Лекція 15

Метод скінченних елементів розв’язування диференціальних рівнянь з частинними похідними

Основна ідея методу скінченних елементів (МСЕ) – область визначення розбивається на скінченну кількість підобластей. Розв’язок диференціальних рівнянь з частинними похідними апроксимується дискретною моделлю, яку будують на множині кусково-неперервних функцій, визначених на елементах розбиття. ***Дискретизація області*** – поділ області визначення розв’язку на скінченну кількість елементів певних розмірів і певної форми.

15.1. Відмінність між методом скінченних різниць і методом скінченних елементів

Основні відмінності між цими двома методами розв’язування рівнянь математичної фізики:

Якщо в МСР елементами сітки є прямокутники, то в МСЕ форма і розмір елементів може змінюватись залежно від граничних умов. А також їх розмір може змінюватись залежно від різних значень градієнтів у різних точках області визначення функції.

Якщо в МСР розв’язки отримуються в ізольованих вузлах сітки, то в МСЕ вони отримуються в кожній точці області визначення.

15.2. Основні типи елементів в методі скінченних елементів

1) одновимірний відрізок – для одновимірної області

Рис. 15.1. Одновимірний елемент в МСЕ

2) трикутники і чотирикутники (можуть мати і криволінійні сторони) для двовимірних областей

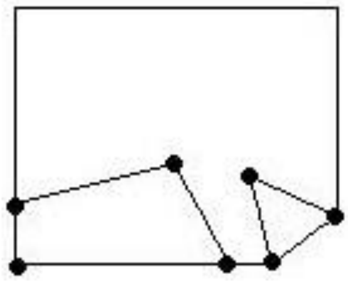

Рис. 15.2. Двовимірні елементи в МСЕ

Для моделювання криволінійних границь у середину цих елементів включаються додаткові вузли. Трикутні і чотирикутні елементи можуть застосовуватися одночасно.

3) тетраедри і паралелепіпеди, грані яких можуть бути криволінійними поверхнями для тривимірних областей

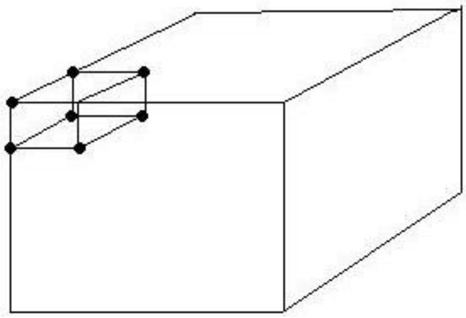

Рис. 15.3. Тривимірні елементи в МСЕ

Як правило, область визначення розбивається нерівномірно – елементи мають різну форму і розміри. Вони залежать від фізичних особливостей задачі (наприклад концентрацій напружень, градієнтів температури і т.п.).

Можливість змінювати форму і розмір елементів – важлива властивість методу скінченних елементів.

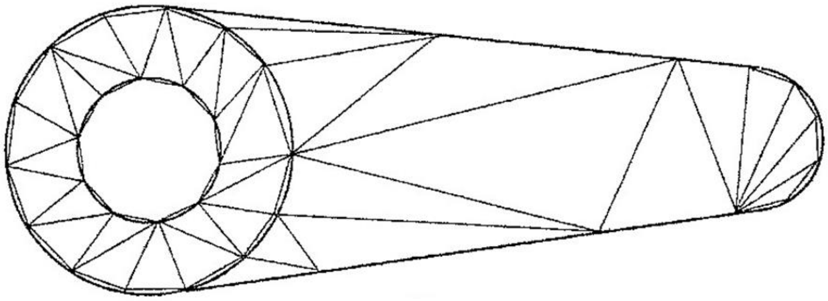

Рис. 15.4. Двовимірна модель механічної деталі

Зауваження: Потрібно не тільки розбивати область визначення на окремі елементи, але й нумерувати їх. Спосіб нумерації вузлів істотно впливає на ефективність обчислень.

МСЕ (як і МСР) зводить розв'язування крайових задач до розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності з розрідженими стрічковими матрицями.

Ширина смуги матриці визначається за формулою:

$$B = (1 + K) \cdot M, \tag{15.1}$$

де M – кількість змінних у кожному вузлі,

K – найбільша різниця між номерами вузлів у окремому напрямку,

Число K прямує до мінімуму $K \to \min$ при послідовній нумерації вузлів у напрямку до області розв'язку найменшого розміру.

15.3. Етапи методу скінченних елементів

Перший етап – дискретизація області.

Другий етап - пошук наближеного розв'язку для кожного елемента. Спочатку вибирається вид апроксимуючої кусково-неперервної функції, а потім визначаються її коефіцієнти.

Найчастіше апроксимуючими функціями є поліноми, степінь яких визначається кількістю вузлів, зв'язаних з елементом.

Апроксимуюча функція для 1- вимірного елемента:

$$u(x) = a_0 + a_1 x, \tag{15.2}$$

яка повинна задовольняти граничні умови:

$$u(x_1) = u_1 = a_0 + a_1 x_1,$$

$$u(x_2) = u_2 = a_0 + a_1 x_2,$$

звідки

$$a_0 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1}, \qquad a_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{15.3}$$

Підставивши (15.2) в (15.3), отримаємо

$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2, \tag{15.4}$$

де

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Формула (15.4) – інтерполяційний поліном Лагранжа першого порядку, що задає значення функції на проміжку $[x_1, x_2]$. Для двовимірного елемента (трикутника з вершинами 1, 2 і 3) лінійна функція може мати вигляд

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y. \tag{15.5}$$

Використовуючи значення функції у вершинах трикутника, запишемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$u(x_1, y_1) = u_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1,$$

$$u(x_2, y_2) = u_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2,$$

$$u(x_3, y_3) = u_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3,$$

яка в матричній формі має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \tag{15.6}$$

Розв’язуючи систему (15.6), отримуємо невідомі коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{1}{2A}\left(u_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + u_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + u_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{2A}\left(u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{2A}\left(u_1\left(x_3 - x_2\right) + u_2\left(x_1 - x_3\right) + u_3\left(x_2 - x_1\right)\right),$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right) + \left(x_3 y_1 - x_1 y_3\right) + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)\right).$$

Після підстановки цих виразів у (15.5), отримаємо

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3, \tag{15.7}$$

де

$$N_1 = \frac{1}{2A}\left(\left(x_2 y_3 - x_3 y_2\right) + \left(y_2 - y_3\right)x + \left(x_3 - x_2\right)y\right),$$

$$N_2 = \frac{1}{2A}\left(\left(x_3 y_1 - x_1 y_3\right) + \left(y_3 - y_1\right)x + \left(x_1 - x_3\right)y\right),$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\left(\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) + \left(y_1 - y_2\right)x + \left(x_2 - x_1\right)y\right).$$

Функції елементів (15.5) і (15.7) можна диференціювати та інтегрувати.

Продемонструємо можливість інтегрування введених функцій на прикладі найпростішого лінійного скінченного елемента:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (N_1 u_1 + N_2 u_2)\,dx.$$

З урахуванням (15.4)

$$\int_{x_1}^{x_2} N_1 u_1\,dx = u_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\,dx = u_1\left(\frac{x_2}{x_2 - x_1}\, x\Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{2\left(x_2 - x_1\right)}\, x^2\Big|_{x_1}^{x_2}\right) =$$

$$= u_1\left(\frac{x_2\left(x_2 - x_1\right)}{x_2 - x_1} - \frac{{x_2}^2 - {x_1}^2}{2\left(x_2 - x_1\right)}\right) = u_1\,\frac{2x_2\left(x_2 - x_1\right) - \left(x_2 + x_1\right)\left(x_2 - x_1\right)}{2\left(x_2 - x_1\right)} =$$

$$= u_1\,\frac{2x_2 - \left(x_2 + x_1\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)u_1.$$

Аналогічно

$$\int_{x_1}^{x_2} N_2 u_2\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)u_2.$$

Отримаємо

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x)\,dx = \frac{u_1 + u_2}{2}\left(x_2 - x_1\right),$$

що дорівнює площі трапеції з висотою $\left(x_2 - x_1\right)$ і основами u_1 і. u_2.

Зауважимо, що змінний за значенням градієнт всередині елемента можна отримати вибором для двовимірного трикутника замість формули (15.5) нелінійної функції, наприклад полінома другого порядку:

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2. \tag{15.8}$$

Але в такому елементі для обчислення шести невідомих коефіцієнтів повинно бути шість вузлів для формування системи із шести рівнянь. Це істотно збільшує обсяг необхідних обчислень, виконання яких без комп’ютера (на відміну від методу скінченних різниць) вже неможливе.

Для тривимірного елемента (тетраедра з чотирма вершинами 1, 2, 3 і 4) вибирають найпростіший поліном типу

$$u(x, y, z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z, \tag{15.9}$$

невідомі коефіцієнти якого визначають з урахуванням чотирьох умов у вузлах тетраедра:

$$\begin{gathered}
u(x_1, y_1, z_1) = u_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1, \\
u(x_2, y_2, z_2) = u_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2 + a_3 z_2, \\
u(x_3, y_3, z_3) = u_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3 + a_3 z_3, \\
u(x_4, y_4, z_4) = u_4 = a_0 + a_1 x_4 + a_2 y_4 + a_3 z_4.
\end{gathered} \tag{15.10}$$

Третій етап – обчислення наближеного розв’язку для кожного елемента.

Четвертий етап – композиція загального розв’язку задачі.

Дискретна модель для неперервної функції (розв’язку задачі) будується на множині кусково-неперервних функцій, кожна з яких є чисельним розв’язком рівняння для окремого елемента. Умова неперервності функції забезпечується рівністю значень функції у вузлах, що є спільними для сусідніх скінченних елементів. Якщо скінчені елементи задані поліномами другого порядку і вище, то умови неперервності розв’язку можуть включати також вимоги рівності похідних у вузлах сусідніх елементів.

Вимогу рівності значень функції у вузлах сусідніх елементів можна задати в матричній формі за умови узгодження глобальної нумерації вузлів всієї області розв’язку (координатного базису задачі) і локальної нумерації вузлів моделі рівнянь окремого елемента (координатного базису елемента), як це прийнято в теорії електронних схем у разі побудови матриці всієї схеми з моделей окремих компонентів. У результаті формується система лінійних рівнянь, що визначає значення в усій області розв’язку задачі:

$$Ku = F \, , \tag{15.11}$$

де K – стрічкова матриця жорсткості дискретної моделі задачі,

u – вектор вузлових значень,

F – узагальнений вектор зовнішніх збурень.

Оскільки деякі складові вектора u відомі з граничних умов, систему рівнянь (15.11) можна модифікувати, перенісши відомі величини з лівої частини рівняння у праву і виключивши їх із інших рівнянь системи. Надалі таку розріджену систему лінійних рівнянь розв’язують відомими методами.

Наближений чисельний розв’язок диференціального рівняння з частинними похідними одержують у вигляді значень функції у вузлах.

Зауважимо, що розв’язок рівняння, отриманий методом скінчених елементів, є єдиним і визначеним у всій області розв’язку, а не тільки у вузлах. Послідовність значень у вузлах є просто компактними зображенням функції розв’язку (а для двовимірної функції – кусково-планарною апроксимацією поверхні розв’язку).

Метод скінчених елементів дозволяє досить точно описати складні криволінійні границі області визначення розв’язку і граничних умов.

15.4. Розв’язування рівнянь Фредгольма

Розглянемо інтегральні рівнянні Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \tag{15.12}$$

і другого роду

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x). \tag{15.13}$$

Ідея методу скінченних сум полягає в заміні визначеного інтеграла скінченною сумою з допомогою однієї із квадратурних формул

$$\int_a^b F(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} A_j F(x_j), \tag{15.14}$$

де x_j - абсциси точок відрізка $[a,b]$, A_j $(j=1,2,..,n)$ – коефіцієнти квадратурної формули, що не залежать від $F(x)$. Заміняючи наближено інтеграл в рівняннях Фредгольма (15.12), (15.13) за формулою (15.14) и покладаючи $x = x_j$, будемо мати

$$\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i\,, \qquad (i=1,2,..,n), \tag{15.15}$$

$$y_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i\,, \qquad (i=1,2,..,n), \tag{15.16}$$

де $y_i = y(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$.

Отримуємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень y_i. Розв’язавши ці системи одним з відомих методів (Гаусса, ітерацій), отримаємо таблицю наближених значень y_i в точках x_i. Це дозволить записати наближений розв’язок рівняння (1) у вигляді інтерполяційного многочлена, а наближений розв’язок рівняння (2) – у вигляді

$$y(x) = f(x) + \lambda\sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) y_j. \tag{15.16}$$

Залежно від вибору квадратурної формули (15.14) отримаємо значення коефіцієнтів A_j та абсцис x_j.

Приклад 15.1. З допомогою квадратурної формули Сімпсона при n=2 знайти наближений розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x)+\int_0^1 xe^{xs}y(s)ds=e^x.$$

Розв'язування. Для формули Сімпсона маємо

$$h=\frac{1}{2m}=\frac{1}{2},\quad A_0=A_2=\frac{1}{6},\quad A_1=\frac{2}{3},\quad x_0=0,\quad x_1=0.5,\quad x_2=1.$$

Можна записати

$$y(x)+\frac{1}{6}\left(xe^{0\cdot x}y_o+4xe^{0.5\cdot x}y_1+xe^{1\cdot x}y_2\right)=e^x.$$

Покладаючи $x=x_i$, отримаємо систему

$$y_o=1,$$

$$y_1+\frac{0.5}{6}(y_0+4e^{0.25}y_1+e^{0.5}y_2)=e^{0.5},$$

$$y_2+\frac{1}{6}(y_0+4e^{0.5}y_1+e^{1}y_2)=e^{1},$$

яка після спрощення має вигляд

$$y_0=1,$$

$$1{,}4280y_1+0{,}1374y_2=1{,}5654,$$

$$1{,}0991y_1+1{,}4530y_2=2{,}5516.$$

Її розв'язок

$$y_0=1,\ \ y_1=1{,}0002,\ \ y_2=0{,}9995.$$

Для порівняння точний розв'язок:

$$y(x)=1.$$

За формулою (15.16) запишемо наближений розв'язок заданого рівняння

$$y(x) = e^x - \frac{x}{6}\left(1 + 4{,}001e^{\frac{x}{2}} + 1{,}000e^x\right).$$

Приклад 15.2. З допомогою квадратурної формули Гауса при n=2 знайти наближений розв'язок інтегрального рівняння

$$y(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{xs} y(s)ds = 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1).$$

Розв'язування. Для формули Гауса маємо

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2}, \quad x_1 = 0{,}2113,\ x_2 = 0{,}7887.$$

Замінимо вихідне рівняння системою:

$$y_1 - \frac{1}{4}(e^{x_1^2} y_1 + e^{x_1 x_2} y_2) = 1 - \frac{1}{2x_1}(e^{x_1} - 1),$$

$$y_2 - \frac{1}{4}(e^{x_1 x_2} y_1 + e^{x_2^2} y_2) = 1 - \frac{1}{2x_2}(e^{x_2} - 1).$$

Підставляючи значення x_1 і x_2, отримаємо систему

$$0{,}7386y_1 - 0{,}2954y_2 = 0{,}4434,$$

$$-0{,}2954y_1 + 0{,}5343y_2 = 0{,}2384.$$

Її розв'язок

$$y_1 = 0{,}9997,\ y2 = 0{,}9990.$$

Для порівняння точний розв'язок: $y(x) = 1.$

Наближений розв'язок заданого рівняння

$$y(x) = 0{,}2499e^{0,2113x} 0{,}2497e^{0,7887x} + 1 - \frac{1}{2x}(e^x - 1).$$