МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторної роботи № 7 на тему:

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Львів-2018

Мета: ознайомлення на практиці з методом ітерацій та методом Ньютона розв'язування систем нелінійних рівнянь.

Достатньо велика кількість реальних задач інженерії програмного забезпечення зводиться до розв'язування системи нелінійних рівнянь. Це одна з найважчих задач в математичному забезпеченні програмних систем. Для розв'язування систем нелінійних рівнянь використовують наближені методи, основними з яких є метод простої ітерації та метод Ньютона.

8.1. Метод простої ітерації

Розглянемо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Розв'язком цієї системи є пара чисел (x_*, y_*), яка перетворює систему рівнянь (8.1) в тотожність (рівність).

Припустимо, що (x_0, y_0) - наближений розв'язок системи (8.1), яку перетворимо до такого вигляду

$$\begin{cases} x=\varphi_1(x,y), \\ y=\varphi_2(x,y), \end{cases} \tag{8.2}$$

де φ_1, φ_2 - неперервно-диференційовані функції за змінними x та y.

Розглянемо ітераційний процес

$$\begin{cases} x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n), \\ y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n), \end{cases} \qquad n=1, 2, ... \tag{8.3}$$

який породжує числові послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$.

Якщо ітераційний процес (8.3) збігається, тобто існують границі

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y_* = \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{8.4}$$

то, використовуючи вирази (8.4), систему рівнянь (8.3) перепишемо у такому вигляді

$$\begin{cases} x_* = \varphi_1(x_*, y_*), \\ y_* = \varphi_2(x_*, y_*), \end{cases} \tag{8.5}$$

тобто x_*, y_* є розв'язком системи (8.2), а також еквівалентної їй системи (8.1).

Теорема. Нехай у деякій замкнутій області $D\ \{a \le x \le A, b \le y \le B\}$ існує єдина пара коренів $x = x_*$, $y = y_*$ системи (8.1), причому

1) функції $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ визначені та неперервно-диференційовані в області D;
2) початкове наближення (x_0, y_0) і всі наступні наближення (x_n, y_n) $(n = 1, 2, ...)$ належать області D;
3) в області D виконуються нерівності

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| \le q_1 < 1, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2 < 1. \tag{8.6}$$

Тоді процес послідовних наближень (8.3) збігається до точних розв'язків системи рівнянь (8.2).

Зауваження. Умови (8.6) можна замінити аналогічними

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right| \le q_1^* < 1, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right| \le q_2^* < 1. \tag{8.7}$$

Оцінку похибки n-го наближення розв'язку визначають з нерівності:

$$|x_* - x_n| + |y_* - y_n| \le \frac{M}{1-M}\left(|x_n - x_{n-1}| + |y_n - y_{n-1}|\right),$$

де M є більшим з чисел q_1, q_2 або q_1^*, q_2^* у співвідношеннях (8.6) або (8.7). Збіжність вважають доброю, якщо $M < 1/2$.

8.2. Метод Ньютона

Це найрозповсюдженіший метод розв’язування систем нелінійних рівнянь. Він забезпечує кращу збіжність, ніж метод простої ітерації.

Нехай (x_0, y_0) - наближений розв’язок системи (8.1), а Δ_x, Δ_y - деякі поправки до точного розв’язку.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0, \\ f_2(x+\Delta_x, y+\Delta_y)=0. \end{cases} \tag{8.8}$$

Розкладемо функції f_1 і f_2 в ряд Тейлора, обмежившись лінійними членами розкладу відносно Δ_x, Δ_y

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0)+\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\Delta_x+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\Delta_y=0, \\ f_2(x_0, y_0)+\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\Delta_x+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\Delta_y=0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Запишемо якобіан або визначник матриці Якобі, складеної з частинних похідних функцій f_1 і f_2 в деякій точці

$$\Delta(x_0, y_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{8.10}$$

а поправки Δ_x і Δ_y визначимо за правилом Крамера із системи (8.9)

$$\Delta_x=-\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)}\begin{vmatrix} f_1(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ f_2(x_0, y_0) & \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{8.11}$$

$$\Delta_y = -\frac{1}{\Delta(x_0, y_0)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & f_1(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & f_2(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \tag{8.12}$$

Наступне наближення розв'язку системи отримаємо у вигляді

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta_x, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta_y, \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.13}$$

Зауваження. Метод простої ітерації, який застосовують для знаходження розв'язку одного нелінійного рівняння або системи двох нелінійних рівнянь, має перший порядок збіжності (лінійну збіжність), а метод Ньютона – другий порядок збіжності (квадратичну збіжність).

Приклад 8.1. Методом простої ітерації розв’язати систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \sin(x + y) = 1{,}5x - 0{,}2. \end{cases}$$

Побудуємо графіки двох функцій $f_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ та $f_2(x, y) = \sin(x + y) - 1{,}5x + 0{,}2$.

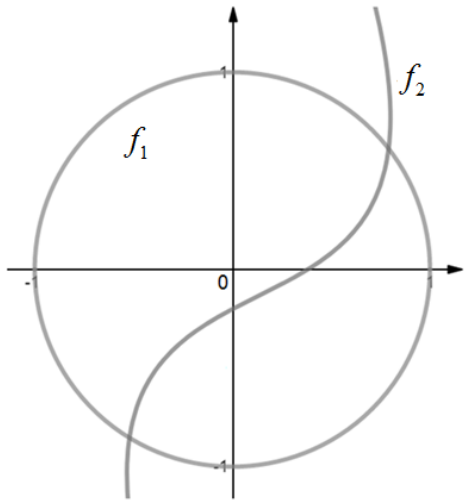

Рис. 8.1. Графіки функцій f_1 і f_2

З графіка на рис. 8.1 наближено визначаємо координати точки (x_0, y_0) перетину кривих. Зобразимо систему рівнянь у вигляді

$$x = \varphi_1(x, y) = \pm\sqrt{1 - y^2},$$
$$y = \varphi_2(x, y) = arc\sin\left(1{,}5x - 0{,}2\right) - x.$$

Перевіримо умови збіжності (8.6) або (8.7).

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{1{,}5}{\sqrt{1 - (1{,}5x - 0{,}2)}} - 1, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \frac{-y}{\pm\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = \left|\frac{1{,}5}{\sqrt{1 - (1{,}5x - 0{,}2)}} - 1\right| < 1, \qquad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right| = \frac{|y|}{\left|\sqrt{1 - y^2}\right|} < 1.$$

Будуємо такий ітераційний процес:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \pm\sqrt{1 - y_n^2}, \\ y_{n+1} = arc\sin\left(1{,}5x_n - 0{,}2\right) - x_n, \qquad n = 0,1,2,... \end{cases}$$

Обчислення здійснюємо доти, поки не досягнемо заданої точності ε шуканого розв’язку, тобто повинна виконуватися умова

$$|x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| < \varepsilon. \qquad (8.14)$$

Приклад 8.3. Розв’язати методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$ систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 20{,}700 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_4^3 = 15{,}880 \\ x_1^3 + x_3^2 + x_4 = 21{,}218 \\ 3x_2 + x_3x_4 = 7{,}900 \end{cases} \qquad (8.15)$$

Розв’язування. Сформуємо матрицю Якобі, знайшовши частинні похідні для кожного рівняння системи в початковій точці $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1{,}0$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 & 0 & 3x_4^2 \\ 3x_1^2 & 0 & 2x_3 & 1 \\ 0 & 3 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження розв'язку $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ системи (8.15) ітераційно застосуємо метод Гауса для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_1 & 0 & 3x_4^2 \\ 3x_1^2 & 0 & 2x_3 & 1 \\ 0 & 3 & x_4 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 20{,}700 \\ -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_4^3 + 15{,}880 \\ -x_1^3 - x_3^2 - x_4 + 21{,}218 \\ -3x_2 - x_3x_4 + 7{,}900 \end{pmatrix}$$

відносно вектора поправок $\Delta X = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4)$ з заданою точністю. Результати обчислень помістимо в таблицю 8.1.

Таблиця 8.1

Номер ітерації	x_1	x_2	x_3	x_4
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1	2,75037	4,6763	7,8958	0,1753
2	1,3448	5,2971	5,9494	0,7029
3	1,4775	3,8437	4,3419	1,7983
4	1,5427	6,2434	4,1204	0,6376
5	1,2364	5,7274	4,3436	0,9163
6	1,2024	5,5986	4,2995	1,0002
7	1,2000	5,6000	4,3000	1,0000
8	1,2000	5,6000	4,3000	1,0000

Розв'язок системи (8.15) буде $X = (1{,}2;\ 5{,}6;\ 4{,}3;\ 1{,}0)$.

Варіанти завдань

Розв'язати систему нелінійних рівнянь з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ методом ітерацій та методом Ньютона.

1. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5 \\ x - \cos y = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2 \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5 \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8 \\ \sin y - 2x = 1{,}6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0 \\ x + \sin y = -0{,}4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2 \\ \sin y - 2x = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5 \\ x + \cos(y-2) = 0{,}5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2 \\ 2y + \cos x = 2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}5 \\ y - \cos x = 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sin y + 2x = 2 \\ \cos(x-1) + y = 0{,}7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5 \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1 \\ \cos(x-2) + y = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) + x = 0{,}8 \\ \sin x - 2y = 1{,}6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \sin(y-1) + x = 1{,}3 \\ y - \sin(x+1) = 0{,}8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - \cos(y+1) = 0 \\ y + \sin x = -0{,}4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} \cos(y+0{,}5) - x = 1{,}5 \\ \sin x - 2y = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \sin(y+2) - x = 1{,}5 \\ y + \cos(x-2) = 0{,}5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1 \\ 2x + \cos y = 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}8 \\ x - \cos y = 2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6 \\ \cos(y-1) + x = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}2 \\ 2x - \sin(y - 0{,}5) = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} \sin(x + 0{,}5) - y = 1{,}2 \\ \cos(y-2) + x = 0 \end{cases}$

Контрольні запитання

1. Пояснити суть методу простої ітерації розв’язування систем нелінійних рівнянь.
2. Сформулювати достатню умову збіжності ітераційного процесу методу простої ітерації.
3. На чому ґрунтується метод Ньютона розв’язування системи нелінійних рівнянь?
4. Пояснити суть методу Ньютона розв’язування системи нелінійних рівнянь.
5. Записати загальний вигляд матриці Якобі, яку використовують в методі Ньютона для розв’язування систем нелінійних рівнянь.
6. Записати умову завершення ітераційного процесу в методі Ньютона.