Міністерство освіти і науки України
Національний університет “Львівська політехніка”
Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій
Кафедра програмного забезпечення

Звіт
До лабораторної роботи №2

На тему: «Розв’язування нелінійних рівнянь методом дотичних та методом послідовних наближень»
З дисципліни: “Чисельні методи”

Лектор:
доц. каф. ПЗ
Мельник Н.Б.
Виконав:
ст. гр. ПЗ-18
Юшкевич А.І.
Прийняв:
проф. каф. ПЗ
Гавриш В.І.
« … » … 2023 р.

∑ = _____

Львів – 2023

Тема: Розв’язування нелінійних рівнянь методом дотичних та методом послідовних наближень.
Мета: Ознайомлення на практиці з методами відокремлення дійсних ізольованих коренів нелінійних рівнянь. Вивчення методів уточнення коренів - методу дотичних та методу послідовних наближень.

Завдання

Методами дотичних та послідовних наближень визначити корінь рівняння з точністю 10^{-3}. Рівняння: $\arctan(x) - \sin(x) = 0$. Код програмної реалізації розв’язання нелінійного рівняння подано у додатку.

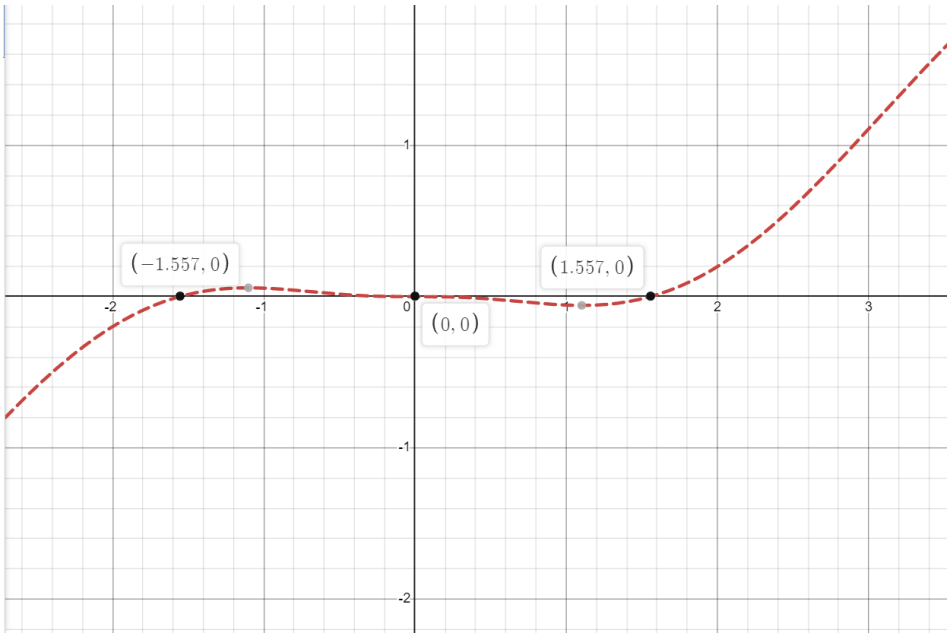


Рис. 1. Графік функції $f(x) = \arctan(x) - \sin(x)$

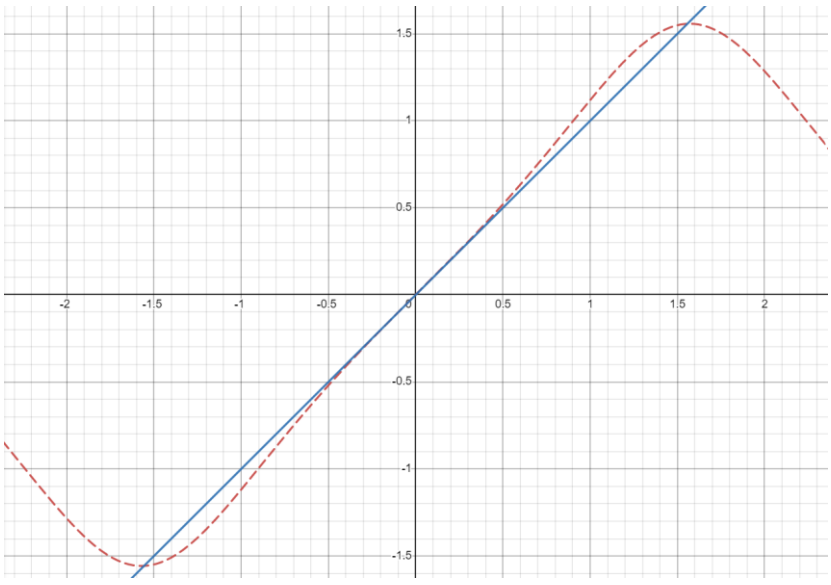


Рис. 2. Графік перетину функцій $g(x) = x$ та $\varphi(x) = tan(sin(x))$

Метод послідовних наближень

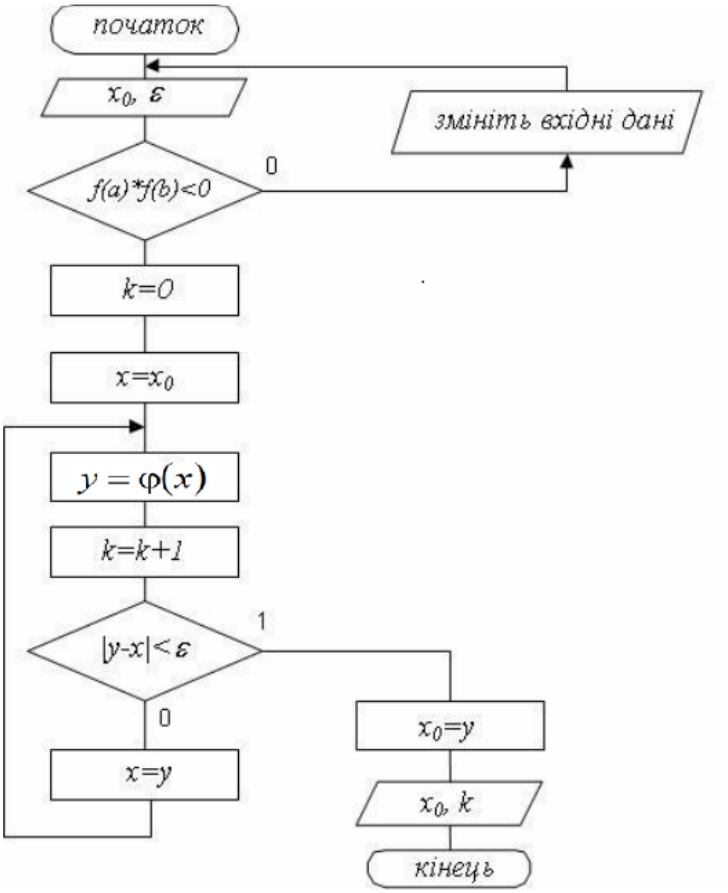


Рис. 3. Блок-схема пошуку коренів ітераційним методом

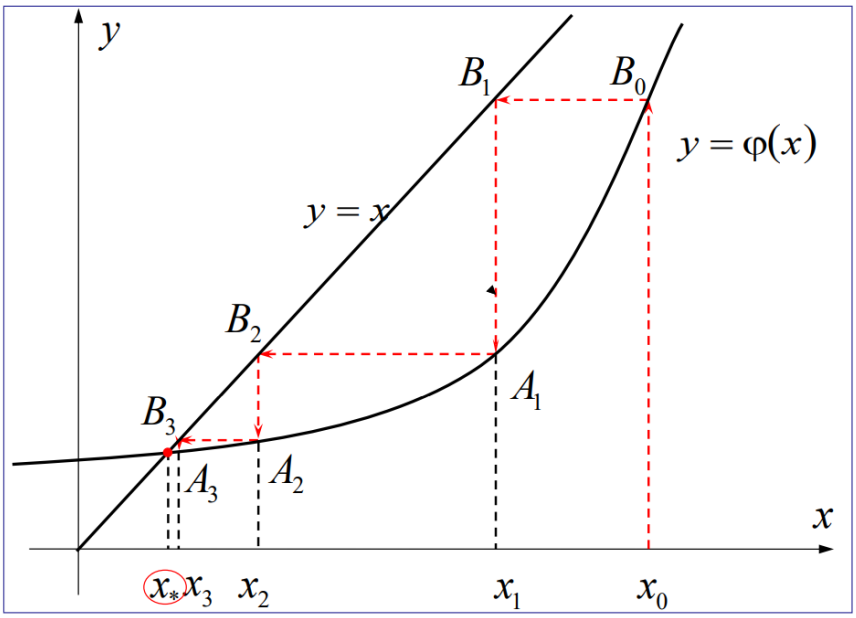


Рис. 4. Геометрична інтерпретація пошуку розв’язку методом послідовних наближень

Основні етапи обчислювального алгоритму, реалізованого у програмному продукті мовою С++ :

1) введення даних користувачем для ініціалізації змінних(leftLim, rightLim, eps), що визначають початковий проміжок на якому міститься корінь;
2) створюємо екземпляр класу SimpleIterations – findSimpIt та параметризуємо його величинами, які визначають шуканий інтервал локалізації кореня.
3) викликаємо об‘єктом findSimpIt функцію Find() (рис. 5.);
4) із використання функції Find() викликається функція SetLimits() (рис. 6.), яка дає змогу перевірити нерівність (leftLim < rightLim) та локалізувати корінь на визначеному проміжку;
5) перевірка ітераційного процесу на збіжність (рис. .)
6) якщо корінь локалізовано повертаємося у функцію Find(), яка описує алгоритм методу похідних. Функція повертає структуру, що містить кількість ітерацій та результат;
7) виводимо результат виконання програми на екран (рис. 8.);

```
    SResult Find() {
        bool resultIsFound = false;

        resultIsFound = SetLimits(leftLim, rightLim, eps);

        result.result = leftLim;

        if (!resultIsFound){

            ldouble maxDerivative = 0, currentDerivative = 0, prevRes = leftLim;

            for (ldouble n = leftLim; n < rightLim; n += fabs(leftLim + rightLim) / 10)
                if (fabs(currentDerivative = Get1D(n)) > maxDerivative)
                    maxDerivative = currentDerivative;

            result.result = GetCloser(result.result, maxDerivative);
            while (!(fabs(result.result - prevRes) <= eps)) {
                result.iterations++;

                prevRes = result.result;
                result.result = GetCloser(result.result, maxDerivative);

                ShowIterations(result.result, prevRes, result.iterations);
            }
        }
        return result;
    }
};
```

Рис. 5. Метод Find() об’єкту класу Secant

```cpp
bool SetLimits(ldouble& leftLim, ldouble& rightLim, ldouble eps) {
    bool onGoing = true, resultIsFound = false;
    ldouble step{ (fabs(leftLim) + fabs(rightLim)) / 10 }, fX{ 0 }, fLeft{ 0 };

    if (step >= 1)
        step = 1;

    fLeft = f(leftLim);
    if (fLeft == 0) {
        resultIsFound = true;
        rightLim = fLeft;
        onGoing = false;
    }

    while (onGoing) {

        for (ldouble x = leftLim + step; x < rightLim; x += step) {
            fX = f(x);

            if (fabs(fX) <= eps) {
                leftLim = x;
                rightLim = x;
                resultIsFound = true;
                onGoing = false;
                break;
            }

            if (fLeft * fX <= 0) {
                rightLim = x;
                leftLim = x -= step;
                onGoing = false;
                break;
            }

            fLeft = fX;
        }
        step /= 10;
    }

    return resultIsFound;
}
```

Рис. 6. Функція SetLimits()

```
Derivatives of fi:
0
0.185735
0.373666
0.556751
0.727548
0.878403
```

Рис. 7. Перевірка ітераційного процесу на збіжність

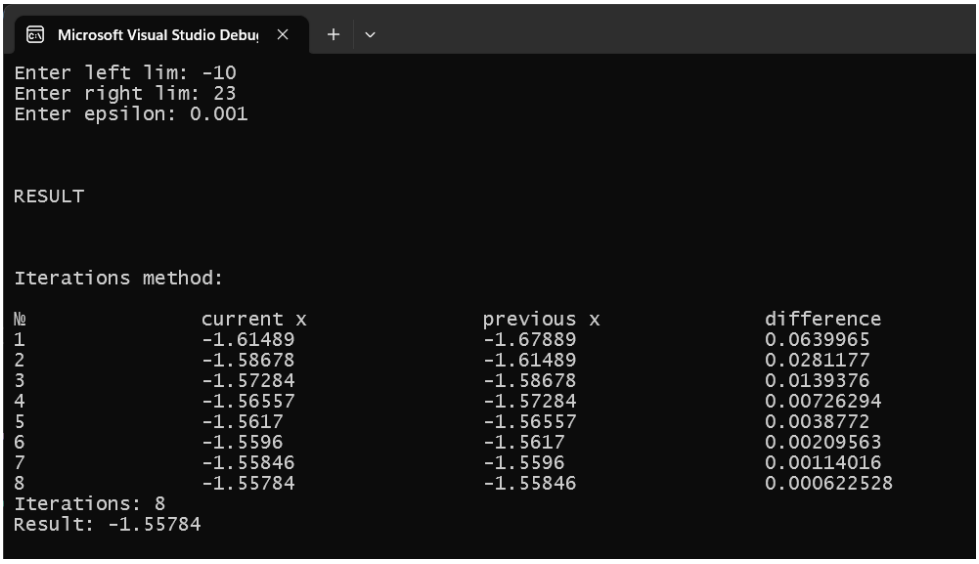
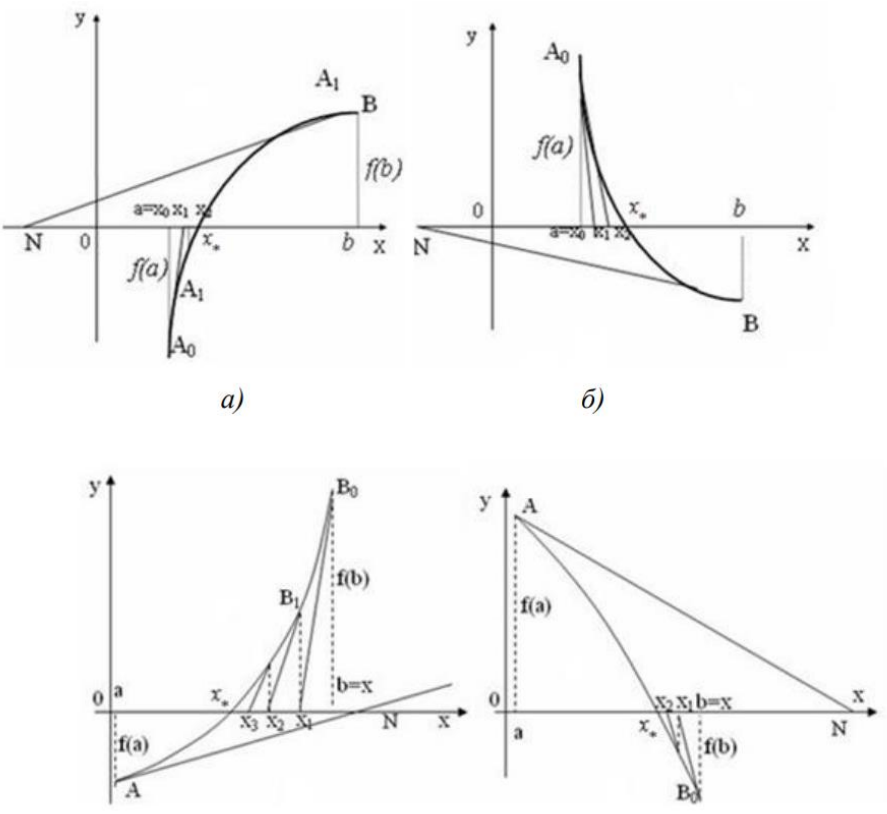


Рис. 8. Результат виконання програми

Метод дотичних



а) *б)* *в)* *г)*

а) графік функції $y = f(x)$ *є вгнутим (f'(x)>0, f''(x)>0);*

б) графік функції $y = f(x)$ *є опуклим (f'(x)<0, f''(x)<0);*

в) графік функції $y = f(x)$ *є опуклим (f'(x)>0, f''(x)<0);*

г) графік функції $y = f(x)$ *є вгнутим (f'(x)<0, f''(x)>0).*

Рис. 9. Геометрична інтерпретація пошуку розв’язку методом дотичних

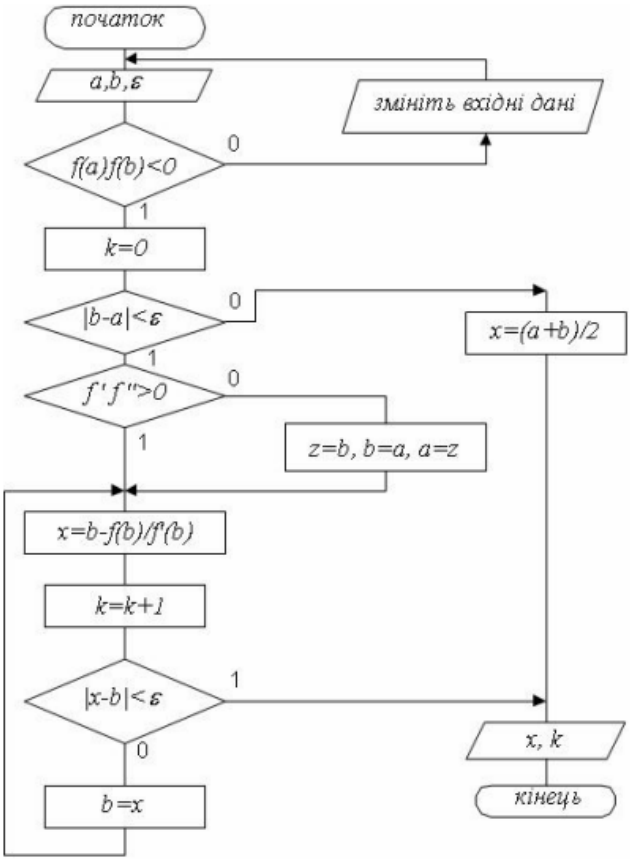


Рис. 10. Блок-схема пошуку коренів методом дотичних

Хід виконання роботи програми:

1) введення даних користувачем для ініціалізації змінних(leftLim, rightLim, eps), що визначають початковий проміжок на якому міститься корінь;
2) створюємо екземпляр класу Newton – findNewt та параметризуємо його величинами, які визначають шуканий інтервал локалізації кореня.
3) викликаємо об‘єктом findNewt функцію Find() (рис. 11.);
4) із використання функції Find() викликається функція SetLimits() (рис. 6.), яка дає змогу перевірити нерівність (leftLim < rightLim) та локалізувати корінь на визначеному проміжку;
5) якщо корінь локалізовано повертаємося у функцію Find(), яка описує алгоритм методу похідних. Функція повертає структуру, що містить кількість ітерацій та результат;
6) виводимо результат виконання програми на екран (рис. 12.);

```cpp
    SResult Find() {
        bool resultIsFound = false;

        resultIsFound = SetLimits(leftLim, rightLim, eps);

        if (resultIsFound)
            result.result = leftLim;

        while ((Get1D(leftLim) * Get1D(rightLim) <= 0 || Get2D(leftLim) * Get2D(rightLim) <= 0)) {
            resultIsFound = SetLimits(leftLim, rightLim, eps);

            if (resultIsFound) {
                result.result = leftLim;
                break;
            }
        }

        if (!resultIsFound) {
            ldouble runLim = 0, prevLim = 0;

            if (Get2D(leftLim) > 0 && Get1D(leftLim) > 0) {
                runLim = rightLim;
            }
            else if (Get2D(leftLim) > 0 && Get1D(leftLim) < 0)
                runLim = leftLim;
            else if (Get2D(leftLim) < 0 && Get1D(leftLim) > 0)
                runLim = leftLim;
            else
                runLim = rightLim;

            while (fabs(runLim - prevLim) > eps) {
                result.iterations++;

                prevLim = runLim;
                runLim = GetX(runLim);

                ShowNewton(runLim, prevLim, result.iterations);
            }

            result.result = runLim;
        }

        return result;
    }
};
```

Рис. 11. Метод Find() об’єкту класу Newton

```
Microsoft Visual Studio Debu
Enter left lim: -10
Enter right lim: 23
Enter epsilon: 0.001


RESULT


Newton method:

№               current x               previous x              difference
1               -1.57716                -1.7                    0.122845
2               -1.55759                -1.57716                0.0195621
3               -1.55709                -1.55759                0.000507145
Iterations: 3
Result: -1.55709
```

Рис. 12. Результат виконання програми

Висновки

У результаті виконання лабораторної роботи визначено дійсний корінь нелінійного алгебраїчного рівняння $\arctan(x) - \sin(x) = 0$ з заданою точністю 10^{-3} методом простої ітерації та методом дотичних. Розв'язок отриманий з заданою точністю методом простої ітерації за 8 кроків, а за методом дотичних – за 3 кроки. Дані методи дають змогу знайти дійсний корінь за меншу кількість кроків ніж методи дихотомії та хорд.

Додаток

Header.h:

```
#pragma once

#include <iostream>
#include <cmath>

typedef long double ldouble;

using namespace std;

typedef struct {
   int iterations;
   ldouble result;
} SResult;

ldouble f(ldouble x) {
   return atan(x) - sin(x);
}

bool SetLimits(ldouble& leftLim, ldouble& rightLim, ldouble eps) {
   bool onGoing = true, resultIsFound = false;
   ldouble step{ (fabs(leftLim) + fabs(rightLim)) / 10 }, fX{ 0 }, fLeft{ 0 };

   if (step >= 1)
      step = 1;

   fLeft = f(leftLim);
   if (fLeft == 0) {
      resultIsFound = true;
      rightLim = fLeft;
      onGoing = false;
   }

   while (onGoing) {

      for (ldouble x = leftLim + step; x < rightLim; x += step) {
         fX = f(x);

         if (fabs(fX) <= eps) {
            leftLim = x;
            rightLim = x;
            resultIsFound = true;
            onGoing = false;
            break;
         }
```

```
            if (fLeft * fX <= 0) {
                rightLim = x;
                leftLim = x -= step;
                onGoing = false;
                break;
            }

            fLeft = fX;
        }
        step /= 10;
    }

    return resultIsFound;
}

ldouble Get1D(ldouble x) {
    return (1 / (x * x + 1) - cos(x));
}

void ShowIterations(const ldouble current_x, const ldouble previous_x, const int number_of_iterations) {
    if (number_of_iterations == 1)
        cout << endl << endl << "Iterations method:" << endl << endl << "№\t\t" << "current x\t\t" << "previous x\t\t"
<< "difference\t\t" << endl;

    cout << number_of_iterations << "\t\t" << current_x << " \t\t" << previous_x << " \t\t" << fabs(current_x -
previous_x) << endl;
}
void ShowNewton(const ldouble current_x, const ldouble previous_x, const int number_of_iterations) {
    if (number_of_iterations == 1)
        cout << endl << endl << "Newton method:" << endl << endl << "№\t\t" << "current x\t\t" << "previous x\t\t" <<
"difference\t\t" << endl;

    cout << number_of_iterations << "\t\t" << current_x << "\t\t" << previous_x << "    \t\t" << fabs(current_x -
previous_x) << endl;
}

class Newton {
private:
    ldouble leftLim;
    ldouble rightLim;
    ldouble eps;
    SResult result;

    ldouble Get2D(ldouble x) {
        return sin(x) - 2 * x / ((x * x + 1) * (x * x + 1));
    }
    ldouble GetX(ldouble x) {
        return x - (f(x) / Get1D(x));
    }
public:
    Newton(ldouble leftLim, ldouble rightLim, ldouble eps) {
        this->leftLim = leftLim;
        this->rightLim = rightLim;
        this->eps = eps;
        result = { 0, NAN };
    }

    SResult Find() {
        bool resultIsFound = false;

        resultIsFound = SetLimits(leftLim, rightLim, eps);
```

```
        if (resultIsFound)
            result.result = leftLim;

        while ((Get1D(leftLim) * Get1D(rightLim) <= 0 || Get2D(leftLim) * Get2D(rightLim) <= 0)) {
            resultIsFound = SetLimits(leftLim, rightLim, eps);

            if (resultIsFound) {
                result.result = leftLim;
                break;
            }
        }

        if (!resultIsFound) {
            ldouble runLim = 0, prevLim = 0;

            if (Get2D(leftLim) > 0 && Get1D(leftLim) > 0) {
                runLim = rightLim;
            }
            else if (Get2D(leftLim) > 0 && Get1D(leftLim) < 0)
                runLim = leftLim;
            else if (Get2D(leftLim) < 0 && Get1D(leftLim) > 0)
                runLim = leftLim;
            else
                runLim = rightLim;

            while (fabs(runLim - prevLim) > eps) {
                result.iterations++;

                prevLim = runLim;
                runLim = GetX(runLim);

                ShowNewton(runLim, prevLim, result.iterations);
            }

            result.result = runLim;
        }

        return result;
    }
};

class SimpleIterations {
private:
    ldouble leftLim;
    ldouble rightLim;
    ldouble eps;

    SResult result;

    ldouble GetCloser(ldouble x, ldouble k) {
        return x - f(x)/k;
    }
public:
    SimpleIterations(ldouble leftLim, ldouble rightLim, ldouble eps) {
        this->leftLim = leftLim;
        this->rightLim = rightLim;
        this->eps = eps;

        result = { 0, NAN };
    }

    SResult Find() {
        bool resultIsFound = false;
```

```
        resultIsFound = SetLimits(leftLim, rightLim, eps);

        result.result = leftLim;

        if (!resultIsFound){

            ldouble maxDerivative = 0, currentDerivative = 0, prevRes = leftLim;

            for (ldouble n = leftLim; n < rightLim; n += fabs(leftLim + rightLim) / 10)
                if (fabs(currentDerivative = Get1D(n)) > maxDerivative)
                    maxDerivative = currentDerivative;

            result.result = GetCloser(result.result, maxDerivative);
            while (!(fabs(result.result - prevRes) <= eps)) {
                result.iterations++;

                prevRes = result.result;
                result.result = GetCloser(result.result, maxDerivative);

                ShowIterations(result.result, prevRes, result.iterations);
            }
        }
        return result;
    }
};
```

Main.cpp:

```
#include "Header.h"

int main() {
        ldouble left, right, eps;

        cout << "Enter left lim: ";
        cin >> left;
        cout << "Enter right lim: ";
        cin >> right;
        cout << "Enter epsilon: ";
        cin >> eps;
        cout << endl << endl << endl << "RESULT" << endl << endl;

        Newton findNewt(left, right, eps);
        SimpleIterations findSimpIt(left, right, eps);

        SResult newtRes = findNewt.Find();
        cout << "Iterations: " << newtRes.iterations << endl << "Result: " << newtRes.result << endl << endl;

        SResult SimpItRes = findSimpIt.Find();
        cout << "Iterations: " << SimpItRes.iterations << endl << "Result: " << SimpItRes.result << endl << endl;

        return 0;
}
```