi Linier

Etna Vianita, S.Mat., M.Mat.

DEPARTEMEN INFORMATIKA
UNIVERSITAS DIPONEGORO

1. VEKTOR BEBAS LINIER

Definisi Vektor Bebas Linier

Misalkan $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}, \dots, \overline{v_n},\}$ dalam ruang vektor *V*,

S dikatakan **bebas linier** (*linearly independent*) jika SPL homogen

$$k_1\overline{v_1} + k_2\overline{v_2} + k_3\overline{v_3} + k_4\overline{v_4} + \cdots + k_n\overline{v_n} = \bar{0}$$

Hanya memiliki solusi trivial atau tunggal atau satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0, \dots, k_n = 0$$

1. VEKTOR BEBAS LINIER

Contoh 1

Diketahui $\bar{u} = (2, -2, 1)$ dan $\bar{c} = (0, 1, -3)$

Apakah saling bebas linier di R^3

Jawab

$$k_1\bar{u} + k_2\,\bar{c} = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. VEKTOR BEBAS LINIER

dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) diperoleh

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dengan demikian diperoleh solusi tunggal yaitu:

$$k_1 = 0, k_2 = 0$$

Hal ini berarti $\bar{u}$ dan $\bar{c}$ adalah saling bebas linier.

1. VEKTOR BEBAS LINIER

Contoh 2

Diketahui $\bar{a} = (4,0,1)$ dan $\bar{p} = (-2,1,5)$

Apakah saling bebas linier di R^3

Jawab

$$k_1\bar{a} + k_2\,\bar{p} = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. VEKTOR BERGANTUNG LINIER

Definisi Vektor Bergantung Linier

Misalkan $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}, \dots, \overline{v_n},\}$ dalam ruang vektor *V*,
S dikatakan **bergantung linier** (*linearly dependent*) jika SPL homogen

$$k_1\overline{v_1} + k_2\overline{v_2} + k_3\overline{v_3} + k_4\overline{v_4} + \cdots + k_n\overline{v_n} = \bar{0}$$

memiliki solusi yang non-trivial atau tak hingga banyak pada skalar $k_1, k_2, k_3, k_4, \dots, k_n$.

2. VEKTOR BERGANTUNG LINIER

Contoh 3:

Misalkan

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3

Jawab :

Tulis : $\bar{0} = k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c}$

atau $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k1 \\ k2 \\ k3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. VEKTOR BERGANTUNG LINIER

dengan OBE diperoleh :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Didapatkan :

$k_2 = 0$

$k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \Rightarrow k_1 = 2k_3$

Ini menunjukan bahwa

k_1, k_2, k_3 mrp solusi tak hingga banyak

Jadi $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ adalah vektor-vektor yang bergantung linear.

2. VEKTOR BERGANTUNG LINIER

Contoh 4:

Misalkan

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{q} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad \bar{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix}$$

dengan *x = NIM 1 digit terakhir*

Apakah ketiga vektor diatas saling bebas linear R^3

CATATAN BEBAS LINIER / BERGANTUNG LINIER

CATATAN

1. Untuk kumpulan vektor yang terdiri dari hanya satu elemen $\vec{u}$ dengan $\vec{u} \neq 0$, adalah bebas linier, sebab jika $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ di mana $\vec{u} \neq \vec{0}$ maka $\lambda = 0$.
2. Untuk kumpulan vektor yang terdiri dari hanya satu elemen $\vec{0}$ vektor nol adalah vektor yang bergantungan linier, sebab jika $\lambda\vec{0} = \vec{0}$, maka terdapat $\lambda \neq 0$.

CATATAN BEBAS LINIER / BERGANTUNG LINIER

CONTOH

- {(2,1,3,4,5)} merupakan kumpulan vektor bebas linier, karena elemen kumpulan vektor ini terdiri dari satu elemen yaitu (2,1,3,4,5)
- {(0,0,0)} merupakan kumpulan vektor yang bergantung linier, sebab terdapat scalar $k \neq 0$, sehingga $(0,0,0) = (k_1.0,\ k_2.0,\ k_3.0) = (0,0,0)$

3. KOMBINASI LINIER

DEFINISI

Misalkan V adalah ruang vektor dan $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r \in V$. Sebuah vektor $\vec{w}$ dalam V disebut kombinasi linear dari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r$, jika $\vec{w}$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$\vec{w} = k_1\vec{v}_1 + k_2\vec{v}_2 + \ldots + k_r\vec{v}_r$$

dimana $k_1, k_2, \ldots, k_r$ merupakan skalar. Skalar-skalar ini disebut koefisien dari kombinasi linear.

3. KOMBINASI LINIER

Contoh Periksa apakah $\vec{w} = (3, 5)$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{u} = (1, 1)$ dan $\vec{v} = (1, 2)$.

Jawab

Untuk menentukan apakah $\vec{w}$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$, kita perlu memeriksa apakah terdapat skalar-skalar k_1 dan k_2 yang memenuhi $\vec{w} = k_1\vec{u} + k_2\vec{v}$, yaitu

$$(3, 5) = k_1(1, 1) + k_2(1, 2) = (k_1 + k_2, k_1 + 2k_2)$$

3. KOMBINASI LINIER

Lanjutan Jawab

$$(3,5) = k_1(1,1) + k_2(1,2) = (k_1 + k_2, k_1 + 2k_2)$$

Berdasarkan kesamaan dua vektor, diperoleh sistem persamaan linear

$$k_1 + k_2 = 3$$
$$k_1 + 2k_2 = 5$$

Solusi dari sistem persamaan di atas adalah $k_1 = 1$ dan $k_2 = 2$. Jadi, $\vec{w}$ merupakan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

VEKTOR BEBAS LINIER / VEKTOR BERGANTUNG LINIER & BENTUK GEOMETRISNYA

CONTOH

- Diketahui ruang vektor V dibentuk oleh sekumpulan vektor {(-2,3), (6,-9)}
  - Selidiki apakah pembentuk ruang vektor bebas linier atau bergantung linier?
  - Gambarkan bentuk geometrinya!

VEKTOR BEBAS LINIER / VEKTOR BERGANTUNG LINIER & BENTUK GEOMETRISNYA

- Penyelesaian :
  - V = {(-2,3), (6,-9)}, sebutlah $\bar{a} = (-2{,}3)$ dan $\bar{b} = (6, -9)$
  - $k_1\bar{a} + k_2\bar{b} = 0$
  - $k_1(-2{,}3) + k_2(6, -9) = 0$

VEKTOR BEBAS LINIER / VEKTOR BERGANTUNG LINIER & BENTUK GEOMETRISNYA

LANJUTAN

- $-2k_1 + 6k_2 = 0$ ... (1)
- $3k_1$ - $k_2 = 0$ ... (2)

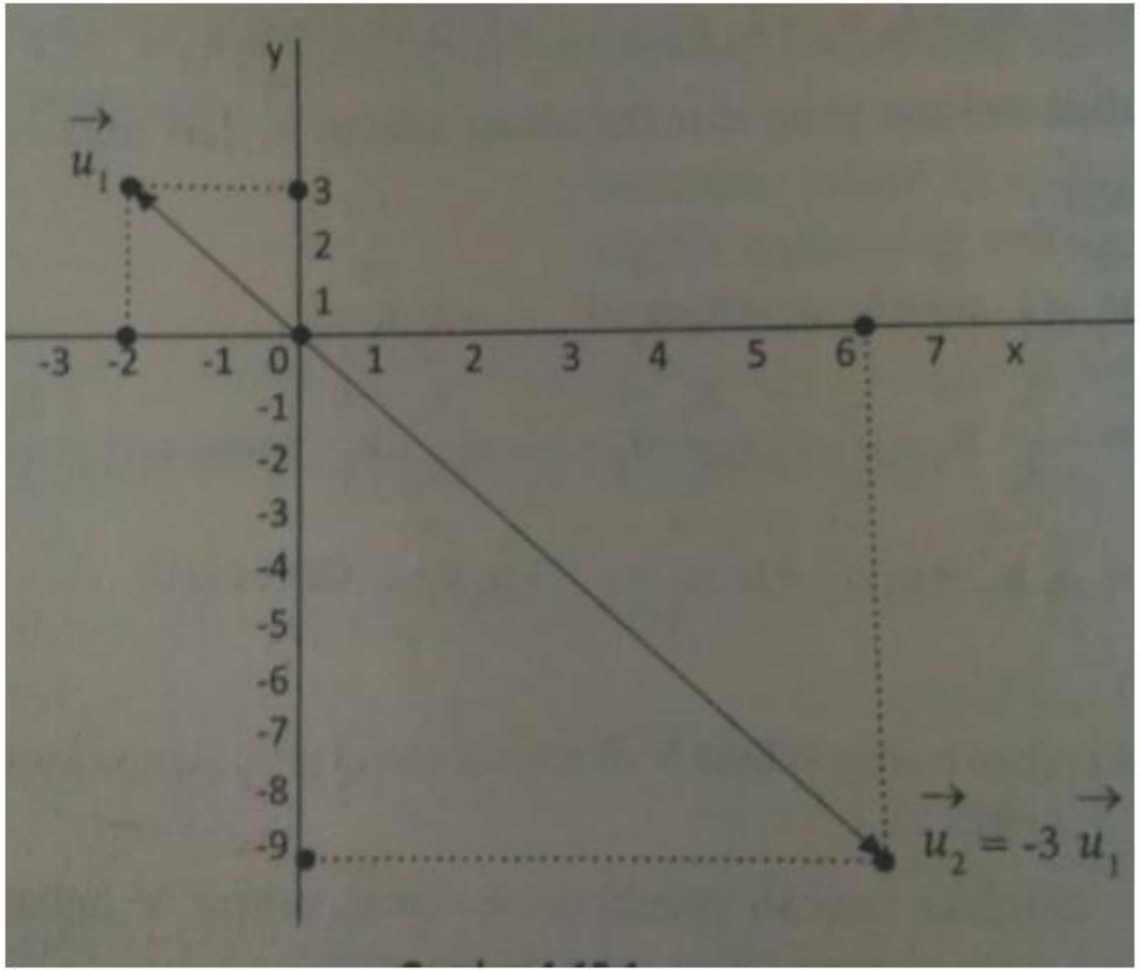
- Persamaan (1) : (-2) ⇔ k_1 - $3k_2 = 0$
- Persamaan (2) : 3 ⇔ k_1 - $3k_2 = 0$
- Kedua persamaan sama, sehingga diperoleh hubungan k_1 = $3k_2$, ambil k_1=3, k_2=1
- Jadi V merupakan kumpulan vector yang bergantung linier.
- Berlaku hubungan 3(-2,3) +(6,-9) = (0,0) atau $3\bar{a} + \bar{b} = \bar{0}$ atau $\bar{b} = -3\bar{a}$

VEKTOR BEBAS LINIER / VEKTOR BERGANTUNG LINIER & BENTUK GEOMETRISNYA

LANJUTAN

- Bentuk geometri :

Dengan mengasumsikan $\bar{a} = \overline{u_1}$ dan $\bar{b} = \overline{u_2}$



3. KOMBINASI LINIER

CONTOH

- Tuliskan $\bar{u} = (8{,}9)$ sebagai kombinasi dari $\overline{u_1}$ = (2,1) dan $\overline{u_2}$ = (1,3) dan nyatakan bentuk geometrinya!

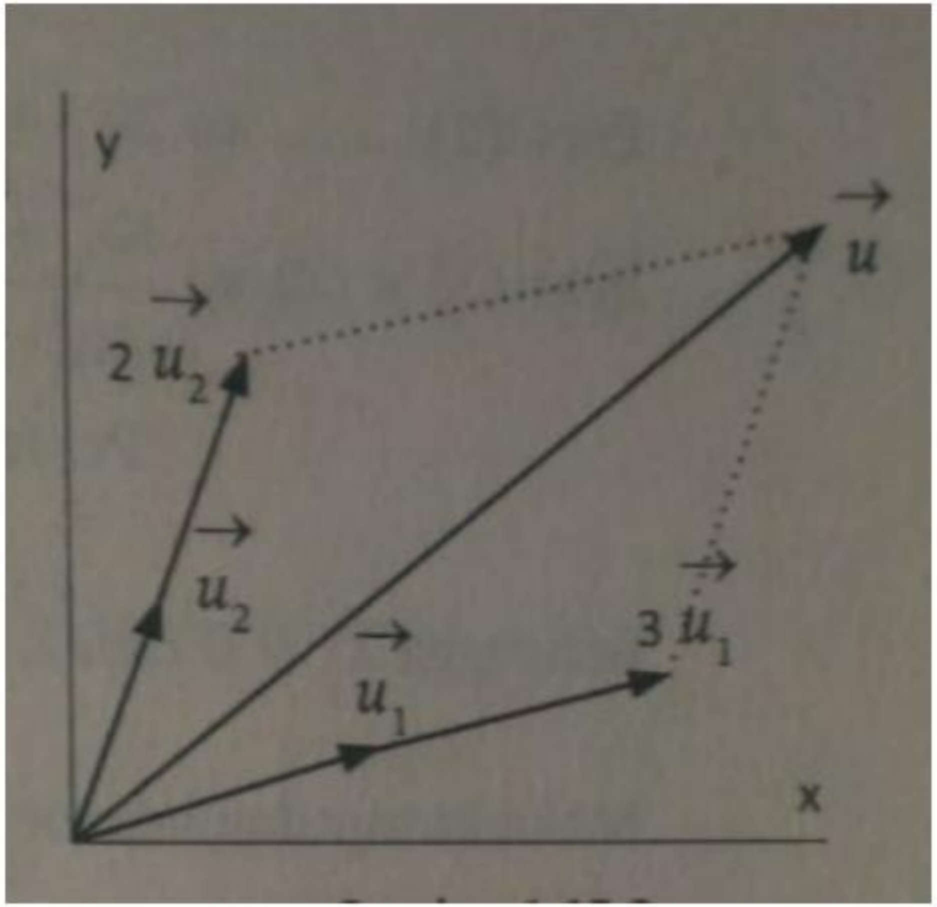
Penyelesaian :

- Dengan cara yang sama dengan contoh sebelumnya, sebagai Latihan ya..., didapatkan k_1=3, k_2= 2
- $\bar{u} = 3\,\overline{u_1} + 2\,\overline{u_2}$

3. KOMBINASI LINIER

LANJUTAN

- Bentuk geometri



3. KOMBINASI LINIER

LATIHAN 1

- Tinjau vektor u = (1,2,-1) dan v = (6,4,2). Tunjukkan bahwa :
  - w = (9,2,7) adalah kombinasi linier dari u dan v
  - w' = (4,-1,8) **bukanlah** kombinasi linier dari u dan v

Penyelesaian :

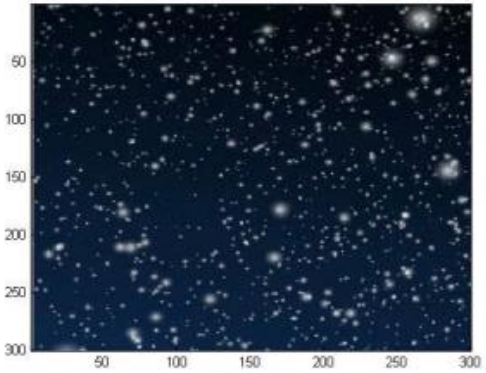
- Agar w adalah kombinasi linier dari u dan v, maka harus ada k_1 dan k_2 sedemikian hingga:

  $(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$
- Coba carilah nilai k_1 dan k_2 !
- Bagaimana dengan w'?

3. KOMBINASI LINIER

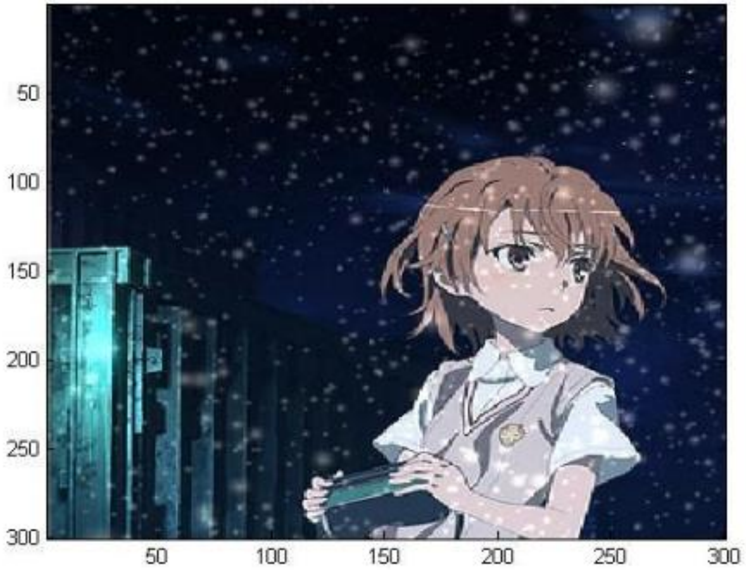
3. KOMBINASI LINIER

u_1



u_2

$$1 \cdot u_1 + 0.5 \cdot u_2 =$$



4. LATIHAN 2

1. Apakah himpunan {1- x, 1+x^2, 1- x^2} bebas linier?

2. Diketahui ruang vektor V dibentuk oleh kumpulan vektor-vektor {(-1,3}, (2,-6)}
a. Selidiki apakah pembentuk ruang vektor V bebas linier atau bergantung linier
b. Gambar bentuk geometrinya!

3. Diketahui ruang vektor V dibentuk oleh kumpulan vektor-vektor {(1,2,3), (2,1,3), (3,2,1)}
a. Selidiki apakah pembentuk ruang vektor V bebas linier atau bergantung linier
b. Tulis p = (19, 16, 19) sebagai kombinasi linier dari pembentuk ruang vektor V dan gambar bentuk geometrinya

TERIMA KASIH