UNDIP | UNIVERSITAS DIPONEGORO
the excellent research university

ALJABAR LINIER

Ruang Hasil Kali Dalam

Etna Vianita, S.Mat., M.Mat.

MATERI PRA-UTS

1 Pengantar Aljabar Linier dan Penerapannya dalam Bidang Informatika

2 Konsep Dasar Vektor

3 Konsep Dasar Matriks

4 Konsep Transformasi Elementer

5 Determinan Matriks

6 Invers Matriks

7 Persamaan Linier

UNDIP UNIVERSITAS DIPONEGORO

MATERI POST-UTS

1 Konsep Dasar Ruang Vektor

2 Vektor Bebas Linier, Vektor Bergantung Linier, Kombinasi Linier

3 Basis dan Dimensi Ruang Vektor, Persamaan Garis dan Bidang Secara Vektor

4 Ruang Hasil Kali Dalam (Inner Product Space)

5 Transformasi Linier

6 Eigenvalue dan Eigenvector

7 Sistem Persamaan Differensial Linear Orde 1

RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD)

Sub Pokok Bahasan

- Definisi RHKD
- Himpunan Ortonormal
- Proses *Gramm Schmidt*

Aplikasi RHKD :

bermanfaat dalam beberapa metode optimasi,

seperti metode *least square* dalam peminimuman BER dalam berbagai bidang rekayasa.

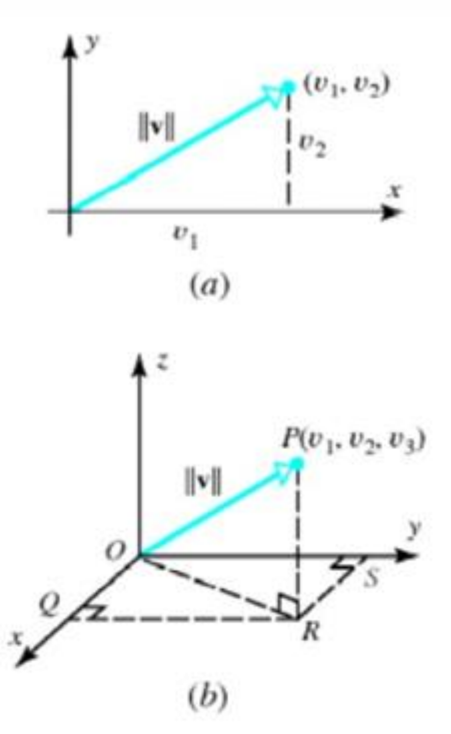
Bit Error Rate

0. RECALL!!

DEFINISI PANJANG (NORM) SEBUAH VEKTOR

Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor di $\mathbb{R}^n$, maka **norma** dari $\mathbf{v}$ (juga disebut **panjang** atau **magnitudo** dari $\mathbf{v}$) dilambangkan dengan $\|\mathbf{v}\|$, dan didefinisikan oleh rumus:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

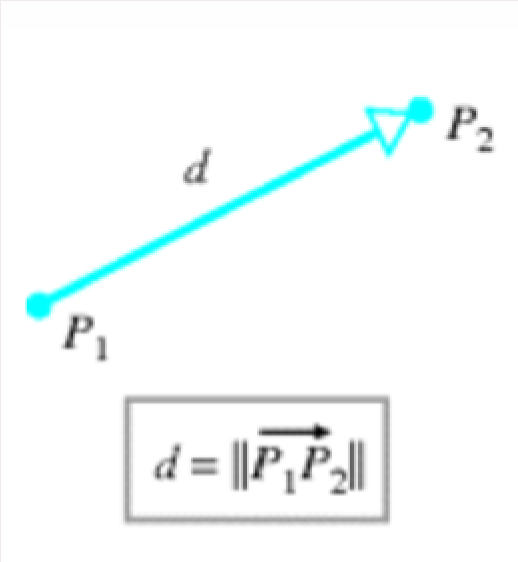


0. RECALL!!

DEFINISI JARAK (DISTANCE) DUA BUAH TITIK

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah titik-titik di $\mathbb{R}^n$, maka kita menandai **jarak** antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dengan $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dan mendefinisikannya sebagai:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$



UNDIP | UNIVERSITAS DIPONEGORO
the excellent research university

0. RECALL!!

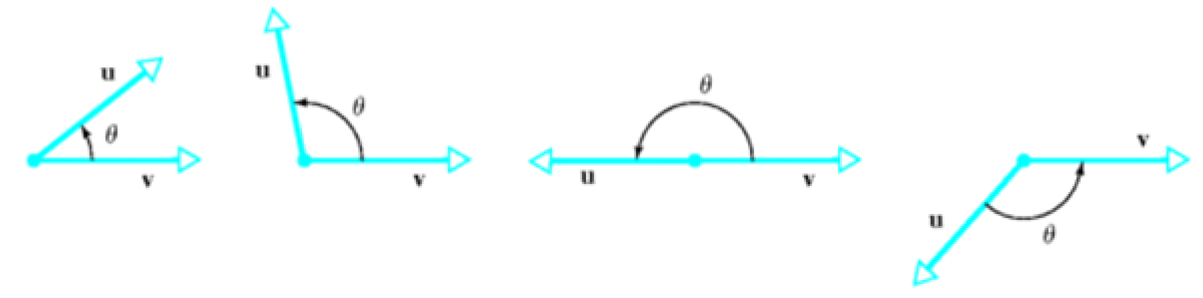
DEFINISI HASIL KALI TITIK (DOT PRODUCT)

Jika **u** dan **v** adalah vektor bukan nol di $\mathbb{R}^2$ atau $\mathbb{R}^3$, dan jika θ adalah sudut antara **u** dan **v**, maka hasil kali titik (juga disebut hasil kali dalam Euclidean) dari **u** dan **v** dilambangkan dengan **u** · **v** dan didefinisikan sebagai

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

Jika $\mathbf{u} = 0$ atau $\mathbf{v} = 0$, maka kita mendefinisikan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ menjadi 0.

(Secara geometris)



The angle θ between **u** and **v** satisfies $0 \le \theta \le \pi$.

0. RECALL!!

DEFINISI HASIL KALI TITIK (DOT PRODUCT) dalam ruang Euclidean n-dimensi

Hasil Kali Titik (*Dot Product*)

Hasil kali titik dari vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah berupa sebuah skalar yang didefinisikan :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

(Secara aljabarik)

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Definisi RHKD

Ruang hasil kali dalam adalah ruang vektor **V** dilengkapi dengan operasi hasil kali dalam, yang merupakan fungsi yang memetakan setiap pasangan vektor di **V** ke bilangan real atau kompleks, denoted sebagai $\langle u, v\rangle$, yang memenuhi empat aksioma berikut:

1. Simetris : $<\bar{u},\bar{v}> = <\bar{v},\bar{u}>$
2. Aditivitas : $<\bar{u}+\bar{v},\bar{w}> = <\bar{u},\bar{w}>+<\bar{v},\bar{w}>$
3. Homogenitas : $<k\bar{u},\bar{v}> = k<\bar{u},\bar{v}>$, k skalar
4. Positivitas : $<\bar{u},\bar{u}> \geq 0$ dan $(<\bar{u},\bar{u}> = 0 \leftrightarrow \bar{u} = \bar{0})$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

CATATAN RHKD

- Hasil kali dalam (inner product) didasarkan pada sifat-sifat dasar dari dot product.
- Hasil kali dalam dari dua buah vektor **u** dan **v** dalam $\mathbb{R}^n$ dapat didefinisikan sebagai: $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$
- Ruang vektor yang dilengkapi dengan Hasil Kali Dalam (Inner Product) seperti di atas disebut Ruang Hasil Kali Dalam (Real Inner Product Space).

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 1

Tunjukkan bahwa operasi perkalian titik standar (Dot Product) di R^3 Euclides merupakan hasil kali dalam!

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 1 (lanjutan)

Jawab

Akan ditunjukkan bahwa perkalian titik standar memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam , yaitu :

Misalkan $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ maka $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R^3$

1. Simetris

$$\begin{aligned} \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle &= (\bar{a} \cdot \bar{b}) \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ &= (b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3) \\ &= \langle \bar{b}, \bar{a} \rangle \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(terpenuhi)} \end{aligned}$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 1 (lanjutan)

2. Aditivitas

$$
\begin{aligned}
<\bar{a}+\bar{b}\,,\bar{c}> &= ((\bar{a}+\bar{b}).\bar{c}\,) \\
&= ((a_1+b_1\,,\,a_2+b_2\,,\,a_3+b_3).(c_1,c_2,c_3)) \\
&= ((a_1c_1+b_1c_1)+(a_2c_2+b_2c_2)+(a_3c_3+b_3c_3)) \\
&= (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3) \\
&= (\bar{a}.\bar{c}\,)+(\bar{b}.\bar{c}\,) \\
&= <\bar{a},\bar{c}>+<\bar{b},\bar{c}> \qquad \ldots\ldots(\text{ terpenuhi })
\end{aligned}
$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 1 (lanjutan)

3. Homogenitas

$$
\begin{aligned}
< k\bar{a}, \bar{b} > &= (k\bar{a} . \bar{b}) \\
&= (ka_1b_1 + ka_2b_2 + ka_3b_3) \\
&= k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= k(\bar{a} . \bar{b}) \\
&= k< \bar{a} , \bar{b} > \qquad \text{............ (terpenuhi)}
\end{aligned}
$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 1 (lanjutan)

4. Positivitas

$< \bar{a}, \bar{a} > \quad = (\bar{a} . \bar{a}) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 0$ .... (terpenuhi)

dan

$< \bar{u}, \bar{u} > = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0 \leftrightarrow \bar{u} = (0,0,0) = \bar{0}$ . ...(terpenuhi)

Ruang Hasil Kali Dalam yang memiliki Hasil Kali Dalam berupa perkalian titik standar (Dot Product) seperti diatas biasa disebut Ruang Hasil Kali Dalam Euclides atau Euclidean Inner Product

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 2

Diketahui $< \bar{u}, \bar{v} > = ad + cf$ dengan $\bar{u} = (a,b,c)$ dan $\bar{v} = (d,e,f)$, Apakah $< \bar{u}, \bar{v} >$ tersebut merupakan hasil kali dalam ?

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 2 (lanjutan)

Jawab

Akan ditunjukkan apakah $< \bar{u}, \bar{v} >$ tersebut memenuhi keempat aksioma hasil kali dalam

Aksioma

1. Simetris

$$
\begin{aligned}
< \bar{u}, \bar{v} > &= ad + cf \\
&= da + fc \\
&= < \bar{v}, \bar{u} > \qquad \text{............ (terpenuhi)}
\end{aligned}
$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 2 (lanjutan)

2. Aditivitas

Misalkan $\overline{w} = (g,h,i)$

$$
\begin{aligned}
<\overline{u}+\overline{v}, \overline{w}> &= <(a+d, b+e, c+f), (g,h,i)> \\
&= (a+d)g + (c+f)i \\
&= (ag + ci) + (dg + fi) \\
&= <\overline{u}, \overline{w}> + <\overline{v}, \overline{w}> \quad \ldots\ldots \quad (\text{terpenuhi})
\end{aligned}
$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 2 (lanjutan)

3. Homogenitas

$$\begin{aligned} < k\bar{u}, \bar{v} > &= (kad + kcf) \\ &= k(ad + cf) \\ &= k < \bar{u}, \bar{v} > \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ terpenuhi }) \end{aligned}$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 2 (lanjutan)

4. Positivitas

$< \bar{u}, \bar{u} > \; = (\bar{u} \,.\, \bar{u}) = (a^2 + c^2) \geq 0$ .... (terpenuhi)

dan

$(\; < \bar{u}, \bar{u} > \; = (a^2 + c^2) = 0$ tidak selalu $\leftrightarrow$ $\bar{u} = (0,0,0)$ karena untuk nilai $\bar{u} = (0,b,0)$ dengan $b \neq 0$ maka nilai $< \bar{u}, \bar{u} > = 0$ ...... (tidak terpenuhi)

Aksioma positivitas tidak terpenuhi maka $< \bar{u}, \bar{v} > = ad + cf$ dengan $\bar{u} = (a,b,c)$ dan $\bar{v} = (d,e,f)$ **bukan** merupakan hasil kali dalam.

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 3

Misalkan $W \subseteq \mathbb{R}^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$ di mana $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$.

a. Buktikan bahwa W adalah ruang hasil kali dalam.

b. Jika $\mathbf{u} = (-2, 1, 2)$ dan $\mathbf{v} = (1, 4, -2)$, hitunglah $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 3 (lanjutan)

(1) Adb $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= \langle (u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)\rangle\\ &= 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3\\ &= 2v_1u_1 + v_2u_2 + 3v_3u_3\\ &= \langle (v_1,v_2,v_3),(u_1,u_2,u_3)\rangle\\ &= \langle v,u\rangle\end{aligned}$$

(2) Adb : $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

$$\begin{aligned}\langle u+v,w\rangle &= \langle (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3),(w_1,w_2,w_3)\rangle\\ &= 2(u_1+v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + 3(u_3+v_3)w_3\\ &= 2u_1w_1 + 2v_1w_1 + u_2w_2 + v_2w_2 + 3u_3w_3 + 3v_3w_3\\ &= (2u_1w_1 + u_2w_2 + 3u_3w_3) + (2v_1w_1 + v_2w_2 + 3v_3w_3)\\ &= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle\end{aligned}$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 3 (lanjutan)

(3) Adb : untuk setiap $k \in \mathbb{R}$, $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$

$$\langle ku, v \rangle = \langle (ku_1, ku_2, ku_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle$$
$$= 2ku_1v_1 + ku_2v_2 + 3ku_3v_3$$
$$= k\,(2ku_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3)$$
$$= k \cdot \langle u, v \rangle$$

(4) Adb : $\langle u, u \rangle \geq 0$ dan $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \bar{0}$

$$\langle u, u \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3), (u_1, u_2, u_3) \rangle$$
$$= 2u_1u_1 + u_2u_2 + 3u_3u_3$$
$$= 2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2 \geq 0$$

$$\langle u, u \rangle = 2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2 = 0$$

jika dan hanya jika $u = (0,0,0) = \bar{0}$ //

$\therefore$ $\langle u, v \rangle$ merupakan suatu hasil kali dalam

$\therefore$ W adalah RHKD

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

LATIHAN SOAL 1

No. 1

Misalkan $V \subseteq \mathbb{R}^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$ di mana $u, v \in V$.

a. **Buktikan bahwa V adalah ruang hasil kali dalam.**

b. **Jika $u = (1, 0, -3)$ dan $v = (2, -1, 1)$, hitunglah $\langle u, v\rangle$.**

No. 2 Periksa apakah operasi berikut merupakan hasil kali dalam atau bukan

a. $<\bar{u}, \bar{v}> = u_1{}^2v_1 + u_2v_2{}^2$ di R^2

b. $<\bar{u}, \bar{v}> = u_1v_1 + 2u_2v_2 - u_3v_3$ di R^3

c. $<\bar{u}, \bar{v}> = u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1$ di R^3

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Definisi norm pada RHKD

Jika V adalah ruang hasil kali dalam nyata, maka **norma** (atau **panjang**) dari sebuah vektor v dalam V dinyatakan dengan $\|v\|$ dan didefinisikan oleh

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

diperoleh dari

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

$$\langle u, u\rangle = u_1u_1 + u_2u_2 + \cdots + u_nu_n$$

$$= u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

$$\langle u, u\rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \|u\|$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Definisi distance pada RHKD

dan **jarak** antara dua vektor dinyatakan dengan $d(u, v)$ dan didefinisikan oleh

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$$

Sebuah vektor dengan norma 1 disebut **vektor satuan**.

Misalnya, jika θ adalah sudut antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ dalam ruang hasil kali dalam maka besar cos θ adalah

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

1. DEFINISI RUANG HASIL KALI DALAM (RHKD) (INNER PRODUCT SPACE)

Contoh 4

Dikctahui V adalah RHD dcngan hasil kali dalam $< \bar{u}, \bar{v} > = (u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3)$ dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Jika vektor – vektor $\bar{a}, \bar{b} \in V$ dengan $\bar{a} = (1,2,3)$ dan $\bar{b} = (1,2,2)$, Tentukan

a. Besar cos α jika sudut yang dibentuk antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ adalah α !

b. Jarak antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$!

Jawab

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\|}$$

$$< \bar{a}, \bar{b} > \; = 1.1 + 2.(2.2) + 2.3 = 15$$

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{1^2 + 2.2^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{1^2 + 2.2^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Jadi $\cos\theta = \dfrac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{\|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\|} = \dfrac{15}{\sqrt{18}\,\sqrt{13}} = \dfrac{15}{\sqrt{234}}$

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Diketahui V ruang hasil kali dalam dan $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ adalah vektor – vektor dalam V.

Beberapa definisi penting

a. H = { $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ } disebut **himpunan orthogonal** bila setiap vektor dalam V saling tegak lurus ,yaitu $< \bar{v}_i, \bar{v}_j > = 0$ untuk $i \neq j$ dan $i,j = 1,2,\ldots,n$.

b. G = { $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ }disebut **himpunan orthonormal** bila
- G himpunan orthogonal
- Norm dari $v_i = 1$, $i = 1,2,\ldots,n$ atau $< \bar{v}_i, \bar{v}_i > = 1$

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Contoh 5

Periksa apakah himpunan vektor berikut merupakan himpunan ortonormal.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Contoh 5A (lanjutan)

Periksa apakah himpunan vektor berikut merupakan himpunan ortonormal.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \qquad D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Jawab:

- Himpunan $A = \{a_1, a_2\}$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = a_1 \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$\therefore$ A bukan himpunan ortogonal

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Contoh 5B

Periksa apakah himpunan vektor berikut merupakan himpunan ortonormal.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Jawab

- Himpunan $B = \{b_1, b_2\}$

$\langle b_1, b_2 \rangle = b_1 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\therefore$ B adalah himpunan ortogonal

$\|b_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\|b_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$\therefore$ B adalah himpunan ortonormal

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Contoh 5C

Periksa apakah himpunan vektor berikut merupakan himpunan ortonormal.

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}\qquad C=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}\qquad D=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Jawab

- Himpunan $C = \{c_1, c_2\}$

$$\langle c_1, c_2\rangle = c_1 \cdot c_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$$

$\therefore$ C himpunan ortogonal

$$\|c_1\| = \left\|\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(1/\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\|c_2\| = \left\|\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(-1/\sqrt{2}\right)^2+\left(1/\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$\therefore$ C himpunan ortonormal

UNDIP | UNIVERSITAS DIPONEGORO
the excellent research university

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Contoh 5D

Periksa apakah himpunan vektor berikut merupakan himpunan ortonormal.

$$A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$C=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

$$D=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

Jawab

- Himpunan $D = \{d_1, d_2, d_3\}$

$$\langle d_1, d_2\rangle = d_1 \cdot d_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle d_1, d_3\rangle = d_1 \cdot d_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle d_2, d_3\rangle = d_2 \cdot d_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$\therefore$ D himpunan ortogonal

$$\|d_1\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$$

$$\|d_2\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

$\therefore$ D bukan himpunan ortonormal

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Soal No.1

$$\mathbf{v}_1 = (0,1,0),\ \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Tunjukkan bahwa $S=\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},\mathbf{v_3}\}$ himpunan ortonormal.

Soal No.2

Diberikan vektor-vektor berikut di $\mathbb{R}^3$:

- $w_1 = (1,0,0)$
- $w_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$
- $w_3 = (0, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

Tunjukkan bahwa himpunan $\{w_1, w_2, w_3\}$ adalah himpunan ortonormal.

Soal No.3

Diberikan vektor-vektor berikut di $\mathbb{R}^3$:

- $u_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $u_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Tunjukkan bahwa himpunan $\{u_1, u_2, u_3\}$ adalah himpunan ortonormal.

2. HIMPUNAN ORTONORMAL

Karena pentingnya suatu himpunan bersifat ortonormal Bagaimanakah jika kita memiliki himpunan vektor yang tidak bersifat ortonormal??

Caranya yakni dengan mentransformasikan suatu himpunan vektor menjadi himpunan ortonormal dengan proses yang dinamakan proses **GRAM-SCHMIDT**

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

$$S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \xrightarrow{\text{Gram - Schmidt}} W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

Basis ortonormal

- $v_1 = u_1$
- $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1$
- $v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2$
- $v_4 = u_4 - \dfrac{\langle u_4, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \dfrac{\langle u_4, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 - \dfrac{\langle u_4, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} \cdot v_3$
- $v_5 \quad \ldots \quad v_n$

$$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$$

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 6

Diketahui $B = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ merupakan basis pada RHKD Euclides di $\mathbb{R}^3$.

Transformasikan basis tersebut menjadi basis ortonormal.

- $v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|v_1\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

- $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{(\sqrt{3})^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0+1+1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 6 (lanjutan)

- $$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\cdot v_2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{(\sqrt{3})^2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}\right\rangle}{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}\cdot\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{0+0+1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{0+0+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1/3\\1/6\\1/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\|v_3\| = \sqrt{0^2+(-1/2)^2+(1/2)^2}$$
$$= \sqrt{0+1/4+1/4}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 6 (lanjutan)

$$W = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\} = \left\{ \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}}, \frac{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}, \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

W merupakan basis ortonormal

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 7

Gunakan proses *Gram-Schmidt* untuk mengubah basis $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ pada $\mathbb{R}^3$ menjadi basis ortonormal $B = \{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}\}$ berdasarkan

a. Hasil kali dalam di ruang Euclids

b. Hasil kali dalam $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 2u_1v_1 + 4u_2v_2 + 2u_3v_3$

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 7a (lanjutan)

a) • $v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \|v_1\| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$

• $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ $\qquad \|v_2\| = \sqrt{0^2+0^2+2^2} = 2$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \dfrac{2+0+0}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

UNDIP | UNIVERSITAS DIPONEGORO
the excellent research university

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 7a (lanjutan)

$$\bullet\ v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\cdot v_2$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{1^2}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle}{2^2}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\|v_3\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1+0+0}{1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0+0+2}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|}\right\} = \left\{\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{1}, \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}}{2}, \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{1}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 7b

Gunakan proses *Gram-Schmidt* untuk mengubah basis

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ pada $\mathbb{R}^3$ menjadi basis ortonormal $B=\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$ berdasarkan

a. hasil kali dalam di ruang Euclids.

b. hasil kali dalam $\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1+4u_2v_2+2u_3v_3$ ✓

Sign out

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$$

$$\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\right\rangle}$$

$$= \sqrt{2u_1u_1+4u_2u_2+2u_3u_3}$$

$$= \sqrt{2u_1^2+4u_2^2+2u_3^2}$$

b. $\bullet\ v_1 = u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\|v_1\| = \sqrt{2.1^2+4.0^2+2\cdot0^2} = \sqrt{2}$$

$\bullet\ v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{(\sqrt{2})^2}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{2.2.1+4.0.0+2.2.0 \quad 4}{2 \quad 2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{2.0^2+4.0^2+2.2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

Contoh 7b (lanjutan)

- $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{(\sqrt{2})^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{(\sqrt{8})^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2.1.1 + 4.1.0 + 2.1.0}{2} \overset{=2}{} \frac{}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2.1.0 + 4.1.0 + 2.1.2}{8} \overset{=4}{} \frac{}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|v_3\| = \sqrt{2.0^2 + 4.1^2 + 2.0^2} = 2$$

$$B = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}}, \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{2\sqrt{2}}, \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. PROSES GRAM-SCHMIDT PADA RHKD

LATIHAN SOAL 2

Gunakan proses *Gram-Schmidt* untuk mengubah basis

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pada $\mathbb{R}^3$ menjadi basis ortonormal $B = \{\overline{w_1}, \overline{w_2}, \overline{w_3}\}$

berdasarkan

a. Hasil kali dalam di ruang Euclids

b. Hasil kali dalam $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2 + 2u_3v_3$

TERIMA KASIH