MATEMATIKA I
INTEGRAL

-7. Aplikasi Integral Tentu untuk menghitung Volume Benda Putar-

Etna Vianita e-mail: etnavianita@live.undip.ac.id etnavianita02@lecturer.undip.ac.id

7.1 Volume Benda Pejal

Perhatikan gambar,

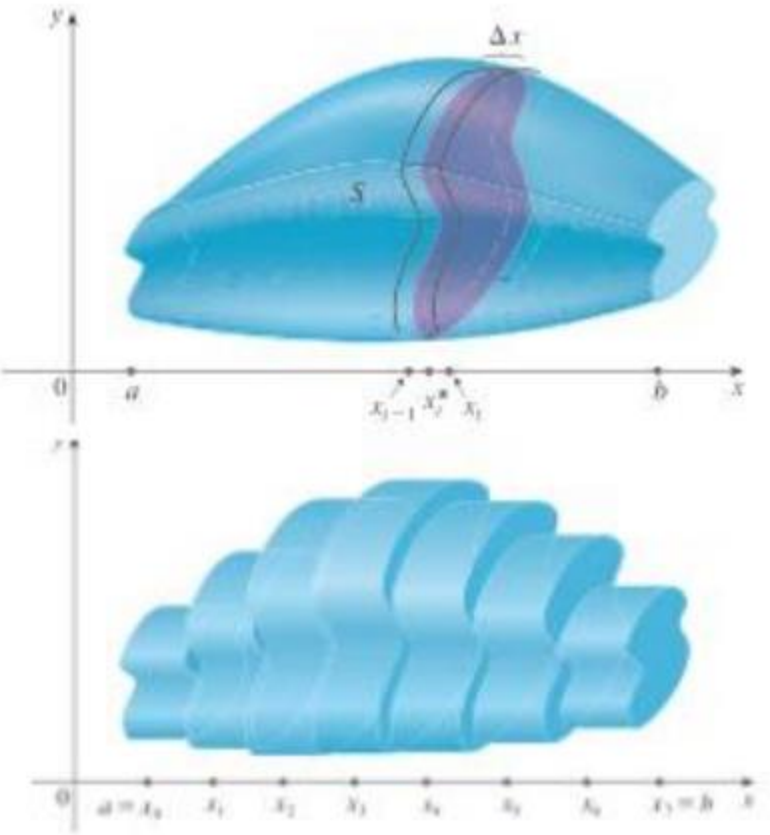
Volume sebuah lempengan :

$$V_i = A(x_i^*)\Delta x$$

Volume Benda :

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x$$

Jika diambil $n \to \infty$ atau $\Delta x \to 0$ maka volume benda adalah:

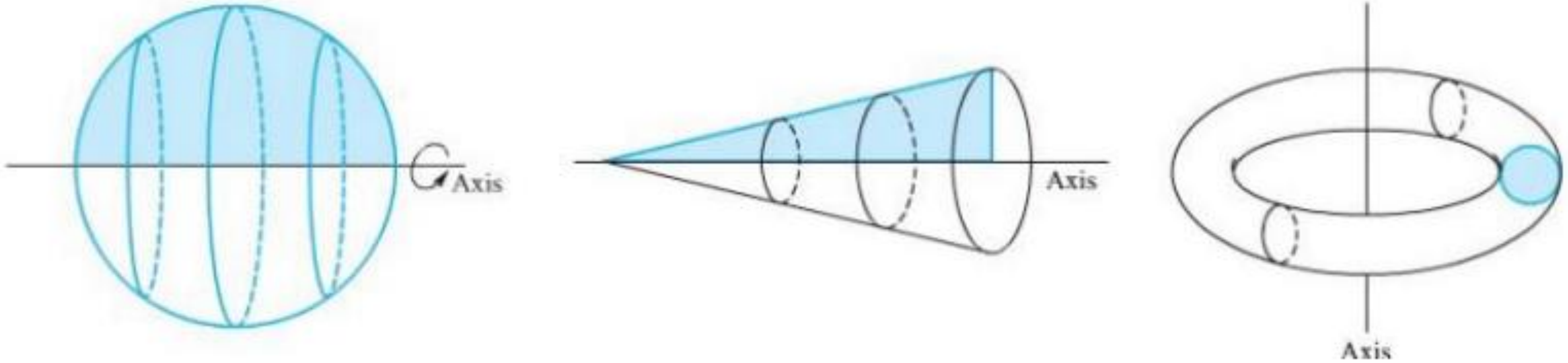


$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x_i^*)dx$$

Etna Vianita e-mail: etnavianita@live.undip.ac.id etnavianita02@lecturer.undip.ac.id

7.2 Volume Benda Putar

Benda putar merupakan hasil perputaran suatu bidang mengelilingi suatu sumbu putar. Contoh :



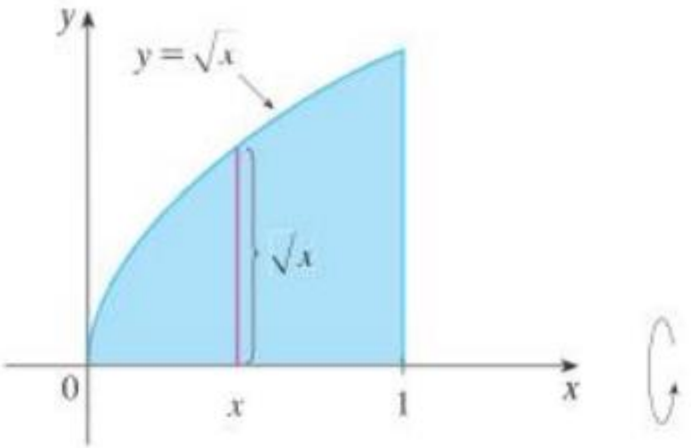
Bagaimana menghitung volume benda putar?

1) Metode cakram (batas sebuah kurva)
2) Metode cincin (batas dua buah kurva)

7.3 Volume Benda Putar dengan Batas sebuah Kurva

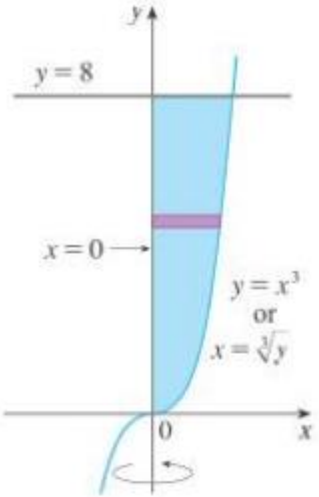
- ✓ Ingat rumus luas lingkaran : $L = \pi r^2$
- ✓ Volume benda putar dihitung dengan mempartisi benda putar menjadi cakram-cakram (berbentuk lingkaran)

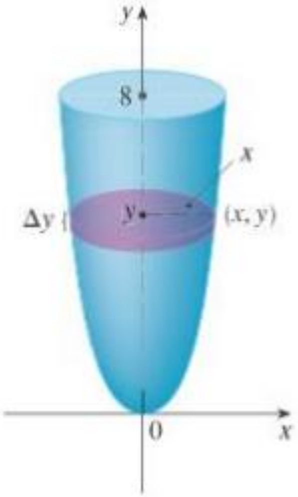
Contoh : Daerah dibawah kurva $y = \sqrt{x}$, diatas sumbu-x, dibatasi garis $x=0$ dan $x=1$, diputar mengelilingi sumbu-x. Hitung volume benda putar yang terbentuk!.



7.3 Volume Benda Putar dengan Batas sebuah Kurva

Contoh : Hitung volume benda putar pada gambar!





- ✓ Jika bendanya dipartisi, maka setiap partisi membentuk cakram dengan jari-jari $\sqrt[3]{y}$ dengan luas $A(y) = \pi(\sqrt[3]{y})^2$
- ✓ Volume sebuah cakram dengan ketebalan Δy adalah

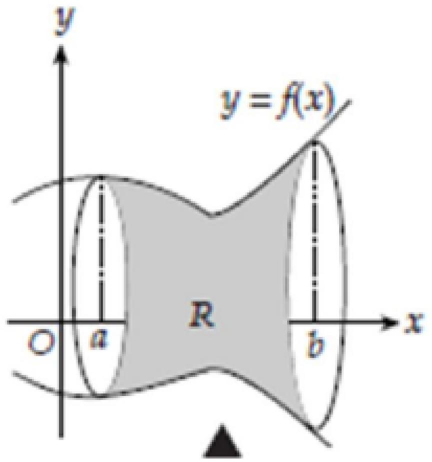
  $$V_{cakram} = A(y)\Delta y = \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 \Delta y\ .$$

- ✓ Jadi : $V = \int_{y=0}^{8} \pi\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \dfrac{96\pi}{5}$ satuan volume

Jika daerah dibatasi :

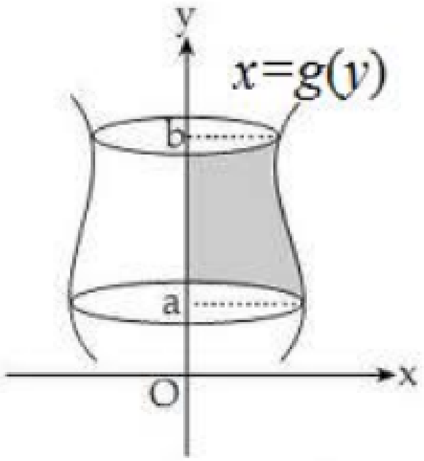
- ✓ Kurva $y = f(x)$ dan sumbu-x dari $x=a$ sampai $x=b$ diputar mengelilingi sumbu-x, maka:

$$V = \pi \int_{x=a}^{b} [f(x)]^2 \, dx$$



- ✓ Kurva $x = g(y)$ dan sumbu-y dari $y=a$ sampai $y=b$ diputar mengelilingi sumbu-y, maka:

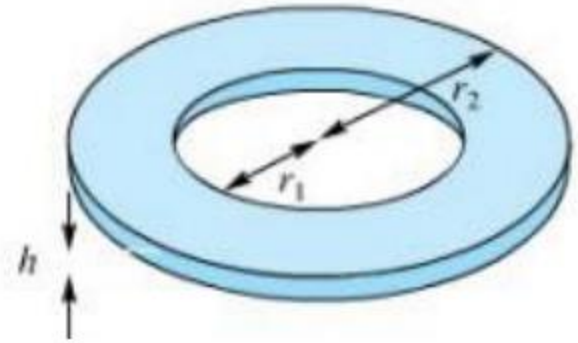
$$V = \pi \int_{y=a}^{b} [g(y)]^2 \, dy$$



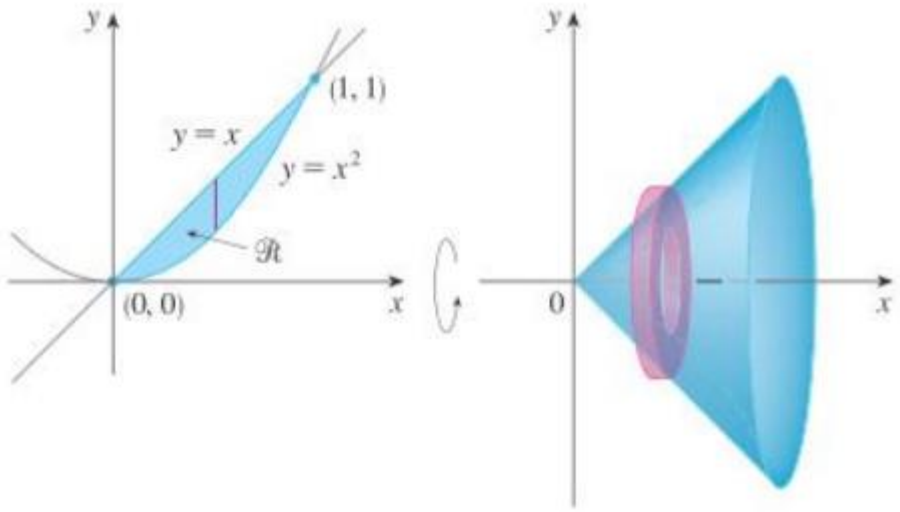
7.3 Volume Benda Putar dengan Batas sebuah Kurva

Metode cincin : Perhatikan gambar.

Luas cincin adalah $A = \pi r_2^2 - \pi r_1^2$

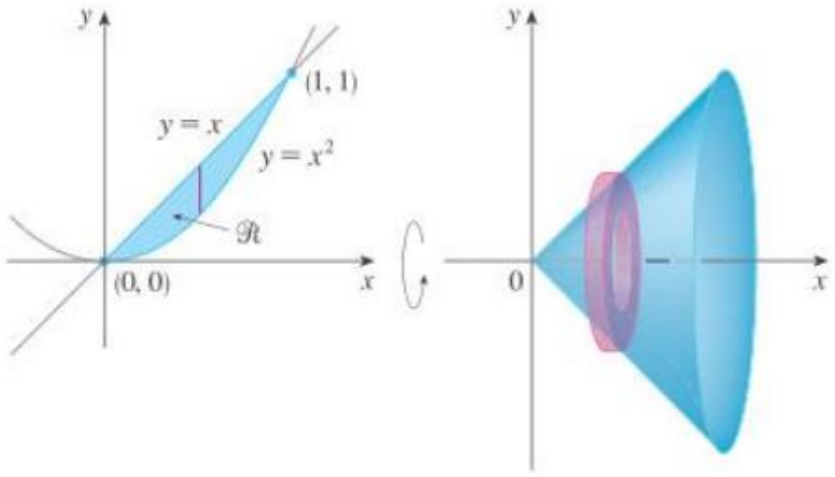


Contoh: Tentukan volume benda putar pada gambar

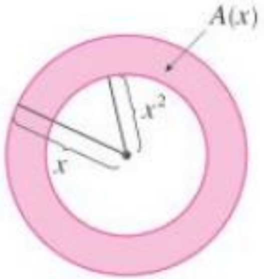


7.3 Volume Benda Putar dengan Batas sebuah Kurva

- ✓ Jika bendanya dipartisi, maka setiap partisi membentuk cincin dengan luas
  $A(x) = \pi\left[(x)^2 - (x^2)^2\right]$



- ✓ Volume sebuah cincin dengan ketebalan Δx adalah $V_{cincin} = A(x)\Delta x = \pi\left[(x)^2 - (x^2)^2\right]\Delta x$.



- ✓ Jadi volume benda putarnya adalah:

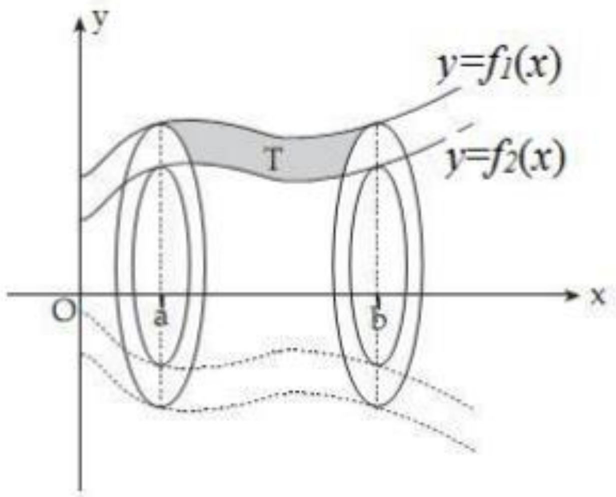
$$V = \pi \int_{x=0}^{1} \left[(x)^2 - (x^2)^2\right] dx = \frac{2\pi}{15} \text{ satuan volume}$$

7.4 Volume Benda Putar dengan Batas Dua Kurva

Jika daerah dibatasi :

- ✓ Kurva $y = f_1(x)$ dan $y = f_2(x)$ dari $x{=}a$ sampai $x{=}b$ diputar mengelilingi sumbu-x, maka:

$$V = \pi \int_{x=a}^{b} \left[f_1^{\,2}(x) - f_2^{\,2}(x) \right] dx$$

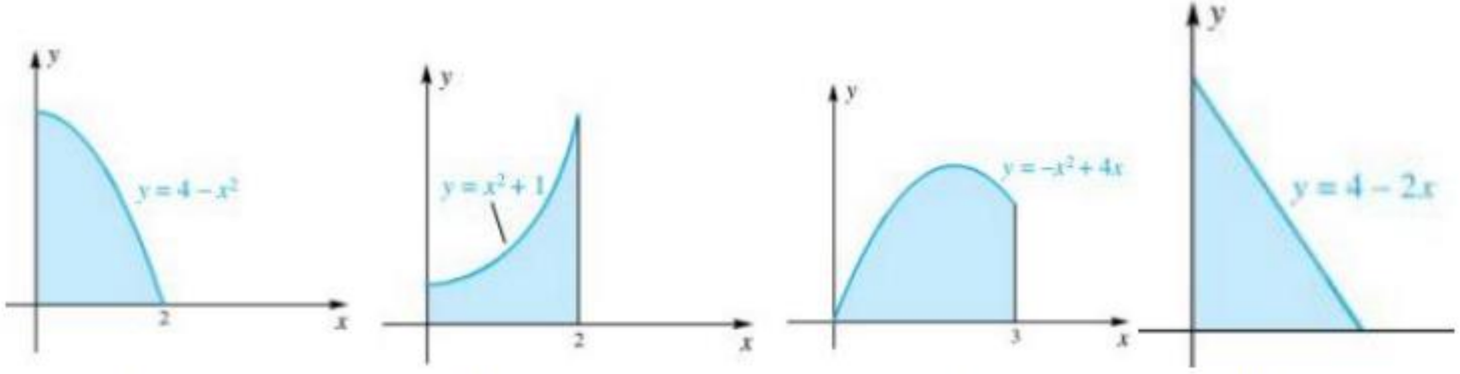


- ✓ Kurva $x = g_1(y)$ dan $x = g_2(y)$ dari $y{=}a$ sampai $y{=}b$ diputar mengelilingi sumbu-y, maka:

$$V = \pi \int_{y=a}^{b} \left[g_1^{\,2}(y) - g_2^{\,2}(y) \right] dy$$

7.5 Latihan Soal

1. Tentukan volume benda putar yang terbentuk jika daerah arsiran berikut diputar mengelilingi (masing-masing) sumbu-x dan sumbu-y.



(a) (b) (c) (d)

2. Tentukan volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi grafik-grafik berikut diputar mengelilingi (masing-masing) sumbu-x dan sumbu-y.

a) $y = x^2,\ \ x = 4,\ \ y = 0$ (b) $y = x^3,\ \ x = 3,\ \ y = 0$