Чисельне диференціювання

Лекція 12

Чисельне диференціювання застосовується тоді, коли функцію не можна продиференціювати аналітично:

- *функція задана таблично,*
- *вираз функції такий громіздкий, що користуватися виразом похідної для обчислень дуже важко.*

У цьому випадку задану функцію $f(x)$ апроксимують функцією $\varphi(x,a)$, яка легко обчислюється і покладають

$$f'(x) = \varphi'(x,a).$$

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблично в $n+1$ точках на інтервалі $[a,b]$. Необхідно знайти аналітичний вигляд її похідної.

Найпростіша ідея чисельного диференціювання полягає в тому, що функція замінюється інтерполяційним многочленом (Лагранжа, Ньютона) і похідна функції наближеного замінюється відповідною його похідною.

Постановка задачі чисельного диференціювання

Нехай функція задана таблично .

Необхідно знайти ***аналітичний вигляд її похідної.***

Ідея чисельного диференціювання :

функція замінюється інтерполяційним многочленом (Лагранжа, Ньютона) і похідна функції наближеного замінюється відповідною похідною інтерполяційного многочлена.

Формули чисельного диференціювання

Функція задана в рівновіддалених вузлах

$$x_i = x_0 + ih, \;\; h > 0, \;\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Її значення та значення похідних у вузлах:

$$f(x_i) = f_i, \quad f'(x_i) = f_i', \quad f''(x_i) = f_i''.$$

Нехай функція задана у двох точках:

x_i	x_0	x_1
$f(x_i)$	f_0	f_1

$x_1 = x_0 + h$

Побудуємо інтерполяційний многочлен 1-го степеня

$$l_1(x) = f_0 + (x - x_0) f(x_0; x_1).$$

$$l_1'(x) = f(x_0; x_1) = \frac{f_1 - f_0}{h}.$$

Похідну функції $f(x)$ в точці x_0 наближено замінюємо похідною інтерполяційного многочлена

$$f_0^{'}(x) \approx \frac{f_1 - f_0}{h}. \qquad (1)$$

Величина $\frac{f_1 - f_0}{h}$ ***- перша різницева похідна.***

Нехай функція задана у 3-х точках:

x_i	x_0	x_1	x_{-1}
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_{-1}

$x_1 = x_0 + h$, $x_{-1} = x_0 - h$

Інтерполяційний многочлен Ньютона 2-го степеня

$$l_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0; x_1; x_{-1}).$$

$$l_2'(x) = f(x_0; x_1) + (2x - x_0 - x_1) f(x_0; x_1; x_{-1}).$$

У точці x_0 ця похідна дорівнює

$$l_2'(x_0) = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + (x_0 - x_1) \times$$

$$\times \left[\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})} + \frac{f_{-1}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \right] = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}.$$

Центральна різницева похідна

$$f_0' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}. \qquad (2)$$

Друга похідна

$$f_2''(x) = 2f(x_0;x_1;x_{-1}) =$$

$$= 2\left(\frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_{-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})} + \frac{f_{-1}}{(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1)} \right) =$$

$$= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2},$$

Друга різницева похідна

$$f_0'' \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \qquad (3)$$

(1)-(3) - формули чисельного диференціювання.

Похибки формул чисельного диференціювання

Якщо функція достатню кількість раз неперервно диференційованою:

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \le \frac{h}{2} \max_{[x_0, x_1]} \left| f''(x) \right|,$$

$$\left| f_0' - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} \left| f'''(x) \right|,$$

$$\left| f_0'' - \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \max_{[x_{-1}, x_1]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$

(1)– 1-й порядок точності відносно h,

(2), (3) – 2-й порядок.

Наближене диференціювання на основі інтерполяції Ньютона

$$x_i - x_{i-1} = h, \quad (i = 1,..,n)$$

$$L_n(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_0}{1!} + q(q-1)\frac{\Delta^2 y_0}{2!} + q(q-1)(q-2)\frac{\Delta^3 y_0}{3!} + \ldots +$$

$$+ q(q-1)\ldots(q-n+1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

$$y \approx L_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots.$$

Враховуючи правило диференціювання складної функції:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{dq}.$$

Аналогічно, враховуючи, що

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right),$$

отримуємо

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq} \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d(y')}{dq}.$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right].$$

Формули для визначення похідних у вузлах інтерполяції:

Якщо $x = x_0$, *отримуємо* $q = 0$.

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \ldots\right),$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right).$$

Аналогічно можна визначити похідні будь-якого порядку. Але при цьому необхідно в якості x_0 *вибирати найближче зліва вузлове значення аргумента.*

Приклад. *Знайти похідну функції y(x) в т.* $x = 1.2$.

x_i	1.2	1.3	1.4	1.5
y_i	0.91	0.98	1.05	1.5

Розв'язування. *Складемо таблицю скінченних різниць*

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
1.2	0.91	0.07	0.00	0.38
1.3	0.98	0.07	0.38	
1.4	1.05	0.45		
1.5	1.5			

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{0.1}\left(0.07 + \frac{0.38}{3}\right) = 10(0.07 + 0.127) = 1.97$$

$$f''(x_0) \approx \frac{1}{(0,1)^2}(-0.38) = -38$$

Похибка при визначенні похідної

$$R_k'(x_0) \approx h^{k+1} \frac{q(q-1)\ldots(q-k)}{(k+1)!} y^{(k+1)}(\xi),$$

де $\xi \in [a,b]$*, але не співпадає з вузлами інтерполяції.*

Приклад: *Функція задана таблично:*

x_i	1	2	3	4
y_i	4	9	26	61

Знайти першу і другу похідні в точці $x = 1$.

Розв'язування. *Складемо таблицю скінченних різниць.*

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$
1	4	5	12	6
2	9	17	18	
3	26	35		
4	61			

Крок $h = 1$.

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \ldots\right),$$

$$y'' \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right].$$

Приклад. *Знайти значення першої та другої похідних для функції $y = f(x)$, заданої таблично, в точці $x = 0,1$.*

Розв'язування.

$h = 0,1, \quad x = x_0 = 0,1, \quad q = 0.$

Таблиця скінченних різниць:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
0	1.2733	0.5274	0.0325	0.0047	0.0002
0.1	1.8007	0.5599	0.0372	0.0049	0.0002
0.2	2.3606	0.5971	0.0421	0.0051	
0.3	2.9577	0.6392	0.0472		
0.4	3.5969	0.6864			
0.5	4.2833				

$h = 0{,}1 \qquad x = x_0 = 0{,}1 \qquad q = 0$

Обчислення

$$y'(0.1) \approx \frac{1}{0.1}\left(0.5599 - \frac{0.0372}{2} + \frac{0.0049}{3} - \frac{0.0002}{4}\right) = 5.4285,$$

$$y''(x_0) \approx \frac{1}{0.01}\left(0.0372 - 0.0049 + \frac{11}{12}0.0002\right) = 3.25.$$

Відповідь. $y'(0.1) \approx 5.4285$, $y''(x_0) \approx 3.25$.

Дякую за увагу!