Struktur Diskrit

Prinsip Kandang Merpati

Nurdin Bahtiar, MT

Design by: Nurdin Bahtiar

Pengingat

Design by: Nurdin Bahtiar

Bahan Kuliah

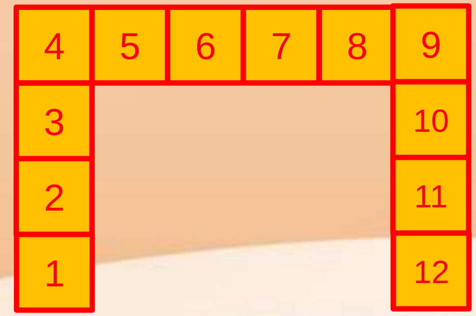
4.1. Basic of Counting
4.2. The Sum Rule
4.3. The Substraction Rule
4.4. The Division Rule
4.5. Pigeonhole Principle

4.1. Basic of Counting

- Misal terdapat suatu prosedur yang dapat dibagi dalam 2 rangkaian pekerjaan. Jika terdapat n_1 cara menyelesaikan pekerjaan pertama dan terdapat n_2 cara menyelesaikan pekerjaan kedua, maka terdapat $n_1.n_2$ cara untuk menyelesaikan prosedur tersebut.

Contoh 1

- Suatu perusahaan baru dengan 2 karyawan: Sanchez dan Patel, menyewa satu lantai gedung yg punya 12 ruang kantor. Berapa banyak cara menentukan ruang yg berbeda untuk mereka berdua?
- Prosedur untuk menentukan kantor untuk mereka berdua adalah dengan terlebih dahulu menentukan satu kantor untuk Sanchez, di mana hal ini bisa dilakukan dengan 12 cara. Lalu menentukan satu kantor yang berbeda untuk Patel, yg bisa dilakukan dng 11 cara.



- Sehingga dengan *the product rule* didapatkan sebanyak: 12 . 11 = 132 cara.

4.1. Basic of Counting

Contoh 2

- Kursi dalam sebuah auditorium akan diberi label dengan **huruf kapital** diikuti dengan **bilangan bulat positif** tidak lebih dari 100. Berapa jumlah kursi terbanyak yang bisa diberi label berbeda?

Jawab:

- Prosedur melabeli kursi terdiri dari 2 langkah, yaitu memberi kursi satu dari 26 huruf abjad, lalu diikuti salah satu bilangan bulat dari 001 sampai 100. Urutannya yaitu: A001, A002, … hingga Z100.
- Dengan *product rule* didapatkan sebanyak 26.100 = 2600 cara yang berbeda untuk memberi label pada kursi, sehingga jumlah kursi terbanyak yang bisa diberi label berbeda adalah 2600.

4.1. Basic of Counting

Contoh 3

- ❑ Terdapat 32 PC dalam laboratorium komputer. PC memiliki 24 port. Berapa banyak jumlah port pada PC yang berbeda dalam laboratorium komputer tersebut?

- ➢ Prosedur untuk menentukan port terdiri dari 2 langkah, pertama pilih satu PC lalu pilih satu port pada PC tersebut. Karena terdapat 32 cara untuk memilih PC dan 24 cara untuk memilih port, maka dengan *the product rule* didapatkan: $32 \cdot 24 = 768$ port.

Contoh 4

- ❑ Berapa banyak bit string yg dapat dibentuk yg panjangnya tujuh?

- ➢ Setiap bit dari tujuh bit dapat dipilih dengan 2 cara, karena tiap bit bisa 0 atau 1. Sehingga *the product rule* menunjukkan terdapat: $2^7 =$ 128 bit string yang berbeda dengan panjang tujuh.

2	2	2	2	2	2	2

Masing-masing posisi memiliki 2 kemungkinan, yaitu: 0 atau 1

Design by: Nurdin Bahtiar

4.1. Basic of Counting

Contoh 5

- ❑ Berapa banyak plat nomer berbeda yang bisa dibuat jika tiap plat harus berisi 3 urutan **huruf** diikuti 3 **angka**?

- ➢ Ada 26 pilihan untuk tiap 3 urutan huruf dan 10 pilihan untuk tiap 3 angka. Sehingga the product rule didapatkan:

  26 . 26 . 26 . 10 . 10 . 10 = 17.576.000 plat nomor yg dapat dibuat.

Design by: Nurdin Bahtiar

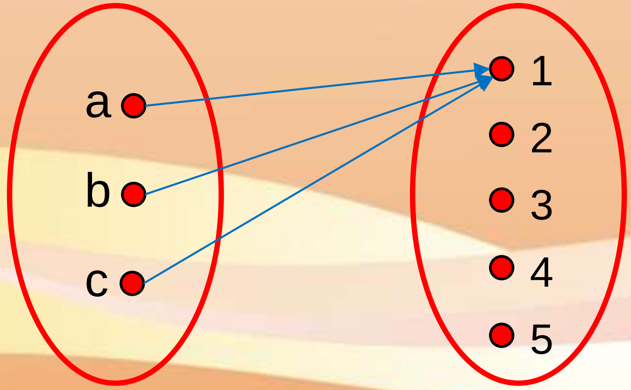
4.1. Basic of Counting

Contoh 6

- **Fungsi Counting**. Berapa banyak fungsi yang ada dari sebuah himpunan dg m elemen ke sebuah himpunan dengan n elemen?

- Sebuah fungsi sesuai dengan pilihan salah satu dari n elemen dalam codomain untuk masing-masing elemen m di domain. Oleh karena itu, dengan product rule ada $n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^m$ fungsi dari satu set dengan elemen m ke satu dengan n elemen.

- Misalnya, ada $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ fungsi yang berbeda dari satu himpunan dng tiga elemen ke satu himpunan dengan lima elemen.



a memiliki 5 kemungkinan hubungan
b memiliki 5 kemungkinan hubungan
c memiliki 5 kemungkinan hubungan

4.1. Basic of Counting

Contoh 7

- **Fungsi Counting One-to-one**. Berapa banyak fungsi one-to-one yang ada pada sebuah himpunan dengan *m* elemen ke sebuah himpunan dengan *n* elemen ?

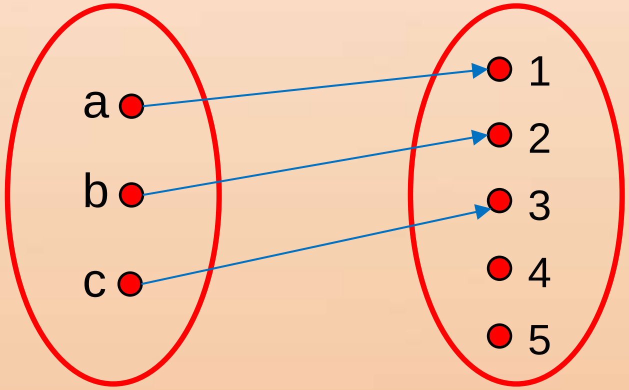
- Pertama perhatikan bahwa ketika m > n tidak ada fungsi one-to-one dari satu himpunan dengan elemen m ke satu himpunan dengan n elemen.

  Lalu misalkan m ≤ n. Misalkan elemen dalam domain adalah a_1, a_2, ..., a_m. Ada n cara untuk memilih nilai fungsi pada a_1. Karena fungsi adalah one-to-one, nilai fungsi pada a_2 dapat diketahui dengan cara n – 1 (karena nilai yang digunakan untuk a_1 tidak dapat digunakan lagi). Secara umum, nilai fungsi pada a_k dapat dipilih dalam n – k + 1 cara. Berdasarkan product rule, ada $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ fungsi one-to-one dari satu himpunan dengan elemen m ke satu dengan n elemen.

Design by: Nurdin Bahtiar

4.1. Basic of Counting

- Contohnya, ada 5 · 4 · 3 = 60 fungsi one-to-one dari satu himpunan dengan tiga elemen ke satu himpunan dengan lima elemen.



a memiliki 5 kemungkinan hubungan
b memiliki 4 kemungkinan hubungan
c memiliki 3 kemungkinan hubungan

4.1. Basic of Counting

Contoh 8

- Berapakah nilai *k* setelah kode berikut dieksekusi?
  (dimana n_1, n_2, …, n_m merupakan bilangan bulat positif).

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
   for i2 := 1 to n2
         .
         .
         .
      for im := 1 to nm
         k := k + 1
```

Jawab:

- Nilai awal dari k adalah nol. Setiap langkah eksekusi, nilai k bertambah 1. Karena blok kode disusun menggunakan loop tersarang, maka menggunakan product rule, eksekusi dilakukan sebanyak: $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdot \cdot n_m$ kali.
- Sehingga nilai k akhir adalah $n_1 n_2 \ldots n_m$.

4.2. The Sum Rule

- Jika suatu pekerjaan dapat diselesaikan dengan salah satu dari n_1 cara atau salah satu dari n_2 cara, dimana tidak ada cara n_1 maupun n_2 yang sama, maka terdapat $n_1 + n_2$ cara dalam menyelesaikan pekerjaan tersebut.

Contoh 9

- Sesorang mahasiswa dapat memilih satu project komputer dalam satu dari tiga daftar yang disediakan. Setiap daftar terdiri dari 23, 15, dan 19 kemungkinan project. Tidak ada project yang muncul lebih dari sekali (unik). Berapa banyak kemungkinan project yang dapat diambil seorang mahasiswa?

Jawab:

- Seorang mahasiswa dapat memilih project dalam daftar pertama, daftar kedua, maupun daftar ketiga. Karena setiap project unik, menggunakan *the sum rule* terdapat 23 + 15 + 19 = 57 cara memilih project.

4.2. The Sum Rule

Contoh 10

- Berapakah nilai k setelah kode berikut dieksekusi?
  (dimana n_1, n_2, …, n_m merupakan bilangan bulat positif).

```
k := 0
for i1 := 1 to n1
    k := k + 1
for i2 := 1 to n2
    k := k + 1
        .
        .
        .
for im := 1 to nm
    k := k + 1
```

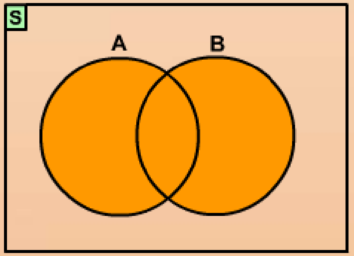
Jawab:

- Nilai awal dari k adalah nol. Setiap langkah eksekusi, nilai k bertambah 1. Karena blok kode disusun oleh loop yang berbeda, maka menggunakan sum rule eksekusi dilakukan sebanyak $n_1+n_2+\ldots+n_m$ kali.
- Sehingga nilai k akhir adalah $n_1+n_2+\ldots+n_m$.

4.3. The Substraction Rule

- Jika suatu pekerjaan dapat diselesaikan dengan n_1 cara atau n_2 cara, maka jumlah cara untuk menyelesaikan pekerjaan tersebut adalah $n_1 + n_2$ dikurangi jumlah cara yang dapat diselesaikan dengan cara keduanya.
- The substraction rule juga dikenal dengan **principle of inclusion-exclusion**.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



A ∪ B

Contoh 11

- Berapa banyak bit string dengan panjang delapan baik yang dimulai dengan bit 1 <u>atau</u> yang diakhiri dengan bit 00?

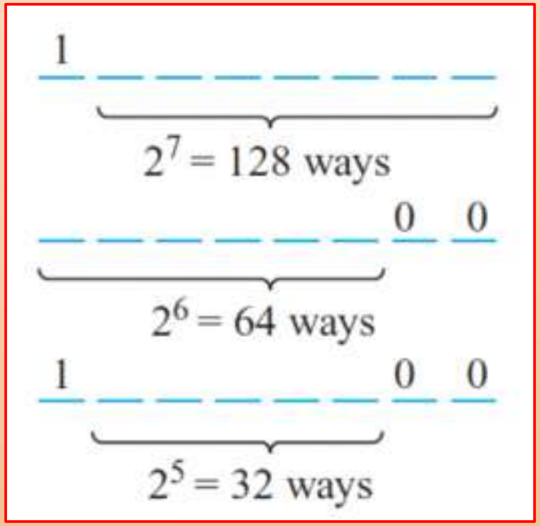
Jawab: …

4.3. The Substraction Rule

- Kita dapat membuat string bit dengan panjang delapan yang dimulai dengan 1 dalam $2^7 = 128$ cara. Sesuai product rule, karena bit pertama dapat dipilih hanya dengan satu cara dan masing-masing dari tujuh bit lainnya dapat dipilih dalam dua cara.
- Demikian pula, kita dapat membangun bit string dengan panjang delapan berakhir dengan dua bit 00, dalam $2^6 = 64$ cara. Sesuai product rule, karena masing-masing enam bit pertama dapat dipilih dalam dua cara, sedangkan dua bit terakhir dapat dipilih hanya dengan satu cara.
- Cara untuk membangun string bit panjang delapan dimulai dengan 1 adalah seperti halnya cara untuk membangun string bit panjang delapan yang berakhir dengan dua bit 00, dimana terdapat $2^5 = 32$ cara untuk membangun string tersebut.
- Menurut product rule, karena bit pertama dapat dipilih hanya dengan satu cara, bit kedua hingga keenam dapat dipilih dengan dua cara, dan dua bit terakhir dapat dipilih dengan satu cara.

4.3. The Substraction Rule

- Akibatnya, jumlah bit string panjang delapan yang dimulai dengan 1 atau diakhiri dengan 00, yang sama dengan jumlah cara untuk membangun string bit panjang delapan yang dimulai dengan 1 atau yang berakhir dengan 00, sama dengan 128 + 64 – 32 = 160.



Gambar 4.1. Bit string dengan panjang 8 diawali dengan 1 atau diakhiri dengan 00

4.3. The Substraction Rule

Contoh 12

- Sebuah perusahaan komputer menerima 350 aplikasi lamaran dari fresh graduate untuk suatu pekerjaan yang direncanakan untuk pengelolaan bagian web server baru. Jika 220 dari pelamar berasal dari jurusan ilmu komputer, 147 dari jurusan bisnis, dan 51 dari jurusan keduanya, berapa banyak dari pelamar ini yang bukan dari jurusan ilmu komputer maupun bisnis?

Jawab:

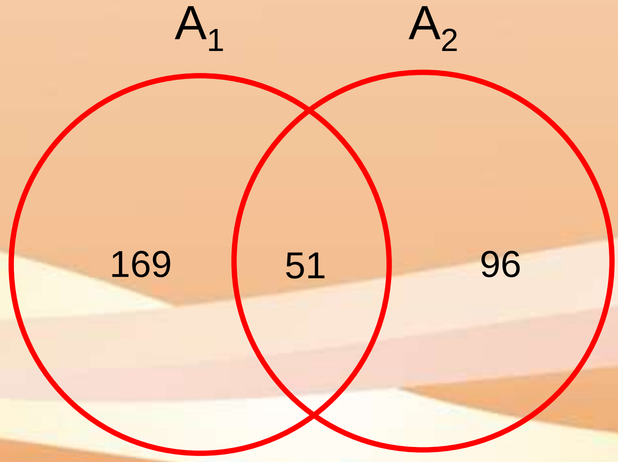
- Untuk mengetahui jumlah pelamar yang bukan berasal dari jurusan baik ilmu komputer maupun bisnis, kita dapat mengurangi jumlah siswa yang dari jurusan ilmu komputer dan bisnis (keduanya) dari jumlah total pelamar.

4.3. The Substraction Rule

- Misalkan A_1 adalah himpunan siswa dari jurusan ilmu komputer dan A_2 himpunan siswa dari jurusan bisnis. Kemudian $A_1 \cup A_2$ adalah himpunan siswa dari jurusan ilmu komputer dan bisnis (keduanya), dan $A_1 \cap A_2$ adalah himpunan siswa dari jurusan ilmu komputer dan bisnis (keduanya). Dengan aturan pengurangan jumlah siswa yang mengambil jurusan keduanya maka:

  $$| A_1 \cup A_2 | = | A_1 | + | A_2 | - | A_1 \cap A_2 | = 220 + 147 - 51 = 316$$

- Dapat disimpulkan bahwa 350 – 316 = 34 dari pelamar bukan dari jurusan ilmu komputer maupun bisnis.



4.4. The Division Rule

- Terdapat n/d cara untuk menyelesaikan suatu pekerjaan jika ia bisa dilakukan menggunakan prosedur yang dapat dicapai dalam n cara, dan untuk setiap cara w, tepat d dari n cara yang berkorespondensi dengan cara w.
- Kita dapat menyatakan kembali *division rule* dalam bentuk himpunan: "Jika himpunan berhingga A merupakan union dari n pasangan subset disjoint masing-masing dengan d elemen, maka:

$$n = |A|/d$$

- Juga dapat dirumuskan division rule dalam bentuk fungsi:

  "Jika f adalah fungsi dari A ke B dimana A dan B merupakan himpunan berhingga, maka untuk setiap nilai $y \in B$ terdapat d nilai $x \in A$ dengan $f(x) = y$, maka $|B| = |A|/d$"

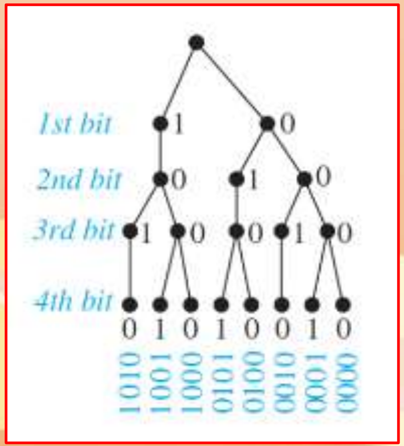
4.4. The Division Rule

Contoh 13

- Berapa banyak bit string dengan panjang empat yang tidak memiliki dua kali bit 1 berturut-turut?

Jawab:

- Diagram pohon pada Gambar 4.2 menampilkan semua bit string dengan panjang empat tanpa dua kali bit 1 berturut-turut. Kita melihat bahwa ada delapan string bit dengan panjang empat tanpa dua kali 1 berturut-turut.



Gambar 4.2. Bit string dengan panjang 4 tanpa bit 1 berturut-turut

4.4. The Division Rule

Contoh 14

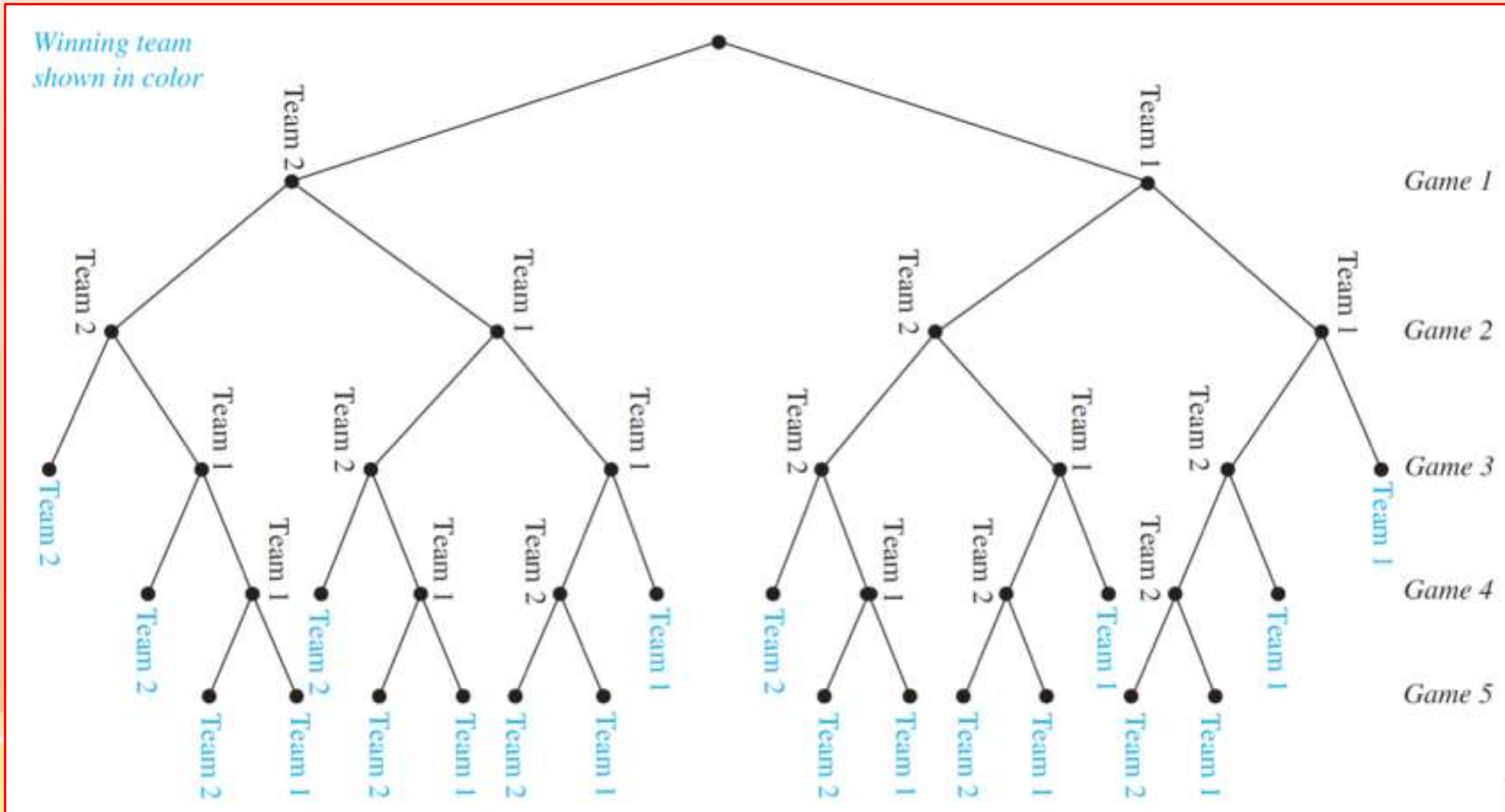
- Playoff antara dua tim terdiri dari paling banyak lima pertandingan. Tim pertama yang memenangkan tiga pertandingan memenangkan babak playoff. Dalam berapa banyak cara yang berbeda dapat terjadi playoff?

Jawab:

- Diagram pohon pada Gambar 4.3 menampilkan semua cara playoff dapat dilakukan, dengan pemenang dari setiap pertandingan yang ditampilkan. Dapat dilihat bahwa ada 20 cara berbeda untuk playoff dapat terjadi.

Design by: Nurdin Bahtiar

4.4. The Division Rule



Gambar 4.3 Kemungkinan pemenang pertandingan babak playoff

4.4. The Division Rule

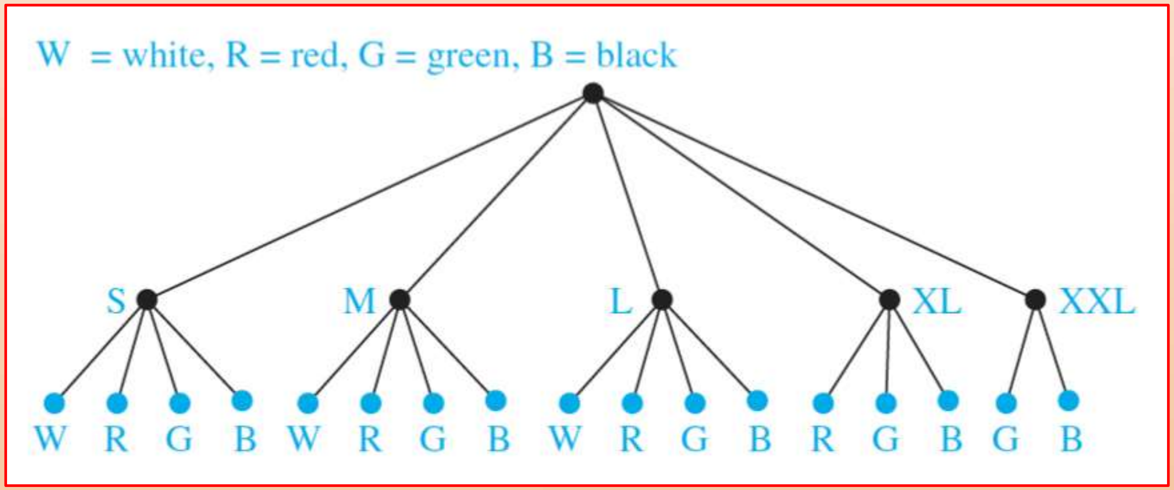
Contoh 15

- Misalkan kaos "I Love New Jersey" memiliki lima ukuran berbeda: S, M, L, XL, dan XXL. Anggap bahwa setiap ukuran memiliki empat warna, yaitu White, Red, Green, dan Black, kecuali untuk XL yang hanya berwarna Red, Green, dan Black, serta XXL yang hanya berwarna Green dan Black. Berapa banyak kaos yang berbeda yang harus dimiliki toko souvenir setidaknya satu dari setiap ukuran dan warna yang tersedia dari kaos tersebut?

Jawab:

- Diagram pohon pada Gambar 4.4 menampilkan semua kemungkinan ukuran dan pasangan warna. Oleh karena itu, pemilik toko souvenir perlu menyediakan 17 kaos yang berbeda.

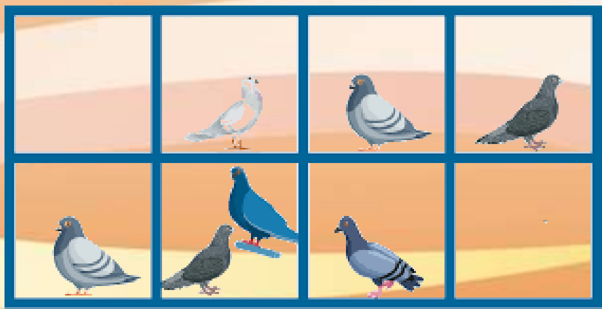
4.4. The Division Rule



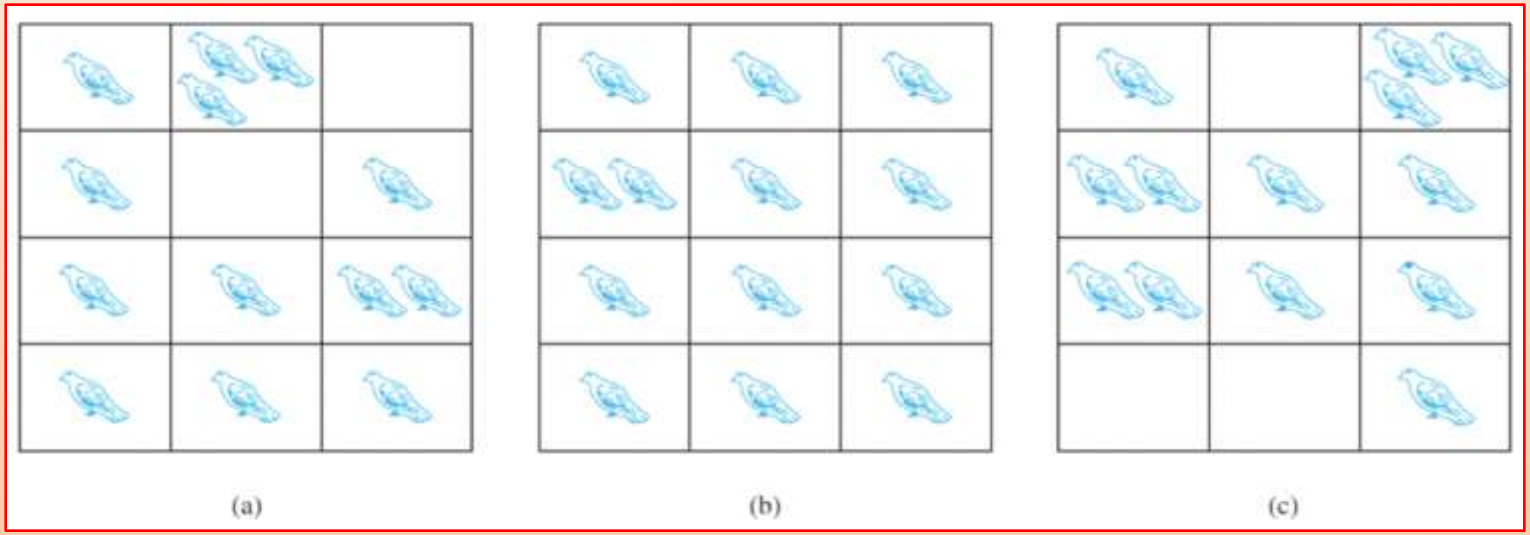
Gambar 4.4. Variasi warna dari T-Shirt

4.5. Pigeonhole Principle

- Misalkan terdapat 20 merpati terbang ke 19 kandang untuk bertengger. Karena ada 20 merpati tetapi hanya 19 kandang, maka satu dari 19 kandang ini harus ditempati dua merpati di dalamnya. Perhatikan bahwa jika setiap kandang memiliki paling banyak satu merpati di dalamnya, maka dari 19 merpati dapat diakomodasi satu merpati per kandang.
- Ini mengilustrasikan prinsip umum yang disebut **prinsip pigeonhole**, yang menyatakan bahwa jika ada lebih banyak merpati daripada kandang, maka harus ada setidaknya satu kandang dengan berisi dua merpati di dalamnya (lihat Gambar 4.5).
- Jika k adalah bilangan bulat positif dan $k + 1$ atau lebih objek ditempatkan ke dalam kotak k, maka setidaknya ada satu kotak yang berisi dua atau lebih objek.



4.5. Pigeonhole Principle



Gambar 4.5. Jumlah merpati lebih banyak dibandingkan jumlah kandangnya

- Fungsi f dari suatu himpunan dengan $k + 1$ atau lebih elemen ke himpunan dengan k elemen bukan merupakan one-to-one.

4.5. Pigeonhole Principle

Contoh 16

- Di antara grup yang terdiri dari 367 orang, pasti terdapat minimum dua orang yang memiliki tanggal lahir yang sama, karena hanya terdapat 366 kemungkinan tanggal kelahiran.
- Di dalam kelompok yang terdiri dari 27 kata bahasa Inggris, pasti terdapat minimum dua kata yang berawalan huruf sama, karena hanya terdapat 26 huruf dalam alfabet Inggris.

Latihan

Latihan 4

4.1 Misalkan terdapat 18 mahasiswa dari Departemen Matematika dan 325 mahasiswa dari Departemen Informatika.

a) Dalam berapa cara yang bisa dilakukan untuk mendapatkan dua orang mahasiswa dari Departemen Matematika dan Departemen Informatika?

b) Dalam berapa cara yang bisa dilakukan untuk mendapatkan seorang mahasiswa dari Departemen Matematika atau Departemen Informatika?

Jawab:

Permasalahan tersebut mengilustrasikan perbedaan antara *product rule* dengan *sum rule*. Jika kita harus menentukan satu pilihan dan satu lagi pilihan yang lain, maka product rule (soal a). Jika untuk membuat satu pilihan atau pilihan yang lain, maka sum rule (soal b).

a) Karena terdapat 18 dan 325 kemungkinan cara, maka hasilnya: 18 . 325 = 5850 cara.

b) Karena terdapat 18 dan 325 kemungkinan cara, maka hasilnya: 18 + 325 = 343 cara.

Latihan 4

4.2 Terdapat soal ujian pilihan ganda dengan 10 pertanyaan. Di dalamnya terdapat empat kemungkinan jawaban.

a) Dalam berapa cara yang bisa dilakukan untuk menjawab semua pertanyaan tersebut jika semua pertanyaan harus dijawab?

b) Dalam berapa cara yang bisa dilakukan untuk menjawab semua pertanyaan tersebut jika boleh tidak semua pertanyaan harus dijawab (boleh kosong)?

Jawab:

a) Karena semua pertanyaan harus dijawab, maka terdapat 4 kemungkinan jawaban untuk setiap pertanyaan.

Sehingga ada $4 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\,.\,.\, 4 = 4^{10}$ cara.

b) Karena tidak semua pertanyaan harus dijawab (diijinkan untuk menjawab kosong), maka terdapat 5 kemungkinan jawaban untuk setiap pertanyaan.

Sehingga terdapat $5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\,.\,.\, 5 = 5^{10}$ cara.

Design by: Nurdin Bahtiar

Latihan 4

4.3 Terdapat enam penerbangan berbeda dari New York ke Denver dan tujuh penerbangan berbeda dari Denver ke San Francisco. Berapa banyak pasangan yang berbeda yang dapat dipilih untuk penerbangan dari New York ke San Fansisco via Denver?.

Jawab:

Terdapat 6 . 7 = 42 kemungkinan penerbangan yang berbeda.

Latihan 4

4.4 Berapa banyak nama inisial tiga huruf yang bisa dimiliki seseorang?

Jawab:

Karena jumlah huruf ada 26, maka terdapat 26 . 26 . 26 = 26^3 nama inisial.

→ AAA
AAB
AAC
AAD
AAE
AAF
.
.
.
ZZY
ZZZ

Latihan 4

4.5 Berapa banyak nama inisial tiga huruf yang bisa dimiliki seseorang yang diawali huruf A?

Jawab:

Karena satu huruf sudah terpakai (yaitu A) maka terdapat 1 . 26 . 26 = 26^2 nama inisial yang diawali huruf A.

→ AAA
AAB
AAC
AAD
AAE
AAF
.
.
.
AZY
AZZ

Design by: Nurdin Bahtiar

End of File