

# BAB IV. PENGGUNAAN TURUNAN

## Materi:

- Hampiran linier menggunakan turunan
- Gerak benda sepanjang garis lurus
- Laju yang berkaitan
- Deret Taylor
- Maksimum dan minimum global dan lokal
- Kemonotonan dan kecekungan
- Menggambar grafik cangguh
- Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan
- Menghitung limit bentuk tak tentu

### ➤ Hampiran linier menggunakan turunan

Ingat kembali definisi turunan :  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Definisi tersebut menyatakan bahwa untuk nilai  $h$  yang cukup kecil, maka

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{atau} \quad f(a+h) - f(a) \approx hf'(a)$$

Akibatnya 
$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Contoh 1. Dengan menggunakan turunan, hampirilah nilai  $\sqrt{101}$

Jawab: Misalkan  $f(x) = \sqrt{x}$  dan  $a = 100$ , maka  $f(a) = \sqrt{100} = 10$ .

Jika  $h = 1$  maka  $f(a+h) = \sqrt{101}$ , dan  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

Menggunakan hampiran turunan maka diperoleh

$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ , yaitu

$$\sqrt{101} \approx \sqrt{100} + 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{100}} = 10 + \frac{1}{20} = 10,05.$$

Contoh 2: Hampirlah nilai  $\sin 28^\circ$

Jawab :  $28^\circ = (30 - 2)^\circ$ . Berarti  $f(x) = \sin x$ ,

$$a = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, h = -2^\circ = \frac{-2}{180} \cdot \pi = -\frac{\pi}{90}.$$

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$$

$$\sin 28^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90} \cos \frac{\pi}{6} = 0,5 - 0,035 \cdot 0,866 = 0,47.$$

### ➤ Gerak Benda Sepanjang Garis Lurus

Bila posisi suatu benda yang bergerak sepanjang garis lurus setiap saat dinyatakan oleh

$$s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$$

Jelaskan bagaimana gerak benda tersebut .

$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$  menyatakan kecepatan gerak benda setiap saat,

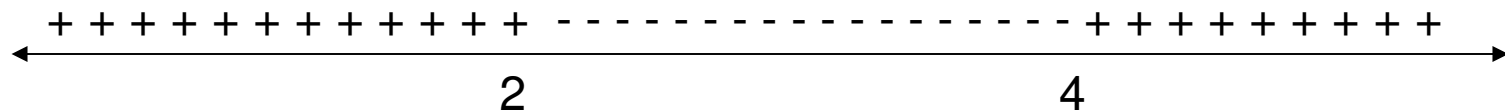
sedangkan

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 18$  menyatakan percepatan, yaitu perubahan

kecepatan setiap saat.

Benda bergerak ke kanan bila  $v(t) > 0$  dan bergerak ke kiri bila  $v(t) < 0$ .

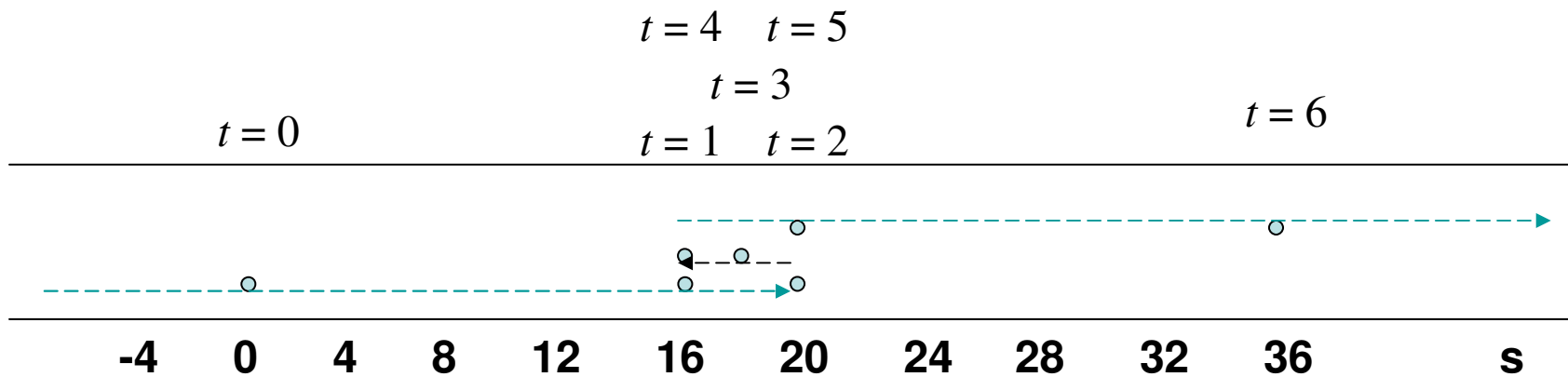
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t^2 - 6t + 8) = 3(t - 2)(t - 4)$$



Jadi, sebelum  $t = 2$  dan sesudah  $t = 4$  benda bergerak ke kanan, sedangkan di antara  $t = 2$  dan  $t = 4$  benda bergerak ke kiri. Pada saat  $t = 2$  dan  $t = 4$  benda berhenti (tidak bergerak)

Kecepatan benda berkurang bila  $a(t) < 0$ , yaitu bila  $t < 3$ .  
Kecepatan benda bertambah setelah  $t = 3$ .

$t$	$s(t)$	$v(t)$	$a(t)$
-1	-34	45	-24
0	0	24	-18
1	16	9	-12
2	20	0	-6
3	18	-3	0
4	16	0	6
5	20	9	12
6	36	24	18
7	70	45	24



### ➤ Laju yang berkaitan

Contoh 1. Udara dipompakan ke dalam balon bundar sehingga volumenya bertambah dengan laju  $100 \text{ cm}^3/\text{detik}$ . Seberapa cepat jari-jari balon bertambah ketika garis tengah balon  $50 \text{ cm}$ ?

Jawab: Misalkan  $V(t)$  = volume balon pada saat  $t$

dan  $r(t)$  = jari-jari balon pada saat  $t$ .

Diketahui :  $\frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3 / \text{detik}$ .

Ditanyakan :  $\frac{dr}{dt}$ , ketika  $r = 25 \text{ cm}$

Hubungkan  $V(t)$  dan  $r(t)$ :  $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3$ .

Gunakan aturan rantai:  $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt}$ , dengan  $\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3} \cdot 3\pi r^2 = 4\pi r^2$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$r = 25 \Rightarrow 100 = 4\pi \cdot 25^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{100}{4\pi \cdot 25^2} = \frac{1}{25\pi}.$$

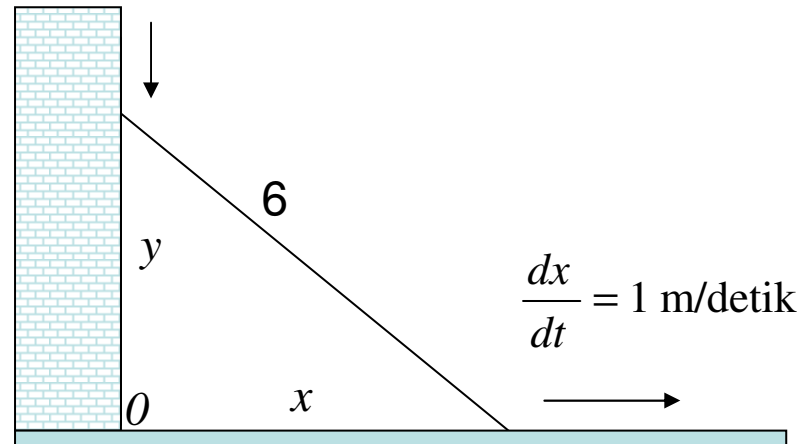
Jadi jari - jari balon bertambah dengan laju  $\frac{1}{25\pi}$  m/detik ketika garis tengah balon 50 m.

Contoh 2. Sebuah tangga yang panjangnya 6 m bersandar pada dinding tegak. Jika ujung bawah tangga bergeser menjauhi dinding dengan laju 1 m/detik, seberapa cepat ujung atas tangga bergeser ke bawah pada saat ujung bawah tangga berjarak 3 m dari dinding?

Misalkan  $x(t)$  = jarak antara dinding dan ujung bawah tangga  
 dan  $y(t)$  = jarak antara lantai dan ujung atas tangga

Diketahui:  $\frac{dx}{dt} = 1$

Ditanyakan:  $\frac{dy}{dt}$ , untuk  $x = 3$



Hubungkan  $x(t)$  dan  $y(t)$ :  $x^2 + y^2 = 36$ .

Turunkan terhadap  $t$ :  $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$ ,

$$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{36 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{substitusi kan } 2 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3\sqrt{3} \frac{dy}{dt} = 0, \text{ sehingga } \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Jadi ujung atas tangga bergeser ke bawah dengan laju  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  m/detik

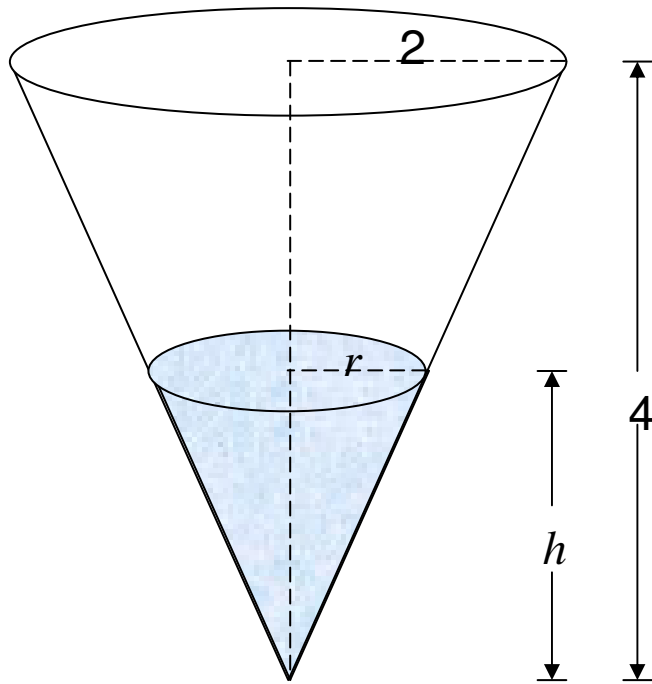
ketika jarak antara ujung bawah tangga dengan dinding 3 m.



## **Strategi menyelesaikan masalah laju yang berkaitan :**

- ☐ Baca masalah dengan cermat
- ☐ Bila memungkinkan gambarkan situasi yang dihadapi dengan diagram
- ☐ Kenali besaran-besaran yang berubah terhadap waktu, berilah lambang (notasi)
- ☐ Nyatakan informasi yang telah diketahui dan apa yang ditanyakan
- ☐ Tentukan hubungan antara besaran yang diketahui dan besaran yang akan dihitung
- ☐ Diferensialkan hubungan yang diperoleh terhadap waktu
- ☐ Substitusikan informasi yang diketahui dan tentukan laju yang tidak diketahui.

Contoh 3. Air dipompakan dengan laju  $2 \text{ m}^3$  ke dalam suatu tangki yang berbentuk kerucut terbalik dengan alas berbentuk lingkaran. Jika jari-jari alas kerucut 2 m dan tinggi kerucut 4 m, tentukan laju bertambahnya tinggi permukaan air, pada saat kedalaman air 3 m.



Misalkan pada saat  $t$

$V(t)$  = volume air di tangki

$r(t)$  = jari-jari permukaan air

$h(t)$  = tinggi permukaan air

maka

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Diketahui :  $\frac{dV}{dt} = 2$

Ditanyakan:  $\frac{dh}{dt}$ , bila  $h = 3$

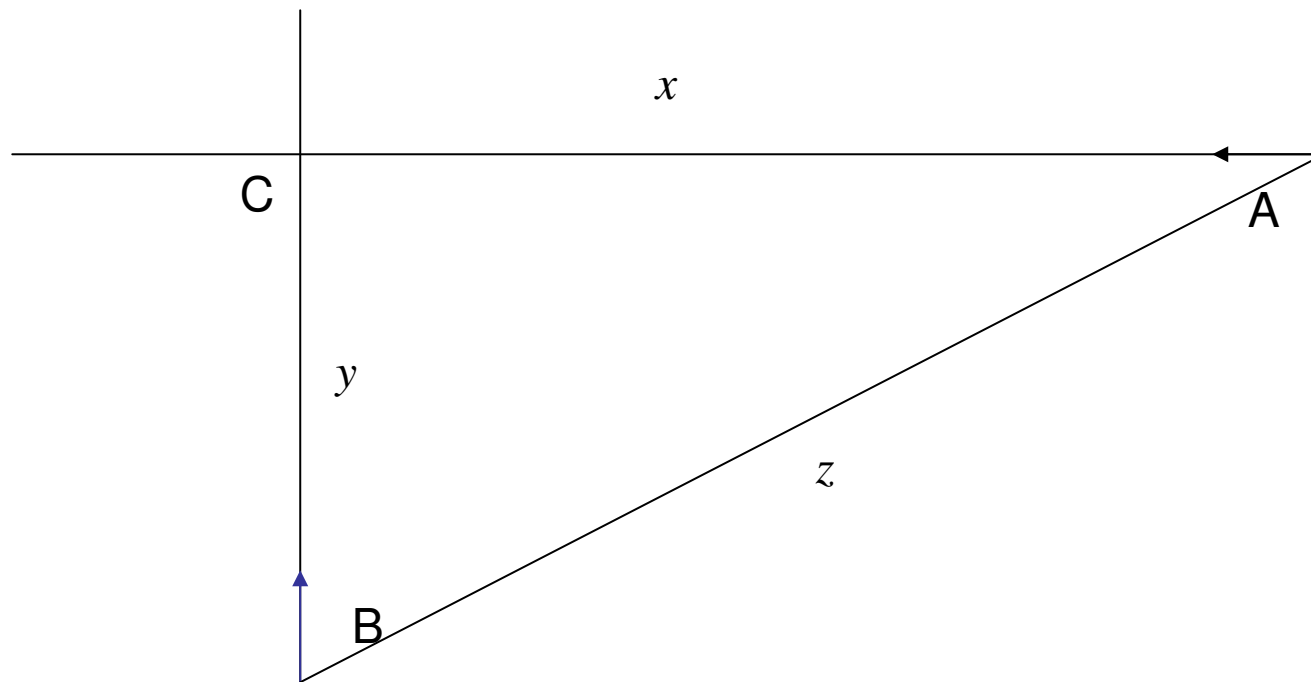
Dengan memanfaatkan kesebangunan segitiga diperoleh

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \quad \text{sehingga} \quad r = \frac{h}{2} \quad \text{dan} \quad V = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{h}{2} \right)^2 h = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$\text{Akibatnya} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{4} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$h = 3 \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{4} 3^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi} = 0,28.$$

Contoh 4. Mobil A meluncur ke barat dengan laju 50 km/jam, dan mobil B meluncur ke utara dengan laju 60 km/jam. Keduanya bergerak lurus menuju ke persimpangan kedua jalan yang mereka lalui. Dengan laju berapakah kedua mobil tersebut saling mendekat ketika mobil A berada pada posisi 0,3 km sebelum persimpangan dan mobil B berada pada posisi 0,4 km sebelum persimpangan?



## ➤ Hampiran fungsi menggunakan POLINOM TAYLOR

Jika dalam hampiran linier digunakan definisi limit :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

$$\begin{aligned} \text{maka diperoleh } f(x) &\approx f(a) + f'(a)(x - a) \\ &= f'(a)x + f(a) - f'(a)a \\ &= mx + c = P_1(x). \end{aligned}$$

Dengan demikian nilai  $f(x)$  di sekitar  $a$  dapat dihamperi oleh garis singgung  $f(x)$  di  $a$ . Hampiran ini cukup baik untuk nilai  $x$  yang dekat dengan  $a$ . Namun tidak demikian untuk nilai  $x$  yang jauh dari  $a$ . Perhatikan bahwa

$$P_1(a) = f(a) \text{ dan } P_1'(a) = f'(a)$$

Perbaiki dengan hampiran kuadrat :

$$\text{Misalkan } P_2(x) = A + Bx + Cx^2$$

Akan ditentukan  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  sehingga  $P_2(x)$  merupakan hampiran yang baik untuk  $f(x)$ , dengan syarat

$$P_2(a) = f(a), P_2'(a) = f'(a) \text{ dan } P_2''(a) = f''(a)$$

$$P_2(x) = A + Bx + Cx^2 \Rightarrow P_2(a) = A + Ba + Ca^2 = f(a)$$

$$P_2'(x) = B + 2Cx \Rightarrow P_2'(a) = B + 2Ca = f'(a)$$

$$P_2''(x) = P_2''(a) = 2C = f''(a)$$

$$B = f'(a) - 2Ca = f'(a) - f''(a)a$$

$$A = f(a) - Ba - Ca^2 = f(a) - (f'(a) - f''(a)a)a - \frac{f''(a)}{2}a^2$$

$$= f(a) - f'(a)a + \frac{f''(a)}{2}a^2$$

$$\text{Jadi } P_2(x) = f(a) - f'(a)a + \frac{f''(a)}{2}a^2 + (f'(a) - f''(a)a)x + \frac{f''(a)}{2}x^2$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x^2 - 2ax + a^2)$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Bila hampiran kuadrat masih kurang baik, dapat diperbaiki dengan hampiran kubik, yaitu

$$P_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

dengan syarat :

$$P_3(a) = f(a), P_3'(a) = f'(a), P_3''(a) = f''(a) \text{ dan } P_3'''(a) = f'''(a)$$

$$P_3(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \Rightarrow P_3(a) = A + Ba + Ca^2 + Da^3 = f(a)$$

$$P_3'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 \Rightarrow P_3'(a) = B + 2Ca + 3Da^2 = f'(a)$$

$$P_3''(x) = 2C + 3.2.Dx \Rightarrow P_3''(a) = 2C + 3.2.Da = f''(a)$$

$$P_2'''(x) = 3.2D = P_2'''(a) = f'''(a) \Rightarrow D = \frac{P_2'''(a)}{3.2}$$

$$C = \frac{f''(a) - 3.2.Da}{2} = \frac{f''(a) - P_2'''(a)a}{2},$$

$$\begin{aligned} B &= f'(a) - 2Ca - 3Da^2 = f'(a) - (f''(a) - P_2'''(a)a)a - \left(\frac{P_2'''(a)}{2}\right)a^2 \\ &= f'(a) - f''(a)a + \left(\frac{P_2'''(a)}{2}\right)a^2 \end{aligned}$$

$$A = f(a) - Ba - Ca^2 - Da^3 = \dots\dots\dots \text{dst}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3.2}(x-a)^3 \\ &= \frac{f(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \end{aligned}$$

Secara umum, bila perbaikan hampiran dilanjutkan, akan diperoleh

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \\ + \frac{f^{iv}(a)}{4!}(x-a)^4 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

Bentuk  $T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

disebut uraian (ekspansi) Taylor dari  $f(x)$  di sekitar  $x = a$ . Bila  $a = 0$ , diperoleh uraian Mac Laurin dari  $f(x)$ , yaitu

$$L(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Contoh: Bila  $f(x) = \sin x$ , tentukan uraian Mac Laurin dari  $f(x)$ .

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
5	$\cos x$	1

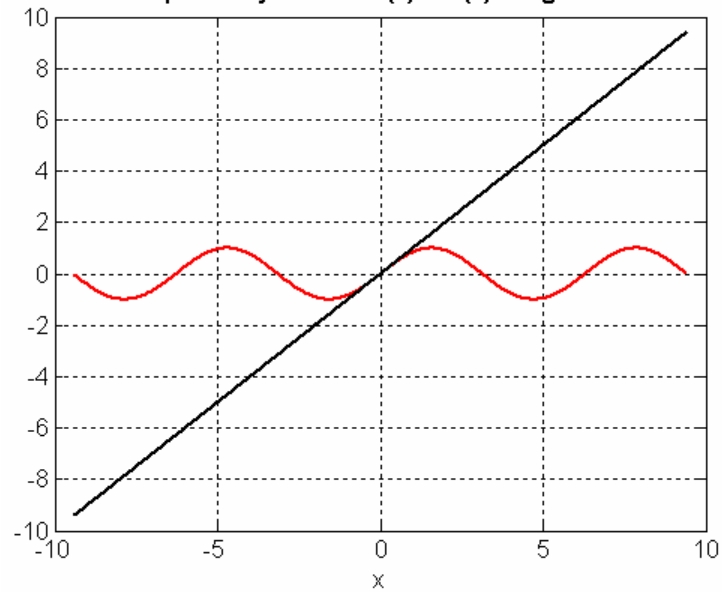
$$\sin x \approx 0 + 1.x + 0.\frac{x^2}{2!} - 1.\frac{x^3}{3!} + 0.\frac{x^4}{4!} + 1.\frac{x^5}{5!} + 0.\frac{x^6}{6!} - 1.\frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

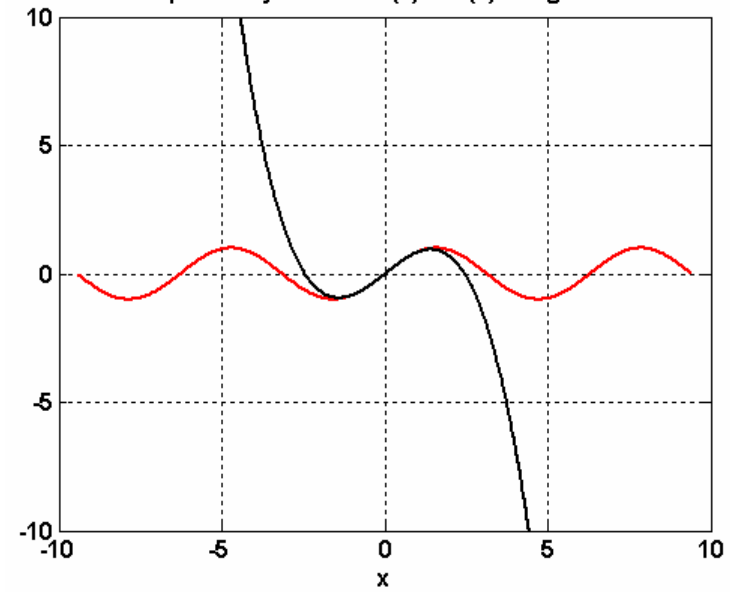
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$



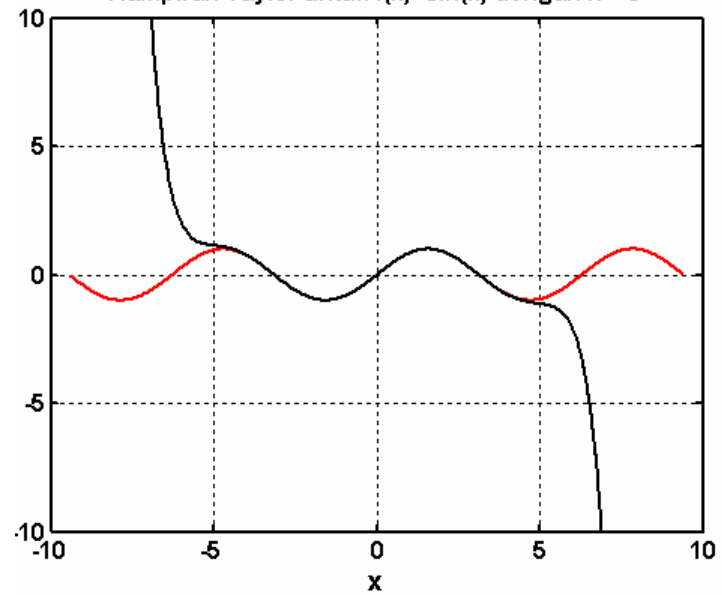
Hampiran Taylor untuk  $f(x)=\sin(x)$  dengan  $n = 0$



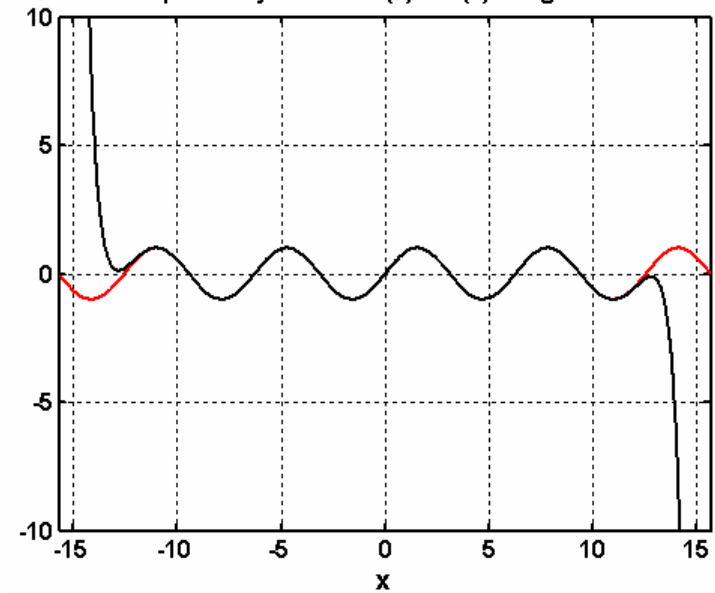
Hampiran Taylor untuk  $f(x)=\sin(x)$  dengan  $n = 1$



Hampiran Taylor untuk  $f(x)=\sin(x)$  dengan  $n = 5$



Hampiran Taylor untuk  $f(x)=\sin(x)$  dengan  $n = 15$



$$\begin{aligned}\cos x &\approx 1 + 0 \cdot x - 1 \cdot \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot \frac{x^3}{3!} + 1 \cdot \frac{x^4}{4!} + 0 \cdot \frac{x^5}{5!} - 1 \cdot \frac{x^6}{6!} + 0 \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + o(x^{12}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} x^{2k}\end{aligned}$$

## ➤ Nilai Maksimum dan Minimum Global (Lokal)

Definisi: Fungsi  $f$  dikatakan mencapai maksimum (minimum) global di titik  $(c, f(c))$  jika

$$f(c) \geq f(x) \quad (f(c) \leq f(x)) \quad , \forall x \text{ di daerah asal } f.$$

Bila  $f$  mencapai maksimum atau minimum global di titik  $(c, f(c))$  maka  $f(c)$  disebut **nilai ekstrim** dari  $f$ , sedangkan titik  $(c, f(c))$  disebut **titik ekstrim** dari  $f$ .

Definisi: Fungsi  $f$  dikatakan mencapai maksimum (minimum) lokal di titik  $(c, f(c))$  jika

$$f(c) \geq f(x) \quad (f(c) \leq f(x)),$$

$\forall x$  di suatu selang buka yang memuat  $c$ .

Contoh-contoh:

1. Fungsi  $f(x) = \sin x$  mencapai maksimum global dan lokal di titik-titik

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 1\right), n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

dan mencapai minimum global dan lokal di titik-titik

$$\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi, -1\right), n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

2. Fungsi  $f(x) = x^2$

Mencapai minimum global di titik (0,0) namun tidak memiliki titik maksimum global. Bila  $x$  pada selang  $[1,6]$  maka  $f(x)$  memiliki titik minimum lokal di (1,1) dan maksimum lokal di titik (6,36).

3. Fungsi  $f(x) = x^3$

Tidak memiliki titik minimum maupun maksimum global. Bila  $x$  pada selang  $[-1,5]$  maka  $f(x)$  memiliki titik minimum lokal di (-1,-1) dan maksimum lokal di titik (5,125).

➤ TEOREMA KEUJUDAN TITIK EKSTRIM

Jika  $f(x)$  kontinu pada selang tertutup  $[a,b]$  maka  $f(x)$  memiliki titik ekstrim maksimum dan titik ekstrim minimum.

➤ TEOREMA TITIK KRITIS

Misalkan  $f(x)$  terdefinisi pada selang tertutup  $[a,b]$  dan  $c$  terletak di selang  $[a,b]$ . Jika  $f(c)$  adalah nilai ekstrim maka  $(c,f(c))$  haruslah suatu titik kritis, yaitu  $(c,f(c))$  mungkin berupa salah satu dari yang berikut ini

- $(c,f(c))$  adalah titik ujung selang
- $(c,f(c))$  adalah titik stasioner dari  $f$ , yaitu  $f'(c) = 0$
- $(c,f(c))$  adalah titik singular dari  $f$ , yaitu  $f'(c)$  tidak ada

➤ PROSEDUR MENENTUKAN TITIK EKSTRIM

1. Kumpulkan semua titik kritis dari  $f(x)$  pada selang  $[a,b]$
2. Hitung nilai  $f(x)$  pada setiap titik kritis tersebut. Nilai  $f(x)$  yang terbesar menjadi titik ekstrim maksimum, sedangkan yang terkecil menjadi titik ekstrim minimum

Contoh:

1. Tentukan semua titik ekstrim dari fungsi  $f(x) = -2x^3 + 3x^2$  pada selang tertutup  $[-1/2, 3]$ .

Jawab:

Titik-titik kritis:

i. Titik-titik ujung:  $(-1/2, 1)$  dan  $(3, -27)$ .

ii. Titik-titik stasioner:  $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$   
 $f'(c) = -6c^2 + 6c = 0$   
 $\Leftrightarrow -6c(c - 1) = 0$   
 $\Leftrightarrow c = 0 \vee c = 1$

Jadi titik stasioner:  $(0, 0)$  dan  $(1, 1)$ .

iii. Titik-titik singular: tidak ada sebab  $f'(c)$  selalu ada.

Jadi titik-titik kritis:  $\{(-1/2, 1), (3, -27), (0, 0), (1, 1)\}$ .

Titik ekstrim maksimum:  $(-1/2, 1)$  dan  $(1, 1)$ .

Titik ekstrim minimum:  $(3, -27)$ .

2. Tentukan semua titik ekstrim dari fungsi  $f(x) = x^{2/3}$  pada selang  $[-1,2]$ .

Jawab:

Titik-titik kritis:

i. Titik-titik ujung:  $(-1,1)$  dan  $(2,\sqrt[3]{4})$

ii. Titik-titik stasioner:  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$f'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = 0$$

Tidak ada  $c$  yang memenuhi.

Jadi titik stasioner tidak ada.

iii. Titik-titik singular:  $f'(c) = \frac{2}{3\sqrt[3]{c}}$  tidak ada bila  $c = 0$ .

Jadi titik singular:  $(0,0)$ .

Jadi titik-titik kritis:  $\{(-1,1), (2,\sqrt[3]{4}), (0,0)\}$ .

Titik ekstrim maksimum:  $(2,\sqrt[3]{4})$

Titik ekstrim minimum:  $(0,0)$ .

## **Prosedur menyelesaikan masalah maksimum-minimum:**

1. Buatlah gambar / skema permasalahan
2. Buatlah rumus untuk besaran yang akan dimaksimumkan atau diminimumkan, misalkan  $F$
3. Manfaatkan kondisi-kondisi yang diketahui untuk membuat  $F$  menjadi fungsi yang hanya bergantung pada satu variabel saja, misalkan  $x$
4. Tentukan selang untuk nilai-nilai  $x$  yang mungkin
5. Tentukan semua titik-titik kritis (calon titik ekstrim)
6. Di antara titik-titik kritis, tentukan titik ekstrim.

### Contoh:

1. Sebuah kotak yang terbuka bagian atasnya akan dibuat dari selembar seng berbentuk segiempat dengan lebar 20 cm dan panjang 32 cm. Pada keempat sudut seng dipotong bujursangkar-bujursangkar kecil berukuran sama. Kemudian sisa seng dilipat ke atas sehingga terbentuk kotak. Tentukan ukuran kotak tersebut agar kapasitasnya maksimal.
2. Tentukan ukuran sebuah tabung lingkaran tegak dengan volume sebesar mungkin, yang dapat dimasukkan ke dalam sebuah kerucut lingkaran tegak setinggi 10 cm dengan jari-jari alas 4 cm.
3. Tentukan titik pada hiperbola  $y^2 - x^2 = 4$  yang jaraknya paling dekat dengan titik  $(2,0)$ .

## TEOREMA:

Misalkan fungsi  $f$  kontinu pada selang terbuka  $(a,b)$  yang memuat titik kritis  $(c,f(c))$

1. Jika  $f'(x)$  berubah dari negatif ke positif di titik  $c$  maka  $f(c)$  adalah nilai minimum lokal
2. Jika  $f'(x)$  berubah dari positif ke negatif di titik  $c$  maka  $f(c)$  adalah nilai maksimum lokal
3. Jika  $f'(x)$  tidak berubah tanda di titik  $c$  maka  $f(c)$  bukan nilai ekstrim lokal

## TEOREMA: Uji ekstrim lokal untuk titik stasioner

Misalkan fungsi  $f'(x)$  dan  $f''(x)$  ada  $\forall x \in (a,b)$  dan  $c \in (a,b)$  serta  $f'(c) = 0$

1. Jika  $f''(c) < 0$  maka  $f(c)$  adalah nilai ekstrim maksimum lokal
2. Jika  $f''(c) > 0$  maka  $f(c)$  adalah nilai ekstrim minimum lokal



## ➤ KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN

Definisi kemonotonan : Misalkan  $f$  terdefinisi pada suatu selang, maka

1.  $f$  dikatakan monoton naik pada selang tersebut jika  $\forall x_1, x_2$  berlaku  $f(x_1) < f(x_2)$  jika  $x_1 < x_2$
2.  $f$  dikatakan monoton turun pada selang tersebut jika  $\forall x_1, x_2$  berlaku  $f(x_1) > f(x_2)$  jika  $x_1 < x_2$

Definisi kecekungan : Misalkan  $f'(x)$  ada  $\forall x \in (a, b)$ , maka

1. grafik fungsi  $f$  cekung ke atas pada selang  $(a, b)$  jika  $f'(x)$  monoton naik pada selang  $(a, b)$
2. grafik fungsi  $f$  cekung ke bawah pada selang  $(a, b)$  jika  $f'(x)$  monoton turun pada selang  $(a, b)$

Titik tempat berubahnya kecekungan dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau sebaliknya disebut TITIK BALIK atau TITIK BELOK

Teorema Kemonotonan : Misalkan  $f$  kontinu pada selang  $(a,b)$  dan  $f'(x)$  ada  $\forall x \in (a,b)$

1. Jika  $f'(x) > 0$  maka grafik fungsi  $f$  monoton naik pada selang  $(a,b)$
2. Jika  $f'(x) < 0$  maka grafik fungsi  $f$  monoton turun pada selang  $(a,b)$

Teorema Kecekungan : Misalkan  $f$  kontinu pada selang  $(a,b)$  dan  $f''(x)$  ada  $\forall x \in (a,b)$

1. Jika  $f''(x) > 0$  maka grafik fungsi  $f$  cekung ke atas pada selang  $(a,b)$
2. Jika  $f''(x) < 0$  maka grafik fungsi  $f$  cekung ke bawah pada selang  $(a,b)$

Contoh:

$$1. f(x) = x^2 - 4 \longrightarrow f'(x) = 2x \begin{cases} > 0, & \text{jika } x > 0 \\ < 0, & \text{jika } x < 0 \end{cases} \quad \text{dan} \quad f''(x) = 2 > 0$$

Jadi  $f(x)$  monoton turun pada selang  $(-\infty, 0)$  monoton naik pada selang  $(0, \infty)$  dan cekung ke atas di mana-mana.

$$2. f(x) = 3x^3 \longrightarrow f'(x) = 9x^2 > 0 \text{ bila } x \neq 0, \text{ dan } f''(x) = 18x \begin{cases} > 0, & \text{jika } x > 0 \\ < 0, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Jadi  $f(x)$  monoton naik di mana-mana, cekung ke bawah pada selang  $(-\infty, 0)$  cekung ke atas pada selang  $(0, \infty)$ , dan  $(0,0)$  adalah titik belok.

## ➤ SKETSA GRAFIK CANGGIH

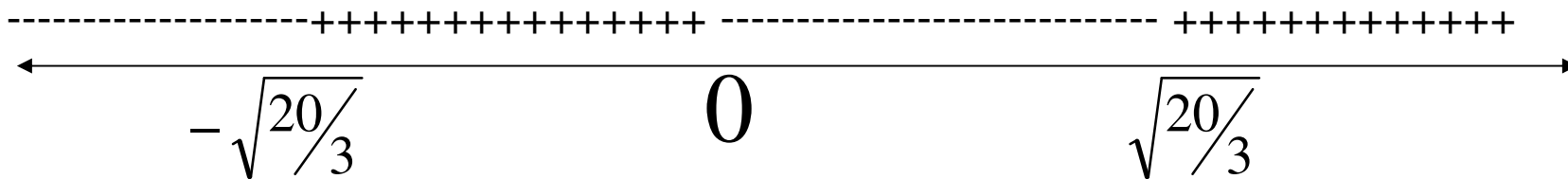
Langkah-langkah:

1. Tentukan tanda dari  $f(x)$  untuk melihat di mana grafik  $f(x)$  berada di atas sumbu  $x$  dan di mana grafik  $f(x)$  berada di bawah sumbu  $x$ .
2. Tentukan tanda dari  $f'(x)$  untuk melihat kemonotonan grafik  $f(x)$
3. Tentukan tanda dari  $f''(x)$  untuk melihat kecekungan grafik  $f(x)$
4. Periksa kesimetrian
5. Periksa semua asimtot yang ada
6. Daftarliah titik-titik penting sebagai titik-titik bantuan
7. Sketsa grafik

Contoh: Sketsalah grafik fungsi  $y = f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$

Langkah 1: Periksa tanda dari  $f(x)$

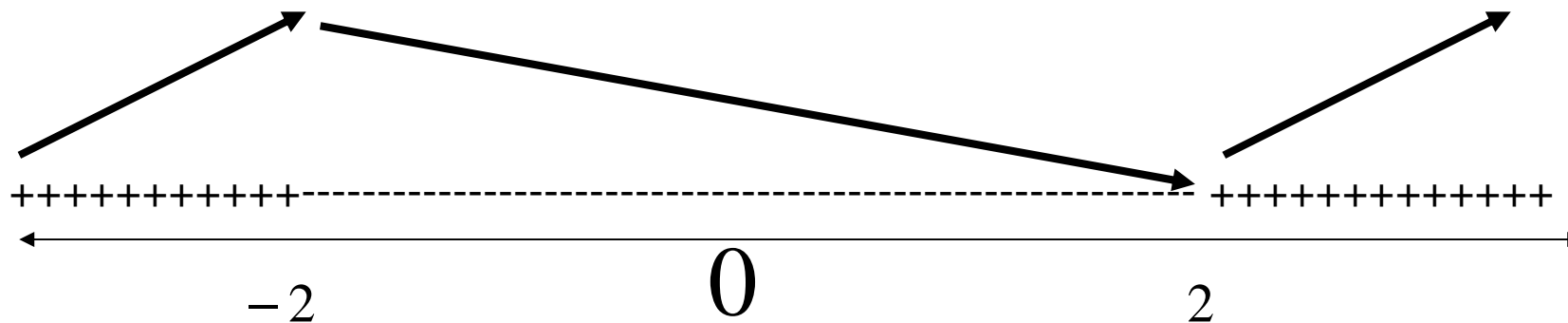
$$f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32} = \frac{x^3(3x^2 - 20)}{32} = \frac{x^3(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{20})(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{20})}{32}$$



Jadi  $f(x) < 0$  bila  $x < -\sqrt{20/3}$  atau  $0 < x < \sqrt{20/3}$  dan  $f(x) > 0$  bila  $-\sqrt{20/3} < x < 0$  atau  $x > \sqrt{20/3}$

Langkah 2: Periksa tanda dari  $f'(x)$

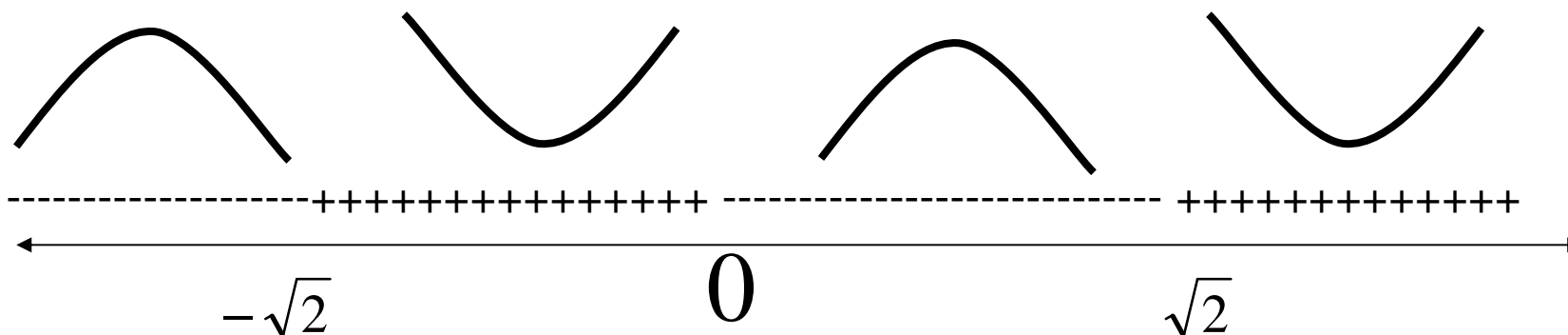
$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x^2 - 4)}{32} = \frac{15x^2(x+2)(x-2)}{32}$$



Jadi  $f(x)$  monoton naik bila  $x < -2$  atau  $x > 2$ , dan monoton turun bila  $-2 < x < 2$ .

Langkah 3: Periksa tanda dari  $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{60x(x^2 - 2)}{32} = \frac{60x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{32}$$



Jadi  $f(x)$  cekung ke bawah bila  $x < -\sqrt{2}$  atau  $0 < x < \sqrt{2}$

dan  $f(x)$  cekung ke atas bila  $-\sqrt{2} < x < 0$  atau  $x > \sqrt{2}$

Langkah 4: Periksa kesimetrian

$$f(-x) = \frac{3(-x)^5 - 20(-x)^3}{32} = \frac{-3x^5 + 20x^3}{32} = -\frac{3x^5 - 20x^3}{32} = -f(x)$$

Karena  $f(-x) = -f(x)$  maka  $f(x)$  adalah fungsi ganjil sehingga grafiknya simetris terhadap titik asal  $(0,0)$ .

Langkah 5: Periksa asimtot: tidak ada asimtot.

Langkah 6: daftarkan titik-titik bantuan

$x$	$f(x)$
$-\sqrt{20/3}$	0
$\sqrt{20/3}$	0
-2	2
$-\sqrt{2}$	$\frac{7}{8}\sqrt{2}$
0	0
$\sqrt{2}$	$-\frac{7}{8}\sqrt{2}$
2	-2

Langkah 7: sketsa grafik berdasarkan informasi yang diperoleh dari langkah-langkah sebelumnya.

Soal: Sketsalah grafik fungsi

1.  $y = f(x) = \frac{(x+2)^2}{x}$

2.  $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$  dengan  $x \in [-7, 8]$ .

➤ Menghitung limit bentuk tak tentu

1. Bentuk tak tentu  $\frac{0}{0}$

Misalkan  $f'(a)$  dan  $g'(a)$  ada dan  $g'(a) \neq 0$ . Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

maka

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## 2. Bentuk tak tentu $\frac{\infty}{\infty}$

Jika  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  maka  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Menghitung limit bentuk tak tentu dengan cara tersebut dikatakan menggunakan DALIL L'HOSPITAL

Contoh:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(4x) \sin(3x)}{x \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{4 \cos(4x) \sin(3x) + 3 \sin(4x) \cos(3x)}{\sin(2x) + 2x \cos(2x)} \\ &= \frac{4 \cdot 1 \cdot (-1) + 0}{0 + \pi(-1)} = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 4x^3 + 2x - 1}{2x^4 - 4x^2 + 3x - 7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 12x^2 + 2}{8x^3 - 8x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x^2 + 24x}{24x^2 - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{72x + 24}{48x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{72}{48} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



Soal-soal: Bila ada, tentukan nilai limit berikut ini.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$$

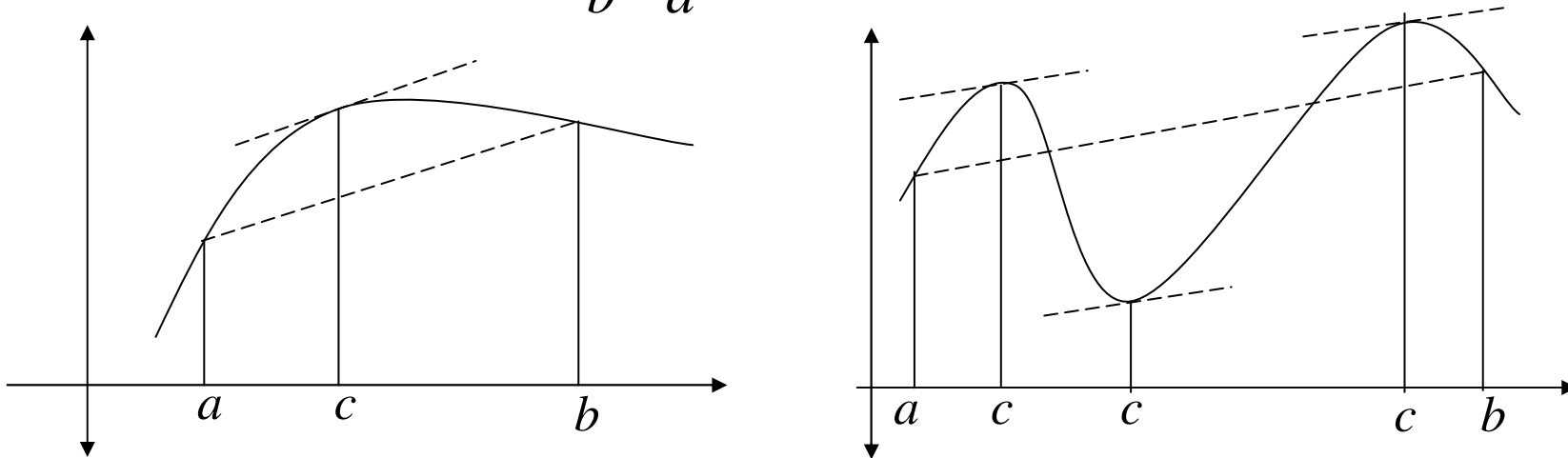
$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

➤ TEOREMA NILAI RATA\_RATA (untuk turunan)

Jika  $f$  kontinu pada selang tertutup  $[a,b]$  dan terdiferensialkan di selang terbuka  $(a,b)$  maka terdapat  $c$ , dengan  $a < c < b$  sehingga

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Contoh : Jika  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ ,  $-3 \leq x \leq 1$ ,

apakah teorema nilai rata – rata berlaku pada  $f(x)$ ?

➤ Sifat turunan yang sama:

Jika  $f'(x) = g'(x), \forall x \in (a,b)$  maka  $\exists k$  sehingga  $f(x) = g(x) + k, \forall x \in (a,b)$ .