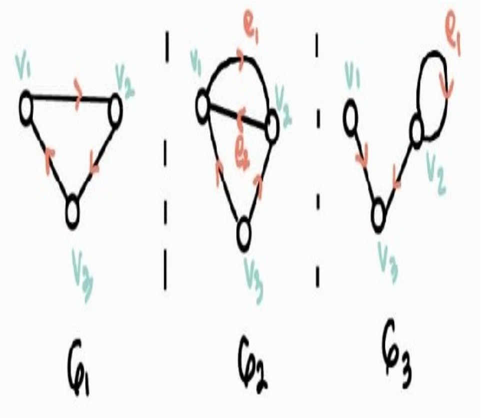
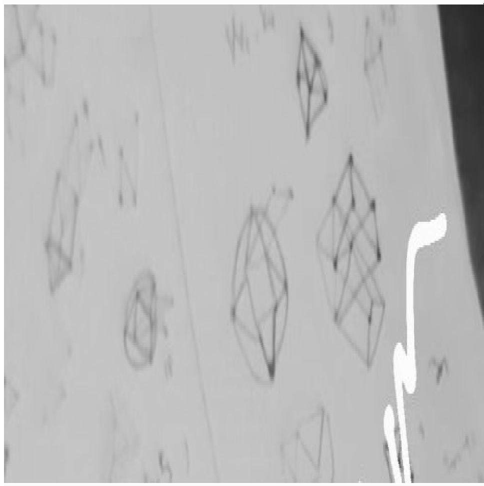
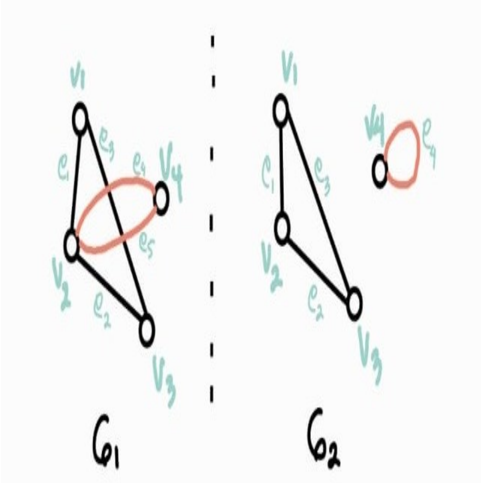
Struktur Diskrit Minggu Ke-10

PAIK6105





TEORI GRAF



Departemen Informatika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Diponegoro

Outline

Representasi Graf

Isomorfisma Graf

Review Materi Sebelumnya

The **distance** between two distinct vertices v_1 and v_2 of a connected simple graph is the length (number of edges) of the shortest path between v_1 and v_2. The **radius** of a graph is the minimum over all vertices v of the maximum distance from v to another vertex. The **diameter** of a graph is the maximum distance between two distinct vertices. Find the radius and diameter of

a) K_6. **b)** $K_{4,5}$. **c)** Q_3. **d)** C_6.

Representasi Graf

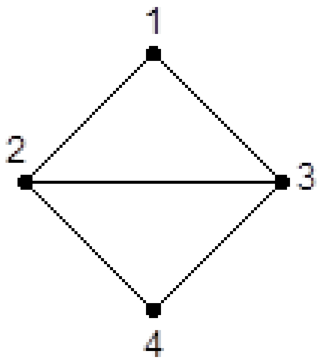
Beberapa macam cara yang dapat digunakan untuk merepresentasikan graf, antara lain:

1. Matriks ketetanggaan (adjacency matrix)
2. Matriks bersisian (incidency matrix)
3. Senarai ketetanggaan (adjacency list)

Adjacency Matrix

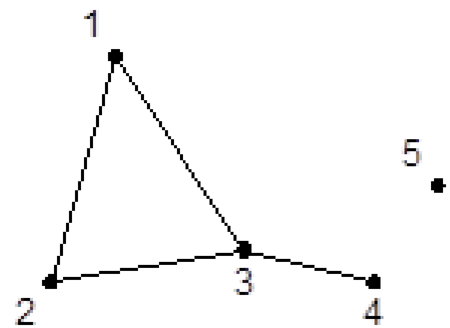
- Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul, $n \geq 1$, maka adjacency matrix dari graf G adalah matrix dengan ukuran $n \times n$. Bila matrix tersebut $A = [a_{ij}]$, maka :
- $A = [a_{ij}] \rightarrow a_{ij} \begin{cases} 1, jika\ simpul\ i\ dan\ j\ bertetangga \\ 0, jika\ simpul\ i\ dan\ j\ tidak\ bertetangga \end{cases}$
- Adjacency matrix juga disebut sebagai zero-one matrix jika hanya berisi 0 dan 1.
- Adjacency matrix untuk graf sederhana dan tidak berarah selalu simetris, sedangkan untuk graf berarah, matrix-nya belum tentu simetris.

Adjacency Matrix



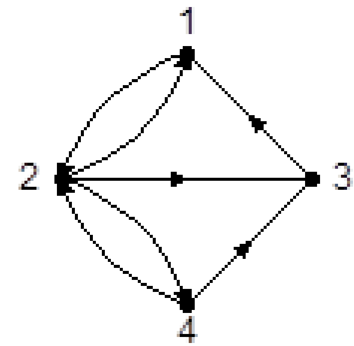
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a)



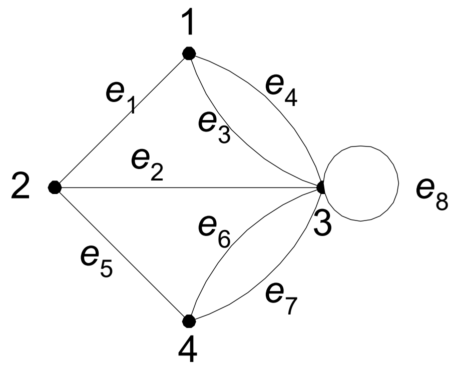
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c)



$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Adjacency Matrix

- Zero-one matrix tidak dapat digunakan untuk merepresentasikan graf yang memiliki sisi ganda (graf ganda). Untuk graf ganda, maka pada adjacency matrix berisi jumlah sisi yang berasosiasi pada simpul yang memiliki sisi ganda.
- Untuk graf semu, loop pada simpul v_i dinyatakan dengan nilai 1 pada posisi *(i, i)* di adjacency matrix-nya.

Adjacency Matrix

- Adjacency matrix juga bisa digunakan untuk menghitung derajat tiap simpul *i*.
- Untuk graf sederhana tak-berarah

$$d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

- Untuk graf berarah

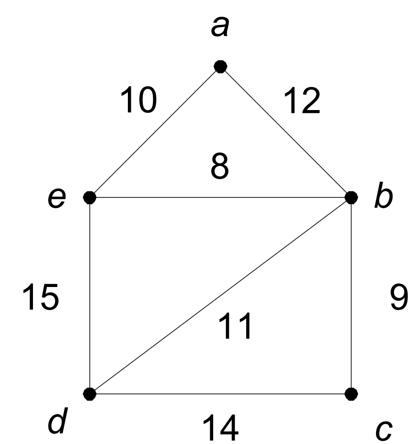
$$d_{in}(v_j) = \text{jumlah nilai pada kolom } j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

$$d_{out}(v_i) = \text{jumlah nilai pada baris } i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Adjacency Matrix

- Untuk graf berbobot, elemen pada matrix menyatakan bobot tiap sisi yang menghubungkan masing-masing simpulnya.
- Tanda "∞" menyatakan bahwa tidak sisi dari simpul i ke simpul j, sehingga a_{ij} dapat diberi nilai tak terbatas.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \quad a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{bmatrix}
\infty & 12 & \infty & \infty & 10 \\
12 & \infty & 9 & 11 & 8 \\
\infty & 9 & \infty & 14 & \infty \\
\infty & 11 & 14 & \infty & 15 \\
10 & 8 & \infty & 15 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

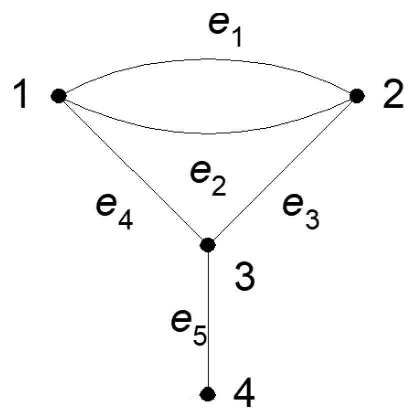


Incidency Matrix

- Bila matriks ketetanggaan menyatakan ketetanggaan simpul-simpul di dalam graf, maka matriks bersisian menyatakan kebersisian simpul dengan sisi.
- Misalkan G= (V,E) adalah graf dengan n simpul dan m buah sisi, Matriks bersisian G adalah matriks yang berukuran n x m. Baris menunjukkan label simpul, sedangkan kolom menunjukkan label sisinya.
- Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka:
- $A = [a_{ij}] \rightarrow a_{ij} \begin{cases} 1, jika\ simpul\ i\ bersisian\ dengan\ sisi\ j \\ 0, jika\ simpul\ i\ tidak\ bersisian\ dengan\ sisi\ j \end{cases}$

Incidency Matrix

- Matriks bersisian dapat digunakan untuk merepresentasikan graf yang mengandung sisi ganda atau sisi gelang.
- Derajat setiap simpul i dapat dihitung dengan menghitung jumlah seluruh elemen pada baris i (kecuali pada graf yang mengandung gelang).

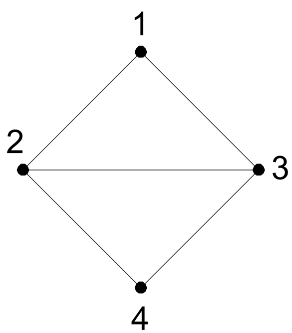


$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Adjacency List

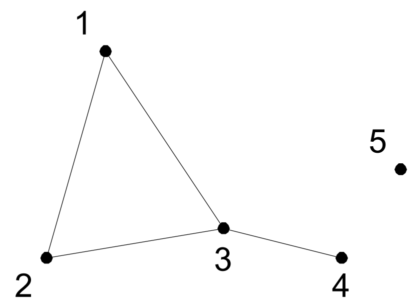
- Adjacency list menjadi alternatif dari adjacency matrix karena alasan implementasinya dalam pemrograman/komputer. Ketika graf hanya memiliki sedikit sisi, maka matrix-nya akan bersifat sparse (jarang), yaitu matrix mengandung banyak elemen bernilai nol.
- Adjacency list mengenumerasi simpul-simpul yang bertetangga dengan setiap simpul dalam graf.

Adjacency List



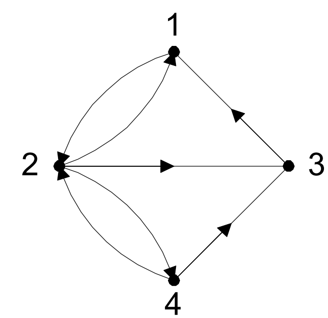
Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2, 4
4	2, 3

(a)



Simpul	Simpul Tetangga
1	2, 3
2	1, 3
3	1, 2, 4
4	3
5	-

(b)

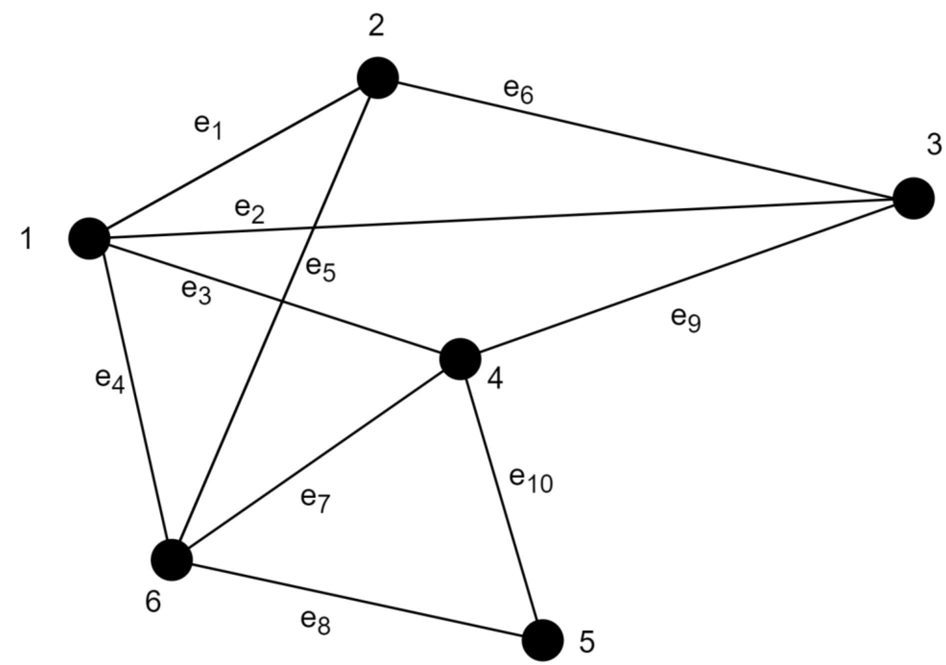


Simpul	Simpul Terminal
1	2
2	1, 3, 4
3	1
4	2, 3

(c)

Latihan

- Buatlah adjacency matrix, incidency matrix, dan adjacency list untuk graf berikut!



Latihan

- Buatlah grafnya jika diketahui:

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	1	2
2	0	0	1	0	0	1
3	1	0	0	1	0	0
4	0	1	2	0	1	0
5	0	0	1	0	1	1
6	1	0	0	1	0	0

	a	b	c	d	e	F
a	∞	15	∞	17	∞	∞
b	15	∞	8	∞	22	∞
c	∞	8	∞	10	12	14
d	17	∞	10	∞	∞	∞
e	∞	22	12	∞	∞	7
f	∞	∞	14	∞	7	∞

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	1	0	0	1
3	0	0	1	1	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	1	1	0
6	0	0	0	0	1	0	1	0

a

b

c

Graf Isomorfis

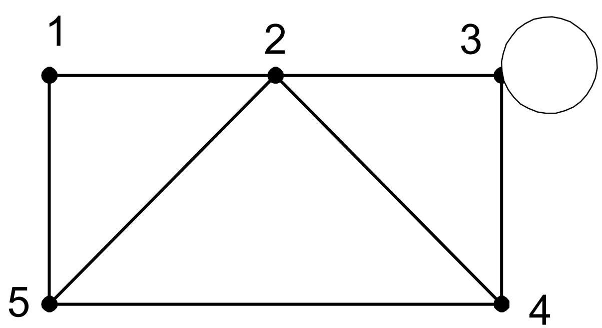
- Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah. Gambarkan dua buah graf yang yang bersesuaian dengan matriks tersebut.

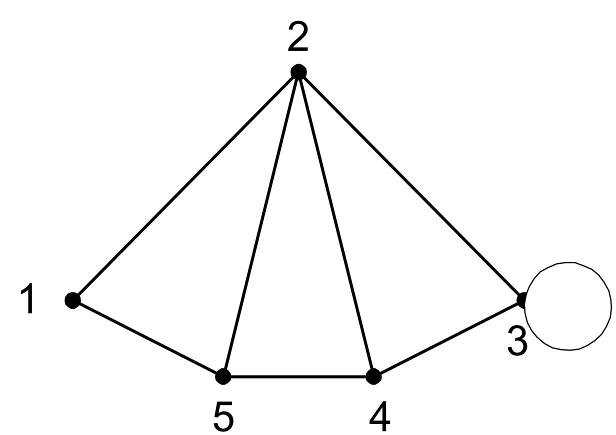
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Graf Isomorfis

- Diketahui matriks ketetanggaan (*adjacency matrices*) dari sebuah graf tidak berarah. Gambarkan dua buah graf yang yang bersesuaian dengan matriks tersebut.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$





Graf Isomorfis

$f : V_1 \longrightarrow V_2$

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dikatakan isomorfik jika terdapat suatu fungsi 1-1 (bijektif) dari V_1 ke V_2 sedemikian hingga:

titik $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ bertetangga di $\boldsymbol{G_1}$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{f(a)}$ dan $\boldsymbol{f(b)}$ bertetangga di $\boldsymbol{G_2}$, untuk setiap $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ di $\boldsymbol{V_1}$

sifat fungsi f yang mengawetkan ketetanggaan

tulisan bold highlight kuning merupakan properti / sifat fungsi f yang mengawetkan ketetanggaan

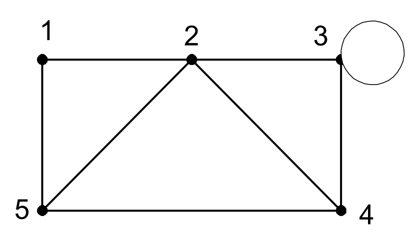
Graf Isomorfis

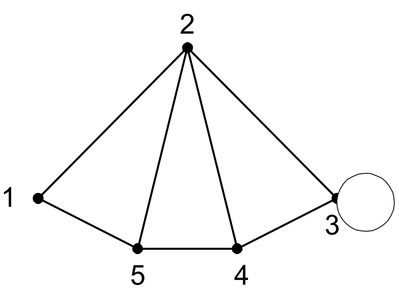
Dua buah graf yang sama (hanya penggambaran secara geometri berbeda) → **isomorfik**

Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul-simpul keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga hubungan kebersisian tetap terjaga.

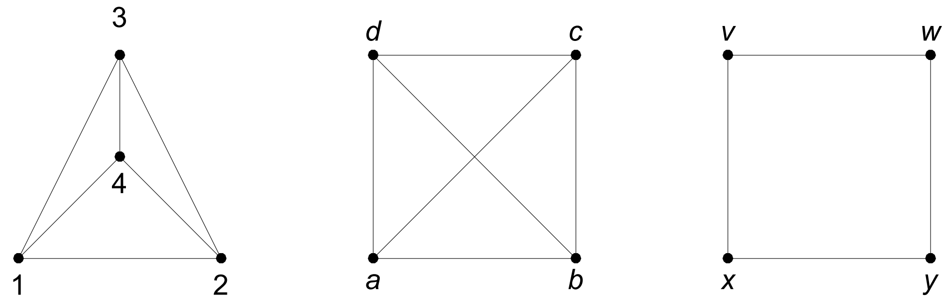
Dengan kata lain, misalkan sisi e bersisian dengan simpul u dan v di G_1, maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 harus bersisian dengan simpul u' dan v' yang di G_2.

Dua buah graf yang isomorfik adalah graf yang sama, kecuali penamaan simpul dan sisinya saja yang berbeda. Ini benar karena sebuah graf dapat digambarkan dalam banyak cara.



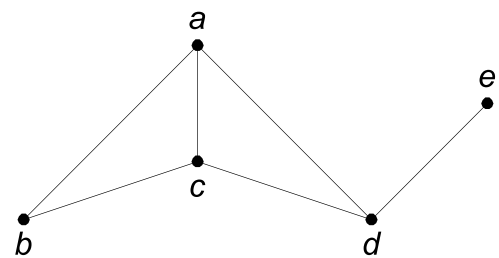


Graf Isomorfis

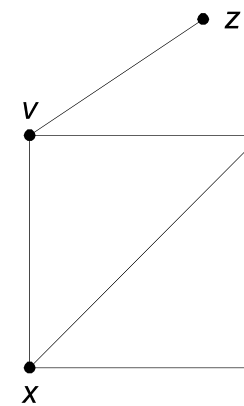


(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

Graf Isomorfis



(a) G_1



(b) G_2

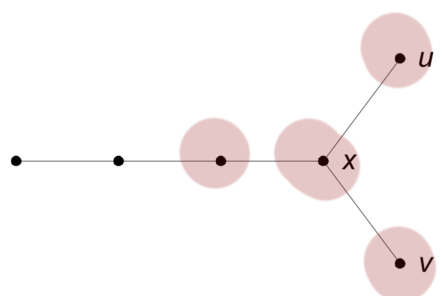
$$
A_{G1} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
A_{G2} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ w \\ v \\ z \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & w & v & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

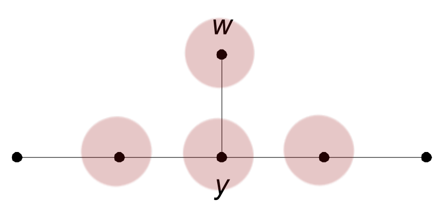
Graf Isomorfis

- Dari definisi graf isomorfik dapat dikemukakan bahwa dua buah graf isomorfik memenuhi ketiga syarat berikut [DEO74]:
- 1. Mempunyai jumlah simpul yang sama.
- 2. Mempunyai jumlah sisi yang sama
- 3. Mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu (memiliki barisan derajat yg sama)
- Namun, ketiga syarat ini ternyata belum cukup menjamin. Pemeriksaan secara visual perlu dilakukan.

Contoh:



(a)



(b)

Graf (a) tidak isomorfik dengan graf (b), walaupun

1. mempunyai jumlah simpul yang sama
2. mempunyai jumlah sisi yang sama
3. mempunyai jumlah simpul yang sama berderajat tertentu (mempunyai barisan derajat simpul yang sama) yaitu

   1 2 2 3 1 1.

Perhatikan bahwa pada graf (a), titik berderajat 3 bertetangga dengan titik-titik yang berderajat 2, 1, 1.

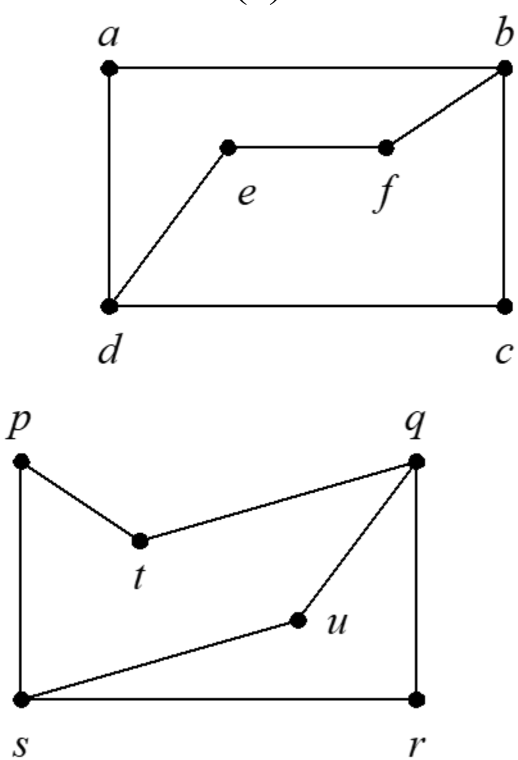
Sementara itu, pada graf (b), titik berderajat 3 bertetangga dengan titik-titik yang berderajat 2, 2, 1.

Akibatnya, graf (a) tidak isomorfik dengan graf (b). Karena tidak ada fungsi yang mengawetkan ketetanggaan.

#Latihan

Graf Isomorfis

- Apakah pasangan graf di bawah ini isomorfik?
- (a)



(b)