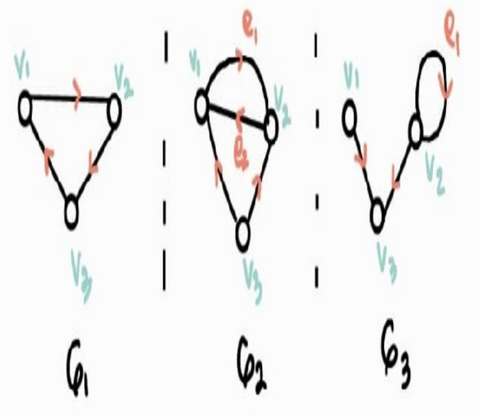
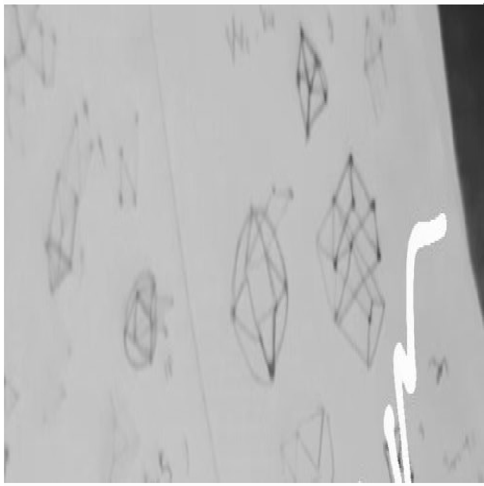
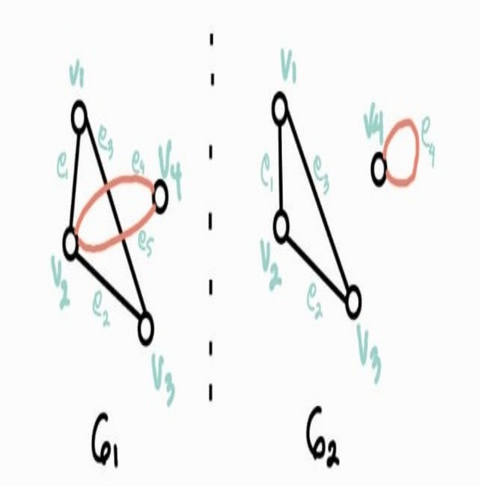
Struktur Diskrit Minggu Ke-10

PAIK6105

TEORI GRAF







Departemen Informatika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

Outline

Review Materi Teori Graf sebelumnya

Beberapa terminologi dalam Graf

Himpunan Pemisah

Graf Sederhana Khusus

Review Materi Sebelumnya

Terminologi dalam Graf

>>>Bahasan pada Graf Sederhana

Berkaitan dengan konsep keterhubungan graf

1. Subgraf / *Subgraph*
2. Komplemen
3. Subgraf merentang/ *Spanning Subgraph*
4. Komponen
5. Himpunan Pemisah/ *Cut-set*
6. Graf Berbobot / *Weighted Graph*
7. Graf-graf Sederhana Khusus / Some simple graphs

Subgraf dan Komplemen

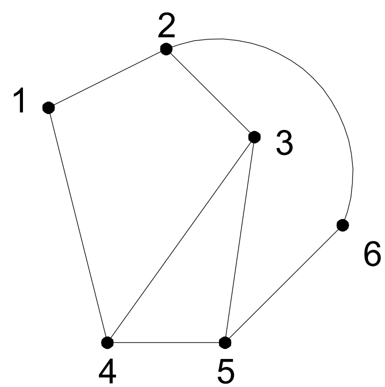
D

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf. Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ disebut ***subgraf*** dari G jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$.

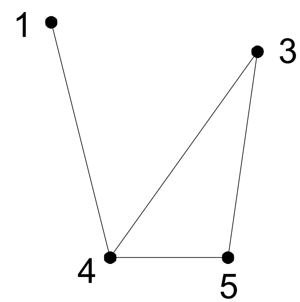
Lebih lanjut, subgraph G_1 disebut ***subgraf sejati***, jika $G_1 \neq G$.

D

Komplemen dari graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ adalah suatu graf $G_2 = (V_2, E_2)$ dengan $V_1 = V_2$ sehingga untuk setiap dua simpul u dan v di G_2 bertetangga jika u dan v tidak bertetangga di G_1.



(a) Graf G_1

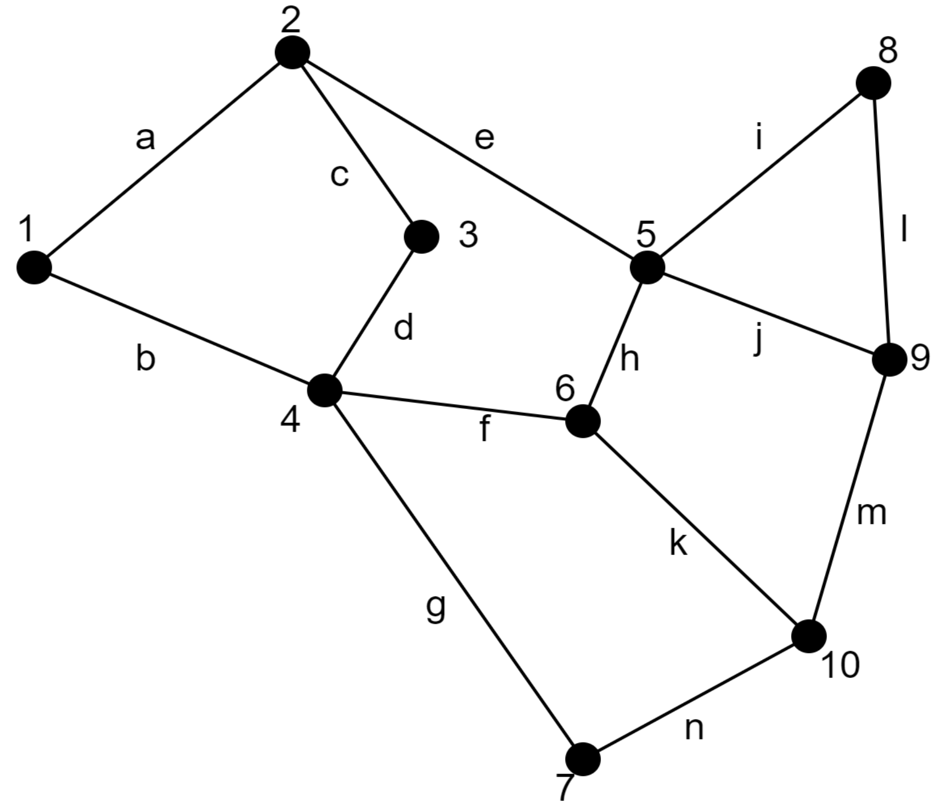


(b) G_2 adalah subgraph dari G_1

Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 661)**

Latihan

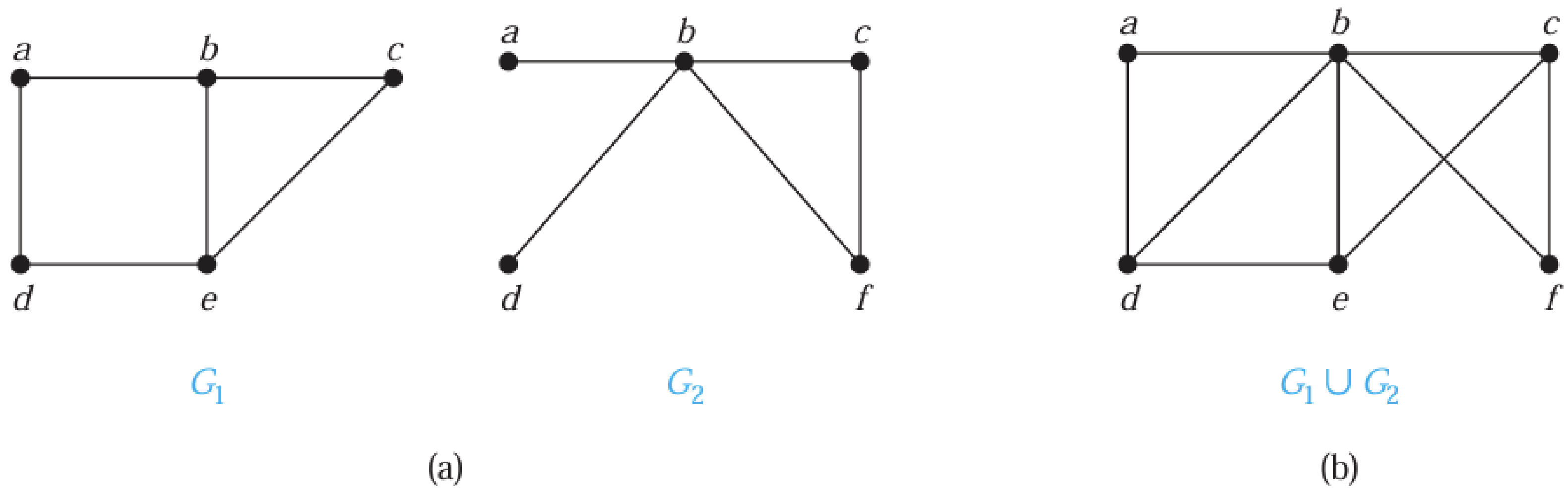
- Buatlah sebuah subgraf dari graf sederhana berikut!
  Tentukan pula komplemen dari subgraf yang sudah dibuat!



Subgraf dan Komplemen

D

Misalkan terdapat Graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$. ***Gabungan dari graf G_1 dan G_2***, dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan himpunan titik $V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E_1 \cup E_2$.

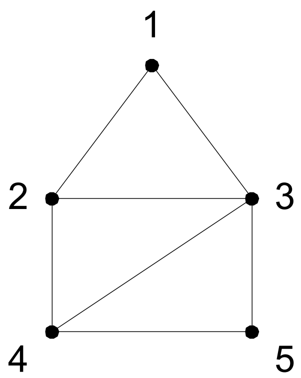


Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 664)**

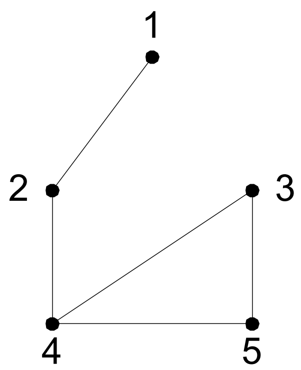
Subgraf Merentang (Spanning Subgraph)

D

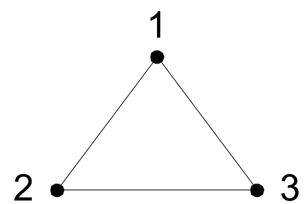
Subgraf $G_1 = (V_1, E_1)$ dari $G = (V, E)$ dikatakan **subgraf merentang** jika $V_1 = V$ (yaitu G_1 **mengandung semua simpul** dari G).



(a)



(b)



(c)

Keterangan :

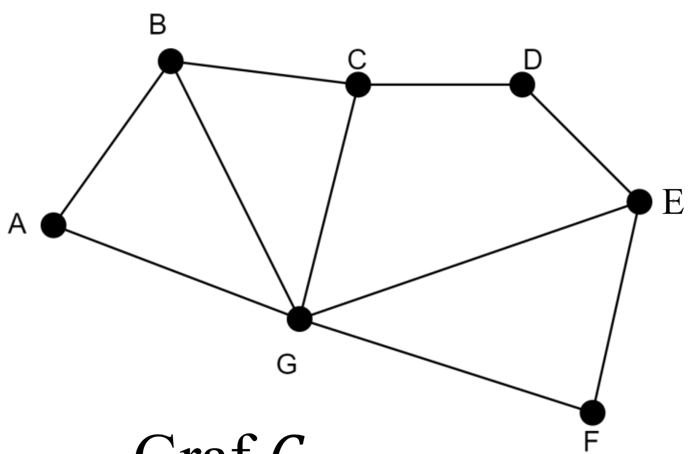
(a) Graf G

(b) Graf G_1 yang merupakan subgraf merentang dari G

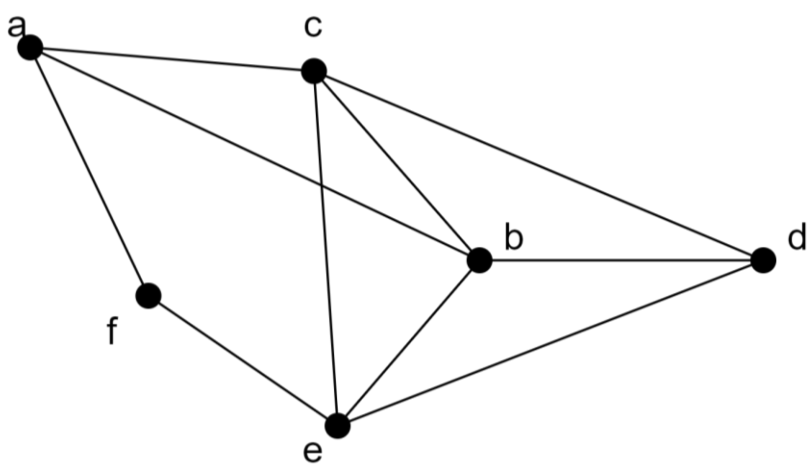
(c) Graf G_2, bukan subgraf merentang dari G

Subgraf Merentang (Spanning Subgraph)

Tentukan subgraf merentang (*spanning subgraph)* dari graf sederhana berikut:



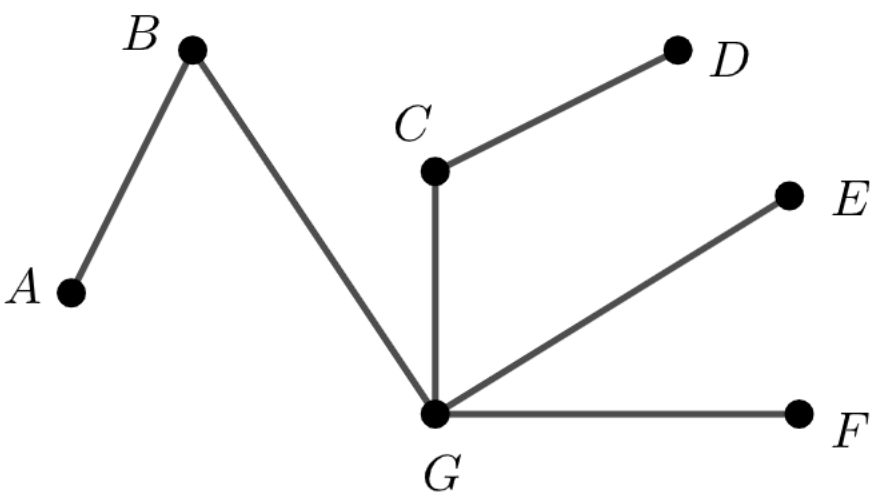
Graf G_1



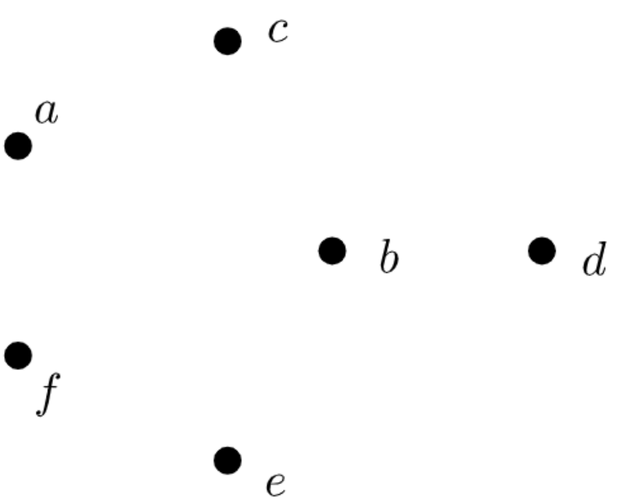
Graf G_2

Subgraf Merentang (Spanning Subgraph)

Ada banyak kemungkinan subgraf merentang (*spanning subgraph)* yang bisa dibentuk/pilih. Diantaranya adalah sebagai berikut :



Subgraf merentang dari graf G_1



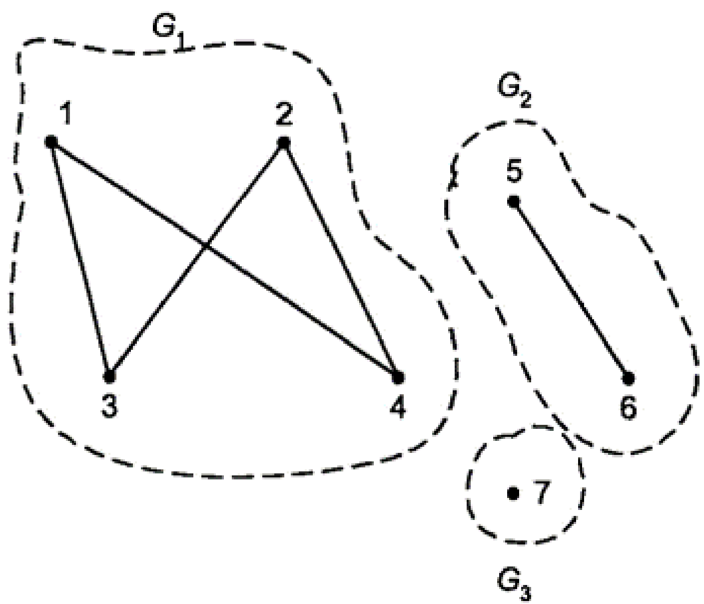
Subgraf merentang dari graf G_2

Komponen Graf

Jika G adalah graf tidak berarah dan tidak terhubung, maka graf G terdiri atas beberapa komponen terhubung *(connected component)*.

D

Komponen terhubung dari suatu graf G adalah subgraf terhubung dari graf G yang bukan merupakan subgraph sejati dari subgraf terhubung lainnya (yang tidak terdapat di dalam subgraf terhubung dari G lainnya).



Ini berarti setiap komponen terhubung dalam graf G saling lepas (disjoint). Ada 3 komponen dari graf G

Komponen Graf

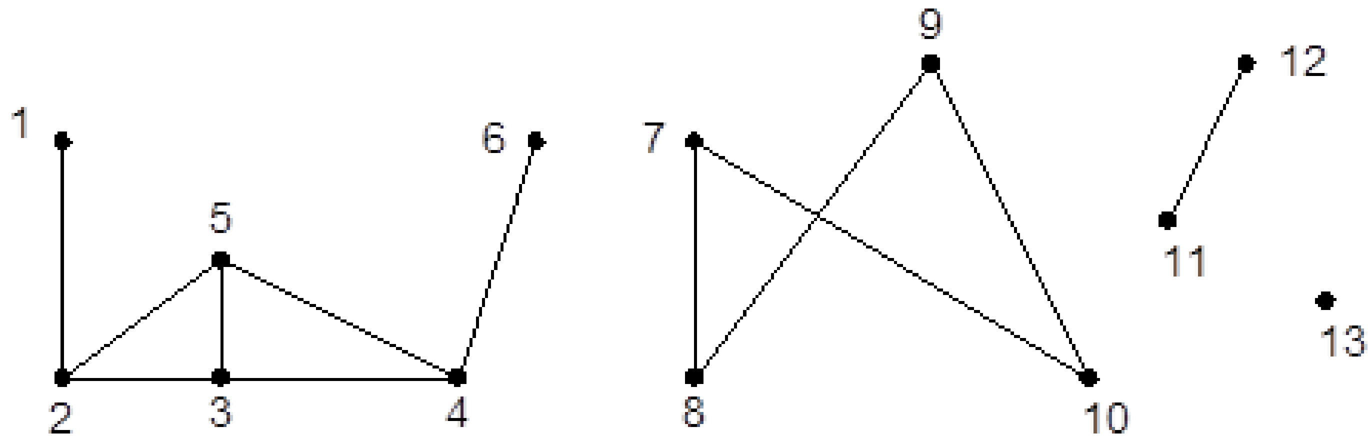
Untuk graf berikut, terdapat 4 buah komponen terhubung dalam graf G, yaitu:

a. $G_1 = (V_1, E_1)$ dengan $V_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $E_1 = \{(1,2), (2,5), (2,3), (3,4), (3,4), (4,5), (4,6)\}$

b. $G_2 = (V_2, E_2)$ dengan $V_2 = \{7,8,9,10\}$ dan $E_2 = \{(7,8), (7,10), (8,9), (9,10)\}$

c. $G_3 = (V_3, E_3)$ dengan $V_3 = \{11,12\}$ dan $E_3 = \{(11,12)\}$

d. $G_4 = (V_4, E_4)$ dengan $V_4 = \{13\}$ dan $E_4 = \{\}$



Graf G terdiri dari 4 komponen

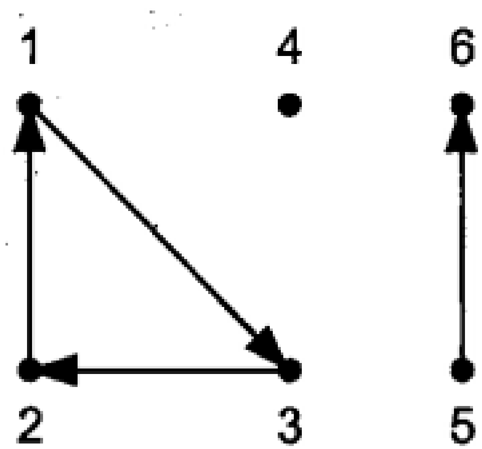
Komponen

D

Pada graf berarah.

Misalkan *G* adalah graf berarah yang terhubung kuat.

Komponen terhubung kuat ***(strongly connected component)*** *dari G* adalah subgraf terhubung-kuat dari graf G yang tidak terdapat dalam subgraf terhubung-kuat dari *G* yang lebih besar.



Keterangan :

Graf berikut memiliki dua buah komponen terhubung kuat, yaitu

- subgraf dengan simpul 1,2,3 dan
- subpgraf yang hanya memiliki satu simpul, simpul 4.

Latihan

1) Tanpa menggambar grafnya, tentukan komponen terhubung dari $G = (V, E)$ yang dalam hal ini $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $E = \{(a, d), (c, d)\}$!

2) Tanpa menggambar grafnya, tentukan komponen terhubung dari $G = (V, E)$ yang dalam hal ini $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan $E = \{(a, f), (b, c), (f, g)\}$!

Latihan

Tanpa menggambar grafnya, tentukan komponen terhubung dari G = (V, E) yang dalam hal ini V = {a, b, c, d, e, f} dan E = {(a, d), (c, d)}!

Penyelesaian Soal 1:

Simpul a bertetangga dengan d, sedangkan d bertetangga dengan c, ini berarti a juga terhubung dengan c. Simpul lainnya merupakan simpul terpencil.

Dengan demikian, ada 4 buah komponen terhubung dalam graf G, yaitu

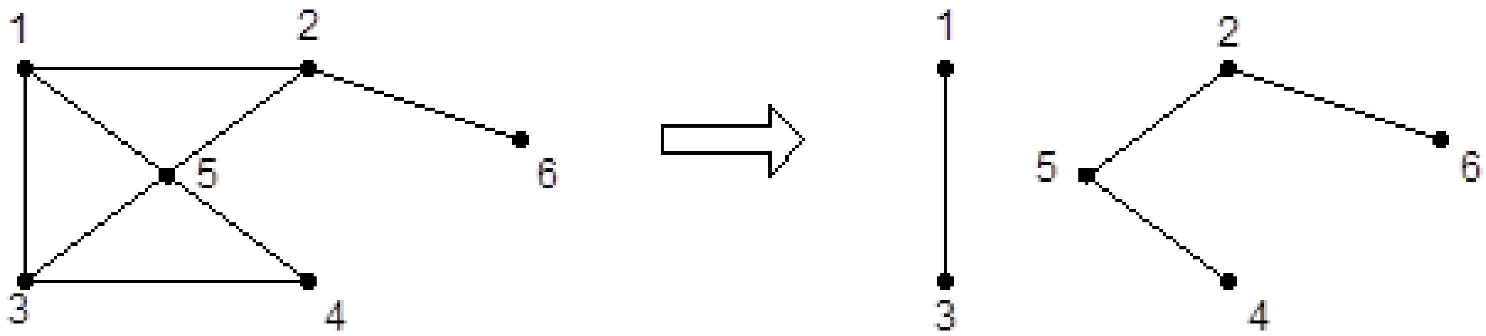
- $G_1 = (V_1, E_1)$ dengan V_1 = {a, c, d} dan E_1 = {(a, d), (c, d)}
- $G_2 = (V_2, E_2)$ dengan V_2 = {b} dan E_2 = {}
- $G_3 = (V_3, E_3)$ dengan V_3 = {e} dan E_3 = {}
- $G_4 = (V_4, E_4)$ dengan V_4 = {f} dan E_4 = {}

Himpunan Pemisah (Cut-Set)

D

Himpunan Pemisah *(Cut-set)* dari graf terhubung *G* adalah **himpunan titik atau sisi yang bila dibuang** dari *G* menyebabkan *G* **tidak terhubung**.
Himpunan titik yang demikian disebut himpunan titik pemisah (cut vertex).
Himpunan sisi yang demikian disebut himpunan sisi pemisah (cut edge).

Nama lain untuk himpunan sisi pemisah adalah **jembatan/bridge**.



Himpunan {(1,5)} adalah himpunan sisi pemisah.
Apa himpunan sisi pemisah lainnya ? Coba sebutkan ! Berikan contoh himpunan titik pemisah pada graf tersebut!

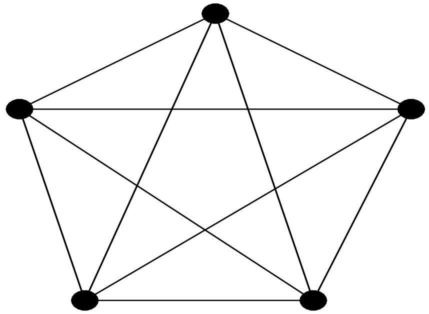
Himpunan Pemisah (Cut-Set)

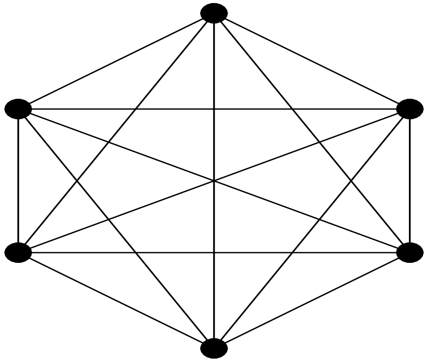
N

Ada contoh graf yang tidak memiliki himpunan titik pemisah, yaitu graf lengkap K_n (definisi diberikan di halaman mengenai contoh graf sederhana).

D

Graf yang tidak memiliki himpunan titik pemisah, disebut *non-separable graph*.

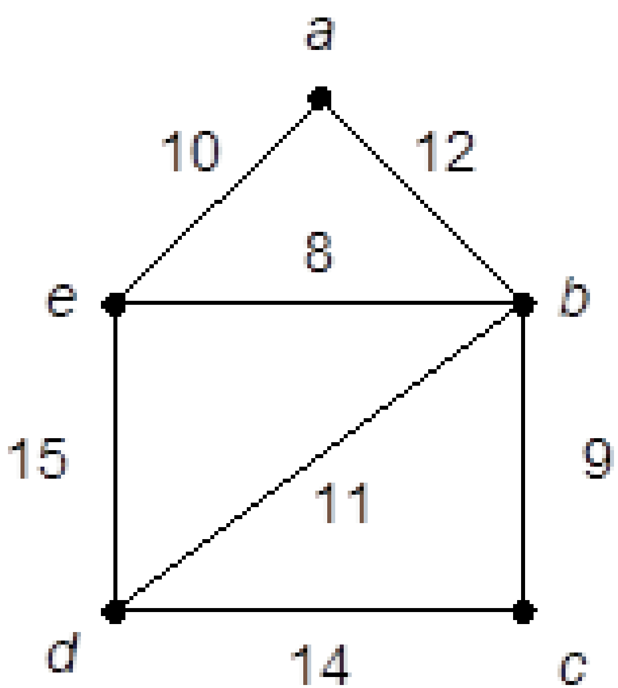




Graf Berbobot *(Weighted Graph)*

D

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).



Bobot pada setiap sisi di graf dapat berbeda-beda tergantung pada masalah yang dimodelkan dengan graf tersebut.

Bobot dapat menyatakan jarak, biaya perjalanan, waktu tempuh, ongkos produksi, dsb.

Ringkasan

- Subgraf
- Komplemen subgraf
- Subgraf Merentang
- Himpunan Pemisah
- Graf Berbobot

Graf Sederhana *Khusus*

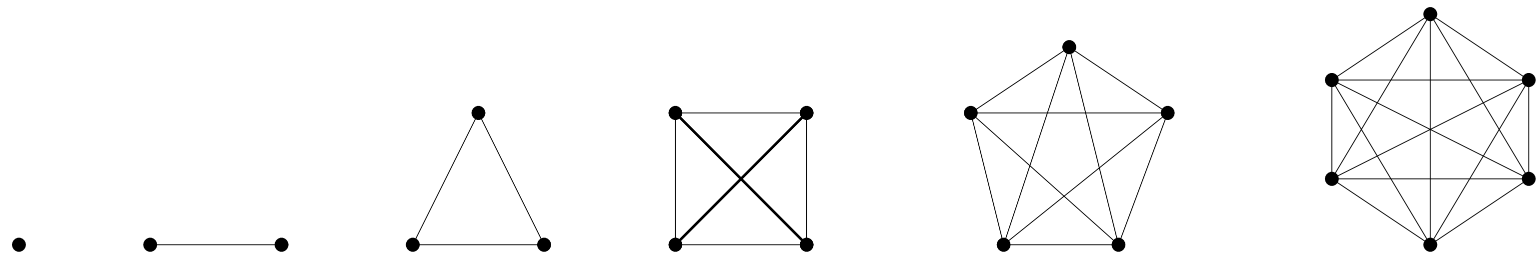
Ada beberapa graf sederhana khusus yang dijumpai pada beragam permasalahan yang dimodelkan dengan menggunakan graf, antara lain:

1. Graf Lengkap / Complete Graph
2. Graf Lingkaran
3. Graf Teratur / Regular Graph
4. Graf Bipartit / Bipartite Graph

Graf Lengkap *(Complete Graph)*

D

Graf lengkap adalah graf sederhana yang **setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya.** Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

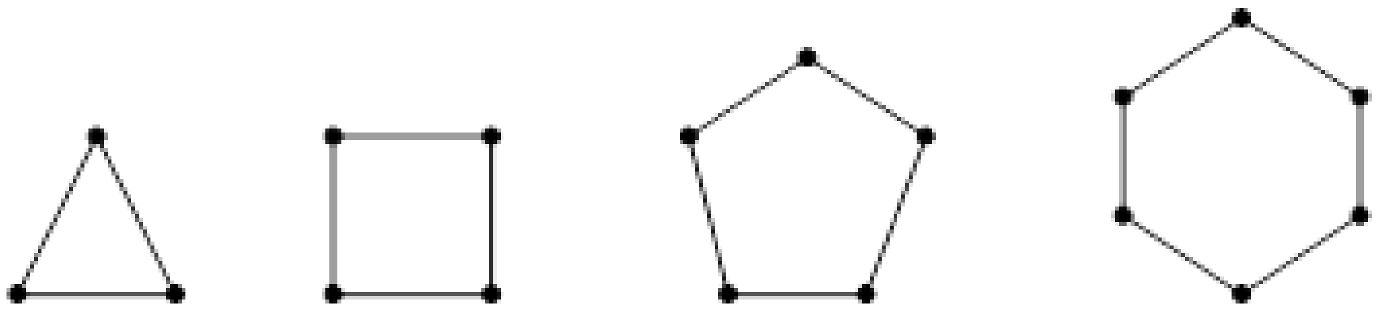
Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah

$n(n - 1)/2$.

Graf Lingkaran *(Cycle Graph)*

D

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap **simpulnya berderajat dua**. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n.

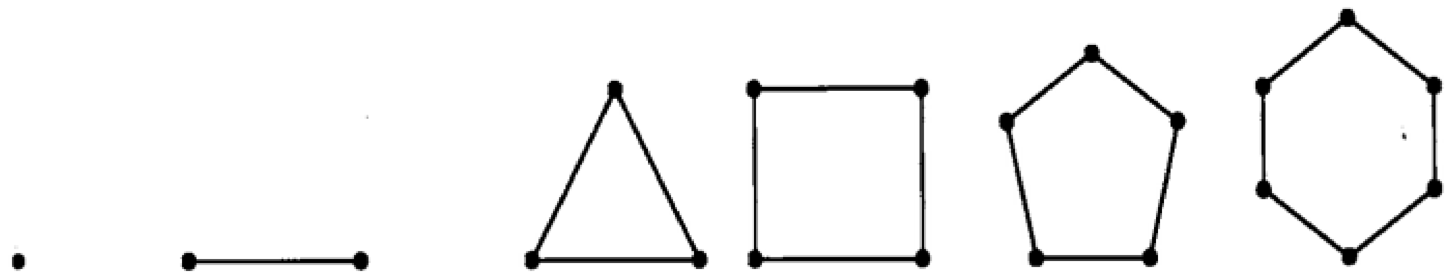


Graf Teratur *(Regular Graph)*

D

Graf teratur adalah Graf yang **setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama** disebut **graf teratur**.

Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai **Graf r-teratur.**



(i) Derajat 0 (ii) Derajat 1 (iii) Derajat 2

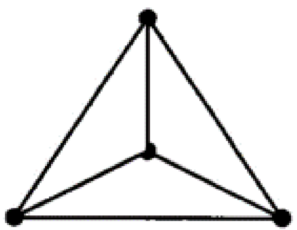
Jumlah sisi pada graf teratur dengan derajat r dan n buah simpul adalah $nr/2$.

Graf Teratur *(Regular Graph)*

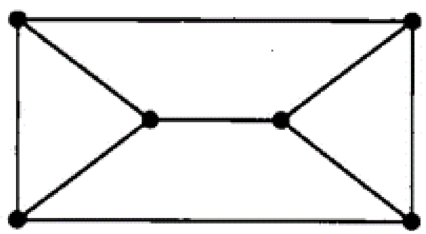
D

Graf teratur adalah Graf yang **setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama** disebut **graf teratur**.

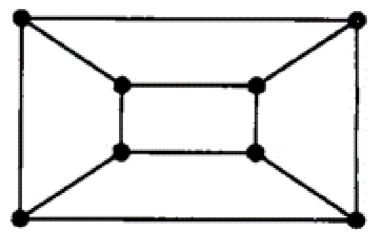
Apabila derajat setiap simpul adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai **Graf *r*-teratur.**



(i) $n = 4, r = 3$



(ii) $n = 6, r = 3$



(iii) $n = 8, r = 3$

Jumlah sisi pada graf teratur dengan derajat r dan n buah simpul adalah $nr/2$.

Latihan

1. Berapakah jumlah sisi pada graf K_{13}, K_{15}, K_{17}, dan K_{20}?
2. Gambarkan graf C_8, C_9, C_{10}!
3. Berapakah jumlah sisi pada graf teratur dengan
   – 5 simpul, derajat 4
   – 7 simpul, derajat 6

Catatan : Jawaban no 1 dan 3 bisa dicari langsung dari rumus jumlah sisi pada graf. No 2 bisa dikerjakan dengan melihat definisi graf lingkaran C_n

Latihan

Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama sehingga setiap simpul berderajat ≥ 4 ?

Latihan

Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 16 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama sehingga setiap simpul berderajat ≥ 4 ?

Jawaban:

- Tiap simpul berderajat sama → graf teratur. Misalkan n adalah banyak titik dan e adalah banyak sisi.
- Jumlah sisi pada graf teratur berderajat r adalah $e = nr/2$.
- Jadi, $n = 2e/r = (2)(16)/r = 32/r$.
- Untuk $r = 4$, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah maksimum, yaitu $n = 32/4 = 8$.
- Untuk r yang lain ($r > 4$ dan r merupakan pembagi bilangan bulat dari 32):
  $r = 8$ → $n = 32/8 = 4$ → tidak mungkin membuat graf sederhana.
  $r = 16$ → $n = 32/16 = 2$ → tidak mungkin membuat graf sederhana.
- $r = 32$ → $n = 32/32 = 1$ → tidak mungkin membuat graf sederhana.
- Jadi, jumlah simpul yang dapat dibuat adalah 8 buah (maksimum dan minimum).

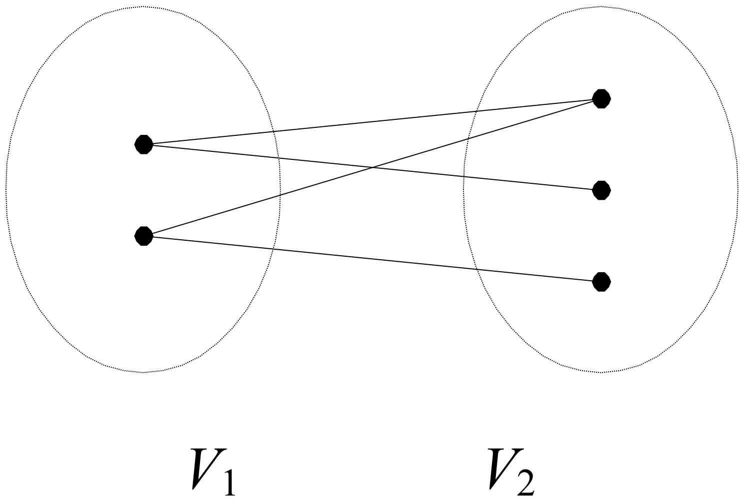
Latihan

Berapa jumlah maksimum dan jumlah minimum simpul pada graf sederhana yang mempunyai 12 buah sisi dan tiap simpul berderajat sama sehingga tiap simpul berderajat ≥ 3 ?

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

D

Graf G yang himpunan simpulnya **dapat dipisah menjadi dua himpunan bagian yaitu V_1 dan V_2**, sedemikian sehingga setiap sisi di G menghubungkan suatu simpul di V_1 ke simpul di V_2 disebut **graf bipartit** dan dinyatakan sebagai $G(V_1, V_2)$.

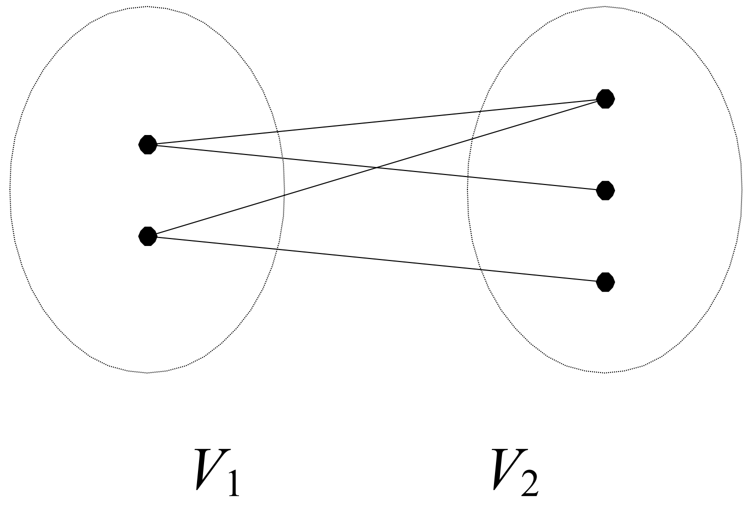


Dalam hal ini, tidak boleh ada sisi yang menghubungkan dua simpul di himpunan bagian yang sama

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

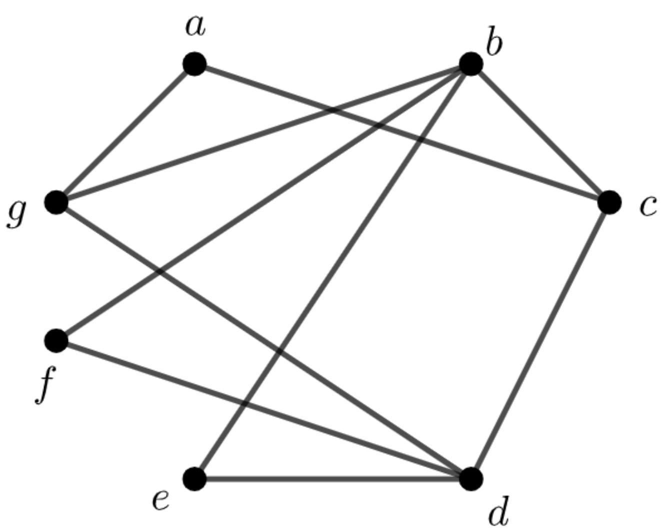
T

Graf sederhana G adalah **graf bipartit** jika dan hanya jika graf G tersebut dapat diwarnai menjadi dua warna sedemikian sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga dengan warna yang sama.

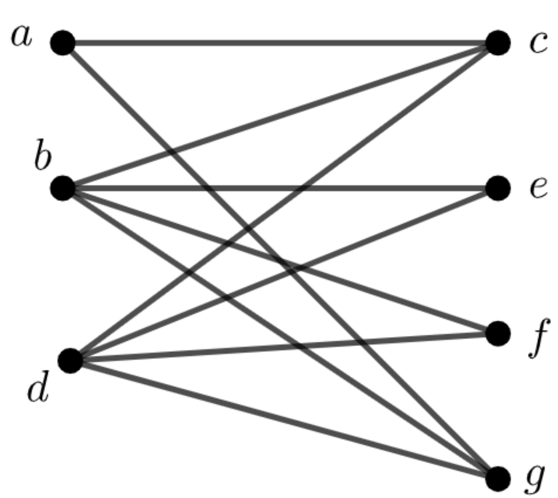


Graf Bipartit (Bipartite Graph)

Graf G di bawah ini adalah graf bipartit, karena simpul-simpunya dapat dibagi menjadi $V_1 = \{a, b, d\}$ dan $V_2 = \{c, e, f, g\}$ dan setiap sisinya menghubungkan simpul di V_1 ke simpul di V_2.



Graf G

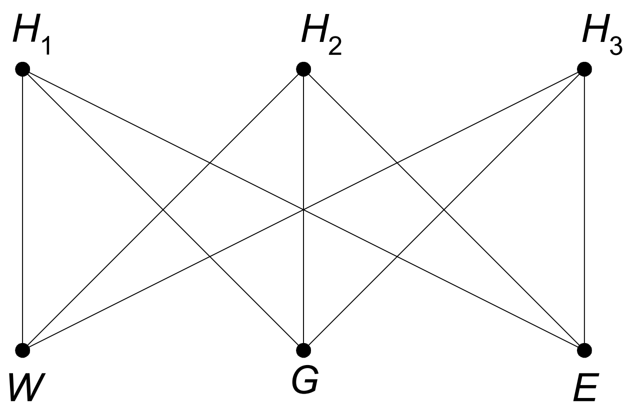


Graf bipartit G

Berikan contoh graf bipartite lainnya!

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

Contoh persoalan yang dapat dinyatakan dengan menggunakan graf bipartit adalah persoalan utilitas. Misalkan ada n buah rumah dan masing-masing rumah akan dihubungkan dengan tiga buah utilitas – air (W), gas (G), dan listrik (E) – dengan alat pengantar berupa pipa, kabel, dsb. Maka graf bipartit yang digunakan adalah graf $K_{3,n}$.

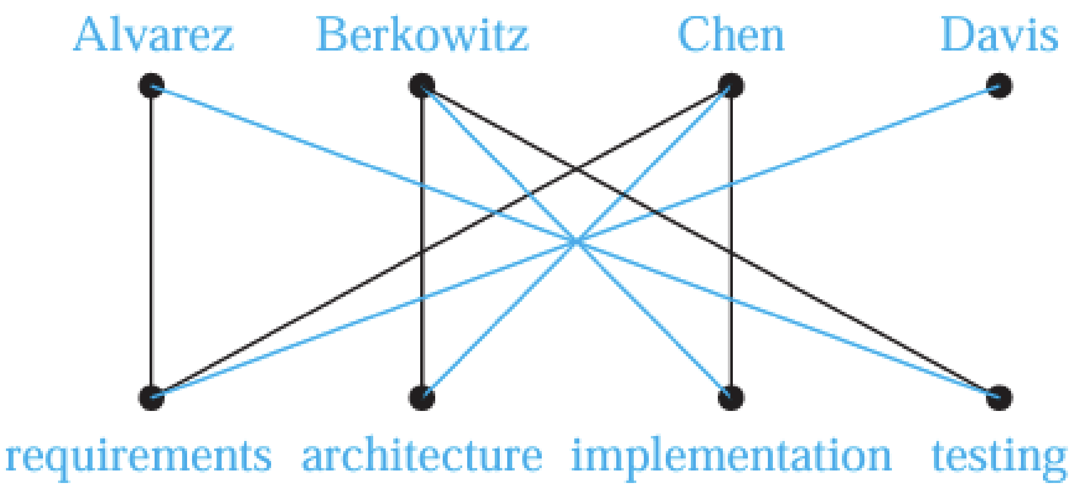


graf persoalan utilitas ($K_{3,3}$),

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

C

Graf Bipartit dapat digunakan untuk memodelkan permasalahan terkait penugasan kerja.
Misalkan :
Terdapat 4 pekerja dalam suatu tim, Bernama Alvarez; Berkowitz; Chen; dan Davis. Kemudian terdapat 4 jenis pekerjaan agar Projek 1 bisa terselesaikan yaitu *Requirements; Architectur; Implementation; dan Testing*. Dalam hal ini, Alvarez diberikan training sehingga bisa mengerjakan *requirements* dan *testing*; Berkowitz dapat mengerjakan *architecture, implementation,* dan *testing*; Chen dapat mengerjakan *requirements, architecture*, dan *implementation*; serta Davis hanya bisa mengerjakan *requirements*.
Permasalahan ini dapat digambarkan menjadi suatu graf bipartite sebagai berikut

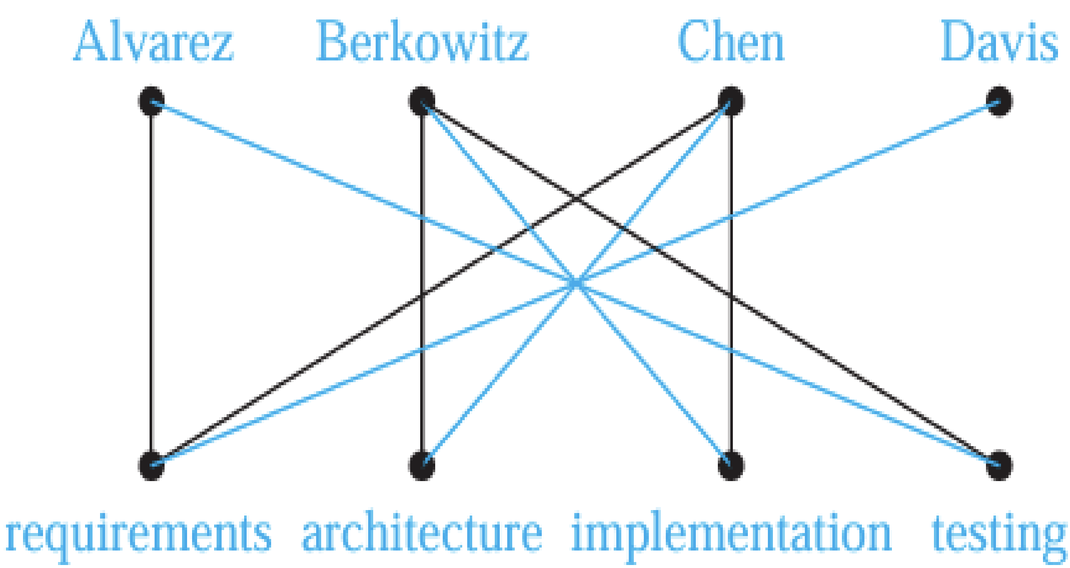


Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 659)**

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

C

Untuk menyelesaikan Projek 1, kita perlu menugaskan pekerja sehingga setiap pekerjaan dapat dikerjakan oleh seorang pekerja dan tidak ada pekerja yang ditugaskan untuk melakukan lebih dari satu jenis pekerjaan. Hubungan penugasan tersebut dapat dilihat dari **ketetanggaan graf bipartit berikut** yang ditandai dengan sisi **berwarna biru.**

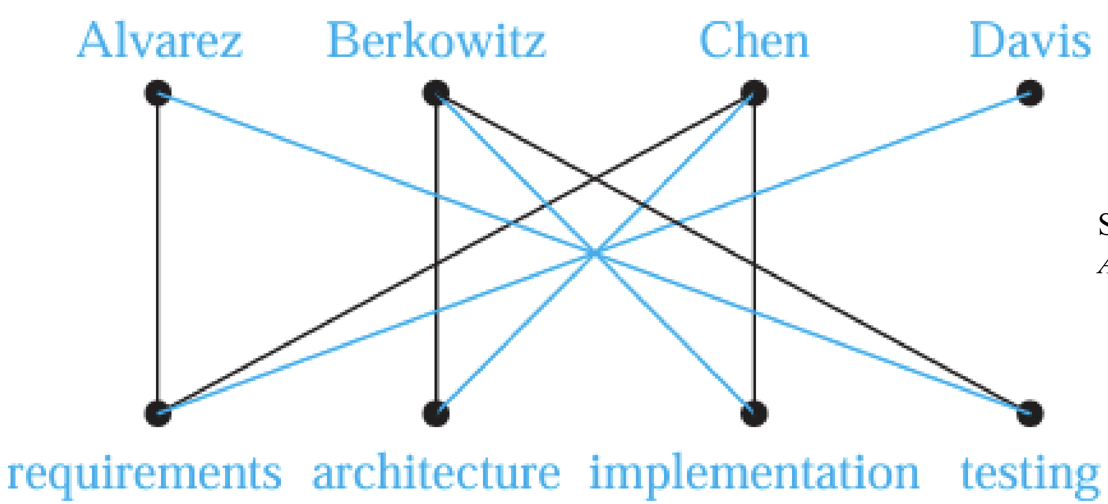


Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 659)**

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

D

Misalkan diberikan graf sederhana $G = (V, E)$. Suatu himpunan M disebut ***matching*** jika M adalah subhimpunan dari E sehingga tidak ada dua sisi berbeda di M yang bersisian dengan titik/simpul yang sama.

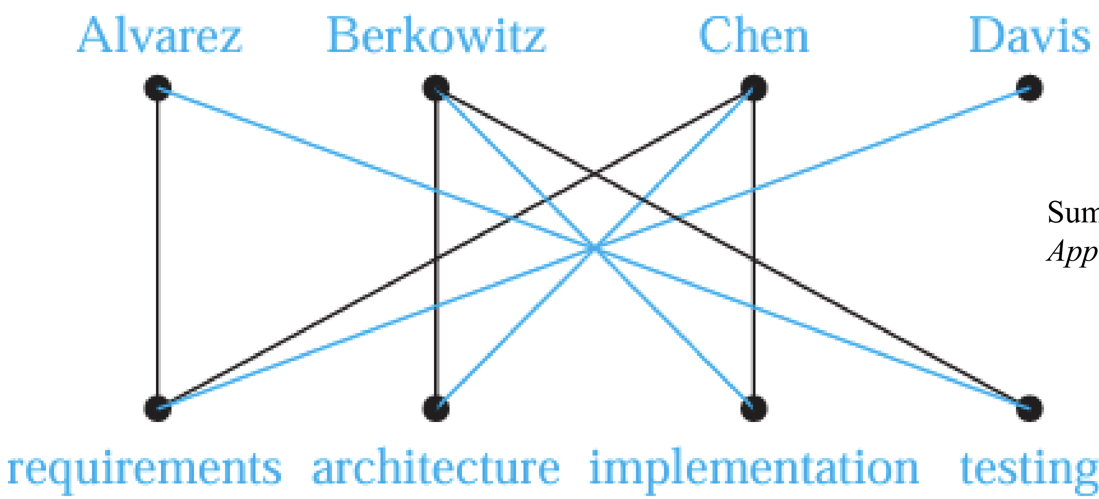


Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 659)**

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

D

Misalkan diberikan graf sederhana $G = (V, E)$. Suatu himpunan M disebut ***Maximum Matching*** jika M adalah matching dari G dengan banyak sisi terbesar.

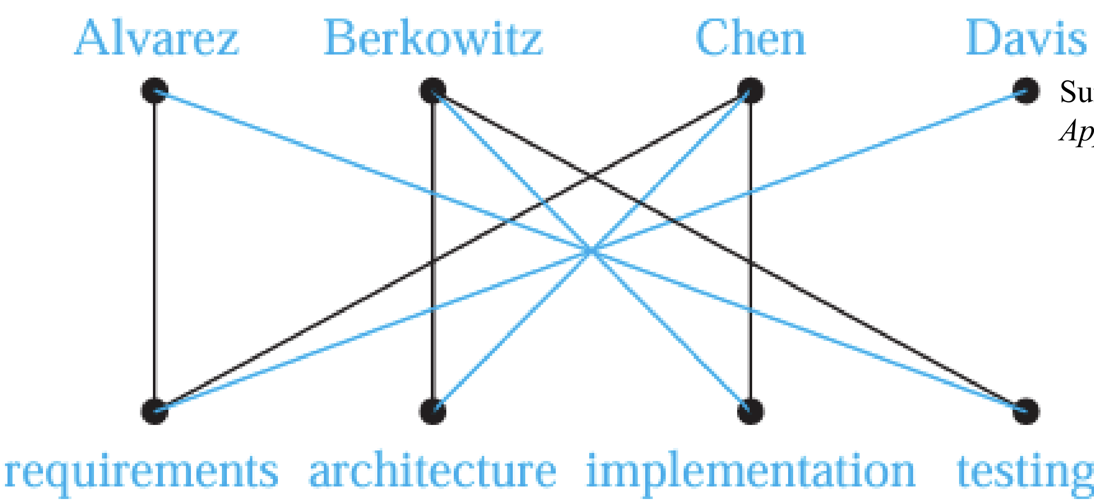


Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 659)**

Graf Bipartit (Bipartite Graph)

D

Misalkan diberikan graf sederhana $G = (V, E)$ adalah bipartite dengan himpunan partisi V_1 dan V_2. Suatu matching M disebut ***Complete Matching*** jika setiap titik di V_1 adalah titik ujung dari suatu sisi yang merupakan anggota/elemen dari matching M. Dengan kata lain, $|M| = |V_1|$



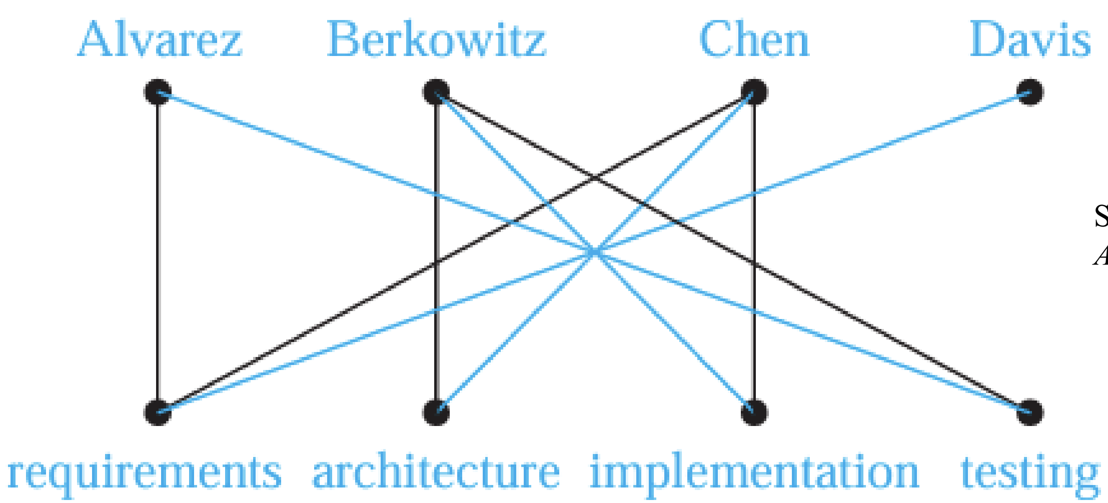
Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 659)**

Apa syarat cukup dan perlu graf G merupakan *Complete Matching*?

T

Graf bipartite $G = (V, E)$ dengan bipartisi (V_1, V_2) memiliki *Complete matching* **jika dan hanya jika** $|\boldsymbol{N}(\boldsymbol{A})| \geq |\boldsymbol{A}|$ untuk **setiap subhimpunan** $\boldsymbol{A}$ **dari** $\boldsymbol{V_1}$**.**

$N(A)$ merupakan himpunan semua tetangga dari setiap titik yang merupakan anggota/elemen dari A



Sumber : K.H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications,* edisi 7 **(hal 659)**