Лекція 14

Наближене розв’язування диференціальних рівнянь з частинними похідними

Диференціальні рівняння з частинними похідними описують багато реальних фізичних процесів у таких галузях, як механіка суцільних середовищ, теорія пружності, термодинаміка, електродинаміка та ін.

Розділ математики, що присвячений розв’язуванню рівнянь з частинними похідними називається ***математичною фізикою***, а самі рівняння – ***рівняннями математичної фізики*** (РМФ).

Аналітичні розв’язки таких рівнянь вдається знайти лише в окремих випадках. Величезне застосування мають чисельні методи.

Найчастіше математичними моделями реальних фізичних процесів є диференціальні рівняння другого порядку.

14.1. Класифікація рівнянь математичної фізики

Розглянемо диференційні рівняння другого порядку ***канонічної форми***

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (14.1)$$

де x, y – незалежні змінні, A, B, C – двічі неперервно диференційовані функції, які всі одночасно не дорівнюють нулю.

Для визначення типу рівняння (14.1) в заданій точці (x, y) необхідно визначити дискримінант

$$D(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y). \qquad (14.2)$$

Три типи диференційних рівнянь другого порядку:

1) параболічні – $D = 0$;
2) гіперболічні – $D > 0$;
3) еліптичні – $D < 0$.

Зауваження: тип певного рівняння може змінюватися залежно від координат точки (x, y). Рівняння (14.1) може належати до кількох типів залежно від значень коефіцієнтів A, B, C.

Для того, щоб виділити потрібний розв'язок з множини можливих розв'язків, який описує заданий реальний фізичний процес, необхідно задати додаткові умови, а саме початкові та крайові умови. Задача знаходження розв'язку диференціального рівняння, який задовольняє заданим крайовим умовам, називається ***крайовою задачею***.

14.2. Класичні приклади рівнянь

1) ***Параболічне рівняння*** – рівняння теплопровідності або рівняння дифузії, яке описує розподіл температури вздовж стержня з часом t

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \qquad 0 < x < l \,. \tag{14.3}$$

Тут a – коефіцієнт теплопровідності. Для розв'язання рівняння необхідно задати крайові умови на кінцях стержня

$$\begin{aligned} u(0,t) &= T_0 = u_1(t), \\ u(l,t) &= T_l = u_2(t), \end{aligned} \tag{14.4}$$

та значення в початковий момент часу

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le l \,. \tag{14.5}$$

Тут T_0, T_l - сталі температури, що підтримуються на кінцях стержня, $f(x)$ – розподіл температури в момент $t = 0$.

2) ***Гіперболічне рівняння*** – хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \,, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \,. \tag{14.6}$$

Це рівняння описує процес поширення малих акустичних коливань (поперечні коливання струни), де u – відхилення від положення рівноваги, a – швидкість поширення збурення.

Початкові умови для хвильового рівняння мають вигляд:

$$u(x,0) = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(t), \qquad 0 \le x \le l_1. \tag{14.7}$$

Крайові умови записуються таким чином:

$$u(0,t) = f_1(t), \quad u(l,t) = f_2(t). \qquad (14.8)$$

3) ***Еліптичне рівняння*** – рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (14.9)$$

або рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y). \qquad (14.10)$$

Ці рівняння описують потік ідеальної рідини в стаціонарних потоках, стаціонарний розподіл температури або напруженість електричних або магнітних полів. Рівняння Лапласа описує ці процеси у разі відсутності джерел енергії, а рівняння Пуассона – за наявності джерел, які задаються в правій частині рівняння. Оскільки рівняння Лапласа і Пуассона стаціонарні (не залежать від часу t), то в постановці задачі задають тільки крайові умови.

14.3. Крайові умови

Розрізняють три типи крайових умов:

1) крайові умови першого роду:

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u(l,t) = \varphi_2(t); \qquad (14.11)$$

2) крайові умови другого роду:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_2(t); \qquad (14.12)$$

3) крайові умови третього роду:

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \\ \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_2(t). \end{cases} \qquad (14.13)$$

Для наближеного розв’язування рівняння (14.1) замінимо частинні похідні їх скінченими різницями.

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Для цього розкладемо функцію $u(x,y)$ в ряд Тейлора в околі точки (x_0, y_0) і обмежимося першим членом розкладу. Отримаємо

$$u(x,y) = u(x_0, y_0) + \left(x - x_0 \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} \right). \qquad (14.14)$$

Якщо прийняти $x = x_0 + h$, то отримаємо *праву скінченну різницю першого порядку*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + 0(h). \qquad (14.15)$$

Якщо прийняти $x = x_0 - h$, будемо мати *ліву скінченну різницю першого порядку*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0 - h, y_0)}{h} + 0(h). \qquad (14.16)$$

Аналогічно для другої похідної $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ запишемо *праву скінченну різницю другого порядку*:

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial u(x_0 + h, y_0)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}}{h} + 0(h^2). \qquad (14.17)$$

Запишемо (14.16) у вигляді:

$$\frac{\partial u(x_0 + h, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + 0(h).$$

Підставимо в (14.17) ліві різниці (14.16):

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - h, y_0)}{h^2} + 0(h^2). \quad (14.18)$$

Аналогічно отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = \frac{u(x_0, y_0 + k) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - k)}{k^2} + 0(k^2), \quad (14.19)$$

де k - приріст змінної y.

14.4. Основні поняття методу скінчених різниць

Оскільки на практиці розв'язання крайових задач для рівнянь з частинними похідними за допомогою аналітичних методів пов'язане зі значними обчислювальними труднощами або взагалі неможливе, використовуються наближені чисельні методи. Одним з них є метод сіток або метод скінчених різниць. Використання цього методу, як правило, зводить задачу до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими матрицями.

Послідовність (алгоритм) методу:

1. Область неперервних аргументів заміняється різницевою сіткою – дискретною множиною вузлів (Рис. 14.1).

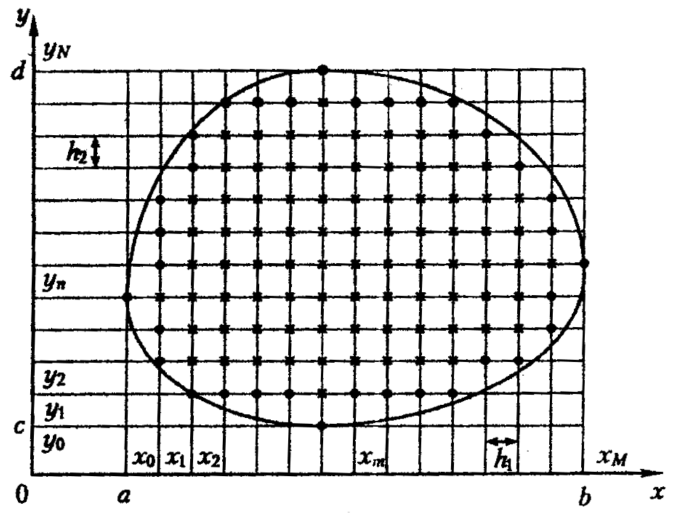

Рис. 14.1. Приклад накладання різницевої сітки на ОВ

2. Диференційні рівняння, початкові і граничні умови записуються у вигляді скінченних різниць. При цьому отримується СЛАР.

3. Розв'язування СЛАР, матриця якої, як правило, має велику розмірність і є розрідженою.

14.5. Метод сіток для розв'язування для диференційних рівнянь еліптичного типу

Розглянемо задачу Діріхле для рівняння Лапласа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{14.20}$$

в області G $0<x<a,\ \ 0<y<b$. На границі області Γ задано граничну умову Діріхле

$$u(x,y)=f(x,y), \quad x,y\in\Gamma. \tag{14.21}$$

Замінимо диференціальний оператор Лапласа різницевим оператором.

Шаблон різницевої схеми – система вузлів для заміни похідних скінченними різницями. Розглянемо п'ятиточковий шаблон:

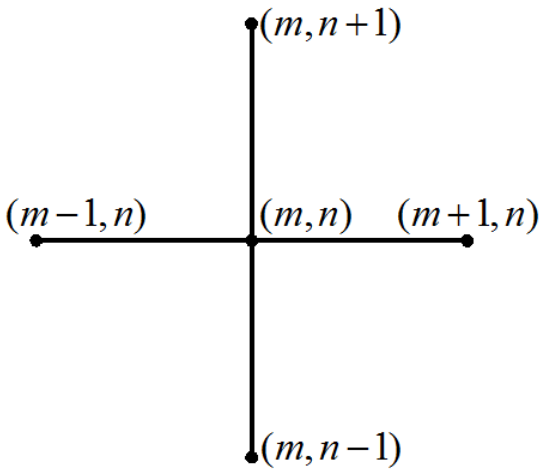

Рис. 14.2. П'ятиточковий шаблон

Розкладаючи точний розв'язок $u(x,y)$ в ряд Тейлора в околі (x_m, y_n), маємо:

$$u(x_m\pm h,y_n)=u(x_m,y_n)\pm h\frac{\partial u(x_m,y_n)}{\partial x}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_m,y_n)}{\partial x^2}\pm\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_m,y_n)}{\partial x^3}+0(h^4),$$

$$u(x_m,y_n\pm h)=u(x_m,y_n)\pm h\frac{\partial u(x_m,y_n)}{\partial y}+\frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x_m,y_n)}{\partial y^2}\pm\frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x_m,y_n)}{\partial y^3}+0(h^4).$$

Для скорочення запису введемо індекси для значень функції $u_{m,n}$, $u_{m-1,n}$, ..., $u_{m,n-1}$, $u_{m,n+1}$ у вузлах шаблону відповідно. Тоді вирази для похідних запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x^2} = \frac{u_{m-1,n} + 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2} + 0(h^2), \tag{14.22}$$

$$\frac{\partial u_{m,n}}{\partial y^2} = \frac{u_{m,n-1} + 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h^2} + 0(h^2). \tag{14.23}$$

Використовуючи (14.22) і (14.23), введемо позначення для сіткової функції у вузлах $u_{m,n}$, $u_{m-1,n}$, ..., $u_{m,n-1}$, $u_{m,n+1}$, і запишемо різницеве рівняння, що відповідає рівнянню Пуассона на п'ятиточковому шаблоні, у такий спосіб:

$$\frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h^2} = f_{m,n}.$$

Перепишемо систему сіткових рівнянь у вигляді:

$$u_{m-1,n} + u_{m+1,n} - 4u_{m,n} + u_{m,n-1}u_{m,n+1} = h^2 f_{m,n}.$$

Для простоти вважаємо область прямокутною. Поділимо сторону A на n інтервалів, а сторону B на m. Тоді

$$h = \frac{A}{n}, \quad k = \frac{B}{m}.$$

Будуємо сітку з вузлами $x_i = ih$; $y_j = jk$.

Маємо $(n+1)(m+1)$ вузлів сітки. Апроксимуємо похідні в кожному внутрішньому вузлі сітки центральними різницями другого порядку. Рівняння Лапласа запишемо з використанням скінченних різниць. Отримаємо:

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + \frac{1}{k^2}\left(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}\right) = 0.$$

Якщо ввести $\lambda = \frac{k}{h}$, то можна записати

$$\lambda^2 u_{i+1,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2\left(1+\lambda^2\right)u_{i,j} = 0,$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Отримаємо систему $(n-1)(m-1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $(n+1)(m+1)$ невідомих. За допомогою граничних умов вилучаємо $2(n+m)$ невідомих, і залишається $(n-1)(m-1)$ невідомих. Цю систему можна розв'язати ітераційним методом.