

# Rekursi dan Relasi Rekurens

S1 Informatika- Universitas Diponegoro

---

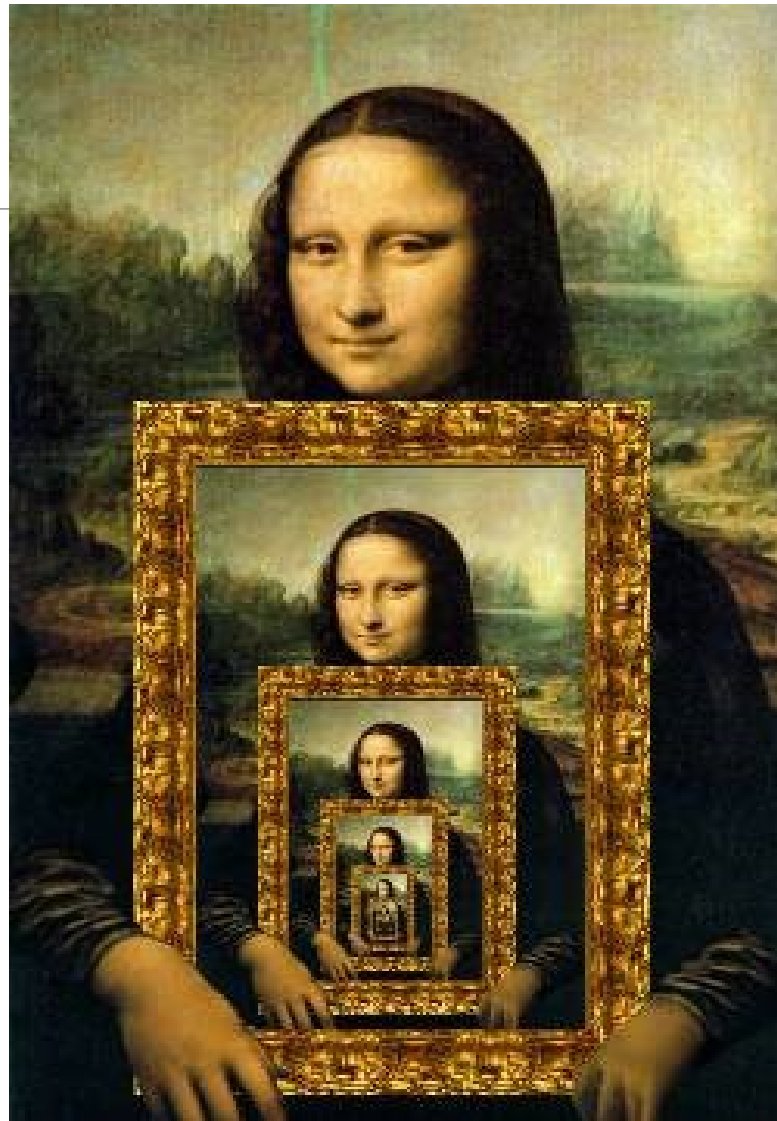
# Rekursi

---

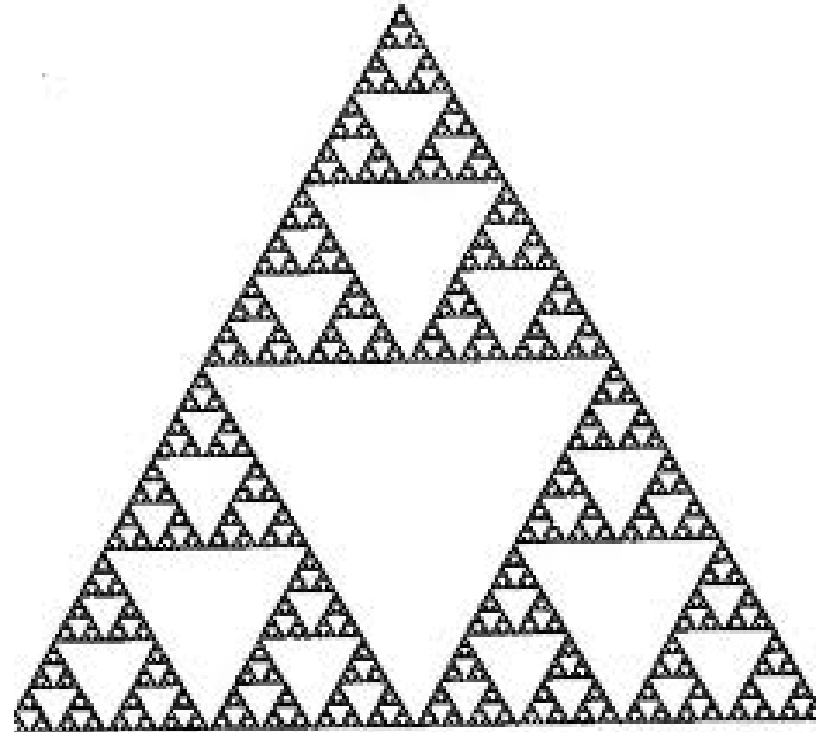
Sebuah objek dikatakan **rekursif** (*recursive*) jika dapat didefinisikan dalam terminology dirinya sendiri.

Proses mendefinisikan objek dalam terminology dirinya sendiri disebut **rekursi** (*recursion*).





Objek fractal adalah contoh bentuk rekursif.



# Fraktal di alam





# Fungsi Rekursif

Fungsi rekursif didefinisikan oleh dua bagian:

---

(i) *Basis*

Bagian yang berisi **nilai fungsi yang terdefinisi secara eksplisit**.

Bagian ini juga sekaligus menghentikan rekursif (dan memberikan sebuah nilai yang terdefinisi pada fungsi rekursif).

(ii) *Rekurens*

Bagian ini **mendefinisikan fungsi dalam terminologi dirinya sendiri**.

Berisi kaidah untuk menemukan nilai fungsi pada suatu input dari nilai-nilai lainnya pada input yang lebih kecil.

**Contoh 1:** Misalkan  $f$  didefinsikan secara rekusif sbb

$$f(n) = \begin{cases} 3 & , n = 0 \text{ basis} \\ 2f(n-1) + 4 & , n > 0 \text{ rekurens} \end{cases}$$

Tentukan nilai  $f(4)$ !



**Contoh 1:** Misalkan  $f$  didefinisikan secara rekursif sbb

$$f(n) = \begin{cases} 3 & , n = 0 \text{ basis} \\ 2f(n-1) + 4 & , n > 0 \text{ rekurens} \end{cases}$$

Tentukan nilai  $f(4)$ !

Solusi:

$$\begin{aligned} f(4) &= 2f(3) + 4 \\ &= 2(2f(2) + 4) + 4 \\ &= 2(2(2f(1) + 4) + 4) + 4 \\ &= 2(2(2(2f(0) + 4) + 4) + 4) + 4 \\ &= 2(2(2(2 \cdot 3 + 4) + 4) + 4) + 4 \\ &= 2(2(2(10) + 4) + 4) + 4 \\ &= 2(2(24) + 4) + 4 \\ &= 2(52) + 4 \\ &= 108 \end{aligned}$$

Cara lain menghitungnya:

$$f(0) = 3$$

---

$$f(1) = 2f(0) + 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$$

$$f(2) = 2f(1) + 4 = 2 \cdot 10 + 4 = 24$$

$$f(3) = 2f(2) + 4 = 2 \cdot 24 + 4 = 52$$

$$f(4) = 2f(3) + 4 = 2 \cdot 52 + 4 = 108$$

Jadi,  $f(3) = 108$ .

**Contoh 2:** Nyatakan  $n!$  dalam definisi rekursif

---

**Contoh 2:** Nyatakan  $n!$  dalam definisi rekursif

Solusi:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times \underbrace{(n-1)}_{(n-1)!} \times n = (n-1)! \times n$$

---

Misalkan  $f(n) = n!$ , maka

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Menghitung  $5!$  secara rekursif adalah:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120 \end{aligned}$$

## Algoritma menghitung faktorial:

**Function** *Faktorial* (input  $n$  :integer)  $\rightarrow$  integer

{ mengembalikannilai  $n!$ ;

---

*basis* : jika  $n = 0$ , maka  $0! = 1$

*rekurens*: jika  $n > 0$ , maka  $n! = n \times (n-1)!$

}

DEKLARASI

-

ALGORITMA:

**If**  $n = 0$  **then**

**return** 1                      { *basis* }

**else**

**return**  $n * \text{Faktorial}(n-1)$  { *rekurens* }

**end**

**Contoh 3:** Barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ....  
Dapat dinyatakan secara rekursif sebagai berikut:

---

$$f_n = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & , n > 1 \end{cases}$$

**Contoh 4:** Fungsi (polinom) Chebysev dinyatakan sebagai

$$T(n, x) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x, & n = 1 \\ 2x \cdot T(n-1, x) - T(n-2, x), & n > 1 \end{cases}$$

**Contoh 5:** Deret  $\sum_{k=0}^n a_k$  didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

---



**Contoh 5:** Deret  $\sum_{k=0}^n a_k$  didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

---

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n \\ &= \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) + a_n\end{aligned}$$

sehingga

$$\sum_{k=0}^n a_k = \begin{cases} a_0 & , n = 0 \\ \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) + a_n & , n > 0 \end{cases}$$

## Latihan

1. Definisikan  $a^n$  secara rekursif, yang dalam hal ini  $a$  adalah bilangan riil tidak-nol dan  $n$  adalah bilangan bulat tidak-negatif.
2. Nyatakan  $a \times b$  secara rekursif, yang dalam hal ini  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat positif.

Solusi:

$$1. \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots a}_{n \text{ kali}} = a \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots a}_{n-1 \text{ kali}} = a \cdot a^{n-1}$$

---

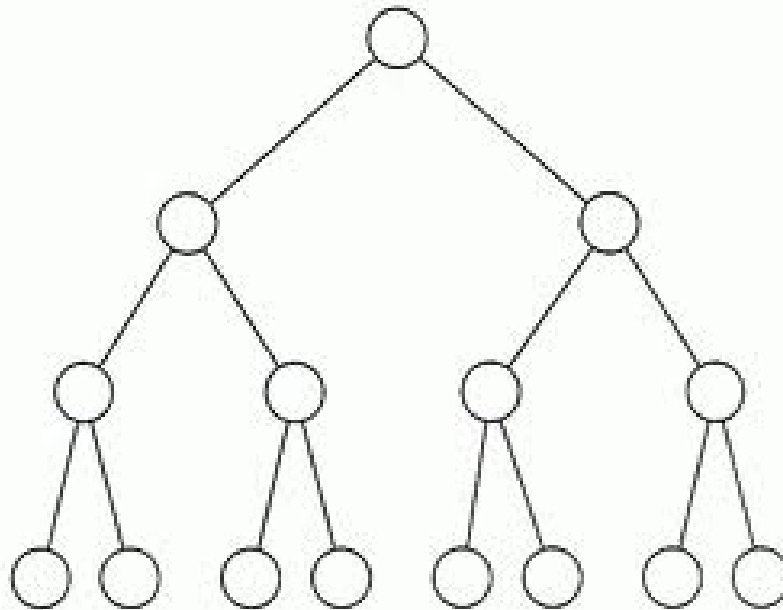
sehingga:

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ a \cdot a^{n-1} & , n > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \underbrace{b + b + b + \dots + b}_{a \text{ kali}} \\ 2. \quad &= b + \underbrace{b + b + \dots + b}_{a-1 \text{ kali}} \\ &= b + (a-1)b \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad a \cdot b = \begin{cases} b & , a = 1 \\ b + (a-1)b & , a > 1 \end{cases}$$

# Struktur Rekursif

Struktur data yang penting dalam computer adalah pohon biner (*binary tree*).



Simpul (*node*) pada pohon biner mempunyai paling banyak dua buah anak.

---

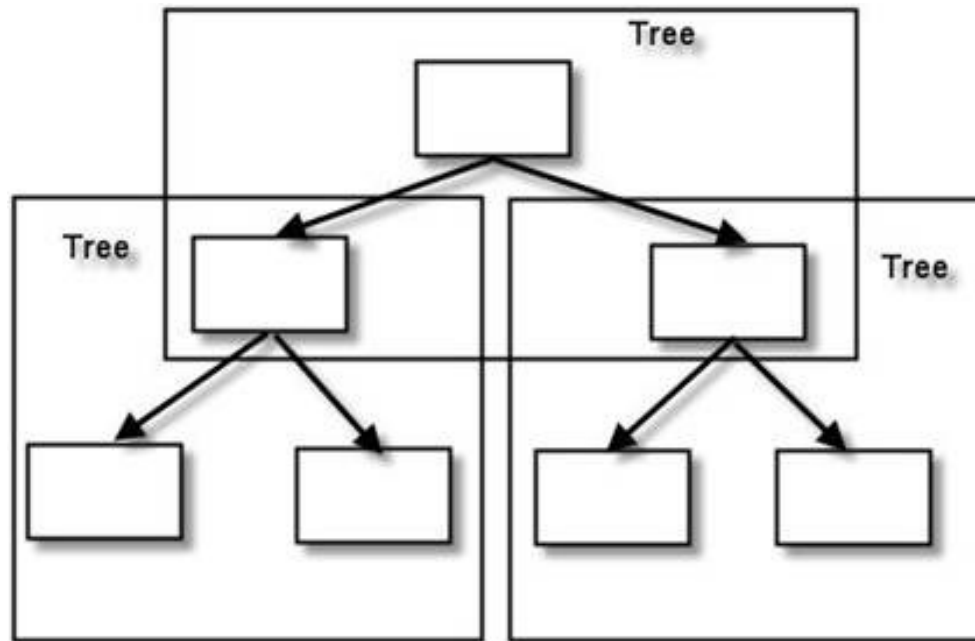
Jumlah anak pada setiap simpul bisa 1, 2, atau 0.

Simpul yang mempunyai anak disebut simpul cabang (*branch node*) atau simpul dalam (*internal node*)

Simpul yang tidak mempunyai anak disebut simpul daun (*leave*).

**Pohon biner** adalah struktur yang rekursif, sebab setiap simpul mempunyai cabang yang juga berupa pohon. Setiap cabang disebut upa pohon (*subtree*).

---



Binary tree consisting of 3 binary trees

Oleh karena itu, pohon dapat didefinisikan secara rekursif sebagai berikut:

---

(i) Basis: kosong adalah pohon biner

(ii) Rekurens: Jika  $T_1$  dan  $T_2$  adalah pohon biner, maka  $T_1T_2$  adalah pohon biner



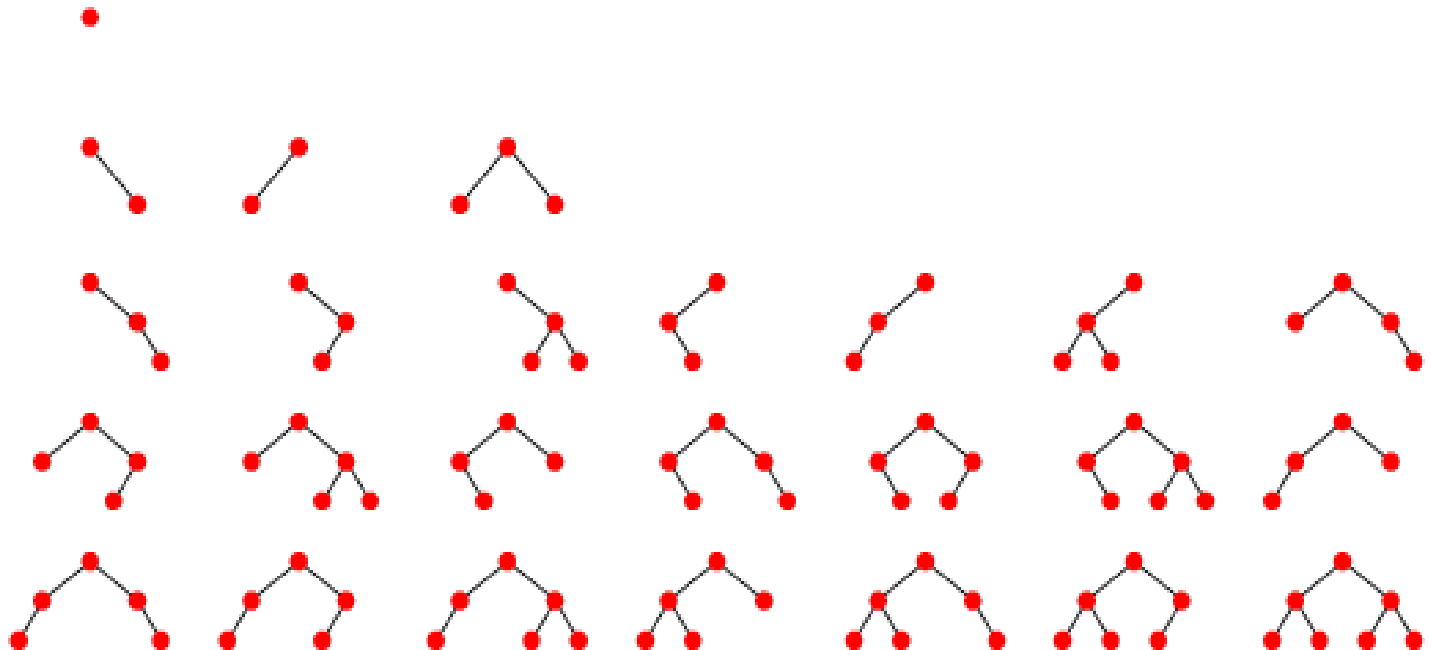
## Proses pembentukan pohon biner secara rekursif:

(i)

$\phi$

---

(ii)



# Barisan Rekursif

Perhatikan barisan bilangan berikut ini:

---

1, 2, 4, 8, 16, 64, ...

Setiap elemen ke- $n$  untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$  merupakan hasil perpangkatan 2 dengan  $n$ , atau  $a_n = 2^n$ .

Secara rekursif, setiap elemen ke- $n$  merupakan hasil kali elemen sebelumnya dengan 2, atau  $a_n = 2a_{n-1}$ .

Basis:  $a_0 = 1$

Rekurens:  $a_n = 2a_{n-1}$ .

**Contoh 7:** Koloni bakteri dimulai dari lima buah bakteri. Setiap bakteri membelah diri menjadi dua bakteri baru setiap satu jam. Berapa jumlah bakteri baru sesudah 4 jam?

---

**Contoh 7:** Koloni bakteri dimulai dari lima buah bakteri. Setiap bakteri membelah diri menjadi dua bakteri baru setiap satu jam. Berapa jumlah bakteri baru sesudah 4 jam?

---

Misalkan  $a_n$  = jumlah bakteri setelah  $n$  jam, yang dapat dinyatakan dalam relasi rekursif sebagai berikut:

$$a_n = \begin{cases} 5 & , n = 0 \\ 2a_{n-1} & , n > 0 \end{cases}$$

$$n = 1 \rightarrow \text{jumlah bakteri} = a_1 = 2a_0 = 2 \cdot 5 = 10$$

$$n = 2 \rightarrow \text{jumlah bakteri} = a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 10 = 20$$

$$n = 3 \rightarrow \text{jumlah bakteri} = a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 20 = 40$$

$$n = 4 \rightarrow \text{jumlah bakteri} = a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 40 = 80$$

Jadi, setelah 4 jam terdapat 80 buahbakteri

# Relasi Rekurens

Barisan (*sequence*)  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  dilambangkan dengan  $\{a_n\}$

---

Elemen barisan ke- $n$ , yaitu  $a_n$ , dapat ditentukan dari suatu persamaan.

Bila persamaan yang mengekspresikan  $a_n$  dinyatakan secara rekursif dalam satu atau lebih *term* elemen sebelumnya, yaitu  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , maka persamaan tersebut dinamakan **relasi rekurens**.

Contoh:  $a_n = 2a_{n-1} + 1$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

**Kondisi awal** (*initial conditions*) suatu barisan adalah satu atau lebih nilai yang diperlukan untuk memulai menghitung elemen-elemen selanjutnya.

---

Contoh:  $a_n = 2a_{n-1} + 1; a_0 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2$$

Karena relasi rekurens menyatakan definisi barisan secara rekursif, maka kondisi awal merupakan langkah basis pada definisi rekursif tersebut.

**Contoh 8.** Barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Dapat dinyatakan dengan relasi rekurens

---

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} ; f_0 = 0 \text{ dan } f_1 = 1$$

Kondisi awal secara unik menentukan elemen-elemen barisan. Kondisi awal yang berbeda akan menghasilkan elemen-elemen barisan yang berbeda pula.



Solusi dari sebuah relasi rekurens adalah sebuah formula yang tidak melibatkan lagi *term* rekursif. Formula tersebut memenuhi relasi rekurens yang dimaksud.

---

Solusi dari sebuah relasi rekurens adalah sebuah formula yang tidak melibatkan lagi *term* rekursif. Formula tersebut memenuhi relasi rekurens yang dimaksud.

---

**Contoh 9:** Misalkan  $\{a_n\}$  adalah barisan yang memenuhi relasi rekurens berikut:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2$$

Periksa apakah  $a_n = 3n$  merupakan Solusi relasi rekurens tersebut.

**Contoh 10:** Apakah  $a_n = 2^n$  merupakan solusi relasi rekurens

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2?$$

---

Apakah  $a_n = 2^n$  merupakan solusi relasi rekurens

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 2?$$

---

$$\begin{aligned}\text{Penyelesaian: } 2a_{n-1} - a_{n-2} &= 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-2} \\ &= 2^{n-1+1} - 2^{n-2} \\ &= 2^n - 2^{n-2} \neq 2^n\end{aligned}$$

Jadi,  $a_n = 2^n$  bukan merupakan solusi relasi rekurens tsb.

Cara lain: Karena  $a_0 = 1$  dan  $a_1 = 2$ , maka dapat dihitung

$$a_2 = 2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Dari rumus  $a_n = 2^n$  dapat dihitung  $a_0 = 2^0 = 1$ ,

$$a_1 = 2^1 = 2, \text{ dan } a_2 = 2^2 = 4$$

Karena  $3 \neq 4$ , maka  $a_n = 2^n$  bukan merupakan solusi

Dari relasi rekurens tsb.

# Pemodelan dengan Relasi Rekurens

---

## 1. Bungamajemuk.

**Contoh 10.** Misalkan uang sebanyak Rp10.000 disimpan di bank dengan system bunga berbunga dengan besar bunga 11% per tahun. Berapa banyak uang setelah 30 tahun?

# Pemodelan dengan Relasi Rekurens

---

## 1. Bungamajemuk.

**Contoh 10.** Misalkan uang sebanyak Rp10.000 disimpan di bank dengan system bunga berbunga dengan besar bunga 11% per tahun. Berapa banyak uang setelah 30 tahun?

Misalkan  $P_n$  menyatakan nilai uang setelah  $n$  tahun. Nilai uang setelah  $n$  tahun sama dengan nilai uang tahun sebelumnya ditambah dengan bunga uang:

$$P_n = P_{n-1} + 0,11 P_{n-1} ; P_0 = 10.000$$

Solusi relasi rekurens  $P_n = P_{n-1} + 0,11 P_{n-1}$  ;  $P_0 = 10.000$  dapat dipecahkan sebagai berikut:

---

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + 0,11 P_{n-1} = (1,11) P_{n-1} \\ &= (1,11)[(1,11)P_{n-2}] = (1,11)^2 P_{n-2} \\ &= (1,11)^2 [(1,11) P_{n-3}] = (1,11)^3 P_{n-3} \\ &= \dots \\ &= (1,11)^n P_0 \end{aligned}$$

Jadi,  $P_n = (1,11)^n P_0 = 10.000 (1,11)^n$

Setelah 30 tahun, banyaknyauangadalah

$$P_{30} = 10.000 (1,11)^{30} = \text{Rp}228.922,97$$

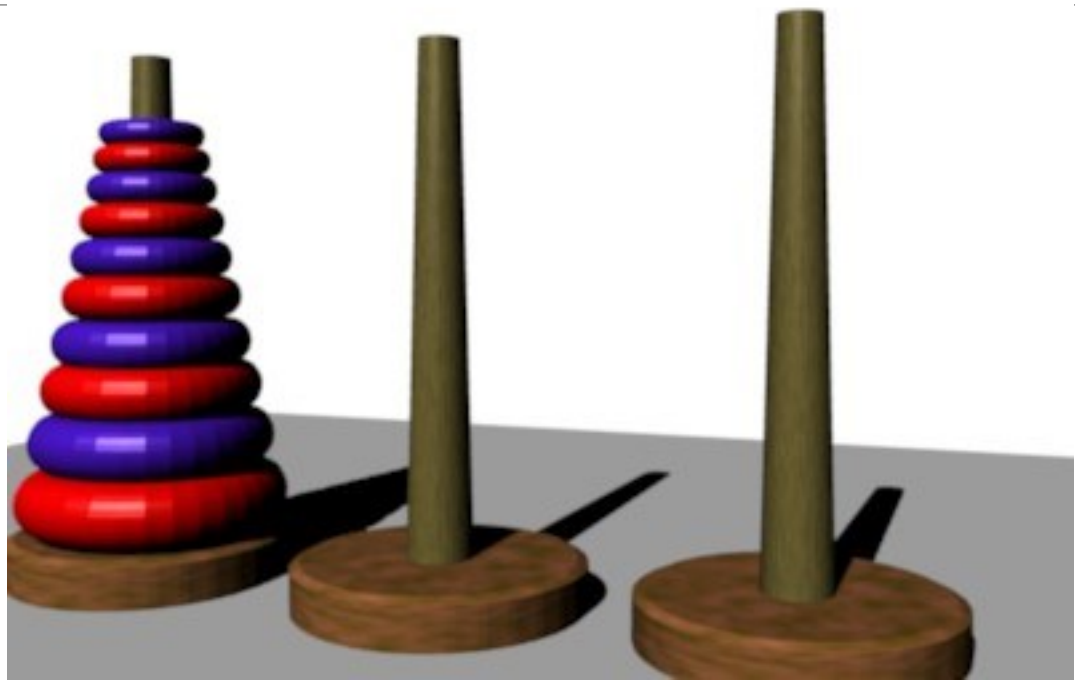


## 2. Menara Hanoi (*The Tower of Hanoi*)

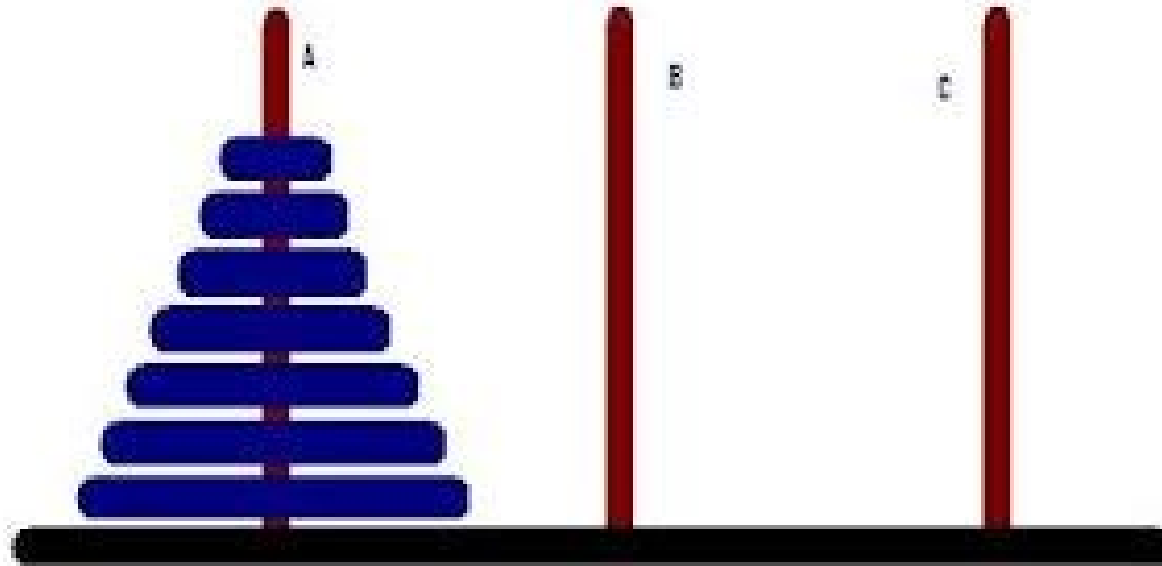
**Contoh 11.** Menara Hanoi adalah sebuah *puzzle* yang terkenal pada akhir abad 19. Puzzle ini ditemukan oleh matematikawan Perancis, Edouard Lucas.

---

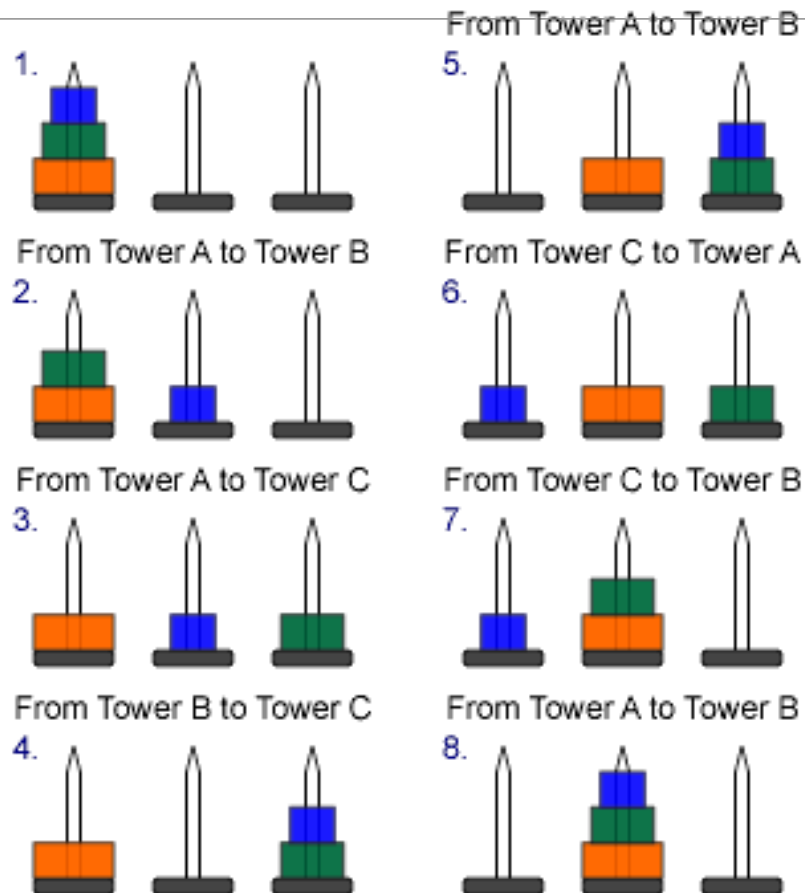
*Dikisahkan bahwa dikota Hanoi, Vietnam, terdapat tiga buah tiang tegak setinggi 5 meter dan 64 buah piringan (disk) dari berbagai ukuran. Tiap piringan mempunyai lubang ditengahnya yang memungkinkannya untuk dimasukkan kedalam tiang. Pada mulanya piringan tersebut tersusun pada sebuah tiang sedemikian rupa sehingga piringan yang dibawah mempunyai ukuran lebih besar daripada ukuran piringan diatasnya. Pendeta Budha memberi pertanyaan kepada murid-muridnya: bagaimana memindahkan seluruh piringan tersebut kesebuah tiang yang lain; setiap kali hanya satu piringan yang boleh dipindahkan, tetapi tidak boleh ada piringan besar diatas piringan kecil. Tiang yang satu lagi dapat dipakai sebagai tempat peralihan dengan tetap memegang aturan yang telah disebutkan. Menurut legenda pendeta Budha, bila pemindahan seluruh piringan itu berhasil dilakukan, maka dunia akan kiamat!*



Pemodelan:



# Kasus untuk $n = 3$ piringan



Secara umum, untuk  $n$  piringan, penyelesaian dengan cara berpikir rekursif adalah sebagai berikut:

---

Kita harus memindahkan piringan paling bawah terlebih dahulu ke tiang  $B$  sebagai alas bagi piringan yang lain. Untuk mencapai maksud demikian, berpikirlah secara rekursif: pindahkan  $n - 1$  piringan teratas dari  $A$  ke  $C$ , lalu pindahkan piringan paling bawah dari  $A$  ke  $B$ , lalu pindahkan  $n - 1$  piringan dari  $C$  ke  $B$ .

*pindahkan  $n - 1$  piringan dari  $A$  ke  $C$*

*pindahkan 1 piringan terbawah dari  $A$  ke  $B$*

*pindahkan  $n - 1$  piringan dari  $C$  ke  $B$*

Selanjutnya dengan tetap berpikir rekursif-pekerjaan memindahkan  $n - 1$  piringan dari sebuah tiang ke tiang lain dapat dibayangkan sebagai memindahkan  $n - 2$  piringan antara kedua tiang tersebut, lalu memindahkan piringan terbawah dari sebuah tiang ke tiang lain, begitu seterusnya.

Misalkan  $H_n$  menyatakan jumlah perpindahan piringan yang dibutuhkan untuk memecahkan teka-teki Menara Hanoi.

---

*pindahkan  $n-1$  piringan dari A ke C*  $\rightarrow H_{n-1}$  kali

*pindahkan 1 piringan terbawah dari A ke B*  $\rightarrow 1$  kali

*pindahkan  $n-1$  piringan dari C ke B*  $\rightarrow H_{n-1}$  kali

Maka jumlah perpindahan yang terjadi adalah:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

Dengan kondisi awal  $H_1 = 1$

Penyelesaian relasi rekurens:

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

---

$$= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1$$

$$= 2^2 (2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

...

$$= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \rightarrow \text{deret geometri}$$

$$= 2^n - 1$$

Untuk  $n = 64$  piringan, jumlah perpindahan piringan yang terjadi adalah

$$H_{64} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Jika satu kali pemindahan piringan membutuhkan waktu 1 detik,  
maka waktu yang diperlukan adalah

18.446.744.073.709.551.615 detik

atau setara dengan 584.942.417.355 tahun atau sekitar 584 milyar  
tahun!

Karena itu, legenda yang menyatakan bahwa dunia akan kiamat  
bila orang berhasil memindahkan 64 piringan di menara Hanoi  
ada juga benarnya, karena 584 milyar tahun adalah waktu yang  
sangat lama.



# Penyelesaian Relasi Rekurens

Relasi rekurens dapat diselesaikan secara iterative atau dengan metode yang sistematis.

---

Secara iterative misalnya pada contoh bunga majemuk (Contoh 10) dan Menara Hanoi (Contoh 11).

Secara sistematis adalah untuk relasi rekurens yang berbentuk homogen linear (*linear homogeneous*).

Relasi rekurens dikatakan homogen linear jika berbentuk

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

yang dalam hal ini  $c_1, c_2, \dots, c_k$  adalah bilangan riil dan  $c_k \neq 0$ .

**Contoh 12.**  $P_n = (1,11) P_{n-1} \rightarrow$  homogen linear

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \rightarrow$  homogen linear

---

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}^2 \rightarrow$  tidak homogen linear

$H_n = 2H_{n-1} - 1 \rightarrow$  tidak homogen linear

$a_n = na_{n-1} \rightarrow$  tidak homogen linear

Penjelasan:

$H_n = 2H_{n-1} - 1$  tidak homogen linear karena *term* -1 tidak dikali dengan nilai  $H_j$  untuk sembarang  $j$

$a_n = na_{n-1}$  tidak homogen linear karena koefisiennya bukan konstanta.

Solusi relasi rekurens yang berbentuk homogen linear adalah mencari bentuk

$$a_n = r^n$$

---

yang dalam hal ini  $r$  adalah konstanta.

Sulihkan  $a_n = r^n$  ke dalam relasi rekuren homogen linear:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

menjadi

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k}$$

Bagi ke dua ruas dengan  $r^{n-k}$ , menghasilkan

---

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Persamaan diatas dinamakan **persamaan karakteristik** dari relasi rekurens.

Solusi persamaan karakteristik disebut **akar-akar karakteristik**, dan merupakan komponen Solusi relasi rekurens yang kita cari ( $a_n = r^n$ ).

Untuk relasi rekurens homogen linear derajat  $k = 2$ ,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

---

Persamaan karakteristiknya berbentuk:

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

Akar persamaan karakteristik adalah  $r_1$  dan  $r_2$ .

**Teorema 1:** Barisan  $\{a_n\}$  adalah Solusi relasi rekurens  $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$  jika dan hanya jika  $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$  untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$  dengan  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  adalah konstan.

**Contoh 13.** Tentukan Solusi relasi rekurens berikut:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} ; a_0 = 2 \text{ dan } a_1 = 7?$$

*Penyelesaian:*

---

Persamaan karakteristik:  $r^2 - r - 2 = 0$ .

Akar-akarnya:  $(r - 2)(r + 1) = 0 \rightarrow r_1 = 2 \text{ dan } r_2 = -1$

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \rightarrow a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

$$a_0 = 2 \rightarrow a_0 = 2 = \alpha_1 2^0 + \alpha_2 (-1)^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 \rightarrow a_1 = 7 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 (-1)^1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$$

Diperoleh dua persamaan:  $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$  dan  $2\alpha_1 - \alpha_2 = 7$ ,

Solusinya adalah  $\alpha_1 = 3$  dan  $\alpha_2 = -1$

Jadi, Solusi relasi rekurens adalah:

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

Jika persamaan karakteristik memiliki dua akar yang sama (akar kembar,  $r_1 = r_2$ ), maka Teorema 1 tidak dapat dipakai. Terapkan Teorema 2 berikut ini.

---

**Teorema 2:** Misalkan  $r^2 - c_1r - c_2 = 0$  mempunyai akar kembar  $r_0$ . Barisan  $\{a_n\}$  adalah Solusi relasi rekurens  $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$  jika dan hanya jika  $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$  untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$  dengan  $\alpha_1$  dan  $\alpha_2$  adalah konstan.

**Contoh 14.** Tentukan Solusi relasi rekurens berikut:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 6?$$

*Penyelesaian:*

*Penyelesaian:*

Persamaan karakteristik:  $r^2 - 6r + 9 = 0$ .

---

Akar-akarnya:  $(r - 3)(r - 3) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 3 \rightarrow r_0$

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 n r_2^n \rightarrow a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

$$a_0 = 1 \rightarrow a_0 = 1 = \alpha_1 3^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 3^0 = \alpha_1$$

$$a_1 = 6 \rightarrow a_1 = 6 = \alpha_1 3^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 3^1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2$$

Diperoleh dua persamaan:  $\alpha_1 = 1$  dan  $3\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6$ ,

Solusinya adalah  $\alpha_1 = 1$  dan  $\alpha_2 = 1$

Jadi, Solusi relasi rekurens adalah:

$$a_n = 3^n + n3^n$$



**Latihan.** Selesaikan relasi rekurens berikut:

$$(a) a_n = 2a_{n-1} ; a_0 = 3$$

---

$$(b) a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} ; a_0 = 1 \text{ dan } a_1 = 0?$$

$$(c) \text{ Barisan Fibonacci: } f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

**(Soal UTS)** Selesaikan relasi rekurens berikut:

- $T(n) = 7T(n-1) - 6T(n-2); T(0) = 2, T(1) = 7$

(Catatan:  $T_n$  ditulis  $T(n)$ ,  $T_{n-1}$  ditulis  $T(n-1)$ , dst).