Deret Fourier

Farikhin
Dept Matematika FSM Undip

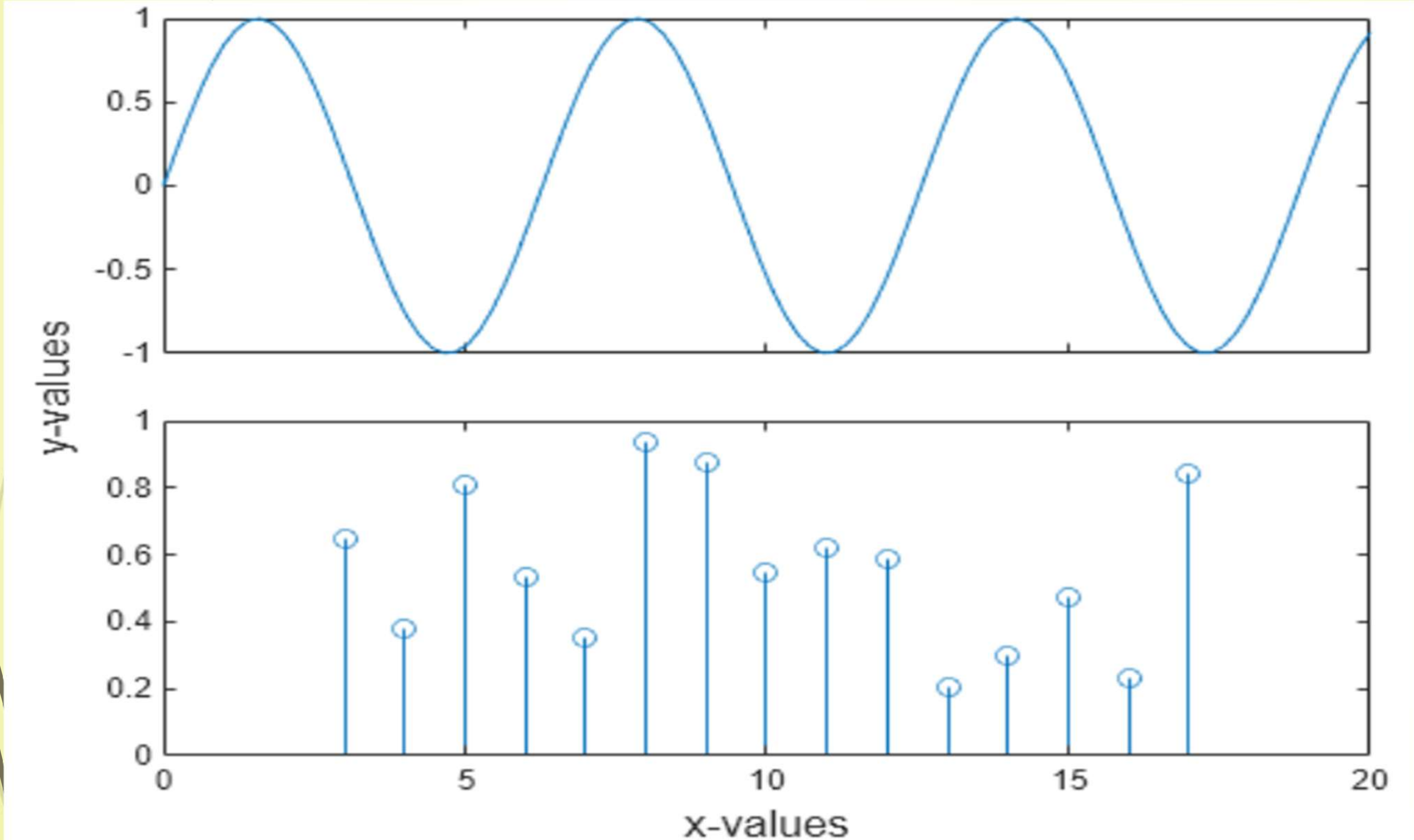
TUJUAN PEMBELAJARAN

- Mahasiswa mampu menentukan deret Fourier untuk fungsi periodic
- Mahasiswa mampu menentukan deret Fourier untuk fungsi diskontinu
- Mahasiswa dapat mengaplikasikan sifat-sifat deret Fourier untuk komputasi bilangan irasional tertentu.

MANFAAT MATERI

- Deret fourier dapat digunakan untuk fungsi diskontinu. Sementara, fungsi ini tidak dapat direpresentasikan dengan deret Taylor/Maclaurin.
- Deret Fourier digunakan utamanya untuk fungsi periodic.
- Sifat oskilasi fungsi dapat direpresentasikan dengan deret Fourier.

MANFAAT MATERI



REFERENSI UTAMA

- Spiegel : Advanced Calculus (Schaum, Mc Graw-Hill), 1999
- Widowati dkk : Kalkulus (Undip Press), 2013

BASELINE PENGETAHUAN :

Integral tertentu

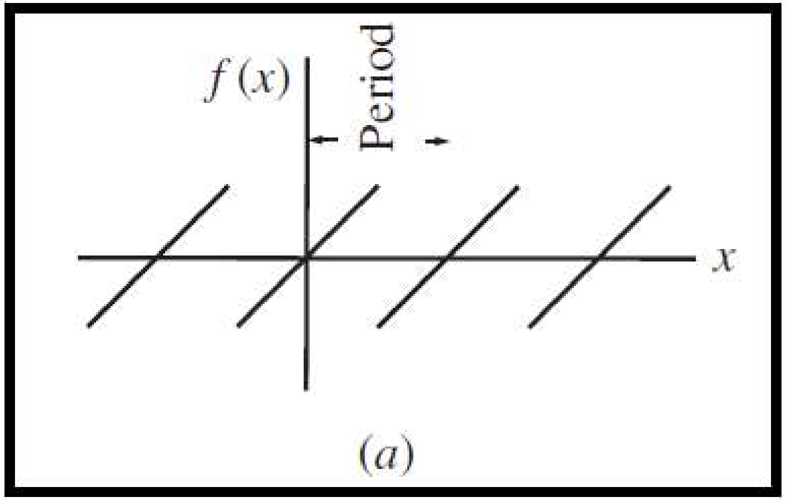
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\ dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\ dx = \begin{cases} 0 & ,n \neq m \\ \pi & ,n = m \end{cases}$$

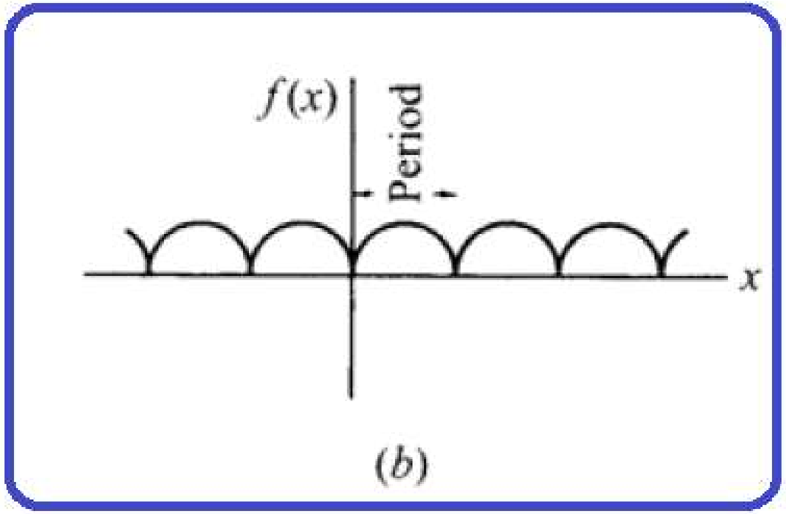
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\ dx = \begin{cases} 0 & ,n \neq m \\ \pi & ,n = m \end{cases}$$

Fungsi periodik

- Fungsi f(x) berperiodik 2L : $f(x) = f(x + 2L)$
- Contoh Fungsi periodik : $f(x) = \sin(x)$ dan $f(x) = \cos(x)$
- Contoh lainnya :



(a)



(b)

DERET FOURIER

Deret Fourier $f: R \to R$ dengan

$f(x)$ terdefinisi pada $\boldsymbol{-L < x < L}$

dan

$f(x) = f(x + \mathbf{2L})$ untuk x lainnya

adalah

$$\mathrm{f(x)} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

dengan

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

dan

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

DERET FOURIER untuk $L = \pi$

Fungsi periodik $f: R \to R$, deret Fourier f pada interval

$$-\boldsymbol{\pi} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{\pi}$$

adalah

$$\mathrm{f(x)} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx))$$

dengan

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

dan

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Contoh 1 :

Buat deret Fourier utk $f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$

dengan periode = 10 $(L = 5)$

Contoh 1 : Solusi

Periode $2L = 10$ maka $l = 5$, sehingga

$$A_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\Bigg|_{x=0}^{5} = 0$$

untuk $n \neq 0$.

$$A_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{0}^{5} 3\,dx = 3$$

Contoh 1 : Solusi

$$B_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\Bigg|_{x=0}^{5}$$

$$= \frac{3(1-\cos(n\pi))}{n\pi}$$

Jadi

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\left(\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right) + \left(\frac{3(1-\cos(n\pi))}{n\pi}\right)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3(1-\cos(n\pi))}{n\pi}\right)\left(sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\right]$$

Deret Fourier untuk fungsi **Genap** dan **Ganjil**

Definisi fungsi genap/ganjil

- Fungsi genap $f(x) = f(-x)$. Sebagai Contoh :
  1. $f(x) = |x|$
  2. $f(x) = \cos(x)$
- Fungsi ganjil $f(-x) = -f(x)$. Sebagai Contoh :
  1. $f(x) = x$
  2. $f(x) = \sin(x)$

Sifat fungsi genap/ganjil $f(x)$

Fungsi Genap	Fungsi Ganjil
$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$	$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$
Grafik fungsi $f(x)$ simetris terhadap sumbu $y = 0$	Grafik fungsi $f(x)$ simetris terhadap sumbu $y = -x$
Perkalian **dua fungsi genap** menghasilkan fungsi genap	Perkalian **fungsi ganjil** dan **fungsi genap** menghasilkan fungsi ganjil
Perkalian **dua fungsi ganjil** menghasilkan fungsi genap	

Contoh 2

Tentukan deret Fourier untuk fungsi

$$f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)$$

pada $(-\pi, \pi)$. Dengan deret tersebut, buktikan bahwa

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \dots$$

Contoh 2 : Solusi

Misalkan

$$\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$$

Karena $f(x)$ fungsi ganjil dan $\cos(nx)$ fungsi genal, maka $\mathrm{f(x)}.\cos(nx)$ merupakan fungsi ganjil, sehingga

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f(x)}.\cos(nx)\,dx = 0$$

Selanjutnya,

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{2}\right).\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n}$$

Contoh 2 : Solusi

Akibatnya,

$$\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = +\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx)$$

Untuk $x = \frac{\pi}{2}$ maka

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \dots$$

Aspek teori untuk Deret Fourier

Aspek teori

Teorema 1 : Jika x_0 titik diskonitu untuk $f(x)$ maka nilai deret Fourier di x_0 konvergen ke

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Teorema 2 : Penulisan deret Fourier suatu fungsi adalah tunggal.

Teorema 3 : Jika $f(x)$ kontinu pada $(-\pi,\pi)$ maka deret Fourier konvergen ke $f(x)$.

Aspek teori

Teorema 4 : Jika $f(x)$ kontinu pada $(-\pi, \pi)$ maka

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0,$$

dan

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{p} (A_n^2 + B_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx$$

(Advanced Calculus, Kaplan)

Aspek teori

Teorema 5 : Karakteristik deret Fourier untuk fungsi periodik

Fungsi	**Koefisien Fourier**
$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F_n + \beta G_n$
$f(-x)$	F_{-n}
$f(x)g(x)$	$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} F_m G_{n-m}$