Наближене розв'язування диф. рівнянь з частинними похідними

Лекція 14

Галузі, у яких реальні фізичні процеси описують диф. рівняння з частинними похідними

- *механіка суцільних середовищ,*
- *теорія пружності,*
- *термодинаміка,*
- *електродинаміка та ін.*

Розділ математики, присвячений розв’язуванню рівнянь з част. похідними - ***математична фізика****, а самі рівняння –* ***рівняння математичної фізики*** *(РМФ).*

Аналітичні розв'язки РМФ вдається знайти тільки в окремих випадках.

Велике застосування мають чисельні методи.

Найчастіше математичними моделями реальних фізичних процесів є ***диф. рівняння 2-го порядку****.*

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Класифікація рівнянь математичної фізики

Диф. рівняння 2-го порядку канонічної форми

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

x, y – незалежні змінні,

A(x,y), B(x,y), C(x,y) – двічі неперервно диференційовані функції, які всі одночасно не дорівнюють нулю.

Дискримінант

Для визначення типу рівняння (1) в т. (x,y) необхідно визначити дискримінант

$$\boxed{D(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y).} \qquad (2)$$

Три типи диф. рівнянь 2-го порядку

1. *параболічні* $D = 0$;
2. *гіперболічні* $D > 0$;
3. *еліптичні* $D < 0$.

Зауваження: *тип рівняння може змінюватися залежно від координат точки (x,y).*

Класичні приклади рівнянь

1. __Рівняння теплопровідності__ або рівняння дифузії (параболічного типу)

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \qquad 0 < x < l$$

Це рівняння описує розподіл температури вздовж стержня з часом.

Тут a – коефіцієнт теплопровідності.

Крайові умови:

$$u(0,t)=T_0=u_1(t),$$
$$u(l,t)=T_l=u_2(t),$$

де T_0, T_l *- температура на кінцях стержня.*

Початкові умови:

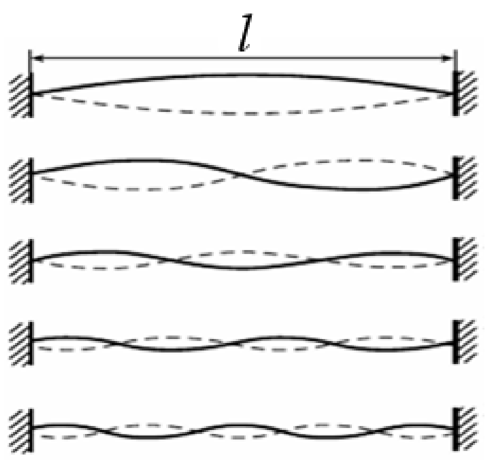
$$u(x,0)=f(x), \qquad 0\le x\le l$$

розподіл температури в момент часу $t=0$

2. ***Хвильове рівняння*** *(гіперболічного типу)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

Це рівняння описує процес поширення малих акустичних коливань (поперечні коливання струни.



u *- відхилення від положення рівноваги,*

a *- швидкість поширення збурення.*

Крайові (граничні) умови:

$$u(0,t) = f_1(t),$$
$$u(l,t) = f_1(t)$$

Початкові умови:

$$u(x,0) = \varphi_1(t) \qquad 0 \le x \le l_1 \qquad t = 0$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(t)$$

3. ***Рівняння Лапласа*** *(еліптичного типу)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Рівняння Пуассона *(еліптичного типу)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Рівняння Лапласа і Пуассона ***стаціонарні.***

Ці рівняння описують:

- *потік ідеальної рідини в стаціонарних потоках,*
- *стаціонарний розподіл температури,*
- *напруженість електричних або магнітних полів.*

Рівняння Лапласа *- при відсутності джерел енергії,*

рівняння Пуассона *– за наявності джерел (права частина рівняння).*

Задаються лише ***граничні умови*** *(а не початкові).*

Три типи крайових задач

- *крайові умови <u>1-го роду</u>:*

$$u(0,t) = \varphi_1(t)$$
$$u(l,t) = \varphi_2(t)$$

- *крайові умови <u>2-го роду</u>:*

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t)$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_2(t)$$

- *крайові умови <u>3-го роду</u> (змішані):*

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t) \\ \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_2(t) \end{cases}$$

Наближене розв'язування РМФ

Заміна частинних похідних їх скінченими різницями:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (1)$$

Розклад в ряд Тейлора в околі точки (x_0,y_0):

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}. \qquad (2)$$

*Якщо $x=x_0+h$ – **права скінченна різниця** 1-го порядку*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h}+0(h). \qquad (3)$$

*Якщо $x=x_0-h$ - **ліва скінченна різниця***

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{u(x_0,y_0)-u(x_0-h,y_0)}{h}+0(h). \qquad (4)$$

Права скінченна різниця 2-го порядку

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}=\frac{\dfrac{\partial u(x_0+h,y_0)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}}{h}+0(h^2). \qquad (5)$$

Запишемо (4) у вигляді:

$$\frac{\partial u(x_0+h,y_0)}{\partial x}=\frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h}+0(h).$$

де

Підставимо в (5) ліві різниці:

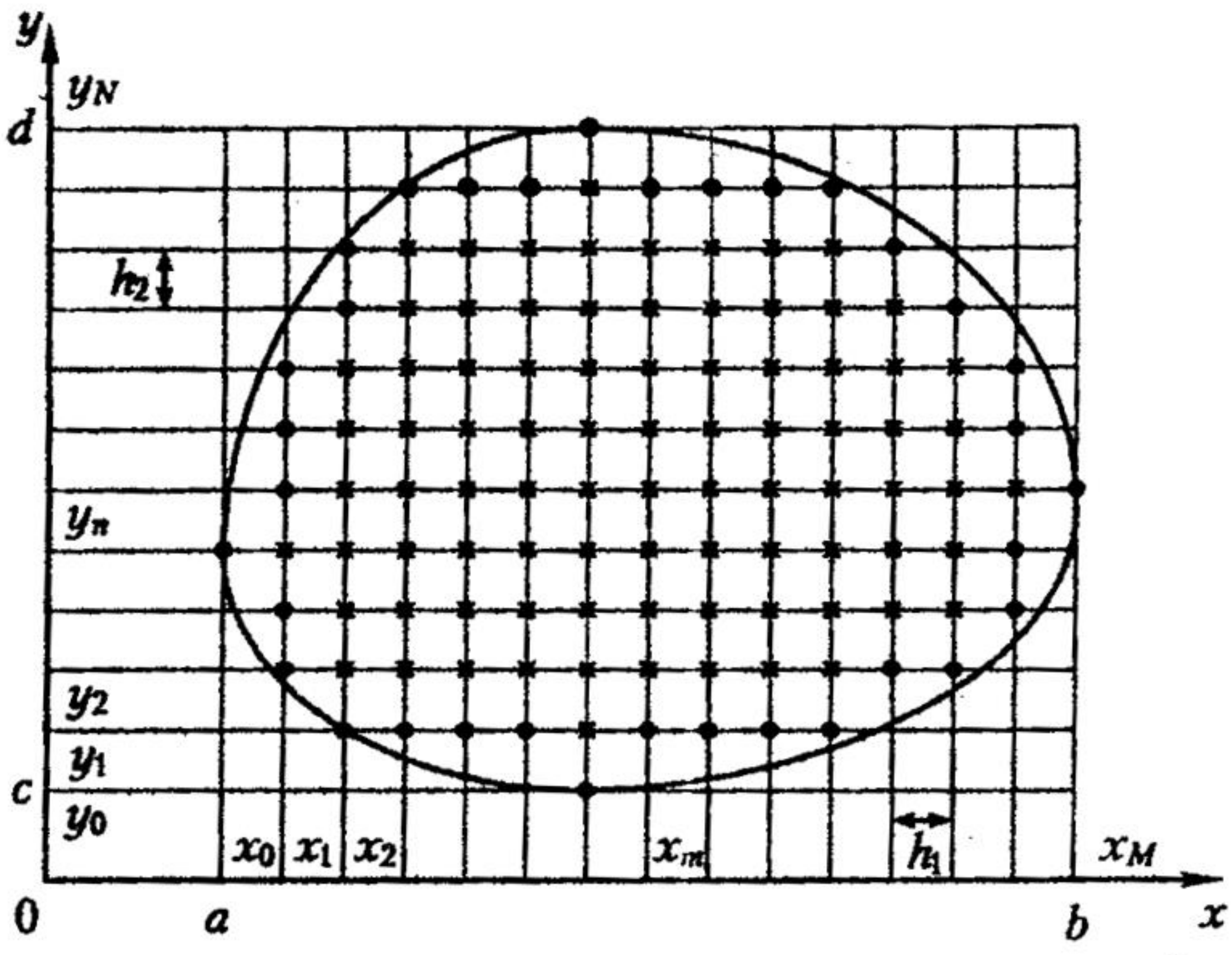
$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}=\frac{u(x_0+h,y_0)-2u(x_0,y_0)+u(x_0-h,y_0)}{h^2}+0(h^2)}$$

Аналогічно:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}=\frac{u(x_0,y_0+k)-2u(x_0,y_0)+u(x_0,y_0-k)}{k^2}+0(k^2)}$$

де k - приріст змінної y.

Метод сіток
*(МСР - **метод скінчених різниць)***



Алгоритм методу МСР

- *Область неперервних аргументів заміняється дискретною множиною вузлів -* ***різницевою сіткою****.*
- *Похідні, які входять у диф. рівняння, початкові і граничні умови заміняємо різнецевими співвідношеннями.*
- *Диференційні рівняння зводяться до різницевої схеми - СЛАР.*
- *Розв'язується СЛАР. (Матриця, як правило, має велику розмірність і є розрідженою).*

Метод МСР для диф. рівнянь еліптичного типу

Задача Діріхле для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

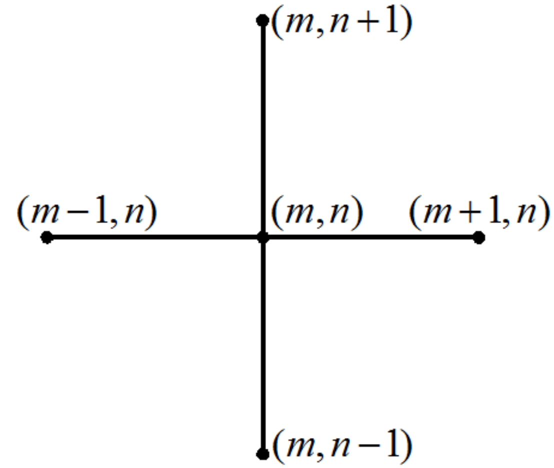
$$u(x,y) = f(x,y), \qquad\qquad x,y \in \Gamma.$$

Шаблон різницевої схеми – система вузлів для заміни похідних скінченними різницями.

Замінимо диференціальний оператор Лапласа різницевим оператором.

Виберемо

5-ти точковий шаблон:



Розклад точного розв'язку $u(x, y)$ в ряд Тейлора в околі (x_m, y_n):

$$u(x_m \pm h, y_n) = u(x_m, y_n) \pm h \frac{\partial u(x_m, y_n)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_m, y_n)}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_m, y_n)}{\partial x^3} + 0(h^4)$$

$$u(x_m, y_n \pm h) = u(x_m, y_n) \pm h \frac{\partial u(x_m, y_n)}{\partial y} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_m, y_n)}{\partial y^2} \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_m, y_n)}{\partial y^3} + 0(h^4)$$

$$\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x^2} = \frac{u_{m-1,n} + 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2} + 0(h^2)$$

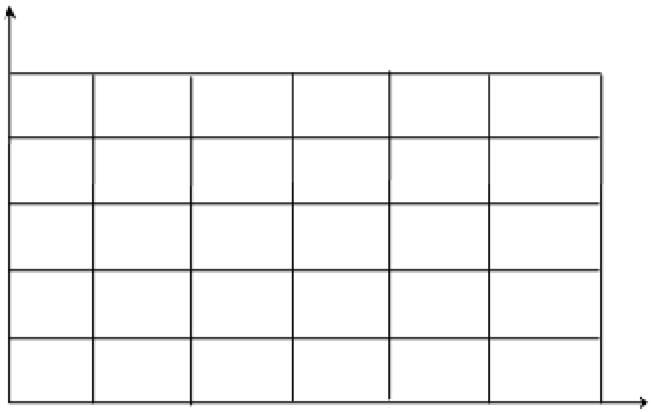
$$\frac{\partial u_{m,n}}{\partial y^2} = \frac{u_{m,n-1} + 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h^2} + 0(h^2)$$

- *Рівняння Пуассона на 5-точковому шаблоні:*

$$\frac{u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n-1} - 2u_{m,n} + u_{m,n+1}}{h^2} = f_{m,n}$$

$$u_{m-1,n} + u_{m+1,n} - 4u_{m,n} + u_{m,n-1}u_{m,n+1} = h^2 f_{m,n}$$

Для простоти вважаємо область прямокутною. Поділимо сторону А на n інтервалів, а сторону В- на m. Тоді



$$h=\frac{A}{n},\ k=\frac{B}{m}$$

Будуємо сітку з вузлами

$$x_i=ih;\quad y_j=jk.$$

Маємо $(n+1)(m+1)$ *вузлів сітки. Апроксимуємо похідні в кожному внутр. вузлі сітки центральними різницями 2-го порядку. Рівняння Лапласа в скінченних різницях*

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}\right)+\frac{1}{k^2}\left(u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}\right)=0$$

Якщо ввести $\lambda = \dfrac{k}{h}$ *, то можна записати*

$$\lambda^2 u_{i+1,j} + \lambda^2 u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2\left(1+\lambda^2\right)u_{i,j} = 0$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}$$

Отримаємо систему $(n-1)(m-1)$ *СЛАР відносно* $(n+1)(m+1)$ *невідомих.*

За допомогою граничних умов вилучаємо $2(n+m)$ *невідомих, і залишається* $(n-1)(m-1)$ *невідомих. Цю систему можна розв'язати ітераційним методом.*

Висновки

- *Розв’язання диференційних рівнянь в частинних похідних – одна з найбільш трудомістких обчислювальних задач.*
- *МСР зводить задачу до розв’язання розріджень еквівалентної системи лінійних рівнянь зі стрічковими матрицями, обумовленість яких погіршується зі збільшення кількості вузлів сітки.*

Дякую за увагу!