

# Metode Numerik : Diferensiasi Numerik

Muhammad Akmal Fazli Riyadi / 24060124130123

Kelas D

## Soal No.1

Diketahui:

$\mathbf{x}$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
$\mathbf{y = f(x)}$	2.50	4.21	6.62	10.14	15.51	21.83	31.20	44.11	61.72	85.53

- a. Tentukan nilai aproksimasi untuk  $f'(1,4)$  dan  $f''(1,4)$  menggunakan differensi numerik metode Newton Beda Hingga Maju pada  $O(h^2)$ . Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Gunakan rumus beda hingga maju orde dua:

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)}{2h}$$
$$f''(x_0) \approx \frac{2f(x_0) - 5f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)}{h^2}$$

Dengan:

$$x_0 = 1,4,$$
$$x_1 = 1,6,$$
$$x_2 = 1,8,$$
$$x_3 = 2,0,$$
$$h = 0,2$$

Turunan pertama:

$$f'(1,4) \approx \frac{-3(15,51) + 4(21,83) - 31,20}{2 \cdot 0,2} = \frac{-46,53 + 87,32 - 31,20}{0,4} = \frac{9,59}{0,4} = 23,975$$

Turunan kedua:

$$f''(1,4) \approx \frac{2(15,51) - 5(21,83) + 4(31,20) - 44,11}{(0,2)^2} = \frac{31,02 - 109,15 + 124,80 - 44,11}{0,04} = \frac{2,56}{0,04} = 64$$

Maka, nilai  $f'(1,4)$  dan  $f''(1,4)$  menggunakan differensi numerik metode Newton Beda Hingga Maju pada  $O(h^2)$ :

$$f'(1,4) \approx 23,975$$
$$f''(1,4) \approx 64$$

- b. Tentukan galat relatif dari  $f(1,4)$  dan  $f(1,4)$ ! Asumsikan  $y = f(x) = 2x \cdot \exp(1.2x)$ , Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Diberikan fungsi eksak:

$$f(x) = 2x \cdot e^{1,2x}$$

Hitung nilai eksak:

$$f(1,4) = 2 \cdot 1,4 \cdot e^{1,68} = 2,8 \cdot e^{1,68} \approx 2,8 \cdot 5,370 = 15,036$$

Hitung galat relatif:

$$\text{Galat Relatif} = \left| \frac{f_{\text{tabel}} - f_{\text{eksak}}}{f_{\text{eksak}}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{15,51 - 15,036}{15,036} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,474}{15,036} \right| \cdot 100\% \approx 3,15\%$$

Jawaban:

- Nilai eksak  $f(1,4) \approx 15,036$
- Nilai dari tabel  $f(1,4) = 15,51$
- Galat relatif  $\approx 3,15\%$

## Soal No.2

Diketahui:

$\mathbf{x}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$\mathbf{y = f(x)}$	1.91	2.12	2.34	2.51	2.73	2.90	3.11	3.32	3.53

- a. Tentukan nilai aproksimasi untuk  $f'(1, 2)$  dan  $f''(1, 2)$  menggunakan differensi numerik metode Newton Beda Hingga Mundur, Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Tentukan nilai  $h$  (selisih antar titik):

$$h = 0.2$$

Gunakan titik-titik mundur dari  $x = 1.2$ , yaitu:

$$f(1.2) = 2.90$$

$$f(1.0) = 2.73$$

$$f(0.8) = 2.51$$

$$f(0.6) = 2.34$$

Hitung selisih hingga:

Beda pertama:

$$\Delta y_1 = f(1.2) - f(1.0) = 2.90 - 2.73 = 0.17$$

$$\Delta y_2 = f(1.0) - f(0.8) = 2.73 - 2.51 = 0.22$$

$$\Delta y_3 = f(0.8) - f(0.6) = 2.51 - 2.34 = 0.17$$

Beda kedua:

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_1 - \Delta y_2 = 0.17 - 0.22 = -0.05$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_2 - \Delta y_3 = 0.22 - 0.17 = 0.05$$

Beda ketiga:

$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_2 = -0.05 - 0.05 = -0.10$$

Gunakan rumus diferensiasi mundur Newton:

Untuk turunan pertama:

$$f'(x_n) \approx \frac{1}{h} \left[ \Delta y_1 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_1 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_1 \right]$$

$$f'(1.2) \approx \frac{1}{0.2} \left[ 0.17 - \frac{1}{2}(-0.05) + \frac{1}{3}(-0.10) \right] = 5 [0.17 + 0.025 - 0.0333] = 5 \times 0.1617 = 0.8085$$

Untuk turunan kedua:

$$f''(x_n) \approx \frac{1}{h^2} [\Delta^2 y_1 - \Delta^3 y_1]$$

$$f''(1.2) \approx \frac{1}{(0.2)^2} [-0.05 - (-0.10)] = 25 \times 0.05 = 1.25$$

Maka, nilai  $f'(1, 2)$  dan  $f''(1, 2)$  menggunakan differensi numerik metode Newton Beda Hingga Mundur:

$$f'(1,4) \approx 23,975$$

$$f''(1,4) \approx 64$$

- b. Tentukan galat relatif dari  $f'(1,2)$  dan  $f''(1,2)$ , bila diasumsikan bahwa  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,5$ , Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Turunan eksak dari fungsi  $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,5$ :

$$f'(x) = 4x - 3$$

$$f''(x) = 4$$

Maka:

$$f'(1,2) = 4(1,2) - 3 = 4,8 - 3 = 1,8$$

$$f''(1,2) = 4$$

Galat relatif turunan pertama:

$$\text{Galat relatif} = \left| \frac{f'_{\text{numerik}} - f'_{\text{eksak}}}{f'_{\text{eksak}}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,8085 - 1,8}{1,8} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{-0,9915}{1,8} \right| \cdot 100\% = 55,08\%$$

Galat relatif turunan kedua:

$$\text{Galat relatif} = \left| \frac{f''_{\text{numerik}} - f''_{\text{eksak}}}{f''_{\text{eksak}}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{1,25 - 4}{4} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{-2,75}{4} \right| \cdot 100\% = 68,75\%$$

- Aproksimasi  $f'(1,2) \approx 0,8085$  dengan galat relatif 55,08%.
- Aproksimasi  $f''(1,2) \approx 1,25$  dengan galat relatif 68,75%.

## Soal No.3

Diketahui:

<b>x</b>	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2
<b>y = f(x)</b>	2.244	3.021	3.933	4.980	6.161	7.482	8.943

- a. Tentukan aproksimasi  $y'$  dan  $y''$ , untuk  $x = 1,6$  dengan formula Newton Beda Hingga Sentral, Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Dengan  $h = 0,2$ , digunakan rumus beda hingga sentral orde kedua.

Aproksimasi turunan pertama:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$f'(1,6) \approx \frac{f(1,8) - f(1,4)}{2 \times 0,2} = \frac{6,161 - 3,933}{0,4} = 5,57$$

Aproksimasi turunan kedua:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

$$f''(1,6) \approx \frac{6,161 - 2(4,980) + 3,933}{0,04} = \frac{0,134}{0,04} = 3,35$$

Maka, nilai aproksimasi  $y'$  dan  $y''$  untuk  $x = 1,6$  menggunakan Newton Beda Hingga Sentral, yaitu:

$$f'(1,6) \approx 5,57$$

$$f''(1,6) \approx 3,35$$

- b. Tentukan Galat dari  $y'$  dan  $y''$ , untuk  $x = 1,6$  dan misalkan fungsi exactnya  $f(x) = x\sqrt{2+3x^2}$ , Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Diketahui fungsi exact:

$$f(x) = x\sqrt{2+3x^2}$$

Turunan pertama dari fungsi:

$$f'(x) = \frac{2+6x^2}{\sqrt{2+3x^2}}$$

Evaluasi di  $x = 1,6$ :

$$f'(1,6) = \frac{2+6(1,6)^2}{\sqrt{2+3(1,6)^2}} = \frac{17,36}{\sqrt{9,68}} \approx \frac{17,36}{3,112} \approx 5,577$$

Turunan kedua dari fungsi:

$$f''(x) = \frac{18x(1+x^2)}{(2+3x^2)^{3/2}}$$

Evaluasi di  $x = 1,6$ :

$$f''(1,6) = \frac{18 \cdot 1,6(1+1,6^2)}{(2+3 \cdot 1,6^2)^{3/2}} = \frac{28,8 \cdot 3,56}{9,68^{3/2}} \approx \frac{102,53}{30,138} \approx 3,403$$

Galat untuk turunan pertama:

$$\text{Galat } f'(1,6) = |f'_{\text{exact}}(1,6) - f'_{\text{aproks}}(1,6)| = |5,577 - 5,57| = 0,007$$

Galat untuk turunan kedua:

$$\text{Galat } f''(1,6) = |f''_{\text{exact}}(1,6) - f''_{\text{aproks}}(1,6)| = |3,403 - 3,35| = 0,053$$

## Soal No.4

Diberikan fungsi:

$$f(x) = 3x \cdot e^{2x}$$

diminta untuk menghitung turunan pertama  $f'(x)$  secara numerik di  $x = 0,5$  menggunakan ekstrapolasi Richardson.

- a. Menggunakan ekstrapolasi Richardson dengan  $h = 0,04$  diperoleh  $D(2,2)$  sebagai estimasi terbaik dari derivative, Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Pertama, hitung nilai  $f(x+h)$  dan  $f(x-h)$ :

$$f(0,54) = 3(0,54) \cdot e^{1,08} = 1,62 \cdot 2,944 \approx 4,769$$

$$f(0,46) = 3(0,46) \cdot e^{0,92} = 1,38 \cdot 2,509 \approx 3,467$$

Gunakan rumus selisih terpusat:

$$D(1,1) = \frac{f(0,54) - f(0,46)}{2h} = \frac{4,769 - 3,467}{0,08} = 16,275$$

Selanjutnya, gunakan  $h = 0,02$ :

$$f(0,52) = 3(0,52) \cdot e^{1,04} = 1,56 \cdot 2,828 \approx 4,414$$

$$f(0,48) = 3(0,48) \cdot e^{0,96} = 1,44 \cdot 2,611 \approx 3,759$$

$$D(2,1) = \frac{f(0,52) - f(0,48)}{2 \cdot 0,02} = \frac{0,655}{0,04} = 16,375$$

Ekstrapolasi Richardson ke  $D(2,2)$ :

$$D(2,2) = \frac{4 \cdot D(2,1) - D(1,1)}{3} = \frac{4 \cdot 16,375 - 16,275}{3} = 16,408$$

Jadi, estimasi terbaik dengan  $h = 0,04$  adalah:

$$D(2,2) \approx 16,408$$

- b. Menggunakan ekstrapolasi Richardson dengan  $h = 0,02$  diperoleh  $D(3, 3)$  sebagai estimasi terbaik dari derivative, Tolong jawaban disertai langkah-langkahnya!

Hitung nilai  $f(0,51)$  dan  $f(0,49)$ :

$$f(0,51) = 3(0,51) \cdot e^{1,02} = 1,53 \cdot 2,771 \approx 4,238$$

$$f(0,49) = 3(0,49) \cdot e^{0,98} = 1,47 \cdot 2,665 \approx 3,919$$

$$D(3, 1) = \frac{f(0,51) - f(0,49)}{2 \cdot 0,01} = \frac{0,319}{0,02} = 15,95$$

Ekstrapolasi ke  $D(3, 2)$ :

$$D(3, 2) = \frac{4 \cdot D(3, 1) - D(2, 1)}{3} = \frac{4 \cdot 15,95 - 16,375}{3} = 15,808$$

Ekstrapolasi ke  $D(3, 3)$ :

$$D(3, 3) = \frac{4 \cdot D(3, 2) - D(2, 2)}{3} = \frac{4 \cdot 15,808 - 16,408}{3} = 15,608$$

Jadi, estimasi terbaik dengan  $h = 0,02$  adalah:

$$D(3, 3) \approx 15,608$$