Struktur Diskrit

Himpunan

Nurdin Bahtiar, MT

Pengingat

Bahan Kuliah

2.1. Himpunan

2.2. Himpunan yang Sama

2.3. Diagram Venn

2.4. Sub Himpunan

2.5. Kardinalitas

2.6. Power Set

2.7. Cartesian Product

2.8. Himpunan Kebenaran

2.1. Himpunan

- **Himpunan** adalah suatu kumpulan tak terurut dari objek-objek, yang disebut elemen atau anggota dari himpunan.
- Sebuah himpunan dinyatakan dengan:

  $$a \in A$$

  yang berarti: a adalah elemen dari himpunan A.
- Nama himpunan biasa dinyatakan dengan huruf besar, sedangkan elemen (anggota) dari himpunan dinyatakan dengan huruf kecil.
- Himpunan dinyatakan dengan notasi {a, b, c, d} yang menggambarkan himpunan dengan elemen a, b, c, dan d.

2.1. Himpunan

Contoh 1

1. Himpunan V dari semua huruf vokal dalam alfabet dapat dinyatakan dengan: V = {a, e, i, o, u}.
2. Himpunan O dari bilangan bulat positif ganjil yang kurang dari 10 dapat dinyatakan dengan: O = {1, 3, 5, 7, 9}.
3. Meskipun himpunan biasanya digunakan untuk mengelompokkan elemen-elemen dengan sifat yang sama, namun dapat memungkinkan juga suatu himpunan memiliki elemen-elemen yang tidak berhubungan.

   Misalnya: {a, 2, Fred, New Jersey} adalah himpunan yang berisi empat elemen a, 2, Fred, dan New Jersey.
4. Himpunan N dari bilangan bulat positif kurang dari 100 dapat dinyatakan dengan:

   N = {1, 2, 3, . . . , 99}.

2.1. Himpunan

- Cara lain untuk mendeskripsikan satu himpunan adalah dg menggunakan notasi pembuat set, yaitu dg menyatakan properti yg harus dimiliki untuk menjadi anggota (elemen) suatu himpunan.
- Sebagai contoh, himpunan O dari semua bilangan bulat positif ganjil kurang dari 10 dapat ditulis sebagai:

  O = {x | x adalah bilangan bulat positif ganjil yang kurang dari 10},

  atau, menetapkan seluruhnya sbg himpunan bilangan bulat positif,

  $O = \{x \in Z^+ \mid x \text{ ganjil dan } x < 10\}$
- Cara notasi di atas sering digunakan untuk mendeskripsikan himpunan-himpunan pada saat tidak mungkin untuk memasukkan semua elemen dari himpunan.

  Misalnya, himpunan Q^+ dari semua bilangan rasional positif dapat ditulis sebagai:

  $Q^+ = \{x \in R \mid x = \frac{p}{q}, \text{ untuk beberapa bilangan bulat positif p dan q}\}$

2.1. Himpunan

- Himpunan-himpunan berikut ini, dilambangkan menggunakan huruf tebal, memiliki peran penting dalam matematika diskrit:

  N = {0, 1, 2, 3, . . .}, himpunan **bilangan natural**

  Z = {. . . , −2, −1, 0, 1, 2, . . .}, himpunan **bilangan bulat**

  Z$^+$ = {1, 2, 3, . . .}, himpunan **bilangan bulat positif**

  Q = {p/q | p ∈ **Z**, q ∈ **Z**, and q ≠ 0}, himpunan **bilangan rasional**

  R, himpunan **bilangan real**

  R$^+$, himpunan **bilangan real positif**

  C, himpunan **bilangan kompleks.**

2.2. Himpunan yang Sama

- Dua buah himpunan dikatakan ***equal*** (sama) jika dan hanya jika mereka memiliki elemen yang sama.
- Dengan kata lain, jika A dan B himpunan, maka A dan B dikatakan sama jika:

$$\forall\, x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

- Ditulis dengan: A = B.

2.2. Himpunan yang Sama

Contoh 2

- Himpunan {1, 3, 5} dan {3, 5, 1} adalah sama, karena mereka memiliki elemen yang sama. Perhatikan bahwa urutan dari elemen-elemen himpunan tersebut tidak menjadi masalah.

  Serta tidak masalah jika elemen dari suatu set terdaftar lebih dari sekali, jadi {1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5} adalah sama dengan himpunan {1, 3, 5} karena mereka memiliki elemen yang sama.

- Himpunan kosong (*Empty set* / *null set*) adalah himpunan yang tidak memiliki elemen. Dinyatakan dengan ∅ atau {}.

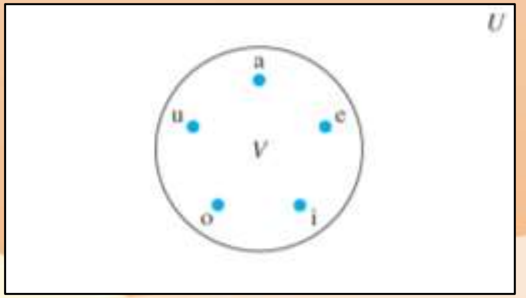
  Misal, himpunan semua bilangan integer positif yang lebih besar dari kuadratnya adalah himpunan kosong.

2.3. Diagram Venn

- Himpunan dapat digambarkan menggunakan Diagram Venn. Diberi nama oleh seorang matematikawan John Venn, th 1881.
- Dalam diagram Venn, terdapat himpunan semesta *U* yang meliputi semua objek dalam semesta pembicaraan. Digambarkan dengan persegi panjang.

Contoh 3

- Diagram Venn yang menggambarkan himpunan V yang merupakan sebuah himpunan huruf vokal dalam alfabet adalah sebagai berikut:



Gambar 2.1. Diagram Venn dari himpunan huruf vokal dalam alfabet

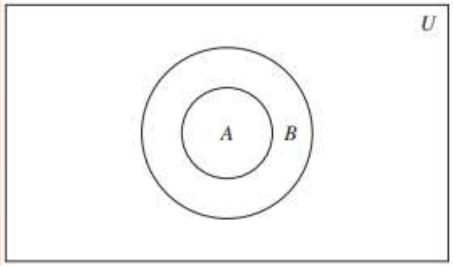
2.4. Sub Himpunan

- Dikatakan bahwa A ⊆ B jika dan hanya jika pernyataan:

$$\forall x \, (x \in A \rightarrow x \in B)$$

  bernilai benar.

- Untuk menunjukkan $A \subseteq B$, maka harus ditunjukkan bahwa jika x anggota A maka x juga anggota B.
- Untuk menunjukkan $A \nsubseteq B$, maka harus ditemukan $x \in A$ sedemikian hingga $x \notin B$.



Gambar 2.2. Diagram Venn yang menunjukkan $A \subseteq B$

- Tanda $\subset$ melambangkan *proper subset*.

2.4. Sub Himpunan

Contoh 4

- Himpunan bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 merupakan sub himpunan dari himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang dari 10.

  Himpunan bilangan ganjil positif yang kurang dari 10 = {1, 3, 5, 7, 9}

  Himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang dari 10 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

- Himpunan bilangan bulat yang kuadratnya kurang dari 100 bukan merupakan sub himpunan dari himpunan bilangan bulat non-negatif, karena -1 ada di himpunan pertama tetapi tidak ada di himpunan kedua, $(-1)^2 < 100$.

  Himpunan bilangan bulat yg kuadratnya kurang dari 100 = {-9, -8, ..., -1, 0, 1, ..., 7, 8, 9}

  Himpunan bilangan bulat non-negatif = {0, 1, 2, 3, ...}

2.4. Sub Himpunan

Teorema 1

- Untuk setiap himpunan S,

  i. $\varnothing \subseteq S$

  ii. $S \subseteq S$

Teorema 2

Menunjukkan Kesamaan Dua Himpunan

- Untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B sama, harus ditunjukkan bahwa: $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

- Misal:

  $A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ dan $B = \{x \mid x$ adalah subset dari $\{a, b\}\}$.

  Dikatakan bahwa kedua himpunan di atas sama, yaitu $A = B$.

  Juga dikatakan bahwa $\{a\} \in A$, tetapi $a \notin A$.

2.5. Kardinalitas

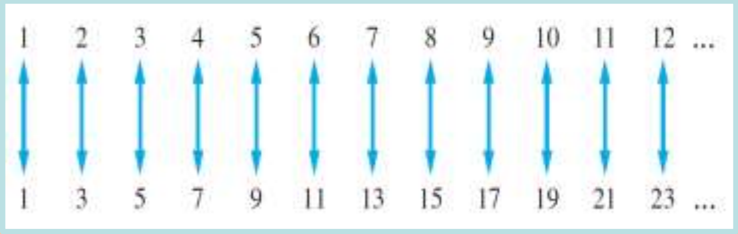
- Misal S adalah suatu himpunan. Jika ada tepat n elemen yang berbeda di himpunan S dimana n adalah bilangan bulat positif, dapat dikatakan bahwa S adalah <u>himpunan berhingga</u> (***finite set***) dan n adalah kardinalitas S.
- Kardinalitas S dilambangkan dengan $|S|$.

Contoh 5

1. Jika A adalah himpunan bilangan bulat positif ganjil kurang dari 10, maka $|A| = 5$.
2. Jika S adalah himpunan huruf alfabet, maka $|S| = 26$.
3. Himpunan kosong tidak memiliki elemen, maka $|\varnothing| = 0$.

2.5. Kardinalitas

- Suatu himpunan dinyatakan ***infinite*** jika himpunan tersebut tidak terhingga, contohnya adalah himpunan bilangan bulat positif.
- Himpunan A dan B dikatakan memiliki kardinalitas yang sama jika terdapat <u>korespondensi satu-ke-satu</u> dari A ke B. Ditulis dengan $|A| = |B|$.



Gambar 2.3. Korespondensi satu-ke-satu antara Z^+ dengan bilangan ganjil positif

- Suatu himpunan yang <u>berhingga</u> atau memiliki kardinalitas yang sama dengan himpunan bilangan bulat positif dinamakan ***countable*** (dapat dihitung). Kebalikan, dinamakan ***uncountable***.
- Jika ada himpunan S yang ***infinite*** yang ***countable***, kardinalitasnya dinotasikan dengan $\aleph_0$. Sehingga $|S| = \aleph_0$ (Baca: aleph null).

2.6. Power Set

- Diberikan suatu himpunan *S*, **power set** dari himpunan *S* adalah <u>himpunan semua subset dari himpunan *S*</u>.
- Power set dari himpunan *S* dilambangkan dengan *P*(*S*). Jika suatu himpunan memiliki *n* elemen, maka power set-nya memiliki 2^n elemen.

Contoh 6

1. Tentukan power set dari himpunan {0, 1, 2}!

   Jawab:

   Power set P({0, 1, 2}) = {∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}.

   Perhatikan bahwa himpunan kosong dan himpunan itu sendiri juga merupakan anggota dari himpunan subset ini.

2. Tentukan power set dari ∅ dan {∅}.

   Jawab:

   Himpunan kosong memiliki 1 subset yaitu dirinya sendiri, sehingga P(∅) = {∅}.

   Sedangkan himpunan {∅} memiliki 2 subset, sehingga P({∅}) = {∅, {∅}}.

2.7. Cartesian Product

- A dan B adalah suatu himpunan. Cartesian product dari A dan B dilambangkan dengan $A \times B$, yaitu merupakan himpunan semua pasangan yang terurut (a, b), dimana $a \in A$ dan $b \in B$.

  Sedemikian hingga: $A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$.

Contoh 7

1. Himpunan A mewakili semua mahasiswa di universitas, dan himpunan B mewakili semua prodi yang ditawarkan di universitas. Tentukan cartesian product dari A × B, serta bagaimana cara menggunakannya?

   Jawab:

   Cartesian product dari $A \times B$ terdiri dari semua pasangan terurut (a, b), dimana a : mahasiswa dan b : prodi yang ada di universitas.

   Salah satu cara untuk menggunakan himpunan $A \times B$ adalah untuk menunjukkan semua kemungkinan pendaftaran siswa dalam program di universitas tersebut.

2.7. Cartesian Product

2. Tentukan cartesian product dari $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{a, b, c\}$!

   Jawab:

   $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

   Catatan: Perlu diketahui bahwa $A \times B$ tidak sama dengan $B \times A$.

3. Tunjukkan bahwa cartesian product $A \times B$ tidak sama dengan cartesian product $B \times A$, dimana himpunan A dan B seperti yang ada pada contoh soal nomor 2 !

   Jawab:

   $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

2.7. Cartesian Product

Contoh 8

- Tentukan cartesian product dari $A \times B \times C$,

  dimana himpunan $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, dan $C = \{0, 1, 2\}$

  Pembahasan:

  $A \times B \times C = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2),$
  $(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2)\}.$

- Catatan:

  Perlu diketahui bahwa $(A \times B) \times C$ tidak sama dengan $A \times B \times C$.

- Digunakan notasi A^2 untuk melambangkan $A \times A$, yaitu cartesian produk himpunan A dengan dirinya sendiri. $A^3 = A \times A \times A$, $A^4 = A \times A \times A \times A$, dan lain sebagainya.

  Sehingga dapat ditulis seperti berikut:

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

2.7. Cartesian Product

Contoh 9

- Apa maksud dari pernyataan $\forall x \in R\ (x^2 \geq 0)$ dan $\exists x \in Z\ (x^2 = 1)$?

  Jawab:

  ✓ Pernyataan $\forall x \in R\ (x^2 \geq 0)$

  Menyatakan bahwa untuk setiap bilangan real x, $x^2 \geq 0$.

  Pernyataan ini dapat diartikan bahwa "Kuadrat dari setiap bilangan real adalah bilangan non negatif."

  Ini adalah pernyataan yang benar.

  ✓ Pernyataannya $\exists x \in Z\ (x^2 = 1)$

  Menyatakan bahwa terdapat bilangan bulat x sedemikian hingga $x^2 = 1$.

  Pernyataan ini dapat diartikan bahwa "Ada bilangan bulat yang jika dikuadratkan akan bernilai 1."

  Ini juga merupakan pernyataan yang benar karena $x = 1$ adalah bilangan bulat (seperti halnya −1).

2.8. Himpunan kebenaran

- Misal diberikan sebuah predikat P dan sebuah domain D, didefinisikan bahwa **himpunan kebenaran** (*truth set*) dari P terhadap himpunan dari elemen x dalam D untuk setiap $P(x)$ adalah benar.
- Himpunan kebenaran dari $P(x)$ dapat dinyatakan dengan:

$$\{ x \in D \mid P(x) \}$$

Contoh 10

- Apakah himpunan kebenaran dari predikat $P(x)$, $Q(x)$, dan $R(x)$, yang domainnya adalah himpunan bilangan integer, dimana:
  - $P(x)$ adalah "$|x| = 1$"
  - $Q(x)$ adalah "$x^2 = 2$"
  - $R(x)$ adalah "$|x| = x$"

2.8. Himpunan kebenaran

Jawab:

- Himpunan kebenaran dari *P*, dimana $\{x \in Z \mid |x| = 1\}$, adalah himpunan bilangan integer dimana $|x| = 1$. Karena $|x| = 1$ untuk $x = 1$ atau $x = -1$, dan tidak untuk nilai integer yang lain, maka himpunan kebenaran dari *P* adalah $\{-1, 1\}$.

  → {-1, 1}

- Himpunan kebenaran dari *Q*, dimana $\{x \in Z \mid x^2 = 2\}$, adalah himpunan bilangan integer dimana $x^2 = 2$. Himpunan ini adalah himpunan kosong karena tidak ada nilai integer *x* yang memenuhi $x^2 = 2$.

  → {} atau ∅

- Himpunan kebenaran dari *R*, dimana $\{x \in Z \mid |x| = x\}$, adalah himpunan bilangan integer dimana $|x| = x$. Karena $|x| = x$ jika dan hanya jika $x \geq 0$, hal ini berarti bahwa himpunan kebenaran dari R adalah himpunan bilangan bulat tidak negatif.

  → {0, 1, 2, 3, …}

End of File