Лекція 13

Розв'язування задач Коші чисельними методами

13.1. Диференціальні рівняння

Багато практичних задач, зокрема коливання струни, мембрани, поширення тепла, дифузійні процеси, а також задачі проектування, які пов'язані з розрахунком потоків енергії чи руху тіл, призводять до розв'язування диференціальних рівнянь.

Диференціальні рівняння – це рівняння, які, окрім невідомих функцій однієї або декількох незалежних змінних, містять також і їхні похідні. Диференціальні рівняння називають звичайними, якщо невідомі функції є функціями однієї змінної, в іншому випадку - рівняннями з частковими похідними.

Приклади диференціальних рівнянь:

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3); \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = t+1; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 2; \quad 2s\,dt = t\,ds; \quad y' = x^2; \; xdy = y^3dx.$$

Звичайні диференціальні рівняння записують у вигляді

$$F\,(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{13.1}$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – шукана функція.

Найвищий порядок n похідної, що входить у рівняння (13.1), називають порядком диференціального рівняння. У загальному випадку вищий порядок похідної можна виразити у явному вигляді, наприклад,

$$y' = f\,(x, y), \qquad y'' = f\,(x, y, y').$$

Лінійним диференціальним рівнянням називається рівняння, лінійне щодо шуканої функції та її похідних, наприклад, $y' - x^2y = \sin x$.

Розв'язком диференціального рівняння (13.1) називають будь-яку n разів диференційовану функцію $y = f(x)$, яка після її підстановки у вихідне рівняння перетворює його в тотожність.

Графік розв'язку звичайного диференціального рівняння називають *інтегральною кривою* цього рівняння.

Розв'язок диференціального рівняння, що містить кількість довільних незалежних (сталих) параметрів, яка дорівнює його порядку, називають ***загальним розв'язком*** (або *загальним інтегралом*) цього рівняння.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (13.1) має вигляд:

$$y = \varphi\,(x, C_1, \; C_2, \ldots, C_n), \tag{13.2}$$

де C_i , $i = \overline{1,n}$ – довільні сталі.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називають будь-який розв'язок, який отримують зі загального при визначенні числових значень довільних сталих. Довільні сталі, що входять у загальний розв'язок, визначають з ***початкових*** або ***крайових*** *умов*.

Наведемо геометричну інтерпретацію загального розв'язку (13.2). Цей розв'язок описує нескінченне сімейство інтегральних кривих з параметром *C*, а частинному розв'язку відповідає єдина крива з цього сімейства (рис. 13.1).

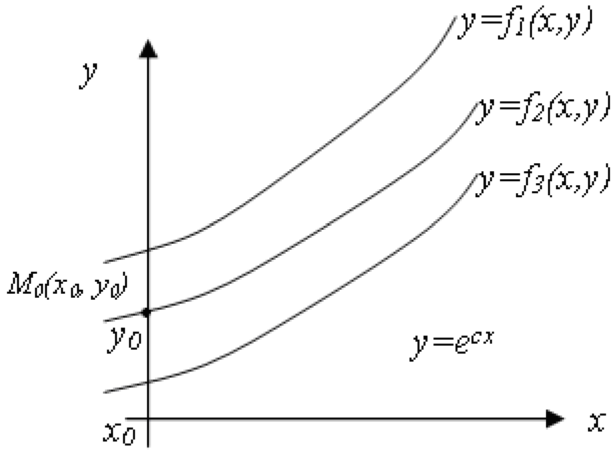

Рис. 13.1. Сімейство інтегральних кривих диференціального рівняння

Залежно від способу задавання додаткових умов для отримання частинного розв'язку диференціального рівняння існують два різних типи задач: задачі Коші та крайові задачі. Додатковими умовами можуть бути значення шуканої функції та її похідних при деяких значеннях незалежної змінної, тобто у певних точках.

Якщо ці умови задають в одній точці, то таку задачу називають ***задачею Коші***. Додаткові умови в задачі Коші називають ***початковими умовами***, а точка $x=x_0$, в якій їх задають – ***початковою точкою***.

Для рівняння першого порядку додатковою є одна умова, тому для цього випадку формулюють так задачу Коші: для заданих x_0, y_0 знайти такий розв'язок $y=y(x)$ рівняння (13.1), для якого $y(x_0) = y_0$.

Якщо ж для рівняння порядку $n>1$ додаткові умови задають в більше, ніж одній точці, тобто для різних значень незалежної змінної, то таку задачу називають ***крайовою задачею***. Додаткові умови називаються при цьому ***крайовими умовами***. На практиці, як правило, крайові умови задають у двох точках $x=a$ та $x=b$, що є кінцями відрізка, на якому розв'язують крайову задачу.

Методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь поділяють на графічні, аналітичні, наближені і чисельні.

Графічні методи використовують для геометричного зображення розв'язку. За допомогою ***аналітичних методів*** отримують точний або наближений розв'язок диференційного рівняння у вигляді аналітичного виразу. У н***аближених методах*** використовують різні спрощення диференціальних рівнянь шляхом обґрунтованого відкидання деяких членів, які вони містять, а також спеціальним вибором класів шуканих функцій.

Чисельні методи дають змогу отримати чисельний розв'язок, оскільки за допомогою аналітичних методів розв'язують вузьке коло задач. При використанні чисельних методів виникають похибки обчислень, пов'язані з чисельною апроксимацією. Джерелами таких похибок є:

1) *похибки заокруглення* зумовлені обмеженнями зображення числових даних в пам'яті комп'ютера, оскільки кількість значущих цифр, що запам'ятовуються і використовуються в обчисленнях, є обмеженою;

2) *похибки відсікання* пов'язані з тим, що для апроксимації функції замість послідовності

$$y = y_0,\, y' = y'_0,\, y'' = y''_0,\, \dots ,\, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{для} \quad x = x_0 \tag{13.3}$$

часто використовуюся лише декілька перших її членів;

3) *похибки поширення* є результатом накопичення похибок, що з'явились у попередніх результатах обчислень. Так як ні одним з наближених методів не можна знайти точний розв’язок, то будь-яка похибка, що виникла в процесі обчислень, зберігається і в подальших обчисленнях (рис. 13.2).

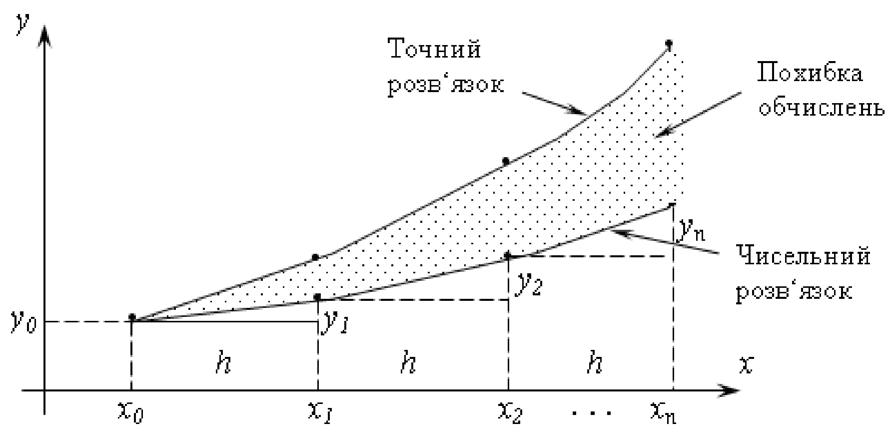

Рис.13.2. Геометричне подання накопичування похибок в процесі обчислень

13.2. Задача Коші

У залежності від вигляду диференціального рівняння (13.1) задачу Коші формулюють так:

1. Якщо $n = 1$, то потрібно знайти функцію $y = y(x)$, що задовольняє рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{13.4}$$

та приймає для $x = x_0$ задане значення y_0

$$y(x_0) = y_0. \tag{13.5}$$

2. Задача Коші для диференціального рівняння *n*-го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \qquad (13.6)$$

полягає у знаходженні функції $y = y(x)$, що задовольняє рівняння (13.6) та початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (13.7)$$

де $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – задані числові значення функції y_0 та її похідних $y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$ до $(n-1)$ порядку в точці $x = x_0$.

Розглянемо деякі чисельні методи розв'язування задач Коші для звичайного диференційного рівняння першого порядку.

13.3. Метод Ейлера

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \qquad (13.8)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0. \qquad (13.9)$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння на відрізку $[x_0, x_n]$.

Розіб'ємо відрізок $[x_0, x_n]$ на n рівних частин і отримаємо послідовність $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, де $x_i = x_0 + ih\ (i = 0,1,2,...,n)$, $h = (x_n - x_0)/n$ – крок інтегрування.

Виберемо k-й відрізок $[x_k, x_{k+1}]$ та проінтегруємо рівняння (13.8)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx = y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

або

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx. \qquad (13.10)$$

Якщо підінтегральну функцію на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ вважатимемо сталою та обчислимо інтеграл за формулою лівих прямокутників, то одержимо

$$y_{k+1} = y_к + hf(x_k, y_к) + O(h^2). \qquad (13.11)$$

Відкинувши в цій рівності доданок порядку $O(h^2)$, отримаємо розрахункову формулу

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \tag{13.12}$$

$$h = x_{k+1} - x_k, \quad k = \overline{0, n-1},$$

яку називають формулою Ейлера.

Продовжимо цей процес, вважаючи, що на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ інтегральна крива $y = F(x)$ є прямолінійним відрізком, що починається в точці $M_k(x_k; y_k)$ з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$. Отже, як наближення шуканої інтегральної кривої, одержуємо ламану лінію з вершинами в точках $M_0(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1), ..., M_n(x_n; y_n)$ (рис. 13.3).

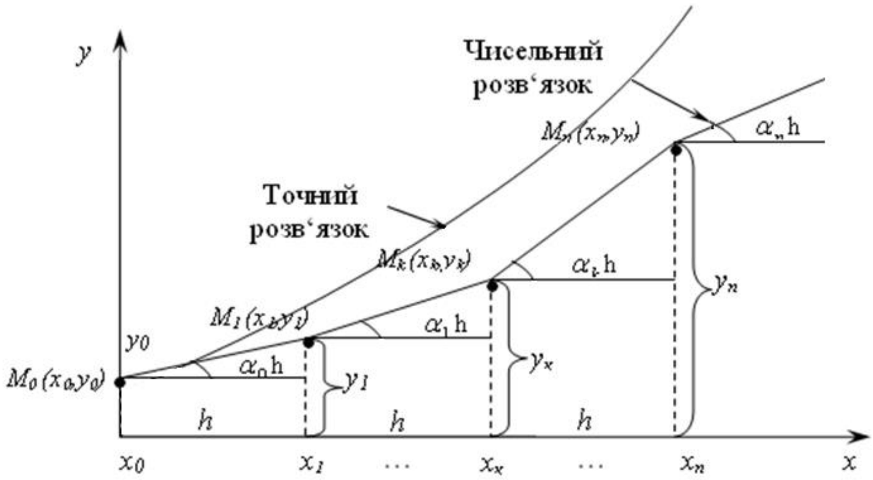

Рис. 13.3. Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Зауважимо, що похибка розв'язку, отриманого за методом Ейлера на кожному кроці є величиною порядку $O(h^2)$. Точність розв'язку, отриманого за цим методом, є досить малою і з переходом від точки x_k до точки x_{k+1} його похибка зростає.

13.4. Метод Рунге-Кутта

Методом Рунге-Кутта одержують точніший розв'язок порівняно з методом Ейлера.

Нехай на відрізку $[a,b]$ потрібно знайти чисельний розв'язок рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{13.13}$$

з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин точками $x_i = x_0 + ih (i = \overline{0,n})$, де $h = (b-a)/n$ – крок інтегрування. Послідовні значення y_i $(i = \overline{1,n})$ шуканої функції y визначають за формулою

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \tag{13.14}$$

Якщо розкласти функцію y в у ряд Тейлора та обмежитися членами розкладу до h^4, то Δy можна подати у вигляді

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{24} y^{IV}(x). \tag{13.15}$$

Замість безпосередніх обчислень за формулою (13.15) спочатку визначають такі величини:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x,y), \\ k_2 &= hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 &= hf(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 &= hf(x+h, y+k_3). \end{aligned} \tag{13.16}$$

Можна довести, що якщо величини k_1, k_2, k_3, k_4 розглядати відповідно з вагами 1/6, 1/3, 1/3, 1/6, то значення виразу $\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4$ з точністю до четвертого степеня h дорівнює значенню y, яке визначають за формулою (13.15), тобто

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{13.17}$$

Таким чином, для кожної пари біжучих значень x_i і y_i з формул (13.16) визначають значення коефіцієнтів

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}), \\ k_3^{(i)} &= hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}), \\ k_1^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \end{aligned} \tag{13.18}$$

а потім обчислюють $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = \overline{0,n})$.

13.5. Геометрична інтерпретація визначення розв’язку задачі Коші методом Рунге-Кутта 4-го порядку

Із точки (x_i, y_i) рухаємось по дотичній з кутом нахилу, тангенс якого дорівнює $f(x_i, y_i)$. На цій дотичній вибираємо точку з координатами $(x_i+h/2, y_i+k_1/2)$. Далі із точки (x_i, y_i) проводимо лінію, паралельну дотичній, проведеній із отриманої точки. Тангенс кута її нахилу дорівнює $f(x_i+h/2, y_i+k_1/2)$. На ній вибираємо наступну точку $(x_i+h/2, y_i+k_2/2)$. Нарешті, із точки (x_i, y_i) рухаємось по лінії з кутом нахилу, що відповідає тангенсу $f(x_i+h/2, y_i+k_2/2)$, і на ній вибираємо точку (x_i+h, y_i+k_3). Цим задають ще один напрям, визначений тангенсом кута нахилу, який дорівнює $f(x_i+h, y_i+k_3)$. Чотири отримані напрямки усереднюють у відповідності з формулою (13.17). На цьому кінцевому напрямку і вибираємо чергову точку (x_{i+1}, y_{i+1}). Процес знаходження точки (x_{i+1}, y_{i+1}) можна прослідкувати на рис. 13.4.

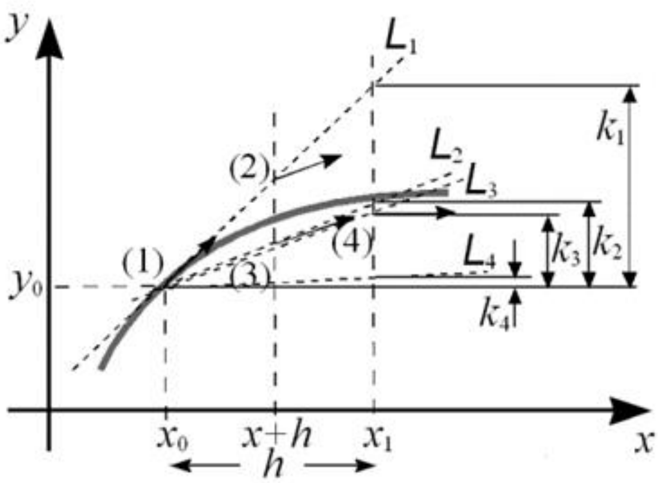

Рис.13.4. Геометрична інтерпретація методу Рунге-Кутта

Знаходження числового розв'язку задачі Коші методом Рунге-Кутта зручно виконувати за таким алгоритмом:

1. Значення x_0 и y_0 підставляють у праву частину диференціального рівняння (13.13) і визначають $f(x, y)$.

2. Отримане значення $f(x_0, y_0)$ множать на крок інтегрування h та обчислюють $k_1 = hf(x_0, y_0)$.

3. Змінюють значення x_0 на $x_{0+\frac{1}{2}} = x_0 + h/2$.

4. Визначають допоміжне значення $y_{0\partial} = y_0 + k_1/2$.

5. Обчислюють похідну в точці ($x_{0+1/2}, y_{0\partial}$), що дорівнює $y'_{0\partial} = f(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0\partial})$.

6. Отримують значення коефіцієнта $k_2 = h\ f\ (x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0\partial})$.

7. Обчислюють нове допоміжне значення $y_{0\partial} = y_0 + \frac{k_2}{2}$.

8. Визначають значення похідної в точці ($x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0\partial}$) $y'_{0\partial} = f(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0\partial})$.

9. Одержують значення $k_3 = hy'_{0\partial} = hf(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0\partial})$.

10. Обчислюють нове допоміжне значення $y_{1\partial} = y_0 + k_3$.

11. Змінюють значення $x_{0+\frac{1}{2}}$ на $x_1 = x_{0+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}$.

12. Знову визначають допоміжну похідну в точці $(x_1, y_{1\partial})$ $y'_{1\partial} = f\ (x_1, y_{1\partial})$.

13. Одержують значення коефіцієнта $k_4 = hy'_{1\partial} = hf\,(x_0 + h, y_0 + k_3)$.

14. Обчислюють нове значення y_1 за формулою

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Для визначення $y_2, y_3, ..., y_n$ повторюють ітераційний процес, починаючи з першого кроку.

Далі всі обчислення повторюють починаючи з першого кроку, поки не буде пройдений весь відрізок $[a,b]$.

Порядок точності методу Рунге-Кутта складає h^4 на усьому відрізку $[a,b]$.

13.6. Багатокрокові методи прогнозу і корекції

На відміну від розглянутих однокрокових методів Ейлера та Рунге-Кутта, у методах прогнозу і корекції для обчислення положення нової точки використовують інформацію про декілька раніше отриманих точок. Такі методи називають багатокроковими. Схеми їх алгоритмів відрізняються лише формулами.

Обчислення виконують у такій послідовності. Спочатку за формулою прогнозу та початковими значеннями змінних визначають значення $y_{n+1}^{(0)}$. Верхній індекс означає, що прогнозоване значення є одним із послідовності значень y_{n+1}, розташованих в порядку зростання точності. За прогнозованим значенням $y_{n+1}^{(0)}$ з допомогою диференціального рівняння

$$y'(x) = f(x, y), \tag{13.19}$$

знаходимо похідну

$$y_{n+1}^{(0)\prime} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right). \tag{13.20}$$

Цю похідну підставляють у формулу корекції для обчислення уточненого значення $y_{n+1}^{(K+1)}$ $(k=0,1,...)$. В свою чергу $y_{n+1}^{(k+1)}$ використовують для одержання більш точного значення похідної

$$y_{n+1}^{(k+1)'} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k+1)}\right). \qquad (13.21)$$

Якщо це значення похідної недостатньо близьке до попереднього, то його вводять у формулу корекції і ітераційний процес продовжують. Якщо ж похідна змінюється в допустимих межах точності, то значення $y_{n+1}^{(k+1)'}$ використовують для обчислення остаточного значення y_{n+1}. Після цього процес повторюють - виконують наступний крок, на якому обчислюють y_{n+2}.

Розглянемо один з багатокрокових методів - метод Адамса, зя яким отримують розв'язок четвертий порядок точності. Формула прогнозу цього методу ґрунтується на використанні інтерполяційної формули Ньютона

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h\left(55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}'\right) + \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}, \qquad (13.22)$$

а формула корекції має вигляд

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h\left(9y_{n+1}' + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}'\right) + \frac{19}{720}h^5 y^{(5)}. \qquad (13.23)$$

Для того, щоб застосувати метод Адамса 4-го порядку, необхідно наперед обчислити значення y_0', y_1', y_2' для перших трьох кроків. Найчастіше для цього використовують метод Рунге-Кутта, за допомогою якого отримують значення з досить високою точністю.