**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторної роботи № 4

**«Властивості функцій. Булева алгебра»**

(до тем «**Функції», «Булева алгебра**»)

з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика»

для студентів спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

Львів 2022

Завдання складено відповідно до програми з курсу комп’ютерної дискретної математики за темами «Функції», «Булева алгебра» багатоступеневої підготовки фахівців і призначені для студентів денної форми навчання.

Студентам пропонується 6 завдань (практичних задач), кожне з яких має 30 індивідуальних варіантів (номер варіанту відповідає порядковому номеру студента у журналі групи).

Максимальна сума балів 4

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4**

**Тема роботи:** Властивості функцій. Булева алгебра

**Мета роботи:** Ознайомитись на практиці із основними властивостями функціональних відношень та принципом Діріхле, навчитись будувати досконалі, скорочені та мінімальні диз’юнктивні та кон’юнктивні нормальні форми булевих функцій, застосовувати теорію булевої алгебри до завадостійкого кодування методом Геммінга.

# ЗАГАЛЬНІ ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Розв’язати індивідуальне завдання згідно з варіантом з Додатку 1.
3. Оформити звіт про виконану роботу. Звіт повинен включати:
   * титульний аркуш,
   * тему,
   * мету,
   * завдання варіанту з додатку 1,
   * розв’язки всіх завдань, зроблені вручну,
   * скрін коду програм для деяких визначених завдань з коментарями,
   * скрін результатів виконання програм,
   * висновок про виконання лабораторної роботи.
4. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи, здати звіт.

# Додаток 1 до лабораторної роботи № 4

**Завдання № 1.** (0.8 бала)

Написати програму (на будь-якій відомій студентові мові програмування), яка реалізує визначення властивостей функції, заданої переліком елементів на множині А={1,2,3,4,5}, *R*  A2 (таблиця 4.1). Визначити, чи є задана функція ін’єктивною, сюр’єктивною, бієктивною? Відповідь обґрунтуйте. Якщо функція не є ін’єкцією, то змінивши невідповідну пару значень, перетворіть її в ін’єктивну. Якщо задана функція не є сюр’єкцією, то вкажіть для якої множини вона буде сюр’єктивною.

## Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

* задання функції списком впорядкованих пар;
* реалізацію визначення властивостей функції;
* виведення результату перевірки, чи є задана функція ін’єктивною, сюр’єктивною, бієктивною;
* виведення невідповідної пари значень та виправленої;  виведення множини, для якої функція є сюр’єктивною;
* перевірку на некоректне введення даних.

Завдання вважається зарахованим, якщо при тестуванні програми в присутності викладача отримано правильний результат.

*Таблиця* 4.1

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № вар. |  | № вар. |  |
| 1 | R = {(1,2), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2)} | 2 | R = {(1,3), (2,4), (3,2), (4,1), (5,1)} |
| 3 | R = {(1,1), (2,3), (3,2), (4,5), (5,3)} | 4 | R = {(1,5), (2,4), (3,1), (4,3), (5,3)} |
| 5 | R = {(1,4), (2,1), (3,3), (4,2), (5,4)} | 6 | R = {(1,4), (2,5), (3,2), (4,3), (5,2)} |
| 7 | R = {(1,3), (2,1), (3,5), (4,2), (5,2)} | 8 | R = {(1,2), (2,3), (3,1), (4,5), (5,5)} |
| 9 | R = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,3)} | 10 | R = {(1,3), (2,2), (3,1), (4,5), (5,3)} |
| 11 | R = {(1,5), (2,3), (3,1), (4,2), (5,5)} | 12 | R = {(1,5), (2,2), (3,4), (4,1), (5,4)} |
| 13 | R = {(1,4), (2,5), (3,1), (4,3), (5,1)} | 14 | R = {(1,1), (2,3), (3,4), (4,3), (5,1)} |
| 15 | R = {(1,5), (2,2), (3,4), (4,1), (5,2)} | 16 | R = {(1,2), (2,5), (3,1), (4,4), (5,2)} |
| 17 | R = {(1,3), (2,1), (3,2), (4,4), (5,4)} | 18 | R = {(1,5), (2,2), (3,1), (4,3), (5,3)} |
| 19 | R = {(1,2), (2,4), (3,1), (4,3), (5,3)} | 20 | R = {(1,3), (2,4), (3,5), (4,2), (5,5)} |
| 21 | R = {(1,1), (2,3), (3,5), (4,2), (5,1)} | 22 | R = {(1,1), (2,2), (3,5), (4,3), (5,1)} |
| 23 | R = {(1,5), (2,1), (3,4), (4,2), (5,2)} | 24 | R = {(1,4), (2,1), (3,5), (4,3), (5,3)} |
| 25 | R = {(1,3), (2,2), (3,4), (4,5), (5,3)} | 26 | R = {(1,5), (2,3), (3,1), (4,2), (5,2)} |
| 27 | R = {(1,2), (2,5), (3,1), (4,4), (5,4)} | 28 | R = {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (5,4)} |
| 29 | R = {(1,5), (2,1), (3,3), (4,2), (5,5)} | 30 | R = {(1,4), (2,1), (3,3), (4,5), (5,5)} |

**Завдання № 2.** (0.5 бала)

Розв’язати задачу (таблиця 4.2), використовуючи принцип Діріхле або узагальнений принцип Діріхле.

*Таблиця* 4.2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № вар. |  | № вар. |  |
| 1 | У мішку лежать 5 чорних і 5 білих кульок. Яку найменшу кількість кульок потрібно взяти з мішка, щоб серед них точно виявилося 3 кульки одного кольору? | 2 | У Верховну Раду обрано 336 народних депутатів, причому серед них 123 жінки, і 245 особи – представники правих сил. Доведіть, що серед правих є не менше ніж 32 жінки. |
| 3 | У магазин завезли 25 ящиків із трьома різними сортами яблук (у кожному ящику яблука лише одного сорту).  Доведіть, що серед них є принаймні 9 ящиків одного сорту яблук. | 4 | У темній коморі лежать черевики одного розміру: 10 пар чорних і 10 пар коричневих. Яку найменшу кількість черевиків потрібно взяти з комори, щоб серед них точно можна було вибрати одну пару одного кольору (у темряві не можна відрізнити не тільки колір черевика, але й лівий від правого)? |
| 5 | У похід пішли 12 туристів. Наймолодшому з них – 20 років, а найстаршому – 30. Чи є серед них однолітки? | 6 | Хлопчик мав 100 табличок із числами 1, 2, ..., 100, але загубив 79 із них. Чи обов’язково серед решти табличок знайдуться чотири такі, що сума чисел на двох із них дорівнюватиме сумі чисел на двох інших? |
| 7 | У сьомому класі навчаються 30 учнів. У диктанті один учень припустився 12 помилок, а решта – менше. Довести, що принаймні троє учнів припустилися однакової кількості помилок. | 8 | У квадраті зі стороною 1 взяли 51 точку. Довести, що деякі три з цих точок можна накрити квадратом зі стороною 0,2. |
| 9 | У середину квадрата зі стороною 10 см «кинули» 101 точку (жодні три з них не лежать на одній прямій). Доведіть, що серед них є три, які утворюють трикутник, площа якого не перевищує 1 см ². | 10 | 34 пасажири їдуть автобусом. Автобус робить 9 зупинок, причому на кожній із них нові пасажири не заходять. Доведіть, що знайдуться дві зупинки, на яких вийшла однакова кількість пасажирів. |
| 11 | Дано два многочлени від однієї змінної, кожний із них є сумою 4 членів непарних степенів, менших за 25. Чи обов’язково в добутку будуть два подібні члени? | 12 | 45 школярів на олімпіаді розв’язали 175 задач, причому відомо, що серед них є школярі, котрі розв’язали лише одну, дві і три задачі. Доведіть, що серед них є школяр, котрий розв’язав не менше ніж 5 задач. |
| 13 | У класі 30 учнів. Кожному подобаються рівно *k* учнів цього класу. При якому найменшому *k* обов’язково знайдуться двоє учнів, котрі подобаються один одному? | 14 | До ліфта вантажопідйомністю 320 кг підійшли 12 осіб, загальною массою 960 кг. Доведіть, що з них можна підібрати 4 людей, котрі разом зможуть піднятися ліфтом. |
| 15 | Чи можна вивезти з каменеломні 50 кам’яних брил, маси яких відповідно дорівнюють 372, 374, 376, ..., 468 кг, на 7 тритонних машинах? | 16 | Деякі з 9 мушкетерів викликали один одного на дуель. Доведіть, що серед них є 3, котрі викликали на дуель один одного, або 4, між котрими дуель не відбулася. |
| 17 | У класі 25 учнів. Відомо, що серед довільних трьох учнів є двоє друзів. Доведіть, що є учень, у якого не менше ніж 12 друзів. | 18 | Доведіть, що серед 25 чотирицифрових чисел, записаних за допомогою цифр 1; 2; 3; 4, обов’язково знайдуться два однакових. |
| 19 | Доведіть, що з довільних 100 натуральних чисел, які не перевищують 100, а їх сума дорівнює 200, можна вибрати кілька чисел так, щоб їх сума дорівнювала 100. | 20 | Дано 2000 різних натуральних чисел, які не перевищують 4000. Доведіть, що серед їх попарних додатних різниць є принаймні 500 однакових. |
| 21 | У країні Студляндії *М* футбольних команд по 11 гравців у кожній. Всі футболісти зібралися в аеропорті для поїздки в іншу країну на відповідальний турнір. Літак зробив 10 рейсів у іншу країну, перевозячи при цьому по *М* футболістів кожним рейсом. Ще один футболіст добрався сам. Доведіть, що хоча б одна команда зібралася в іншій країні в повному складі. | 22 | На співбесіду прийшли 65 школярів. Їм запропонували 3 тестові завдання.  За кожне завдання ставилася одна з  оцінок: 2, 3, 4 або 5. Чи вірно, що знайдуться два школярі, котрі отримали  однакові оцінки з усіх тестових завдань? |
| 23 | Кіт Базіліо пообіцяв Буратіно відкрити велику таємницю, якщо той складе чарівний квадрат 6×6 із чисел +1, -1, 0 таким чином, щоб усі суми по рядках, по стовпцях і по великих діагоналях були різними. Чи може Буратіно скласти такий квадрат? | 24 | На Землі океан займає більше половини площі поверхні. Довести, що у Світовому океані можна вказати дві діаметрально протилежні точки. |
| 25 | Учені дослідили, що кількість голок у їжака не перевищує 200 тисяч. Доведіть, що із 250 тисяч їжаків можна вибрати принаймні двох, що мають однакову кількість голок. | 26 | На Землі більше ніж 4 мільярди людей, вік яких не перевищує 100 років. Доведіть, що на Землі є двоє людей, що народилися тієї самої секунди. |
| 27 | Яку найменшу кількість карток спортлото «6 із 49» потрібно купити, щоб на одній із них обов’язково було вгадано хоча б один номер? | 28 | У школі навчається 962 учні. Доведіть, що принаймні у двох учнів збігаються ініціали. |
| 29 | Доведіть, що серед будь-яких шести цілих чисел знайдуться два числа, різниця яких буде кратною 5. | 30 | Дано 12 довільних двоцифрових чисел. Доведіть, що серед них є два, різниця яких дорівнює двоцифровому числу, записаному однаковими цифрами. |

**Завдання № 3.** (0,6 бала)

Написати програму (на будь-якій відомій студентові мові програмування) для побудови ДДНФ та ДКНФ для булевої функції від чотирьох змінних, яка приймає значення 1 на наборах, заданих десятковими числами, а на решті наборів - 0 (таблиця 4.3). Записати таблицю істинності цієї функції.

## Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

 автоматичне знаходження бітового значення заданої булевої функції від чотирьох змінних та знаходження ДДНФ і ДКНФ відповідно до індивідуального варіанта;  введення вхідних даних вручну або у програмі;  перевірку на некоректне введення даних.

Завдання вважається зарахованим, якщо при тестуванні програми в присутності викладача отримано правильний результат.

*Таблиця* 4.3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № вар. |  | № вар. |  |
| 1 | 1,2,4,6,7,9,10,13,14 | 2 | 1,3,5,7,8,10,12,14,15 |
| 3 | 5,7,8,9,10,11,12,14,15 | 4 | 1,8,10,11,13,14,15 |
| 5 | 0,1,2,3,5,6,9,10,12,14,15 | 6 | 0,3,5,7,8,9,11,12,14,15 |
| 7 | 1,3,6,7,8,9,10,13,14,15 | 8 | 2,4,5,7,8,9,10,11,12,13,15 |
| 9 | 1,4,5,7,9,10,12,14 | 10 | 2,4,6,7,10,12,14,15 |
| 11 | 2,4,6,9,11,13,15 | 12 | 0,3,5,7,8,9,10,11,12,14 |
| 13 | 0,1,2,3,8,10,11 | 14 | 1,3,6,7,8,9,10,15 |
| 15 | 0,1,4,5,8,9,11,12,15 | 16 | 2,3,10,11,14,15 |
| 17 | 0,1,2,3,6,7,8,9,13 | 18 | 2,3,4,5,8,9,11,15 |
| 19 | 1,3,5,6,7,10,11,12,14 | 20 | 0,3,7,8,9,12,13 |
| 21 | 0,2,4,6,7,10,12,14 | 22 | 1,3,4,5,9,11,12 |
| 23 | 3,4,5,6,7,11,14,15 | 24 | 4,6,8,9,10,12,14 |
| 25 | 0,3,4,6,8,9,10,11,13,15 | 26 | 3,4,6,8,10,11,12,15 |
| 27 | 3,5,7,10,11,12,13,14 | 28 | 4,5,6,7,10,12,14,15 |
| 29 | 4,6,8,10,12,14,15 | 30 | 0,2,4,6,8,10,12,14 |

**Завдання № 4.** (0,5 бали)

Для побудованих у завданні № 3 ДДНФ та ДКНФ за допомогою карт Карно та Вейча відповідно знайти мінімальні ДНФ та КНФ.

**Завдання № 5.** (0,8 бала)

Написати програму (на будь-якій відомій студентові мові програмування) для побудови методом Мак-Класкі скороченої ДНФ з отриманої у завданні № 3 ДДНФ.

## Алгоритм методу Мак-Класкі

***Крок 1.*** Записати булеву функцію, яку потрібно скоротити, в ДДНФ.

***Крок 2.*** Упорядкувати змінні й записати їх у кожній ЕК у вибраному порядку. Після цього подати кожну ЕК послідовністю з 1, 0 та – (рисок): на і-тій позиції записати 1, якщо і-та змінна входить до ЕК без заперечення, 0 – якщо вона входить із запереченням, і риску, якщо не входить. Наприклад, ЕК xyz, xz, xu записують, відповідно, у вигляді 111-, 1-0-, 1- -0.

***Крок 3.*** Розбити двійкові вирази, які відповідають ЕК, на класи за кількістю одиниць і розмістити списки цих класів за зростанням кількості одиниць.

***Крок 4.*** Виконати всі можливі склеювання *ku ku k*  . Їх можна застосувати лише до тих елементів списку, що містяться в сусідніх класах. Склеюють елементи, які відрізняються лише однією позицією (і в цій позиції не має бути риска), їх позначають зірочкою (\*) і надалі вони не входять у список простих імплікант.

Повторювати крок 4 доти, доки можна застосувати склеювання. Якщо помістити до одного класу всі імпліканти, отримані з двох сусідніх класів, то на черговому повторенні кроку 4 нам знову доведеться порівнювати лише елементи із сусідніх класів.

## Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

* реалізацію методу Мак-Класкі для побудови скороченої ДНФ з ДДНФ булевої функції;
* введення вхідних даних вручну або у програмі;
* перевірку на некоректне введення даних.

Завдання вважається зарахованим, якщо при тестуванні програми в присутності викладача отримано правильний результат.

**Завдання № 6.** (0.8 бала)

Написати програму (на будь-якій відомій студентові мові програмування), яка реалізує

* побудову коду Геммінга заданої послідовності (таблиця 4.4);
* виправлення (за наявності) у прийнятій послідовності помилки та запис правильної початкової (до кодування) послідовності або виявлення більше однієї помилки (при цьому вважати, що у таблиці 4.4 задано вже закодовану інформацію). Врахуйте, що вага початкової послідовності (до кодування) дорівнює 5.

## Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

* побудову коду Геммінга заданої послідовності відповідно до свого варіанту;
* застосування алгоритму виправлення однієї помилки та виявлення двох і більше помилок;
* виведення на екран закодованої та правильної початкової (до кодування) послідовності;
* перевірку на некоректне введення даних.

Завдання вважається зарахованим, якщо при тестуванні програми в присутності викладача отримано правильний результат.

*Таблиця* 4.4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № вар. |  | № вар. |  |
| 1 | 010101010101 | 2 | 011001010101 |
| 3 | 100101010101 | 4 | 010110010101 |
| 5 | 010101100101 | 6 | 010101011001 |
| 7 | 010101010110 | 8 | 101010101010 |
| 9 | 011010101010 | 10 | 100110101010 |
| 11 | 101001101010 | 12 | 101010011010 |
| 13 | 101010100110 | 14 | 101010101001 |
| 15 | 011101010101 | 16 | 010111010101 |
| 17 | 010101110101 | 18 | 010101011101 |
| 19 | 010101010111 | 20 | 111010101010 |
| 21 | 101110101010 | 22 | 101011101010 |
| 23 | 101010111010 | 24 | 101010101110 |
| 25 | 111110101010 | 26 | 101111101010 |
| 27 | 101011111010 | 28 | 101010111110 |
| 29 | 011111010101 | 30 | 010111110101 |