Міністерство освіти і науки України Національний університет "Львівська політехніка" Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій Кафедра програмного забезпечення



Звіт До лабораторної роботи №10

На тему: «Чисельні методи інтегрування» **3 дисципліни:** "Чисельні методи"

Лектор: доц. каф. ПЗ Мельник Н.Б. Виконав: ст. гр. ПЗ-18 Лук'янов Н.О. Прийняв: проф. каф. ПЗ Гавриш В.І. « ... » ... 2023 р.

\(\sum_{=}^{-} = \ldot_{=}^{-} \)

Тема: чисельні методи інтегрування.

Мета: ознайомлення на практиці з методамми чисельного інтегрування.

Завдання

Скласти програму чисельного інтегрування відповідно до варіанта:

- 1) за методом лівих, правих та середніх прямокутників;
- 2) за методом трапецій;
- 3) за методом Сімпсона.

$$\int_{0}^{\frac{5}{6}} e^{-x} dx = 0,565402$$

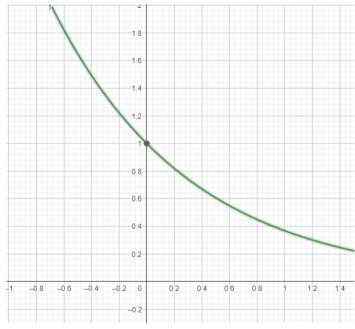


Рис. 1. Графік підінтегральної функції $f(x) = e^{-x}$

Метод прямокутників

Найпростішим методом наближеного обчислення інтеграла є метод прямокутників, суть якого зводиться до знаходження означеного інтеграла як суми площ п прямокутників висотою $f(x_i)$ та основою $h = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, отриманих шляхом розбиття відрізка інтегрування [a,b] на п рівних частин.

Розбиття на прямокутники виконують зліва направо або справа наліво. При цьому висотою кожного елементарного прямокутника буде значення функції y = f(x) у крайній лівій або крайній правій точці відповідно.

Для першого випадку отримуємо формулу лівих прямокутників

$$I_{n} = \int_{a}^{b} f(x)dx \approx h\left(f(x_{0}) + f(x_{1}) + \dots + f(x_{n-1})\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i}),$$

а для другого - формулу правих прямокутників

$$I_{np} = \int_{a}^{b} f(x)dx \approx h\left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)\right) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Тут крок інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Якщо функція f(x) монотонно зростає на відрізку [a,b], то із використанням формул лівих і правих прямокутників отримують наближене значення інтеграла з недостачею та з надлишком відповідно.

На практиці застосовують точнішу розрахункову формулу **середніх (центральних) прямокутників**, у результаті чого отримують точніше значення інтеграла

$$I_{cep} = \int_{a}^{b} f(x)dx \approx h \left(f\left(x_{0} + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_{1} + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right) \right) =$$

$$= h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i} + \frac{h}{2}\right).$$

Основні етапи обчислювального алгоритму, реалізованого у програмному продукті мовою С:

- 1) введення даних користувачем для ініціалізації змінних, що відповідають за зберігання верхньої, нижньої межі інтегрування;
- 2) обчислення інтегралу згідно з варіантом, за формулами лівих, правих та середніх прямокутників, за допомогою функцій MethodOfLeftRectangles() (рис. 2), MethodOfRightRectangles() (рис. 3) та MethodOfAverageRectangles() (рис. 4);
- 3) знаходження похибки обчислення інтеграла, за методом прямокутників, за допомогою функції CalculateEpsilon() (рис. 5);
- 4) результат виконання програми (рис. 6).

```
Bdouble MethodOfLeftRectangles(double upBorder, double downBorder, double n, double* epsilon)

{
    double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0, maxValue = 0, derivateAtPoint = 0;
    maxValue = fabs(CalculateDerivateAtPoint(startBorder));

    for (int i = 0; i < n - 1; i++, startBorder += h)
    {
        result += CalculateFuention(startBorder);
        derivateAtPoint = CalculateDerivateAtPoint(startBorder);
        if (maxValue < derivateAtPoint)
        {
                 maxValue = derivateAtPoint;
        }
        result *= h;

    *epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 0);
        return result;
}</pre>
```

Рис. 2. Функція MethodOfLeftRectangles

```
Edouble MethodOfRightRectangles(double upBorder, double downBorder, double n, double* epsilon)

{
    double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0, maxValue = 0, derivateAtPoint = 0;
    startBorder += h;

    maxValue = fabs(CalculateDerivateAtPoint(startBorder));

    for (int i = 0; i < n - 1; i++, startBorder += h)

    {
        result += CalculateFucntion(startBorder);
        derivateAtPoint = fabs(CalculateDerivateAtPoint(startBorder));

        if (maxValue < derivateAtPoint)
        {
                  maxValue = derivateAtPoint;
        }
        }

        result *= h;

*epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 0);

        return result;
}
```

Рис. 3. Функція MethodOfRightRectangles

Рис. 4. Функція MethodOfAverageRectangles

```
Edouble CalculateEpsilon(double upBorder, double downBorder, double n, double maxValue, int numberOfMethod)

{
    case 0:
        return pow((upBorder - downBorder), 2) / (2.0 * n) * maxValue;
    case 1:
        return pow((upBorder - downBorder), 3.0) / (24 * n * n) * maxValue;
    case 2:
        return pow((upBorder - downBorder), 3.0) / (12 * n * n) * maxValue;
    case 3:
        return pow((upBorder - downBorder), 3.0) / (180 * pow(n, 4.0)) * maxValue;
    default:
        return 0;
    }
}
```

Рис. 5. Функція CalculateEpsilon

```
Microsoft Visual Studio Debug Console
The function: e^{-x}
Enter the limits of integration:
UpBorder - 0.8333
DownBorder - 0
Enter the number of steps - 100
Choose the action:
1)Method of rectangles
2)Method of Trapeze
3)Method of Simpson
Your choice - 1
You have choosed the method of rectangles!
Choose the method:
1)Left rectangles
2)Right rectangles
3)Average rectangles
4)Do all types method
Your choice - 4
You have choosed all types of method:
        The result - 0.56409
        Epsilon - 0.00347194445000000018
You have choosed the right rectangles method:
        The result - 0.55941
        Epsilon - 0.00344313294674616259
You have choosed the average rectangles method:
        The result - 0.56175
        Epsilon - 0.00000240095165783814
```

Рис. 6. Результат виконання програми

Метод трапецій

Метод трапецій полягає в тому, що відрізок інтегрування [a, b] розбивають на прівних відрізків, а криву, описану підінтегральну функцією f(x), замінюють на кожному із цих відрізків кусково-лінійною функцією $\varphi(x)$, отриманою

стягуванням хорд, які проходять через точки $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ та $(x_i, f(x_i))$ $(i = \overline{1, n})$.

Значення інтеграла знаходять як суму площ S_i ($i=\overline{0,n}$) прямокутних трапецій з висотою $h=\frac{b-a}{n}$.

Площу кожної i-ої елементарної трапеції визначають за формулою

$$S_i = h \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$
.

Відповідно на всьому відрізку інтегрування [a, b] площу складеної фігури визначають сумою площ усіх елементарних трапецій. У результаті отримують таку формулу

$$I_{mp} = \int_{a}^{b} f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_{0}) + f(x_{1})}{2} + \frac{f(x_{1}) + f(x_{2})}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_{n})}{2}\right) = h\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i}) + f(x_{i+1})}{2}.$$

Оскільки в наведеній формулі під знаком суми величини $f(x_i)$, $(i=\overline{1,n-1})$ зустрічаються двічі, то перепишемо її у вигляді

$$I_{mp} = \int_{a}^{b} f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_{0})}{2} + f(x_{1}) + f(x_{2}) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_{n})}{2}\right) =$$

$$= h\left(\frac{f(x_{0}) + f(x_{n})}{2} + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i})\right).$$

Основні етапи обчислювального алгоритму, реалізованого у програмному продукті мовою С:

- 1) введення даних користувачем для ініціалізації змінних, що відповідають за зберігання верхньої, нижньої межі інтегрування;
- 2) обчислення інтегралу згідно з варіантом, за формулою трапецій, за допомогою функції MethodOfTrapeze() (рис. 7);
- 3) знаходження похибки обчислення інтеграла, за методом трапецій, за допомогою функції CalculateEpsilon();
- 4) результат виконання програми (рис. 8).

```
double MethodOfTrapeze(double upBorder, double downBorder, double n, double* epsilon)
{
    double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0, maxValue = 0, derivateAtPoint = 0;

    maxValue = fabs(CalculateFucntion(startBorder));

    for (int i = 0; i < n - 1; i++, startBorder += h)
    {
        result += (CalculateFucntion(startBorder) + CalculateFucntion(startBorder + h)) / 2.0;

        derivateAtPoint = CalculateFucntion(startBorder);

        if (maxValue < derivateAtPoint)
        {
            maxValue = derivateAtPoint;
        }
        }
        result *= h;

    *epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 2);
        return result;
}</pre>
```

Рис. 7. Функція MethodOfTrapeze

Рис. 8. Результат виконання програми

Метод Сімпсона

Даний метод полягає в тому, що криву, описану підінтегральною функцією f(x), на елементарних відрізках заміняють параболою. Поділимо відрізок інтегрування [a,b] на парну кількість n рівних частин з кроком $h=\frac{b-a}{n}$. На кожному елементарному відрізку $[x_0,x_2],[x_2,x_4],\ldots,[x_{i-1},x_{i+1}],\ldots,[x_{n-2},x_n]$ підінтегральну функцію f(x) замінимо інтерполяційним поліномом другого степеня (квадратичною параболою). Тоді обчислення означеного інтеграла зводиться до обчислення суми площ S_i , $(i=\overline{1,n})$ криволінійних трапецій.

Площу S_i кожної елементарної криволінійної трапеції визначають за формулою Сімпсона

$$S_i = \frac{h}{3} \left(f(x_i) + 4 f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) \right).$$

Послідовно обчислюємо за формулою площі n криволінійних трапецій S_i ($i=\overline{1,n}$)

$$S_1 = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right),$$

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_2) + 4 f(x_3) + f(x_4) \right),$$

 $S_n = \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_{2n-2}) + 4 f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}) \right).$

Знайдемо суму площ всіх криволінійних трапецій.

$$\sum_{i=1}^{n} S_{i} = \frac{h}{3} \left(f(x_{0}) + f(x_{2n}) + 4(f(x_{1}) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_{2}) + \dots + f(x_{2n-2})) \right).$$

Тоді розрахункова формула методу Сімпсона набуде такого вигляду

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4 \sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) \right)$$

Основні етапи обчислювального алгоритму, реалізованого у програмному продукті мовою С:

- 1) введення даних користувачем для ініціалізації змінних, що відповідають за зберігання верхньої, нижньої межі інтегрування;
- 2) обчислення інтегралу згідно з варіантом, за формулою Сімпсона, за допомогою функції MethodOfSimpson() (рис. 9);
- 3) знаходження похибки обчислення інтеграла, за методом трапецій, за допомогою функції CalculateEpsilon();
- 4) результат виконання програми (рис. 10).

```
Edouble MethodoFSimpson(double upBorder, double downBorder, double* epsilon)

double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0, maxValue = 0, derivateAtPoint = 0, sumOfEven = 0, sumOfEven
```

Рис. 9. Функція MethodOfSimpson

```
Microsoft Visual Studio Debug Console

The function: e^(-x)

Enter the limits of integration:

UpBorder - 0.8333

DownBorder - 0

Enter the number of steps - 100

Choose the action:

1)Method of rectangles

2)Method of Trapeze

3)Method of Simpson

Your choice - 3

You have choosed the method of Simpson:

The result - 0.56539

Epsilon - 0.00000000002232206683
```

Рис. 10. Результат виконання програми

Висновки

У результаті виконання лабораторної роботи, розроблено обчислюваний алгоритм, реалізований мовою програмування С чисельного інтегрування, а саме за методом лівих, правих та середніх прямокутників, за методом трапецій та за методом Сімпсона. Визначено похибки обчислення інтеграла за методом лівих прямокутників — 3,4719 * 10^{-3} , за методом правих прямокутників — 3,4431 * 10^{-3} , за методом середніх прямокутників — 2,4009 * 10^{-6} , за методом трапецій -

 $4,8219 * 10^{-6}$, а за методом Сімпсона — $2,2322 * 10^{-11}$. Програмний продукт розроблений у середовищі Microsoft Visual Studio мовою програмування С.

Додаток

Назва файлу: Lab10.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
double MethodOfLeftRectangles(double, double, double, double*);
double CalculateEpsilon(double, double, double, int);
double MethodOfRightRectangles(double, double, double, double*);
double MethodOfAverageRectangles(double, double, double*);
double MethodOfTrapeze(double, double, double, double*);
double MethodOfSimpson(double, double, double, double*);
double CalculateDerivateAtPoint(double);
double CalculateFucntion(double);
void PrintLine(int, char);
int main()
{
      double epsilon = 0.0, result = 0.0, upBorder = 0.0, downBorder = 0.0;
      int choice = 0, countOfSteps = 0.0;
      printf("The function: e^(-x)\n");
      PrintLine(50, '-');
      printf("Enter the limits of integration:\nUpBorder - ");
      scanf_s("%lf", &upBorder);
      printf("DownBorder - ");
      scanf_s("%lf", &downBorder);
      printf("Enter the number of steps - ");
      scanf_s("%d", &countOfSteps);
      PrintLine(50, '-');
      printf("Choose the action:\n1)Method of rectangles\n2)Method of Trapeze\n3)Method of
Simpson\nYour choice - ");
      scanf_s("%d", &choice);
      PrintLine(50, '-');
      switch (choice)
      {
      case 1:
             printf("You have choosed the method of rectangles!\nChoose the method:\n1)Left
rectangles\n2)Right rectangles\n3)Average rectangles\n4)Do all types method\nYour choice -
");
             scanf_s("%d", &choice);
             PrintLine(50, '-');
             switch (choice)
             case 1:
                    printf("You have choosed the left rectangles method:\n");
                    result = MethodOfLeftRectangles(upBorder, downBorder, countOfSteps,
&epsilon);
                    printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
                    PrintLine(50, '-');
                    break;
             case 2:
                    printf("You have choosed the right rectangles method:\n");
                    result = MethodOfRightRectangles(upBorder, downBorder, countOfSteps,
&epsilon);
                    printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
                    PrintLine(50, '-');
                    break;
             case 3:
                    printf("You have choosed the average rectangles method:\n");
                    result = MethodOfAverageRectangles(upBorder, downBorder, countOfSteps,
&epsilon);
                    printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
```

```
PrintLine(50, '-');
                    break;
             case 4:
                    printf("You have choosed all types of method:\n");
                    result = MethodOfLeftRectangles(upBorder, downBorder, countOfSteps,
&epsilon);
                    printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
                    PrintLine(50, '-');
                    printf("You have choosed the right rectangles method:\n");
                    result = MethodOfRightRectangles(upBorder, downBorder, countOfSteps,
&epsilon);
                    printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
                    PrintLine(50, '-');
                    printf("You have choosed the average rectangles method:\n");
                    result = MethodOfAverageRectangles(upBorder, downBorder, countOfSteps,
&epsilon);
                    printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
                    PrintLine(50, '-');
                    break;
             default:
                    printf("Ooops! The incorrect input....\n");
             break;
       case 2:
             printf("You have choosed the method of Trapeze:\n");
             result = MethodOfTrapeze(upBorder, downBorder, countOfSteps, &epsilon);
             printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
             PrintLine(50, '-');
             break:
       case 3:
             printf("You have choosed the method of Simpson:\n");
             result = MethodOfSimpson(upBorder, downBorder, countOfSteps, &epsilon);
             printf("\tThe result - %.5f\n\tEpsilon - %.20f\n", result, epsilon);
             PrintLine(50, '-');
             break;
      default:
             printf("Ooops! The incorrect input....\n");
             break;
       }
}
double CalculateEpsilon(double upBorder, double downBorder, double n, double maxValue, int
numberOfMethod)
{
       switch (numberOfMethod)
       case 0:
             return pow((upBorder - downBorder), 2) / (2.0 * n) * maxValue;
       case 1:
             return pow((upBorder - downBorder), 3.0) / (24 * n * n) * maxValue;
      case 2:
             return pow((upBorder - downBorder), 3.0) / (12 * n * n) * maxValue;
       case 3:
             return pow((upBorder - downBorder), 5.0) / (180 * pow(n, 4.0)) * maxValue;
      default:
             return 0;
       }
}
double CalculateDerivateAtPoint(double x)
{
       return -(exp(-x));
}
double CalculateFucntion(double x)
```

```
{
       return (exp(-x));
}
double MethodOfRightRectangles(double upBorder, double downBorder, double n, double*
       double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0,
maxValue = 0, derivateAtPoint = 0;
       startBorder += h;
      maxValue = fabs(CalculateDerivateAtPoint(startBorder));
      for (int i = 0; i < n - 1; i++, startBorder += h)
             result += CalculateFucntion(startBorder);
             derivateAtPoint = fabs(CalculateDerivateAtPoint(startBorder));
             if (maxValue < derivateAtPoint)</pre>
                    maxValue = derivateAtPoint;
             }
       }
      result *= h;
       *epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 0);
       return result;
}
double MethodOfLeftRectangles(double upBorder, double downBorder, double n, double* epsilon)
       double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0,
maxValue = 0, derivateAtPoint = 0;
       maxValue = fabs(CalculateDerivateAtPoint(startBorder));
       for (int i = 0; i < n - 1; i++, startBorder += h)
             result += CalculateFucntion(startBorder);
             derivateAtPoint = CalculateDerivateAtPoint(startBorder);
             if (maxValue < derivateAtPoint)</pre>
                    maxValue = derivateAtPoint;
             }
      }
      result *= h;
       *epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 0);
      return result;
}
double MethodOfAverageRectangles(double upBorder, double downBorder, double n, double*
epsilon)
{
      double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0,
maxValue = 0, derivateAtPoint = 0;
      maxValue = fabs(CalculateFucntion(startBorder + (h / 2.0)));
       for (int i = 0; i < n - 1; i++, startBorder += h)
```

```
{
              result += CalculateFucntion(startBorder + (h / 2.0));
              derivateAtPoint = CalculateFucntion(startBorder + (h / 2.0));
              if (maxValue < derivateAtPoint)</pre>
                     maxValue = derivateAtPoint;
              }
       }
       result *= h;
       *epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 1);
       return result;
}
double MethodOfTrapeze(double upBorder, double downBorder, double n, double* epsilon)
       double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0,
maxValue = 0, derivateAtPoint = 0;
       maxValue = fabs(CalculateFucntion(startBorder));
       for (int i = 0; i < n - 1; i++, startBorder += h)</pre>
              result += (CalculateFucntion(startBorder) + CalculateFucntion(startBorder +
h)) / 2.0;
              derivateAtPoint = CalculateFucntion(startBorder);
              if (maxValue < derivateAtPoint)</pre>
              {
                     maxValue = derivateAtPoint;
              }
       }
       result *= h;
       *epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 2);
       return result;
}
double MethodOfSimpson(double upBorder, double downBorder, double n, double* epsilon)
       double startBorder = downBorder, h = (upBorder - downBorder) / n, result = 0,
maxValue = 0, derivateAtPoint = 0, sumOfEven = 0, sumOfOdd = 0;
       maxValue = fabs(CalculateFucntion(startBorder));
       result += CalculateFucntion(downBorder) + CalculateFucntion(upBorder);
       for (int i = 1; i < n; i += 2)
       {
              double x = downBorder + i * h;
              result += 4 * CalculateFucntion(x);
       }
       for (int i = 2; i < n; i += 2)
        double x = downBorder + i * h;
        result += 2 * CalculateFucntion(x);
       for (int i = 1; i < n; i++, startBorder += h)</pre>
```

```
derivateAtPoint = fabs(CalculateFucntion(startBorder));
    if (maxValue < derivateAtPoint)
    {
        maxValue = derivateAtPoint;
    }
}

result *= (h / 3.0);

*epsilon = CalculateEpsilon(upBorder, downBorder, n, maxValue, 3);

return result;
}

void PrintLine(int number, char symbol)
{
    while (number > 0)
    {
        printf("%c", symbol);
        number--;
    }
    printf("\n");
}
```