

Metode Numerik : Integrasi Numerik

Muhammad Akmal Fazli Riyadi / 24060124130123

Kelas D

Soal No.1

Diketahui:

| \mathbf{x} | 1 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 | 2.8 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\mathbf{f(x)}$ | 1.000 | 1.581 | 2.322 | 3.244 | 4.351 | 5.663 | 7.180 | 7.381 | 7.582 | 7.783 |

Dengan Metode Simpson 3/8, tentukan $\int_1^{2.8} f(x) dx$ dan misalkan fungsi exactnya $y = f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$, tentukan galatnya! Tolong diberikan langkah-langkahnya!

Jawaban:

Tentukan nilai h sebagai berikut:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2.8-1}{9} = \frac{1.8}{9} = 0.2$$

Gunakan rumus Simpson 3/8 untuk $n = 9$ (yang merupakan kelipatan 3):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{3h}{8} \left[f(x_0) + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \not\equiv 0 \pmod{3}}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=3,6,\dots}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Masukkan nilai-nilai dari tabel:

$$\begin{aligned} f(x_0) + f(x_9) &= 1.000 + 13.11 = 14.11 \\ \sum_{i=1,2,4,5,7,8} f(x_i) &= 1.581 + 2.322 + 4.351 + 5.663 + 8.921 + 10.89 = 33.728 \\ \sum_{i=3,6} f(x_i) &= 3.244 + 7.180 = 10.424 \end{aligned}$$

Hitung nilai integralnya:

$$\begin{aligned} \int_1^{2.8} f(x) dx &\approx \frac{3 \cdot 0.2}{8} [14.11 + 3(33.728) + 2(10.424)] \\ &= \frac{0.6}{8} (14.11 + 101.184 + 20.848) \\ &= 0.075 \cdot 136.142 = 10.215 \end{aligned}$$

Untuk menghitung nilai eksak, lakukan integrasi analitik:

$$\begin{aligned} \int_1^{2.8} x^{2.5} dx &= \left[\frac{x^{3.5}}{3.5} \right]_1^{2.8} = \frac{2.8^{3.5} - 1^{3.5}}{3.5} \\ &\approx \frac{39.29 - 1}{3.5} = \frac{38.29}{3.5} \approx 10.94 \end{aligned}$$

Hitung galatnya:

$$\text{Galat} = |10.94 - 10.215| = 0.725$$

Kesimpulan:

- Hasil aproksimasi integral dengan Simpson 3/8: 10.215
- Hasil exact: 10.94
- Galat: 0.725

Soal No.2

Diketahui:

| x | 0.6 | 0.9 | 1.2 | 1.5 | 1.8 | 2.1 | 2.4 |
|--------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $f(x)$ | 2.494 | 23.611 | 2.723 | 2.830 | 2.931 | 3.032 | 3.133 |

- i. Dengan Metode Trapesium, Tentukan $\int_{0.6}^{2.4} f(x) dx$ dan misalkan fungsi exactnya $y = f(x) = \sqrt{2x+5}$, tentukan galatnya! Tolong diberikan langkah-langkahnya!

Jawaban:

Fungsi eksak:

$$f(x) = \sqrt{2x+5}$$

Rumus metode trapesium:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Dengan:

$$a = 0.6, \quad b = 2.4, \quad h = 0.3, \quad n = 6$$

$$\int_{0.6}^{2.4} f(x) dx \approx \frac{0.3}{2} [2.494 + 2(23.611 + 2.723 + 2.880 + 2.931 + 3.032) + 3.133]$$

$$= 0.15 [2.494 + 70.354 + 3.133] = 0.15 \times 75.981 = 11.39715$$

Substitusi $u = 2x + 5 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ untuk mencari nilai eksak:

$$\begin{aligned} \int_{0.6}^{2.4} \sqrt{2x+5} dx &= \frac{1}{2} \int_{6.2}^{9.8} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_{6.2}^{9.8} \\ &= \frac{1}{3} \left[(9.8)^{3/2} - (6.2)^{3/2} \right] \approx \frac{1}{3} (30.68 - 15.42) = 5.087 \end{aligned}$$

Galat metode trapesium:

$$|11.397 - 5.087| = 6.310$$

- ii. Dengan Metode Simpson 1/3, Tentukan $\int_{0.6}^{2.4} f(x) dx$ dan misalkan fungsi exactnya $y = f(x) = \sqrt{2x+5}$, tentukan galatnya! Tolong diberikan langkah-langkahnya!

Jawaban:

Fungsi eksak:

$$f(x) = \sqrt{2x+5}$$

Rumus:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{\text{ganjil}} f(x_i) + 2 \sum_{\text{genap}} f(x_i) + f(x_n) \right] \\ &= \frac{0.3}{3} [2.494 + 4(23.611 + 2.880 + 3.032) + 2(2.723 + 2.931) + 3.133] \end{aligned}$$

$$= 0.1 [2.494 + 4(29.523) + 2(5.654) + 3.133] = 0.1(2.494 + 118.092 + 11.308 + 3.133) = 0.1 \times 134.027 = 13.4027$$

Galat metode Simpson 1/3:

$$|13.403 - 5.087| = 8.316$$

- iii. Tentukan $\int_{0.6}^{2.4} f(x) dx$, dengan gabungan Metode Trapesium dan Metode Simpson 1/3, Tolong diberikan langkah-langkahnya!

Jawaban:

Trapesium dari $x = 0.6$ ke $x = 0.9$:

$$\int_{0.6}^{0.9} f(x) dx \approx \frac{0.3}{2} (2.494 + 23.611) = 3.916$$

Simpson 1/3 dari $x = 0.9$ ke $x = 2.4$:

$$= \frac{0.3}{3} [23.611 + 4(2.723 + 2.931) + 2(2.880 + 3.032) + 3.133]$$

$$= 0.1 [23.611 + 4(5.654) + 2(5.912) + 3.133] = 0.1(23.611 + 22.616 + 11.824 + 3.133) = 0.1 \times 61.184 = 6.1184$$

Total gabungan:

$$3.916 + 6.1184 = 10.034$$

Galat gabungan:

$$|10.034 - 5.087| = 4.947$$