Наближене розв'язування задачі Коші для звичайних диф. рівнянь та їх систем

Лекція 13

Диференціальні рівняння *– це рівняння, які, окрім невідомих функцій однієї або декількох незалежних змінних, містять і їхні похідні.*

Диф. рівняння називають ***звичайними****, якщо невідомі функції є функціями однієї змінної, в іншому випадку -* ***рівняннями в частинних похідних.***

Приклади:

$$\frac{dy}{dx} = 2(y-3); \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = t+1; \qquad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;}$$

$$y' = x^2; \quad xdy = y^3dx.$$

Звичайне диференційне рівняння

$$F\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

x - незалежна змінна, y – невідома функція,

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – її похідні.

Порядок диференційного рівняння *– найвищий порядок похідної, що входить в рівняння.*

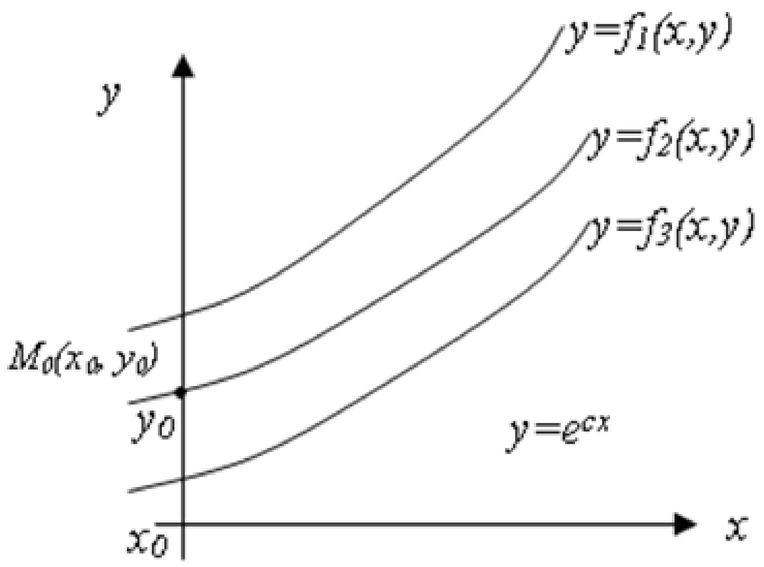
Степінь диф. рівняння *– степінь многочлена відносно похідної максимального порядку.*

<u>Пр.</u> $(y''')^2 + 2(y')^4 - y^5 - 5x^7 = 0$ *- рівняння 3-го порядку, 2-го степеня;*

$(y')^4 + 2x^3y^5 - y^6 - 3x = 0$ *- рівняння 1-го порядку, 4-го степеня.*

Розв'язок диф. рівняння *- n разів диференційовану функцію* $y = f(x)$, *яка після її підстановки у вихідне рівняння перетворює його в тотожність.*

Графік розв'язку звичайного диференціального рівняння називають інтегральною кривою цього рівняння.



Сімейство інтегральних кривих диф. рівняння

Загальний розв'язок диференційного рівняння – його розв'язок, який містить стільки незалежних сталих, який його порядок.

$$y=\varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right)$$

де $C_i, \quad i=\overline{1,n}$ – довільні сталі.

Частинний розв'язок диференційного рівняння – розв'язок, отриманий із загального при певних значеннях const. Довільні сталі, що входять у загальний розв'язок, визначають з **початкових** або **крайових** умов.

Додаткові умови *- значення шуканої функції та її похідних у певних точках.*

2 типи задач

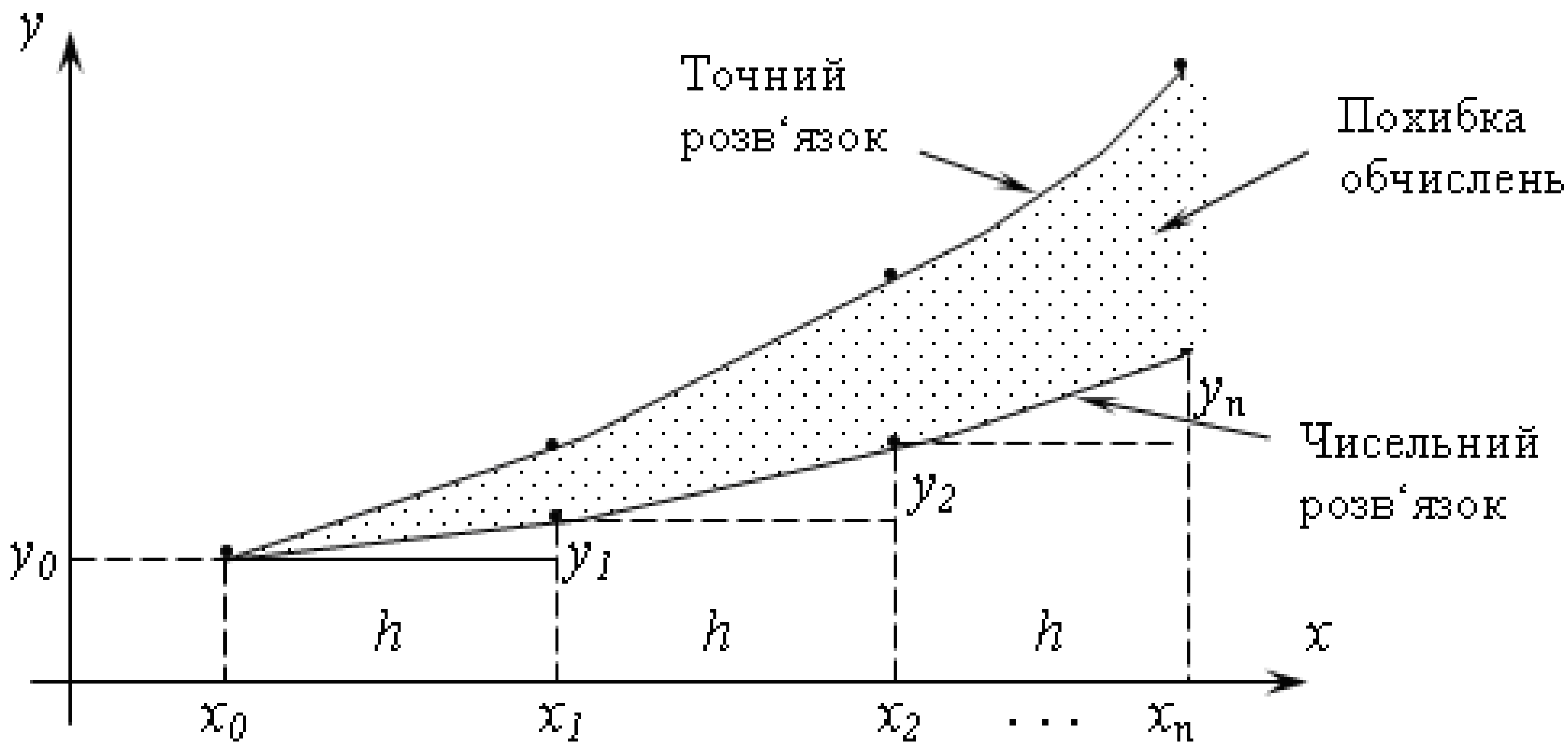
(залежно від способу задавання дод. умов):

- ***задача Коші*** *(задають* ***початкові*** *умови в одній* ***початковій*** *точці);*
- ***крайова задача*** *(задають* ***крайові*** *умови в кількох, переважно 2-х, точках).*

Методи розв'язування звичайних диф. рівнянь

- ***Графічні методи*** *використовують для геометричного зображення розв'язку.*
- *За допомогою* ***аналітичних методів*** *отримують точний або наближений розв'язок диф. рівняння у вигляді аналітичного виразу. (Вузьке коло задач.)*
- ***Наближені методи*** *використовують різні спрощення диф. рівнянь шляхом відкидання деяких членів, а також спеціальним вибором класів шуканих функцій.*

Накопичування похибки в процесі обчислень



Задача Коші для диференційного рівняння 1-го порядку

Знайти функцію $y = y(x)$, *що задовольняє рівняння*

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

та початкову умову

$$y(x_0) = y_0.$$

Задача Коші для диференційного рівняння n-го порядку

Знайти розв'язок $y = \varphi(x)$

рівняння

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

що задовольняє початкові умови

$$y = y_0, \; y' = y'_0, \dots, \; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

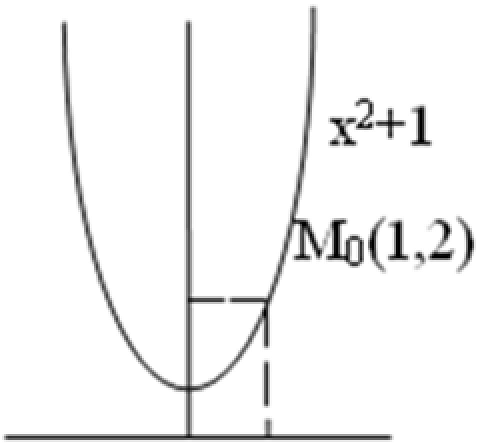
Приклад: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y(1) = 2 \end{cases}$

Загальний розв'язок $y = x^2 + C$ *– сімейство парабол.*

$$x = 1; \quad 2 = 1 + C; \quad C = 1$$

$$y = x^2 + 1.$$

Парабола проходить через т. M_0



Методи розв'язування диф.рівнянь

- ***аналітичні:***
  - *Метод послідовних наближень - метод Пікара*
  - *Метод інтегрування диференційних рівнянь з допомогою степеневих рядів*

- ***чисельні*** *(набл.розв'язок у вигляді таблиці)*
  - *Метод Ейлера + його модифікації*
  - *Методи Рунге – Кутта*
  - *Методи Адамса*

Метод Пікара – метод послідовних наближень

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

$|x - x_0| \le a, |y - y_0| \le в$

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx, \quad y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx, \quad \boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \quad (3)}$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$$

...

$$\boxed{y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx}$$

Теорема (без доведення)

Нехай в околі точки (x_0, y_0) функція $f(x,y)$ неперервна і має обмежену частинну похідну. Тоді на даному інтервалі, що містить точку x_0 послідовність $\{y_i(x)\}$ збігається до функції $y(x)$, що є розв'язком диференційного рівняння $y' = f(x,y)$ і задовольняє умову $y(x = x_0) = y_0$.

Оцінка похибки:

$$|y - y_0| \le N^n M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

де M = max (f(x,y)) при (x,y)єR[a,b]

N = max(f_y'(x,y))

h=min(a,$\frac{b}{M}$), де a,b – границі області.

Приклад: $y^{/} = x^2 + y^2$

$$y(0) = 0$$

$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} (x^2+y^2)dx$ або $y=0+\int_{x_0}^{x} (x^2+y^2)dx$

<u>Послідовні наближення:</u>

$$y_1 = \int_0^x (x^2+y_0^{\,2})dx = \int_0^x (x^2+0)dx = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2+y_1^{\,2})dx = \int_0^x (x^2+\frac{x^6}{9})dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3 = \int_0^x (x^2+y_2^{\,2})dx = \int_0^x (x^2+\frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969})dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

Похибка 3-го наближення:

$$(y-y_n) \leq N^n M\frac{h^{n+1}}{(n+1)}$$

Оскільки функція $y^{/} = x^2 + y^2$ визначена і неперервна на всій площині, то a,b - $\forall$ числа.

Візьмемо :

$$R\{(x-x_0) \leq 1; \quad (y-y_0) \leq 0{,}5\}$$

$$a = 1,\ b = 0{,}5.$$

$$M = \max|f(x,y)| = max|x^2 + y^2| = 1.25$$

$$N = \max\left|f_y{}'(x,y)\right| = max\,|2y| = 1$$

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \qquad h = 0{,}4.$$

$$\left|y(x) - y_3(x)\right| \le 1.25 \cdot 1^3 \cdot \frac{x^4}{4!} = \frac{5}{96}x^4$$

$$\max_{[0,0.4]} |y(x) - y_3(x)| \le \frac{5 \cdot (0.4)^4}{96} \approx 0.00133$$

Інтегрування диф. рівнянь з допомогою степеневих рядів

Задано:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

$$y(x_0) = y_0,$$
$$y'(x_0) = y_0',$$
$$\ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Підставимо рівняння y=y(x) в околі точки x_0 з використанням ряду Тейлора:

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''(x - x_0)^2}{2!} + \frac{y_0'''(x - x_0)^3}{3!} + \ldots$$

Приклад: $y' = y - 4x + 3$

$y(0) = 3$

Похідні: $y'' = y' - 4 = y - 4x + 3 - 4 = y - 4x - 1$

$y''' = y'' = y - 4x - 1$

$y^{(IV)} = y'''$

З початкової умови: $y'_0 = y_0 - 4x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$

$y''_0 = y_0 - 4x_0 - 1 = 3 - 1 = 2$

$y'''_0 = 2, \qquad y_0{}^{(IV)} = 2$

Підставимо похідні в ряд Тейлора:

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \frac{y''_0(x - x_0)^2}{2!} + \frac{y'''_0(x - x_0)^3}{3!} + \frac{y_0{}^{(IV)}(x - x_0)^3}{4!} + \ldots =$$

$$= 3 + 6x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \ldots$$

Якщо h=0,1,

Таблиця значень розв'язків диференційного рівняння

x_i	0	0,1	0,2	0,3
Значення з аналітичного розвязку	3	3,6021	4,2428	4,8996
Наближений розв'язок з допомогою ряду Тейлора	3	3,6103	4,2417	4,8993

(Точний розв'язок рівняння $y=2e^x+4x+1$)

Метод Ейлера

Розглянемо диференційне рівняння 1-го порядку

$$y' = f(x, y)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0 .$$

Потрібно знайти розв'язок рівняння на відрізку $[x_0, x_n]$ *.*

Розіб’ємо $[a,b]$ *на n рівних частин.*

$$x_0, x_1, x_2 \dots x_n,$$

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0,..,n,$$

$$h = \frac{b-a}{n} - крок \;\; інтегрування$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx = y(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k,$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k=1}} f(x,y)dx.$$

$$f(x,y)=const \qquad [x_k, x_{k+1}]$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y_k)dx = f(x_k, y_k)\cdot x\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)\underbrace{(x_{k+1}-x_k)}_{h} = y'_k\cdot h.$$

$$y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$$

$$y_k'\cdot h = \Delta y_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

Формула Ейлера:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)}$$

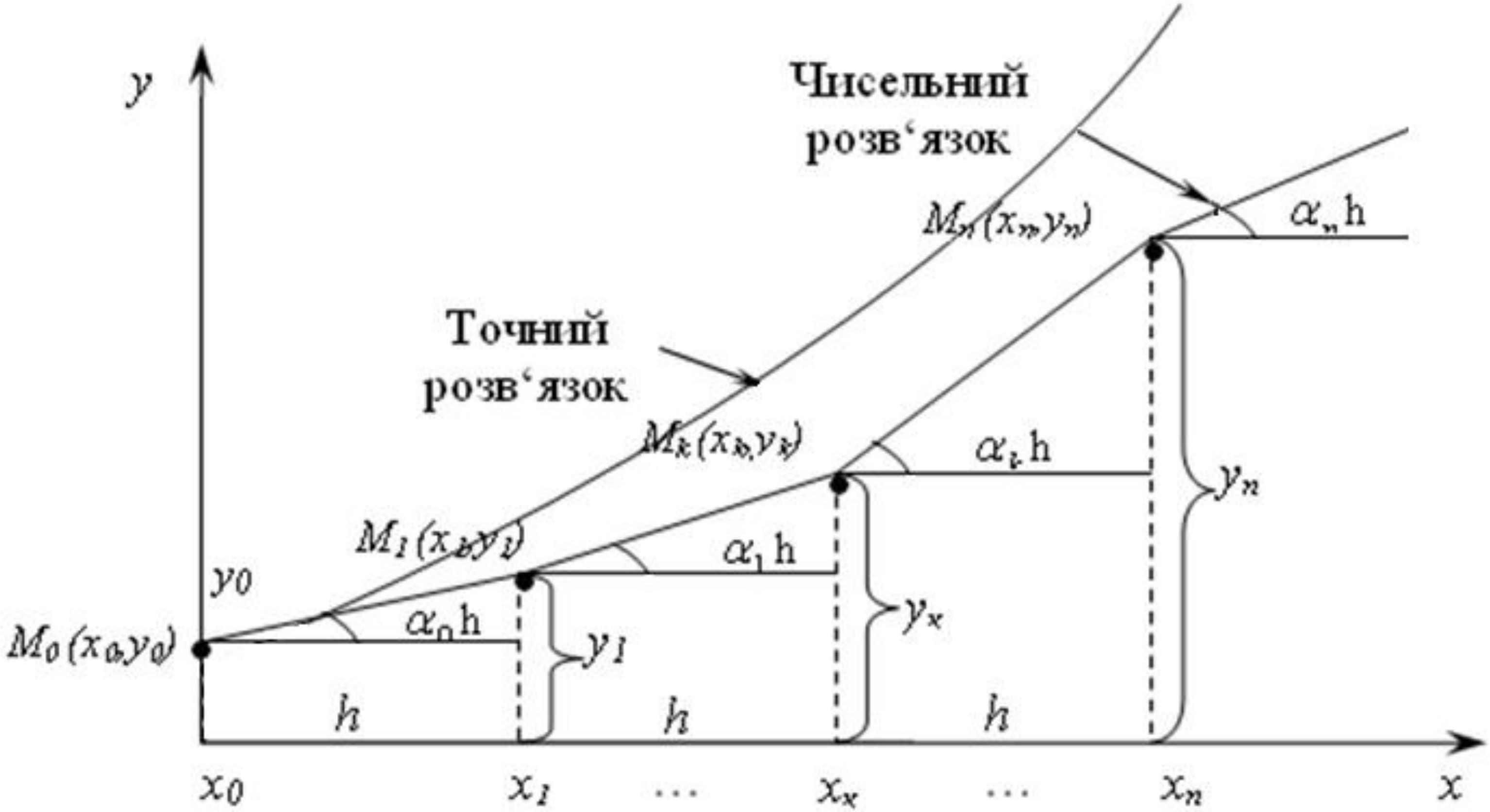
Продовжимо цей процес, вважаючи, що на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ інтегральна крива $y = F(x)$ є прямолінійним відрізком, що починається в точці $M_k(x_k; y_k)$ з кутовим коефіцієнтом $f(x_k, y_k)$.

Отже, як наближення шуканої інтегральної кривої, одержуємо ламану лінію з вершинами в точках $M_k(x_k; y_k)$.

Оцінка похибки методу Ейлера

Похибка розв'язку, отриманого за методом Ейлера на кожному кроці є величиною порядку $O(h^2)$. Точність розв'язку, отриманого за цим методом, є досить малою і з переходом від точки x_k до точки x_{k+1} його похибка зростає.

Геометрична інтерпретація методу Ейлера



Приклад 1*. Проінтегрувати методом Ейлера диф. рівняння*

$$y' = 2xy$$
$$y(0) = 1$$

на відрізку [0; 0,5] з кроком h=0,1.

i	x_i	y_i	$y_i' = 2x_i y_i$	$\Delta y_i = h y_i'$	Точний розв'язок $y = e^{x^2}$
0	0,0	1,00	0,00	0,00	1,000
1	0,1	1,00	0,20	0,02	1,010
2	0,2	1,02	0,41	0,041	1,041
3	0,3	1,061	0,64	0,064	1,049
4	0,4	1,125	0,90	0,090	1,174
5	0,5	1,215	-	-	1,284

$$\Delta = |1{,}215 - 1{,}284| = 0{,}069, \qquad \delta = \frac{0{,}069}{1{,}284} \approx 0{,}054 = 5{,}4\ \%.$$

Приклад 2. *Методом Ейлера сформувати таблицю розв'язків на відрізку [0;1] для рівняння* $y' = y - \frac{2x}{y}$ *з початковою умовою* $y(0)=1$ *та кроком* $h = 0,2$.

i	x_i	y_i	Δy_i	Точний розв'язок $y = \sqrt{2x+1}$
0	0	1,0	0,2	1,0
1	0,2	1,2	0,1733	1,1832
2	0,4	1,3733	0,1561	1,3416
3	0,6	1,5294	0,1492	1,4832
4	0,8	1,6786	0,1451	1,6124
5	1,0	1,8237		1,7320

Похибка для y_5

$$\Delta = 1{,}8237 - 1{,}7320 = 0{,}0917, \qquad \delta = \frac{0{,}0917}{1{,}7320} \approx 0{,}053 = 5{,}3\ \%.$$

Метод Ейлера для систем диференційних рівнянь

Нехай маємо систему двох рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$$

з початковими умовами

$$y(x_0) = y_0$$

$$z(x_0) = z_0.$$

Наближені розв'язки шукаємо за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, z_{i+1} = z_i + \Delta z_i,$$

де $\Delta y_i = h \cdot f_1(x_i, y_i, z_i), \quad \Delta z_i = h \cdot f_2(x_i, y_i, z_i), \quad i = 0,1,2\ldots$

Приклад: $\begin{cases} y' = (z - y)x & y(0) = 1{,}0000 \\ z' = (z + y)x & z(0) = 1{,}0000 \end{cases}$

i	x	y	$y' = (z - y)x$	$\Delta y = y'h$	z	$z' = (z + y)x$	$\Delta z = z'h$
0	0	1,0000	0	0	1,0000	0	0
1	0,1	1,0000	0	0	1,0000	0,2000	
2	0,2	1,0000	0,0040	0,0004	1,0200	0,4040	
3	0,3	1,0004	0,0180	0,0018	1,0604	0,6182	
4	0,4	1,0022	0,0480	0,0048	1,1222	0,8498	
5	0,5	1,0070	0,1001	0,0100	1,2072	1,1071	
6	0,6	1,0170			1,3179		

Приклад: $y'' + \dfrac{y'}{x} + y = 0$ $\quad y(1) = 0{,}77$, $\quad y'(1) = -0{,}44$

з кроком *h=0,1.*

Заміна: $y' = z; y'' = z'$

Одержимо:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\dfrac{z}{x} - y \end{cases} \qquad \begin{aligned} y(1) &= 0{,}77 \\ z(1) &= -0{,}44 \end{aligned}$$

i	x	y	$y' = z$	$\Delta y = hy'$	z	$z' = -\frac{z}{x} - y,$	$\Delta z = hz$
0	1,0	0,77	-0,44	-0,044	-0,44	-0,33	-0,033
1	1,1	0,726	-0,473	-0,047	-0,473	-0,296	-0,030
2	1,2	0,679	-0,503	-0,050	-0,503	-0,260	-0,026
3	1,3	0,629	-0,529	-0,053	-0,529	-0,222	-0,022
4	1,4	0,576	-0,551	-0,055	-0,551	-0,183	-0,018
5	1,5	0,521			-0,569		

Метод Рунге-Кутта розв'язування звичайних диференціальних рівнянь

Знайти чисельний розв'язок рівняння

$$y' = f(x, y)$$

на відрізку $[a,b]$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$.

Розіб'ємо $[a,b]$:

$x_i = x_0 + ih(i = \overline{0,n})$, де $h = (b-a)/n$ – крок інтегрування.

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i .$$

Розклад у ряд Тейлора:

$$y(x+h) = y(x) + \Delta y = hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{IV}(x) + \ldots$$

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \frac{h^4}{24}y^{IV}(x) + \ldots$$

Можна довести, що

$$hy'(x)+\frac{h^2}{2}y''(x)+\frac{h^3}{6}y'''(x)+\frac{h^4}{24}y^{IV}(x)\approx\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{3}k_2+\frac{1}{3}k_3+\frac{1}{6}k_4,$$

де

$$k_1=hf(x,y),$$

$$k_2=hf\left(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3=hf\left(x+\frac{h}{2},y+\frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4=hf(x+h,y+k_3).$$

Схема обчислень

Для кожної пари (x_i, y_i) *обчислити коефіцієнти:*

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i),$$

$$k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$k_1^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right).$$

Тоді

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right).$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = \overline{0, n}).$$

Схема методу Рунге-Кутта

I	x	y	$K=hf(x,y)$	Δy
0	x_0 $x_0+\frac{h}{2}$ $x_0+\frac{h}{2}$ x_0+h	y_0 $y_0+\frac{k1^{(0)}}{2}$ $y_0+\frac{k2^{(0)}}{2}$ $y_0+k_3^{(0)}$	$K_1^{(0)}$ $K_2^{(0)}$ $K_3^{(0)}$ $K_4^{(0)}$	$K_1^{(0)}$ $2K_2^{(0)}$ $2K_3^{(0)}$ $K_4^{(0)}$
				$\Delta y_0=\frac{1}{6}\sum$
1	x_1	y_1	…	…

Порядок заповнення таблиці :

1) Записують x_i, y_i. Якщо $0^й$ крок – записуємо x_0, y_0;

2) x, y підставляють в праву частину диф. рівняння (1), визначають $f(x, y)$;

3) $x + h^* f(x, y)$;

4) Знайдені значення k домножують на відповідний коефіцієнт (1 – для k_1 і k_4, 2 – для k_2, k_3)

5) кроки 1-4 повторюють для кожного $k_j^{(i)}$ в i – му розв'язку, $j = \overline{1,4}$

6) результати 6-го стовпця сумують, ділять на 6

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\sum$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

Оцінка похибки методу Рунге-Кутта

h^4 – порядок точності на всьому відрізку $[a, b]$.

груба оцінка з допомогою " подвійного перерахунку "

$$|yi * -y(xi)| \approx \frac{yi^* - yi}{15}$$

де $y(x_i)$ – точний розв'язок рівняння (1) в точці x_i,

y_i^*, y_i – наближені розв'язки, обчислені з кроком $h/2$ і h.

Якщо ε – задана точність обчислень, то кількість поділу n для визначення кроку інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$ вибирають так, щоб $h^4 < \varepsilon$.

Крок h можна змінювати при переході від одної точки до іншої.

Для оцінки правильності вибору h використовують рівність

$$q = \left|\frac{k2^{(i)} - k3^{(i)}}{k1^{(i)} - k2^{(i)}}\right|,$$

де q має бути рівним кільком сотим, в протилежному випадку h зменшують.

Приклад 3

Методом Рунге-Кутта розв'язати диф. рівняння

$$y' = y - x$$

з початковою умовою $y(0) = 1{,}5$ *та кроком* $h = 0{,}25$ *на відрізку [0;1,5].*

Розв'язування.

Відрізок [0;1,5] розіб'ємо на 6 рівних частин:

$x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}50$, $x_3 = 0{,}75$, $x_4 = 1{,}00$, $x_5 = 1{,}25$, $x_6 = 1{,}50$.

З початкової умови:

$x_0 = 0$; $y_0 = 1{,}5$.

1-е наближене $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, *де*

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}\left(k_1^{(0)} + k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}\right).$$

Значення коефіцієнтів:

$$k_1^{(0)} = (y_0 - x_0)h = 1{,}5000 \cdot 0{,}25 = 0{,}3750,$$

$$k_2^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right]h = [(1{,}5000 + 0{,}1875) - 0{,}125] \cdot 0{,}25 = 0{,}3906,$$

$$k_3^{(0)} = \left[\left(y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right]h = [(1{,}5000 + 0{,}1953) - 0{,}125] \cdot 0{,}25 = 0{,}3926,$$

$$k_4^{(0)} = \left[\left(y_0 + k_3^{(0)}\right) - \left(x_0 + h\right)\right]h = [(1{,}5000 + 0{,}3926) - 0{,}125] \cdot 0{,}25 = 0{,}4106.$$

Отже, $\Delta y_0 = \frac{1}{6}(0{,}3750 + 2 \cdot 0{,}3906 + 2 \cdot 0{,}3926 + 0{,}4106) = 0{,}3920$,

$$y_1 = 1{,}5000 + 0{,}3920 = 1{,}8920.$$

Результати обчислень наведено в таблиці.

Таблиця методу Рунге-Кутта

i	x	y	$y' = f(x, y)$	$k = hf(x, y)$	Δy
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	0,3750
	0,125	1,6875	1,5625	0,3906	0,7812
	0,125	1,6953	1,5703	0,3926	0,7852
	0,25	1,8926	1,6426	0,4106	0,4106
					0,3920
1	0,25	1,8920	1,6420	0,4105	0,4105
	0,375	2,0973	1,7223	0,4306	0,8612
	0,375	2,1073	1,7323	0,4331	0,8662
	0,50	2,3251	1,8251	0,4562	0,4562
					0,4323
2	0,50	2,3243	1,8243	0,4561	0,4561
	0,625	2,5523	1,9273	0,4818	0,9636
	0,625	2,5652	1,9402	0,4850	0,9700
	0,75	2,8093	2,0593	0,5148	0,5148
					0,4841
3	0,75	2,8084	2,0584	0,5146	0,5146
	0,875	3,0657	2,1907	0,5477	1,0954
	0,875	3,0823	2,2073	0,5518	1,1036
	1,00	3,3602	2,3602	0,5900	0,5900
					0,5506
4	1,00	3,3590	2,3590	0,5898	0,5898
	1,125	3,6539	2,5289	0,6322	1,2644
	1,125	3,6751	2,5501	0,6375	1,2750
	1,25	3,9965	2,7465	0,6866	0,6866
5	1,25	3,9950	2,7450	0,6862	0,6862
	1,375	4,3381	2,9631	0,7408	1,4816
	1,375	4,3654	2,9904	0,7476	1,4952
	1,50	4,7426	3,2426	0,8106	0,8106
					0,7456
6	1,50	4,7406			

Багатокрокові методи прогнозу і корекції

Методи Ейлера, Рунге-Кутта – однокрокові.

Багатокрокові методи (методи прогнозу і корекції) - для обчислення положення нової точки використовують інформацію про декілька раніше отриманих точок.

Схеми алгоритмів відрізняються лише формулами.

Послідовність обчислень:

1) визначення $y_{n+1}^{(0)}$ за формулою прогнозу та поч. умовами;

2) знаходження похідної

$$y_{n+1}^{(0)'} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right).$$

(прогнозоване значення $y_{n+1}^{(0)}$ підст. в диф. рівняння) .

3) Похідну підставляють у формулу корекції:

Більш точне значення похідної

$$y_{n+1}^{(k+1)'} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k+1)}\right).$$

4) Якщо це значення недостатньо близьке до попереднього, то його підст. у формулу корекції;і ітераційний процес продовжують.

Інакше: значення $y_{n+1}^{(k+1)'}$ використовують для обчислення остаточного значення y_{n+1}.

5)Наступний крок: обчислення y_{n+2}.

Метод Адамса *(4-й порядок точності)*

Формула прогнозу використовує інтерполяційну формули Ньютона

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h\left(55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}'\right) + \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}.$$

Формула корекції:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}h\left(9y_{n+1}' + 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}'\right) + \frac{19}{720}h^5 y^{(5)}.$$

Для того, щоб застосувати метод Адамса 4-го порядку, необхідно наперед обчислити значення y_0', y_1', y_2' *для перших 3-х кроків. (Наприклад методом Рунге-Кутта.)*

Дякую за увагу!