ALJABAR LINIER

Basis dan Dimensi Ruang Vektor, Persamaan Garis dan Bidang Secara Vektor

Etna Vianita, S.Mat., M.Mat.

MATERI PRA-UTS

1 Pengantar Aljabar Linier dan Penerapannya dalam Bidang Informatika

2 Konsep Dasar Vektor

3 Konsep Dasar Matriks

4 Konsep Transformasi Elementer

5 Determinan Matriks

6 Invers Matriks

7 Persamaan Linier

MATERI POST-UTS

1 Konsep Dasar Ruang Vektor

2 Vektor Bebas Linier, Vektor Bergantung Linier, Kombinasi Linier

3 Basis dan Dimensi Ruang Vektor, Persamaan Garis dan Bidang Secara Vektor

4 Ruang Hasil Kali Dalam (Inner Product Space)

5 Transformasi Linier

6 Eigenvalue dan Eigenvector

7 Sistem Persamaan Differensial Linear Orde 1

1. BASIS

Definisi Basis

Vektor $v_1, v_2, \ldots. v_k$ dalam ruang vektor V dikatakan membentuk basis V, jika:

- $v_1, v_2, \ldots. v_k$ **span** V atau span $\{v_1, v_2, \ldots. v_k\} = V$
- $v_1, v_2, \ldots. v_k$ adalah **bebas linier**

1.1 SPAN/MERENTANG / MEMBANGUN

Definisi Span /Merentang / Membangun

Himpunan vektor

$$S = \{v_1, v_2, \ldots v_r\}$$

Dikatakan **span** suatu ruang vektor *V* jika setiap vektor pada *V* selalu dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di *S*.

Misalkan setiap vektor pada V adalah $\bar{u}$.

$$k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n = \bar{u}$$

1.1 SPAN/MERENTANG / MEMBANGUN

Contoh Span /Merentang / Membangun

CONTOH 1

Tentukan apakah : $\overline{v_1} = (1,1,2)$, $\overline{v_2} = (1,0,1)$, $\overline{v_3} = (2,1,3)$ membangun $\mathbb{R}^3$?

Sign out

Misalkan $\bar{u}$ mewakili setiap vektor pada $\mathbb{R}^3$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

$\bar{v}_1, \bar{v}_2$ dan $\bar{v}_3$ membangun $\mathbb{R}^3$ jika terdapat k_1, k_2 dan $k_3 \in \mathbb{R}$ sehingga

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{u}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 1 & 0 & 1 & u_2 \\ 2 & 1 & 3 & u_3 \end{array}\right) \underset{-2B_1+B_3}{\overset{-B_1+B_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & -1 & -1 & -u_1+u_2 \\ 0 & -1 & -1 & -2u_1+u_3 \end{array}\right) \overset{(-1)B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & u_1-u_2 \\ 0 & -1 & -1 & -2u_1+u_3 \end{array}\right) \quad u_1-u_2-2u_1+u_3$$

$$\overset{B_2+B_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & u_1-u_2 \\ 0 & 0 & 0 & -u_1-u_2+u_3 \end{array}\right)$$

$\therefore$ SPL inkonsisten, tidak memiliki solusi

$\therefore$ v_1, v_2, v_3 tidak membangun $\mathbb{R}^3$ //

1.1 SPAN/MERENTANG / MEMBANGUN

Contoh Span /Merentang / Membangun

CONTOH 2

Tentukan apakah : $\bar{v}_1 = (2,2,2)$, $\bar{v}_2 = (0,0,3)$, $\bar{v}_3 = (0,1,1)$ membangun $\mathbb{R}^3$?

Sign out

Misalkan $\bar{u}$ vektor yg mewakili semua vektor pada $\mathbb{R}^3$, $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

Jika v_1, v_2, v_3 membangun $\mathbb{R}^3$, maka terdapat $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$, sehingga

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = \bar{u}$$

$$k_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & u_1 \\ 2 & 0 & 1 & u_2 \\ 2 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}B_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & u_1/2 \\ 2 & 0 & 1 & u_2 \\ 2 & 3 & 1 & u_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2B_1 + B_2 \\ \sim \\ -2B_1 + B_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & u_1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -u_1 + u_2 \\ 0 & 3 & 1 & -u_1 + u_3 \end{array}\right) \underset{\sim}{B_2 \leftrightarrow B_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & u_1/2 \\ 0 & 3 & 1 & -u_1 + u_3 \\ 0 & 0 & 1 & -u_1 + u_2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{3}B_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & u_1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & \tfrac{1}{3}(-u_1 + u_3) \\ 0 & 0 & 1 & -u_1 + u_2 \end{array}\right) \underset{\sim}{-\tfrac{1}{3}B_3 + B_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & u_1/2 \\ 0 & 1 & 0 & \tfrac{1}{3}(u_3 - u_2) \\ 0 & 0 & 1 & -u_1 + u_2 \end{array}\right)$$

$k_1 = u_1/2$

$k_2 = \frac{1}{3}(u_3 - u_2)$

$k_3 = -u_1 + u_2$

$\therefore$ $\bar{u}$ adalah kombinasi linear dari v_1, v_2, v_3

$\therefore$ v_1, v_2, v_3 membangun $\mathbb{R}^3$

1.2 BEBAS LINIER

- Ingat Definisi Bebas Linier

$$k_1v_1 + k_2v_2 \ldots + k_rv_r \quad = 0$$

hanya dipenuhi oleh $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$

dengan $v_1, v_2, \ldots v_r$ vektor dan $k_1, k_2, \ldots k_r$ skalar

1. BASIS

Definisi Basis

Vektor $v_1, v_2, \ldots, v_k$ dalam ruang vektor V dikatakan membentuk basis V, jika:

- $v_1, v_2, \ldots, v_k$ **span** V atau span $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = V$
- $v_1, v_2, \ldots, v_k$ adalah **bebas linier**

1. BASIS

Contoh 1. Basis

CONTOH SOAL

Periksa apakah $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\bar{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ basis untuk $\mathbb{R}^3$.

① Adp apakah $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ membangun $\mathbb{R}^3$.

$$k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c} = \bar{u}$$

$$k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & u_1 \\ 0 & 2 & 3 & u_2 \\ 0 & 0 & 3 & u_3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}B_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 3/2 & u_2/2 \\ 0 & 0 & 3 & u_3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{3}B_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & u_1 \\ 0 & 1 & 3/2 & u_2/2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3/3 \end{array}\right) \underset{-\frac{3}{2}B_3+B_2}{\overset{-3B_3+B_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -u_3+u_1 \\ 0 & 1 & 0 & -u_3/2+u_2/2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3/3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{-2B_2+B_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -u_2+u_1 \\ 0 & 1 & 0 & -u_3/2+u_2/2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2+u_1 \\ -u_3/2+u_2/2 \\ u_3/3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ membangun $\mathbb{R}^3$

1. BASIS

Contoh 1. Basis (lanjutan)

(2) Adp apakah $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ bebas linear di $\mathbb{R}^3$

$$k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c} = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 0 \\ k_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ bebas linear di $\mathbb{R}^3$

$\therefore$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^3$ //

1. BASIS

Contoh 2. Basis

CONTOH SOAL 2

Periksa apakah $\bar{a} = \binom{1}{2}, \bar{b} = \binom{2}{2}$ dan $\bar{c} = \binom{1}{3}$ merupakan basis untuk $\mathbb{R}^2$?

① Adp apakah $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ membangun $\mathbb{R}^2$.

$$k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c} = \bar{u}$$

$$k_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & u_1\\2 & 2 & 3 & u_2\end{array}\right) \overset{-2B_1+B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & u_1\\0 & -2 & 1 & -2u_1+u_2\end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{2}B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & u_1\\0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(-2u_1+u_2)\end{array}\right) \overset{-2B_2+B_1}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & u_2-u_1\\0 & 1 & -\frac{1}{2} & u_1-\frac{u_2}{2}\end{array}\right)$$

Misal $k_3 = t$

$k_1 + 2k_3 = u_2 - u_1 \Leftrightarrow k_1 = u_2 - u_1 - 2t$

$k_2 - \frac{1}{2}k_3 = u_1 - \frac{u_2}{2} \Leftrightarrow k_2 = u_1 - \frac{u_2}{2} + \frac{1}{2}t$

$$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_2-u_1-2t\\u_1-\frac{u_2}{2}+\frac{1}{2}t\\t\end{pmatrix}$$

$\therefore \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ membangun $\mathbb{R}^2$

1. BASIS

Contoh 2. Basis (lanjutan)

(2) Adp apakah $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ bebas linear di $\mathbb{R}^2$.

$$k_1\bar{a} + k_2\bar{b} + k_3\bar{c} = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ SPL memiliki solusi nontrivial,

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ bergantung linear di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ bukan merupakan basis untuk $\mathbb{R}^2$.

1. BASIS

- Konsep Basis :

Basis disini dapat diartikan sebagai kerangka penyusun suatu ruang.

Jadi jika suatu vektor-vektor ini merupakan basis bagi suatu ruang vektor maka faktor-faktor lain yang berada pada ruang yang sama dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor-vektor dasarnya

CATATAN: **Basis** untuk setiap ruang vektor adalah **tidak tunggal**

1. BASIS

Latihan soal 1

- $v_1 = [1,0]$, $v_2 = [0,1]$, $v_3 = [3,4]$
  Apakah $v_1, v_2,$ dan v_3 basis dalam R^2?

- $v_1 = [1,2,3]$, $v_2 = [-2,1,1]$, $v_3 = [8,6,10]$
  Apakah $v_1, v_2,$ dan v_3 basis dalam R^3?

- $v_1 = [1,2,1]$, $v_2 = [1,0,2]$, $v_3 = [1,1,0]$ dan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$. Apakah S basis dalam R^3?

2. DIMENSI

Definisi Dimensi

- Dimensi dari ruang vektor V adalah jumlah vektor-vektor yang membentuk basis pada V
- Ruang vektor V disebut berdimensi terhingga jika V berisi suatu himpunan vektor berhingga $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ yang membentuk suatu basis
- Jika tidak ada himpunan yang seperti itu, maka V disebut berdimensi tak-hingga
- Ruang vektor nol sebagai berdimensi terhingga

2. DIMENSI

Definisi Dimensi

Ruang vektor $\mathbb{R}^n$, P^n dan $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ memiliki dimensi sebagai berikut:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n,$$

$$\dim(P^n) = n + 1, \text{ dan}$$

$$\dim(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = mn.$$

2. DIMENSI

Contoh Dimensi

- Diketahui $e_1 = [1,0,0]$, $e_2 = [0,1,0]$, $e_3 = [0,0,1]$ maka $S = \{e_1,e_2,e_3\}$ adalah basis untuk R^3 ➔ dimensi dari R^3 adalah 3
- $v_1 = [1,3,-1]$, $v_2 = [2,1,0]$, $v_3 = [4,2,1]$ dan $S = \{v_1,v_2,v_3\}$. Apakah S basis dalam R^3? Berapa dimensinya?
  - Dicek apakah S basis? Bebas linier kah? Jika S basis dari R^3, maka dimensinya adalah 3

2. DIMENSI

Latihan Soal 2

- Tentukan basis dan dimensi dari ruang vektor V yang dibentuk oleh :
  - a = [2,3,6], b = [5,7,2], c = [7,8,10]
    - Catatan :
    - Cek apakah a,b dan c bebas linier?
    - Cek apakah a,b bebas linier?
    - Cek apakah a,b basis dari ruang vektor V?
  - p = [3,2,7,11] dan q = [2,5,8,9]
  - u = [2,1,6,3] dan v = [6,3,18,9]

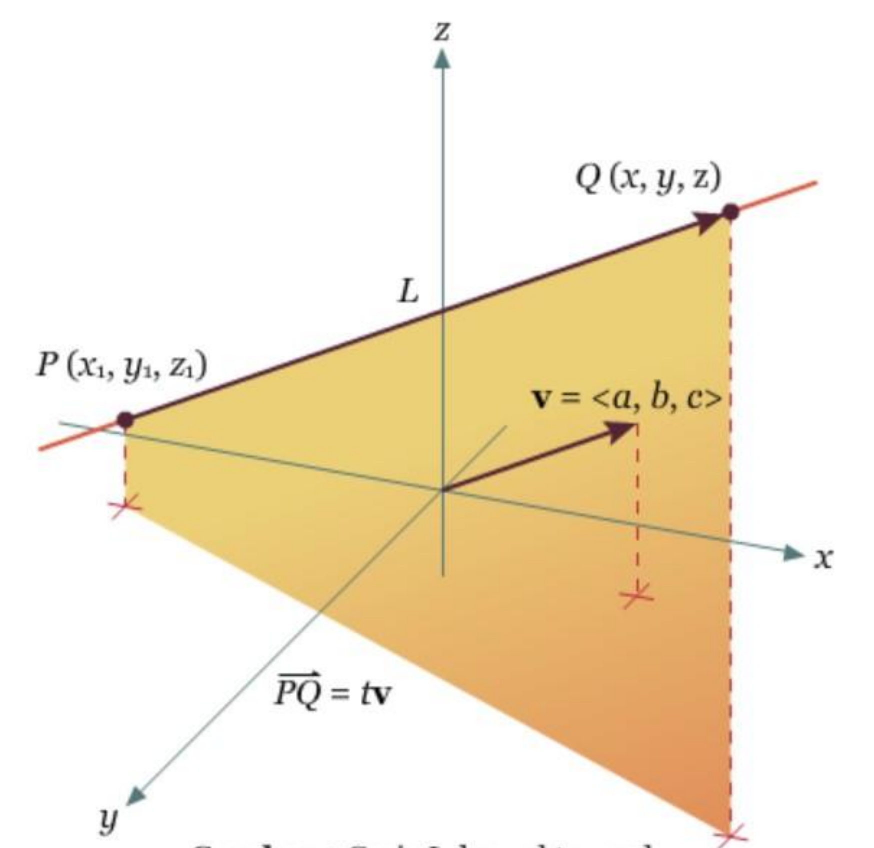
3. Persamaan Garis dan Bidang secara Vektor

3.1. Persamaan Garis secara Vektor

3.2. Persamaan Bidang secara Vektor

3.1. Persamaan Garis

- Untuk menentukan persamaan garis dapat menggunakan vektor.
- Perhatikan garis L yang melalui titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan sejajar terhadap vektor **v** = <a, b, c>.
- Vektor **v** adalah **vektor arah** untuk garis L, dan a, b, dan c merupakan **bilangan-bilangan arah**.
- Garis L adalah himpunan semua titik $Q(x, y, z)$ sedemikian sehingga vektor PQ sejajar dengan **v**.
- Ini berarti bahwa PQ merupakan perkalian skalar **v** dan dapat dituliskan $PQ = t\mathbf{v}$, dimana t adalah suatu skalar (bilangan real).



Gambar 1 Garis L dan vektor arah **v**.

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = \langle at, bt, ct \rangle = t\mathbf{v}$$

3.1. Persamaan Garis

Persamaan Parametris Garis dalam Ruang

- Garis *L* yang sejajar dengan vektor **v** =<*a*, *b*, *c*> dan melewati titik $P(x_1, y_1, z_1)$ direpresentasikan dengan **persamaan-persamaan parametris**

$$x = x_1 + at, \qquad y = y_1 + bt, \qquad \text{dan} \qquad z = z_1 + ct$$

- Jika bilangan-bilangan arah *a*, *b*, dan *c* tidak nol, maka parameter *t* dapat dieliminasi untuk mendapatkan **persamaan-persamaan simetris garis**.

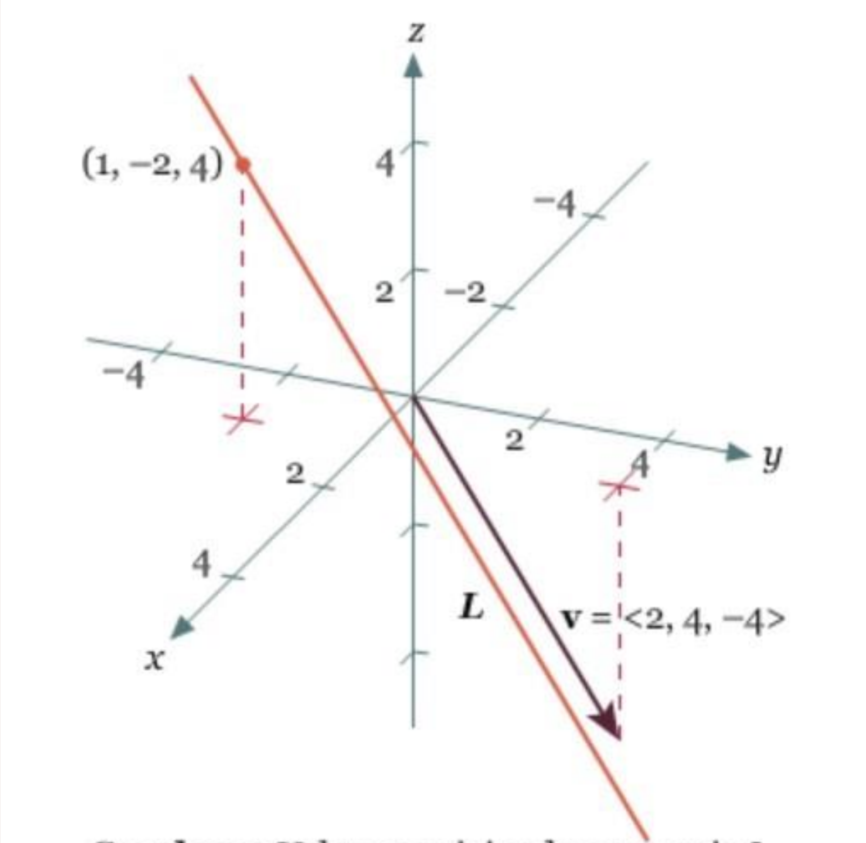
$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Persamaan-persamaan simetris

3.1. Persamaan Garis

Contoh

- Tentukan persamaan-persamaan parametris dan simetris garis L yang melalui titik (1, –2, 4) dan sejajar terhadap $\mathbf{v}$ = <2, 4, –4>, seperti yang ditunjukkan Gambar 2.



Gambar 2 Vektor **v** sejajar dengan garis L.

Penyelesaian

- Untuk menentukan persamaan-persamaan parametris garis tersebut, gunakan koordinat-koordinat $x_1 = 1$, $y_1 = -2$, dan $z_1 = 4$ dan arah $a = 2$, $b = 4$, dan $c = -4$.

$$x = 1 + 2t, \qquad y = -2 + 4t, \qquad z = 4 - 4t \qquad \text{Persamaan-persamaan parametris}$$

- Karena a, b, dan c semuanya tidak nol, persamaan simetris garis tersebut adalah

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{-4} \qquad \text{Persamaan-persamaan simetris}$$

3.1. Persamaan Garis

Lanjutan

- Persamaan-persamaan parametris atau simetris untuk garis yang diberikan tidaklah tunggal.
- Sebagai contoh, dengan memisalkan $t = 1$ dalam persamaan-persamaan parametris, di dapatkan titik (3, 2, 0).
- Dengan menggunakan titik ini dengan bilangan-bilangan arah $a = 2$, $b = 4$, dan $c = -4$ dihasilkan himpunan persamaan-persamaan parametris yang berbeda

$$x = 3 + 2t, \qquad y = 2 + 4t, \qquad \text{dan} \qquad z = -4t.$$

3.1. Persamaan Garis

Contoh

- Tentukan persamaan-persamaan parametris suatu garis yang melalui titik-titik (–2, 1, 0) dan (1, 3, 5)

Penyelesaian :

- Gunakan titik-titik $P(-2, 1, 0)$ dan $Q(1, 3, 5)$ untuk menentukan **vektor arah** garis yang melalui P dan Q.

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 1-(-2), 3-1, 5-0 \rangle = \langle 3, 2, 5 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

- Dengan menggunakan bilangan-bilangan arah $a = 3$, $b = 2$, dan $c = 5$ dengan titik $P(-2, 1, 0)$, dapat memperoleh persamaan-persamaan parametris

$$x = -2 + 3t, \quad y = 1 + 2t, \quad \text{dan} \quad z = 5t.$$

3.1. Persamaan Garis

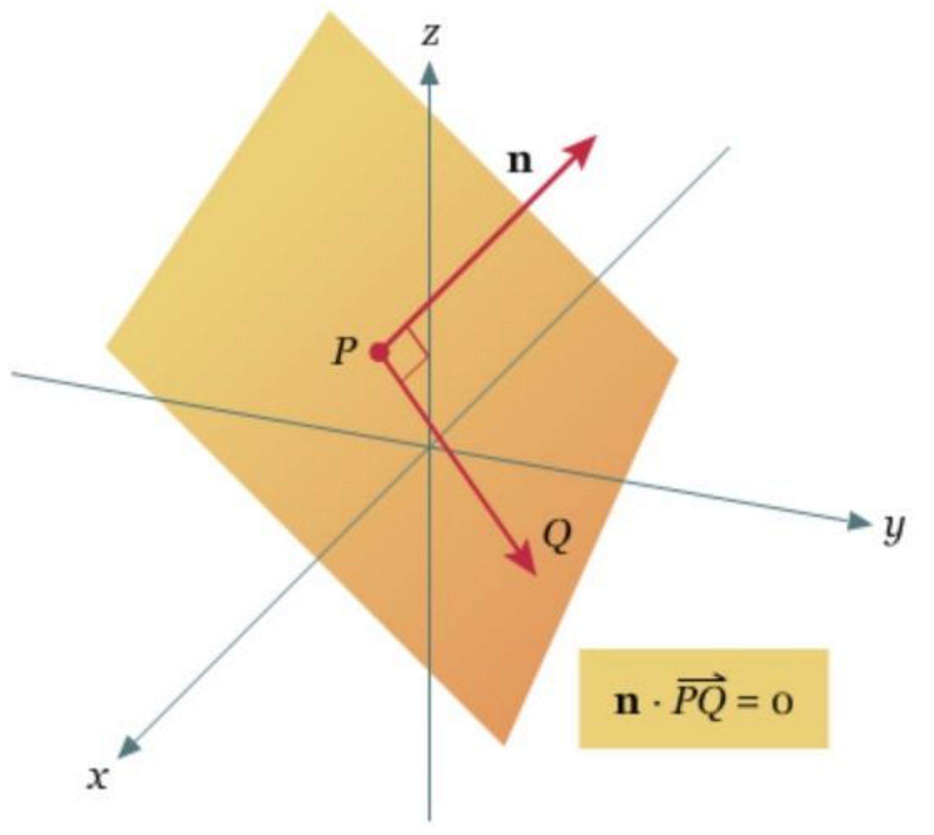
lanjutan

Catatan :

- Karena t beragam untuk semua bilangan real, persamaan-persamaan parametris pada Contoh di atas digunakan untuk menentukan titik-titik (x, y, z) yang terletak pada garis.
- Secara khusus, untuk $t = 0$ dan $t = 1$ memberikan titik-titik awal yang diketahui, yaitu (–2, 1, 0) dan (1, 3, 5).

3.2. Persamaan Bidang

- Persamaan suatu bidang dalam ruang dapat diperoleh dari suatu titik pada bidang dan vektor *normal* (tegak lurus) terhadap bidang tersebut.
- Perhatikan bidang yang memuat titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan memiliki vektor normal tidak nol, n = (a,b,c) seperti yang ditunjukkan Gambar 3.
- Bidang ini memuat semua titik $Q(x, y, z)$ sedemikian sehingga vektor PQ ortogonal terhadap **n**.



Gambar 3 Vektor normal **n** ortogonal terhadap semua vektor $\overrightarrow{PQ}$ pada bidang.

3.2. Persamaan Bidang

Lanjutan

- Dengan menggunakan hasil kali titik, dapat dituliskan persamaan berikut.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PQ} &= 0\\
\langle a,b,c\rangle\cdot\langle x-x_1, y-y_1, z-z_1\rangle &= 0\\
a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) &= 0
\end{aligned}
$$

3.2. Persamaan Bidang

Persamaan Baku Bidang dalam Ruang

- Bidang yang memuat titik (x_1, y_1, z_1) dan memiliki vektor normal n =(a,b,c) dapat direpresentasikan oleh suatu bidang yang memiliki **persamaan dalam bentuk baku :**

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

- Dengan mengelompokkan kembali suku-suku pada persamaan di atas, didapatkan **bentuk umum** persamaan suatu bidang dalam ruang.

$$ax + by + cz + d = 0$$

Bentuk umum persamaan bidang

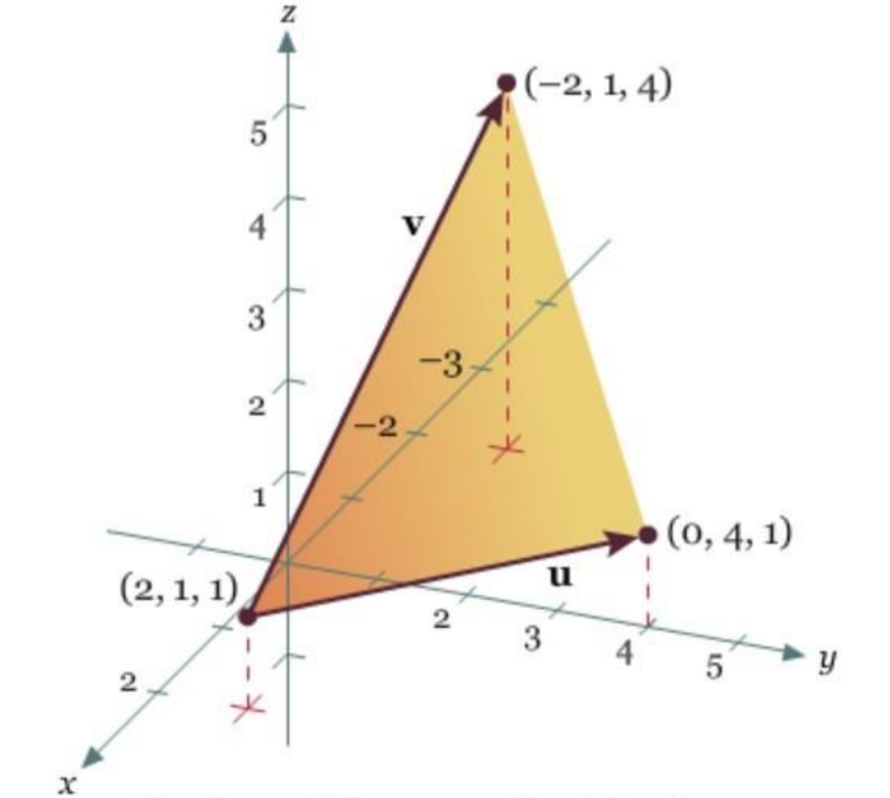
3.2. Persamaan Bidang

Contoh

- Tentukan persamaan umum bidang yang memuat titik-titik (2, 1, 1), (0, 4, 1) dan (–2, 1, 4).

Penyelesaian

- Untuk menerapkan materi ini, kita dibutuhkan suatu titik pada bidang dan vektor yang normal terhadap bidang tersebut.
- Terdapat tiga pilihan untuk titik pada bidang, tetapi tidak ada vektor normal yang diberikan.
- Untuk mendapatkan vektor normal, gunakan hasil kali silang vektor-vektor **u** dan **v** yang membentang dari titik (2, 1, 1) ke titik-titik (0, 4, 1) dan (–2, 1, 4), seperti yang ditunjukkan Gambar 4.



Gambar 4 Bidang yang dibentuk **u** dan **v**.

3.2. Persamaan Bidang

Lanjutan

- Bentuk-bentuk komponen **u** dan **v** adalah

$$\mathbf{u} = \langle 0-2, 4-1, 1-1\rangle = \langle -2, 3, 0\rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle -2-2, 1-1, 4-1\rangle = \langle -4, 0, 3\rangle$$

yang mengakibatkan

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u}\times\mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \\ &= \langle a, b, c\rangle \end{aligned}$$

adalah normal terhadap bidang yang diberikan.

3.2. Persamaan Bidang

Lanjutan

- Dengan menggunakan bilangan-bilangan arah pada **n** dan titik $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 1)$, dapat menentukan persamaan bidang tersebut adalah

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$9(x - 2) + 6(y - 1) + 12(z - 1) = 0 \quad \text{Bentuk baku}$$

$$9x + 6y + 12z - 36 = 0 \quad \text{Bentuk umum}$$

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0 \quad \text{Sederhanakan bentuk umum}$$

3.2. Persamaan Bidang
Lanjutan

Catatan :

- Dalam Contoh tersebut, dapat diuji bahwa titik-titik yang diberikan, (2, 1, 1), (0, 4, 1) dan (–2, 1, 4), memenuhi persamaan bidang yang diperoleh

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)=(2,1,1) \quad &\Rightarrow \quad 3x+2y+4z-12 &&= 3(2)+2(1)+4(1)-12 \\
& &&= 6+2+4-12 \\
& &&= 0 \quad \checkmark \\
(x,y,z)=(0,4,1) \quad &\Rightarrow \quad 3x+2y+4z-12 &&= 3(0)+2(4)+4(1)-12 \\
& &&= 0+8+4-12 \\
& &&= 0 \quad \checkmark \\
(x,y,z)=(-2,1,4) \quad &\Rightarrow \quad 3x+2y+4z-12 &&= 3(-2)+2(1)+4(4)-12 \\
& &&= -6+2+16-12 \\
& &&= 0 \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

3. Persamaan Garis dan Bidang secara Vektor

Latihan Soal 3

- Tentukan persamaan garis g yang melalui titik A (3,1,5) dan B (2,4,3)!
- Tentukan persamaan bidang melalui titik A (2,1,9), B(1,2,8) dan C(3,3,1)!

TERIMA KASIH