Тема 7. Ігрові задачі ДО.

Основні поняття теорії ігор

Теорія ігор – це розділ ДО, що займається теорією математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту. Вона досліджує поведінку і виробляє її оптимальні правила (стратегії) для кожного з учасників конфліктної ситуації. Розв'язання суперечностей за допомогою теорії ігор можливе лише після проведення математичного моделювання ситуацій у вигляді гри.

Сучасний математичний підхід до теорії ігор, звичайно, приписують фон Нейману, який виклав його у своїх статтях 1928 і 1937 рр., хоч її основи було помічено в деяких статтях Бореля на початку 20-х років минулого століття. Останній дав ясне формулювання важливого класу теоретико-ігрових задач і ввів понятт чистих та мішаних стратегій, а фон Нейман довів справедливість теореми про мінімакс для загальних умов і створив багату ідеями теорію ігор з числом гравців більше двох. Справжній інтерес до теорії ігор пробудила робота фон Неймана і Моргенштейна «Теорія ігор та економічна поведінка», що вийшла в світ у 1944 році. Водночас швидкому розвитку теорії ігор сприяла значною мірою II світова війна, коли було розгорнуто широку діяльність у напрямку систематичного підходу до задач організації тилу, пошуку підводних човнів, протиповітряної оборони і т.п., які до того часу знаходились виключно в компетенції практиків.

Слід зазначити, що теорія ігор є, насамперед, математичною дисципліною. В основному це пояснюється тим, що початок їй поклав математик і викладена вона була достатньо формалізовано, що зробило її доступною в якості знаряддя дослідження лише для математиків. Тим не менше, в наш час теорія ігор застосовується в найрізноманітніших галузях науки і суспільного життя, її результатами користуються політики, економісти, військові, букмекери.

Однією з характерних рис будь-якого суспільного, соціально-економічного явища є множинність, різнобічність інтересів, наявність сторін, що мають відмінні інтереси та нетотожні цілі, або хоча б наявність кількох різних активних точок зору стосовно явища та його результату. У цьому сенсі можна сказати, що будь-якому соціально-економічному явищу властиві риси конфлікту. Слід зауважити, що кожна зацікавлена сторона повинна мати різні можливості діяти, задовольняючи свої інтереси (вперше це твердження було сформульоване Вільямом Ешбі і отримало назву «закону про необхідну різноманітність»). В іншому випадку, коли сторона має лише одну таку можливість, вона перестає відігравати роль сторони у процесі, що відбувається, і перетворюється на обставину, яка ожнозначно впливає на цей процес. Отже, адекватна математична модель соціально-економічного явища повинна відображати властиві йому риси конфлікту: відмінність інтересів сторін-учасників конфлікту, а також різноманітність відповідних дій, які ці сторони можуть здійснювати для досягнення своїх цілей. Це означає, що соціально-економічне явище при його математичному моделюванні повинно поряд з іншими можливими поданнями припускати ще й подання у вигляді конфлікту, тобто відображати такі компоненти: зацікавлені сторони, можливі дії кожної зі сторін, інтереси сторін.

Розглянемо основні визначення теорії ігор.

Ситуація називається **конфліктною**, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких повністю або частково протилежні. **Гра** – це конфлікт, в якому наявні щонайменше два учасники (гравці), кожний з яких прагне досягнення власних цілей. Будь-яка гра складається з партій, після закінчення яких гравцям виплачують їх виграші. У свою чергу кожна партія складається з ходів, які одночасно або послідовно роблять гравці. Опис гри як послідовності ходів носить назву позиційної форми гри. **Правила гри** – це припустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення певної мети. Кількісна оцінка результатів гри називається **виплатою**. Опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, при яких він повинен зробити хід, називається **стратегією гри**. Стратегія гри називається **оптимальною**, якщо при багаторазовому повторенні гри вона забезпечує гравцеві максимально можливий середній виграш. Отже, гра характеризується системою правил, які описують сутність конфліктної ситуації:

- кількість гравців;
- вибір способу дій гравців на кожному етапі гри;
- інформацію, якою володіє кожен з гравців при здійсненні таких виборів;
- виплату для кожного з гравців після завершення довільного етапу гри.

Виграш оцінюється кількісно. Він залежить як від власної стратегії гравця, так і від стратегії інших осіб. В іграх з нульовою сумою програш = сумі виграшів, тому гра є *антагоністичною*. Завдання дослідника конфліктної ситуації полягає в приведенні її з мінімальними втратами до формальної гри.

Основними принципами, які використовують при пошуку розв'язків ігор, є принципи оптимальності та рівноваги.

Оптимальність

Дослідження конфліктів можна проводити з різних точок зору:

- *дескриптивної,* що полягає у визначенні того, які ситуації фактично складаються (чи можуть складатись) в тих чи інших конфліктах;
- *нормативної*, що визначає, яку поведінку гравців слід вважати оптимальною (розумною, адекватною);
- *конструктивної*, що вказує, як реалізовувати потрібні стратегії і ситуації;
- *прогностичної*, що займається передбаченням фактичного результату конфлікту.

Теорія ігор як математична дисципліна в її сучасному стані займається *нормативним вивченням* ігор.

Основними задачами теорії ігор можна вважати такі:

- синтез принципів оптимальності;
- встановлення можливостей реалізації принципів оптимальності (тобто встановлення факту існування оптимальних у цьому сенсі ситуацій);
- знаходження їх реалізацій.

Основними змістовними рисами конфлікту стосовно його результатів вважають інтуїтивні уявлення про *вигідність, стійкість* та *справедливість*.

У найпростішому випадку, коли у грі бере участь лише один гравець (т. зв. тривіальна гра), вигідність можна розуміти лише як максимізацію значень функції виграшу на всій множині стратегій-ситуацій. Такі задачі є по суті задачами оптимізації і в теорії ігор не розглядаються.

Будь-яка можлива для гравця $i \in I$ дія – це його стратегія; множину всіх стратегій гравця i позначимо через X_i. В умовах конфлікту кожен гравець i обирає свою деяку стратегію $x_i \in X_i$, в результаті чого складається набір стратегій $x=(x_{1,\dots,}\ x_n)$, який називають **ситуацією**. Множина всіх ситуацій є декартовим добутком $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Зацікавленість гравців у ситуаціях виявляється в тому, що кожному гравцю $i \in I$ в кожній ситуації $x \in X$ приписується число, що відображає ступінь задоволення його інтересів у цій ситуації. Це число називатимемо **виграшем** гравця i в ситуації x і позначатимемо через $H_i(x)$. Відображення $H_i : x \to R$ називають *функцією виграшу (функцією корисності) гравця i*. Перебіг конфлікту полягає у виборі кожним гравцем $i \in I$ його стратегії $x_i \in X_i$ та в отриманні ним у новій ситуації $x=(x_{1,\dots,} x_n)$ виграшу $H_i(x)$ з деякого джерела. Отже, будь-який конфлікт може бути представлений у вигляді системи $< I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$. Таку систему називають **безкоаліційною грою** або просто **грою**.

Серед усіх безкоаліційних ігор виділяється клас **антагоністичних ігор**, в яких число гравців дорівнює двом, а значення їх функцій виграшу в кожній ситуації рівні за величиною і протилежні за знаком: $H_1(x_1, x_2) = -H_2(x_1, x_2)$. Для скорочення вживання індексів, множини стратегій гравців 1 і 2 в антагоністичній грі позначають A і B, функцію виграшу $H_1(x_1, x_2)$ через H, а сама гра записується у вигляді $< A, B, H >$.

Нехай гра нетривіальна, тобто в ній бере участь декілька гравців. Оптимальною ситуацією можна вважати таку, за якої одночасно досягають своїх максимумів функції виграшу кожного з гравців. Умову оптимальності в цьому сенсі для ситуації x^* у грі формально можна записати так: $\forall i \in I \wedge x_i \in X_i : H_i(x) \le H_i(x^*)$. *Вигідність* такої ситуації очевидна. Так само, як і її *стійкість*: будь-яке відхилення від неї гравців або групи гравців може привести хіба що до зменшення виграшів усіх учасників гри. *Справедливість* цієї ситуації випливає з симетричності входження всіх гравців у вищенаведену умову. Однак існування таких ситуацій є винятком.

Однією з форм реалізації уявлень про оптимальність можна вважати поняття **рівноваги**. Ситуацію x^* називають *рівноважною*, якщо жоден з гравців не зацікавлений у відхиленні від неї. Формально це записується так. Нехай $\Gamma = < I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} >$ – безкоаліційна гра, а $x = (x_1, ..., x_n)$ - деяка ситуація в ній. Якщо $x_i^{'}$ – довільна стратегія гравця i, то позначення $x \| x_i^{'} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i^{'}, x_{i+1} ..., x_n)$ є результатом заміни в ситуації x стратегії x_i гравця i на стратегію $x_i^{'}$. Отже, ситуацію x^* називають *рівноважною,* якщо $\forall i \in I \wedge x_i^{'} \in X_i : H_i(x^* \| x_i^{'}) \le H_i(x^*)$.

Класифікація ігор

Гра має множину класифікаційних ознак: кількість гравців, кількість стратегій, характер взаємин між гравцями, характер виграшів, вигляд функції виграшів, кількість ходів, стан інформації.

Кількість гравців: 0 – описова модель ситуації, 1 – модель з необхідністю визначення найбільш доцільного способу дій за умови відсутності активної протидії; 2 – найбільш досліджені моделі теорії ігор; 3 та більше – досліджені лише спеціальні випадки внаслідок принципових труднощів визначення поняття положення рівноваги в такій грі.

Кількість стратегій: **скінченна** (якщо в грі кожен з гравців має скінченну множину можливих стратегій) та **нескінченна** (якщо ж хоча б один з гравців має безмежну множину стратегій).

Характер взаємин: **безкоаліційні** (заборонено угоди між гравцями та утворення коаліцій, нпр., чемпіонат світу з футболу), **коаліційні** (гравці можуть утворювати коаліції, нпр., військові ігри) та **кооперативні** (коаліції відомі наперед і залишаються незмінними протягом гри).

Характер виграшів: **гра з нульовою сумою** (сума виграшів всіх гравців в кожній партії рівна нулю, тобто в цій грі загальний капітал гравців не змінюється, а перерозподіляється між ними залежно від результатів гри) та **гра з ненульовою сумою** (нпр, торговельні взаємовідносини між країнами).

Гра двох гравців з нульовою сумою називається **антагоністичною**, оскільки цілі двох гравців в ній прямо протилежні; виграш одного гравця досягається за рахунок програшу іншого.

Вигляд функції виграшів: **матрична** (скінченна гра двох осіб, в якій виграші 1-го гравця задаються елементами матриці і дорівнюють програшам 2-го гравця, її розв'язують методами ЛП), **біматрична** (виграш кожного з гравців задається окремою матрицею), **сепарабельна** (гра може бути розділеною, функція виграшу може бути представлена у вигляді суми функцій одного аргументу), **типу дуелі** (гра характеризується моментом вибору ходу та ймовірностями отримання виграшу залежно від часу, що пройшов від моменту початку гри до моменту вибору, нпр., вкладення капіталу з метою оволодіння ринком збуту: чим раніше було здійснене вкладення, тим менша вірогідність оволодіти ринком, однак і при занадто пізньому вкладенні ринок збуту буде втрачено).

Кількість ходів: **однокрокова** (завершується після того, як кожен з гравців зробить по одному крокові, матрична гра є однокроковою) та **багатокрокова (позиційна, стохастична, диференційна)**. **Позиційна –** кожен з гравців робить декілька ходів послідовно, виграші визначають залежно від результату гри. **Стохастична –** якщо у грі роблять ходи, що приводять до вибору певних позицій, причому існує вірогідність повернення на попередню позицію. **Диференційна –** якщо ходи роблять неперервно і умови проведення описують диференційними рівняннями (гра типу „хижак-жертва").

Стан інформації: ігри з **повною інформацією** (якщо на кожному ході гри кожному з гравців відомо, які вибори були зроблені раніше, нпр., шахи) та з **неповною** (якщо у грі не все відомо про попередні вибори).

Матричні ігри двох осіб з нульовою сумою. Матриця гри. Верхня та нижня ціна гри. Теорема про мінімакс (сідлову точку).

Матрична гра двох осіб з нульовою сумою визначається так. Перший гравець А має у своєму розпорядженні m стратегій $A_i, i=\overline{1,m}$, а другий гравець В - n стратегій $B_j, j=\overline{1,n}$:

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Кожній парі стратегій ставиться у відповідність число a_{ij}, що є виграшем гравця А за умови застосування ним своєї стратегії A_i та гравцем В своєї стратегії B_j, і одночасно програшем гравця В. Кожна з стратегій A_i та B_j називається *чистою стратегією*. Матрична гра є антагоністичною.

Гра полягає в наступному. Гравці обирають кожен одну зі своїх стратегій A_i та B_j, (тобто одночасно роблять хід). Після цього гра закінчується і гравець А отримує виграш a_{ij} , а гравець В, відповідно, програє a_{ij} (виграє $-a_{ij}$).

Наступним кроком після опису гри є визначення оптимальних стратегій та виграшів гравців. Для вибору оптимальної стратегії використовується принцип гарантованого результату („максиміну”), тобто обирається така стратегія, яка за найгірших умов забезпечить максимальний виграш. При цьому вважається, що суперник буде робити найкращі свої ходи, тобто оптимальним чином (зі своєї точки зору) протидіяти. Надалі вважатимемо, що всі значення матриці виграшів є невід’ємними – це припущення не зменшує загальності, оскільки будь-яку матричну гру можна привести до цього вигляду.

Означення 1. Число $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ називається **нижньою ціною гри** і показує, який максимальний виграш може собі гарантувати гравець А за умови застосування своїх чистих стратегій та всіх можливих дій гравця В. Число $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ називається **верхньою ціною гри** і показує, який мінімальний програш може собі гарантувати гравець В. Якщо в грі з матрицею виплат А нижня і верхня чисті ціни гри рівні між собою, то гра має **сідлову точку** в чистих стратегіях і чисту ціну гри $\nu = \alpha = \beta$.

Поняття сідлової точки відображає таку ситуацію: якщо один з гравців дотримується стратегії, що відповідає сідловій точці, то інший гравець не може діяти краще, як дотримуватись своєї стратегії, що теж відповідає сідловій точці. Отже, для сідлової точки справедливе співвідношення:

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}, \qquad (7.1)$$

де A_i та B_j – довільні чисті стратегії гравців А та В відповідно; A_{i_0} та B_{j_0} – стратегії, що утворюють сідлову точку.

Пару чистих стратегій, що утворюють сідлову точку, та сідловий елемент матриці $a_{i_0 j_0}$ називають **розв'язком гри в чистих стратегіях**. Основні теоретичні результати дають такі теореми про сідлову точку.

Теорема 1. Теорема про верхню і нижню ціну гри. Нехай *f*(*x,y*) – дійсна функція двох змінних $x \in A$ та $y \in B$, існують $\alpha = \max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x, y)$, $\beta = \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x, y)$. У цьому випадку $\alpha \le \beta$.

Матриця антагоністичної гри двох осіб $A = \{a_{ij}\}$ є частковим випадком *f*(*x,y*), де *x=i, y=j, f*(*x,y*)= a_{ij}.

Означення 2. Нехай *f*(*x,y*) – дійсна функція двох змінних $x \in A$ та $y \in B$. Точка (x^*, y^*) називається **сідловою** для функції *f*(*x,y*), якщо для довільних $x \in A$, $y \in B$ виконується нерівність $f(x, y^*) \le f(x^*, y^*) \le f(x^*, y)$.

Теорема 2. Теорема про сідлову точку. Нехай для дійсної функції *f*(*x,y*), $x \in A$, $y \in B$, існують $\alpha = \max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x, y)$, $\beta = \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x, y)$. Необхідною і достатньою умовою того, що $\alpha = \beta$, є існування сідлової точки (x^*, y^*) функції *f*(*x,y*), при цьому $f(x^*, y^*) = \max_{x\in A} \min_{y\in B} f(x, y) = \min_{y\in B} \max_{x\in A} f(x, y)$.

Якщо покласти *x=i, y=j, f*(*x,y*)= a_{ij}, то ця теорема показує справедливість співвідношення (15.1) для визначення сідлової точки антагоністичної матричної гри.

Мішані стратегії в іграх двох осіб з нульовою сумою.

Не кожна матрична гра має розв’язок в чистих стратегіях.

Означення 3. **Мішаною стратегією** гравця називають повний набір вірогідностей застосування ним його чистих стратегій.

Отже, якщо гравець А застосовує m чистих стратегій, то мішана стратегія $x=(x_1,...,x_m)$ задовольняє умови: $x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, i=\overline{1,m}.$ Аналогічно мішана стратегія гравця В $y=(y_1,...,y_n)$ задовольняє умови: $y_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, j=\overline{1,n}.$

Означення 4. **Середній виграш** гравця А в матричній грі відображається як математичне сподівання його виграшу при застосуванні ним стратегії $x=(x_1,...,x_m)$, а гравцем В – стратегії $y=(y_1,...,y_n)$. Аналогічно **середній програш** гравця В у матричній грі відображається як математичне сподівання його програшу при застосуванні ним стратегії $y=(y_1,...,y_n)$, а гравцем А – стратегії $x=(x_1,...,x_m)$:

$$M[A,x,y]=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i\right)y_j, M[B,x,y]=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right)x_i, M[A,x,y]=M[B,x,y].$$

У цьому випадку верхня ціна гри $\beta=\min_y \max_x M[A,x,y]$, а нижня - $\alpha=\max_x \min_y M[A,x,y].$

Означення 5. **Оптимальними мішаними стратегіями** гравців А та В відповідно називають такі стратегії $x^*=(x_1^*,...,x_m^*)$ та $y^*=(y_1^*,...,y_n^*)$, для яких виконується рівність $\min_y \max_x M[A,x,y] = \max_x \min_y M[A,x,y]=M[A,x^*,y^*].$

Еквівалентним означенням є таке. Мішані стратегії $x^*=(x_1^*,...,x_m^*)$ та $y^*=(y_1^*,...,y_n^*)$ є оптимальними, якщо вони утворюють сідлову точку функції $M[A,x,y]$, тобто $M[A,x,y^*]\leq M[A,x^*,y^*]\leq M[A,x^*,y]$.

Означення 6. Величина $M[A,x^*,y^*]$ називається **ціною гри** і позначається v.

Теорема 3. Основна теорема теорії матричних антагоністичних ігор двох осіб.

Для матричної гри з довільною матрицею А величини $\alpha=\max_x \min_y M[A,x,y]$ та $\beta=\min_y \max_x M[A,x,y]$ існують завжди та є рівними між собою. Отже, для матричної гри завжди існує розв'язок в мішаних стратегіях.

Ця теорема відповідає на запитання: Чи мають матричні ігри розв'язки й які? Наступна теорема та наслідок з неї дають відповідь на запитання: Яким чином знайти розв'язки матричних ігор?

Теорема 4. Для того, щоб у матричній грі з ціною ν мішана стратегія гравця А x^* була оптимальною, необхідно і достатньо, щоб для довільної стратегії гравця В виконувалась нерівність $\nu \le M[A, x^*, y]$. Аналогічно для гравця В: для того, щоб у матричній грі з ціною ν мішана стратегія гравця В y^* була оптимальною, необхідно і достатньо, щоб для довільної стратегії гравця А виконувалась нерівність $M[A, x, y^*] \le \nu$.

Наслідок. Для гравця А: для того, щоб $x^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$ була оптимальною мішаною стратегією матричної гри з матрицею А та ціною гри ν, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge \nu, j = \overline{1, n}.$ Аналогічно для гравця В: для того, щоб $y^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ була оптимальною мішаною стратегією матричної гри з матрицею А та ціною гри ν, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le \nu, i = \overline{1, m}.$

Таким чином, для розв'язання гри необхідно визначити стратегії, що задовольняють вищенаведені системи обмежень та умови нормування:

$$x_i^* \ge 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1, i = \overline{1, m}, \ y_j^* \ge 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1, j = \overline{1, n}.$$

Цей наслідок дозволяє сформулювати для розв'язування гри пару задач ЛП. Отже, розв'язання матричної гри зводиться до знаходження невід'ємних розв'язків системи лінійних нерівностей та рівнянь, тобто гра може бути приведена до задач ЛП.

Теорема 5. Нехай є матрична гра з матрицею А, ціною гри ν, оптимальними мішаними стратегіями $x^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$ та $y^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ гравців А та В відповідно. Тоді якщо для деякого i буде $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* < \nu$, то $x_i^* = 0$; якщо для деякого j буде $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* > \nu$, то $y_j^* = 0$.

Ця теорема ґрунтується безпосередньо на співвідношеннях між прямою та двоїстою задачами ЛП, що відповідають грі.

Зображення гри у вигляді задач ЛП

Надалі будемо вважати, що всі виграші є **невід'ємними** – з цією метою додамо до всіх елементів матриці гри значення найбільшого за абсолютним значенням негативного елементу. В результаті такого перетворення оптимальні стратегії не зміняться, лише ціна гри збільшиться на відповідне значення.

Якщо гравець А застосовує свою оптимальну стратегію $x^* = (x_1^*,...,x_m^*)$, то гравець В не може покращити своє становище. Отже, оптимальні мішані стратегії гравців А та В задовольняють наслідок з теореми 4 теорії антагоністичних ігор двох осіб, а саме:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge \nu,\ j = \overline{1,n},\ \ x_i^* \ge 0,\ \ i = \overline{1,m},\ \ \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1,\ \text{за умови } \nu \Rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le \nu, i = \overline{1,m}, y_j^* \ge 0,\ \ j = \overline{1,n},\ \ \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1,\ \text{за умови } \nu \Rightarrow \min.$$

Здійснивши підстановки $p_i = x_i^* / \nu$, $q_j = y_j^* / \nu$ та врахувавши, що гравець А прагне максимізувати свій середній виграш, а гравець В – мінімізувати програш:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \nu \ge \nu, j = \overline{1,n},\ \ p_i \nu \ge 0,\ \ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \nu = 1, \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \min,\ \text{тому що } \nu \Rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \nu \ge \nu, i = \overline{1,m},\ \ q_j \nu \ge 0,\ \ j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \sum_{i=1}^{m} q_i \nu = 1, \sum_{i=1}^{m} q_j = \frac{1}{\nu} \Rightarrow \max,\ \text{тому що } \nu \Rightarrow \min,$$

отримаємо пару двоїстих задач ЛП, розв'язання яких дозволить визначити оптимальні мішані стратегії гравців А та В:

$$\frac{1}{\nu} = \sum_{i=1}^{m} p_i \Rightarrow \min,\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1, j = \overline{1,n}, p_i \ge 0, i = \overline{1,m},$$

$$\frac{1}{\nu} = \sum_{j=1}^{n} q_j \Rightarrow \max,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1, i = \overline{1,m}, q_j \ge 0, j = \overline{1,n}.$$

Таким чином, **процедура розв'язування антагоністичної гри двох осіб** є такою:

Крок 1. Розраховуємо нижню та верхню ціни гри; якщо вони рівні між собою, то гра розв'язана – **кінець** (розв'язок гри в чистих стратегіях).

Крок 2. Спрощуємо гру шляхом виключення домінованих стратегій.

Крок 3. Формулюємо пару задач ЛП, розв'язуючи одну з яких, встановлюємо оптимальну мішану стратегію одного з гравців (зручніше розв'язати задачу за допомогою звичайного СМ для гравця В, тобто знайти оптимальні значення q_j).

Крок 4. За розв'язком прямої задачі знаходимо розв'язок двоїстої (для гравця А, тобто оптимальні значення p_i).

Крок 5. Визначаємо $\nu = 1/Q^*$, за допомогою підстановок $y_j^* = q_j \nu$ та $x_i^* = p_i \nu$ переходимо до знаходження оптимальних мішаних стратегії гравців В і А для спрощеної гри. Доповнюємо їх домінованими чистими стратегіями з вірогідностями використання рівними нулю.

Приклад 7.1. *Побудова матриці виплат.* Для гри в «орлянку» побудувати матрицю виплат

Розв'язання.

Суть гри «в орлянку» є такою: 1-й гравець кладе монету на стіл, а 2-й гравець вгадує, яким боком – гербом (Г) чи цифрою (Ц) – догори вона лежить. У випадку вгадування він отримує від 1-го гравця одну одиницю виграшу, в іншому сам виплачує йому одиницю. Ця гра антагоністична з множиною припустимих стратегій кожного з гравців *A*=*B*={Г, Ц} та виграшами одного (одночасно програшами іншого) *H*(Г, Г)=*H*(Ц, Ц)=-1, *H*(Ц, Г)=*H*(Г, Ц)=1. У матричній формі їх записують так:

	Г	Ц
Г	-1	1
Ц	1	-1

Приклад 7.2. *Приклади ігор.* Наведіть приклади гри двох та кількох осіб.

Розв'язання.

Теніс – це гра двох осіб, в якій програш одного з гравців є виграшем іншого, а ціною гри є кількість очок, які отримує гравець, або умови проходження в наступний тур.

Футбол – це гра, в якій одна проти одної виступають коаліції (дві команди по 11 гравців у кожній), за певних умов її можна розглядати як гру двох осіб.

Три фірми діють на ринку, причому жодна не має повного контролю над ним. Якщо кожна фірма діє самостійно, то це гра трьох осіб, якщо дві з них вирішують об'єднатися, то це є гра двох осіб.

Приклад 7.3. *Кількість сідлових точок.* Чи може у матриці бути декілька сідлових точок?

Розв'язання.

У матриці виплат $A = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \\ & & \end{bmatrix}$ сідловими точками є a_{11}, a_{13}.

Приклад 7.4. *Розв'язання гри в чистих стратегіях*. Задана матриця гри. Визначити верхню та нижню ціну гри.

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	2	4	7	5	$\alpha_1 = 2$
A_2	7	<u>**6**</u>	8	7	$\alpha_2 = 6+$
A_3	5	3	4	1	$\alpha_3 = 1$
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	$\beta_1 = 7$	$\beta_2 = 6+$	$\beta_3 = 8$	$\beta_4 = 7$	

Значення верхньої та нижньої ціни гри рівні між собою $\alpha = \beta = 6$. У цьому випадку жодному з гравців невигідно відхилятись від своїх стратегій, і отримуємо точку рівноваги (сідлову).

Приклад 7.5. *Розв'язання антагоністичної гри двох осіб*. Знайти розв'язок гри, заданої матрицею:

		$3B_1 > B_2$		$5B_3 > B_4$	$4B_1 > B_5$		
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	max 3	
A_1	4	7	2	3	4	$\alpha_1 = 2$	
A_2	3	5	6	8	9	$\alpha_2 = 3$	
A_3	4	4	2	2	8	$\alpha_3 = 2$	$6A_1 = A_3$
A_4	3	6	1	2	4	$\alpha_4 = 1$	$1A_1 > A_4$
A_5	3	5	6	8	9	$\alpha_5 = 3$	$2A_2 = A_5$
min 4	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 7$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 8$	$\beta_5 = 9$		

Гра не має сідлової точки. Спрощуємо її, виключаючи доміновані стратегії.

Стратегія A_i **домінує** стратегію A_j, якщо в A_i виграші не менші, ніж в A_j, і хоча б один строго більший. Стратегії **еквівалентні**, якщо всі виграші цих двох стратегій однакові. З числа еквівалентних стратегій також залишаємо лише одну. Стратегія B_i **домінує** стратегію B_j, якщо в B_i програші не більші, ніж в B_j, і хоча б один строго менший.

Таким чином оптимальні мішані стратегії гравців A та B будуть мати відповідно вигляд $x^* = (x_1^*, x_2^*, 0,0,0)$, $y^* = (y_1^*, 0, y_3^*, 0,0)$, де ненульові значення отримують після розв'язування спрощеної гри розміром 2х2.

Приклад 7.6. *Зображення гри у вигляді задач ЛП.* Знайти розв'язок гри, заданої матрицею:

$$\begin{array}{ll} A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \;\; \max 2 \\ 1 \end{array} \\ \quad\;\; \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 4 & 5 \end{array} \;\; \min 4 & \end{array}$$

Гра не має сідлової точки. Оскільки доміновані стратегії відсутні, для розв'язання гри застосуємо подання у вигляді пари двоїстих задах ЛП:

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \Rightarrow \max, \qquad G = p_1 + p_2 + p_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3q_1 + 6q_2 + q_3 + 4q_4 \le 1, \\ 5q_1 + 2q_2 + 4q_3 + 2q_4 \le 1, \quad (1) \\ q_1 + 4q_2 + 3q_3 + 5q_4 \le 1, \\ \forall q_j \ge 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p_1 + 5p_2 + p_3 \ge 1, \\ 6p_1 + 2p_2 + 4p_3 \ge 1, \quad (2) \\ p_1 + 4p_2 + 3p_3 \ge 1, \\ 4p_1 + 2p_2 + 5p_3 \ge 1, \quad \forall p_i \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо задачу (1) за допомогою звичайного СМ і переходимо шляхом обернених підстановок $\nu = 1/Q^*, y_j^* = q_j \nu$ до визначення оптимальної мішаної стратегії гравця B. З останньої СТ цієї задачі визначаємо оптимальні значення p_i, за допомогою яких, використовуючи підстановку $x_i^* = p_i \nu$, розраховуємо значення оптимальної мішаної стратегії гравця A.

Ігри порядку 2х2, 2х*n* та *m*х2. Графічне розв'язування ігор

Матриця **гри розміру 2х2** має вигляд $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Якщо є сідлова точка, то гра розв'язана. В іншому випадку шукаємо точку в мішаних стратегіях $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. Для оптимальності мішаних стратегій необхідно виконання таких співвідношень:

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2\ge\nu,\qquad a_{11}y_1+a_{12}y_2\le\nu,$$
$$a_{12}x_1+a_{22}x_2\ge\nu,\qquad a_{21}y_1+a_{22}y_2\le\nu,$$
$$x_1+x_2=1,\ \ x_1,x_2\ge 0,\qquad y_1+y_2=1,\ y_1,y_2\ge 0.$$

Якщо матрична гра не має сідлової точки в чистих стратегіях (тобто $0<x_1<1, 0<x_2<1,\ \ 0<y_1<1, 0<y_2<1$), то згідно з останньою теоремою вищенаведені нерівності перетворюються в рівності (припущення, що якась нерівність виконується строго, означає, що відповідна їй змінна двоїстої задачі має бути рівною нулю, тоді є сідлова точка). Розв'язуючи системи рівнянь

$$a_{11}x_1+a_{21}x_2=\nu,\qquad a_{11}y_1+a_{12}y_2=\nu,$$
$$a_{12}x_1+a_{22}x_2=\nu,\qquad a_{21}y_1+a_{22}y_2=\nu,$$
$$x_1+x_2=1,\qquad y_1+y_2=1,$$

отримаємо

$$x_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{b},\ y_1=\frac{a_{22}-a_{12}}{b},\ \nu=\frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{b},\ b=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}.$$

В **іграх порядку 2х*n*** гравець А має лише 2 чисті стратегії, а гравець В – *n*. Матриця гри має вигляд $A=\begin{bmatrix} & y_1 & y_2 & \cdots & y_n\\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\end{bmatrix}$.

Якщо гра не має сідлової точки, то необхідно знайти такі мішані стратегії, для яких виконувалися б умови:

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{21}x_2\ge\nu, && (1) && a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n\le\nu, && (2)\\ &\ldots\\ &a_{1n}x_1+a_{2n}x_2\ge\nu, && && a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{1n}y_n\le\nu,\\ &x_1+x_2=1,\ \ x_1,x_2\ge 0, && (3) && y_1+y_2+\ldots+y_n=1,\ \forall y_j\ge 0, j=\overline{1,n}. && (4)\end{aligned}$$

Оскільки гра не має сідлової точки, то нерівності (2) перетворяться в рівності:

$$a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y=\nu,\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=\nu. \qquad (5)$$

Для знаходження розв'язку використаємо **графічний метод**. Уведемо позначення для лівої частини нерівностей (1):

$$M_j(x_1)=a_{1j}x_1+a_{2j}x_2=(a_{1j}-a_{2j})x_1+a_{2j},$$

де $M_j(x_1)$ – середній виграш гравця А, коли він застосовує змішану стратегію $x=(x_1,x_2)$, а гравець В – чисту стратегію B_j. Гравець В прагне мінімізувати програш, тобто обрати $M(x_1)=\min\limits_j M_j(x_1)$, а гравець А – збільшити свій виграш $M(x_1^*)=\max\limits_{x_1} M(x_1)$. Так визначається оптимальна мішана стратегія гравця А $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ та пара чистих стратегій гравця В, які в перетині дають $M^*=M(x_1^*)$ (рис. 7.1).

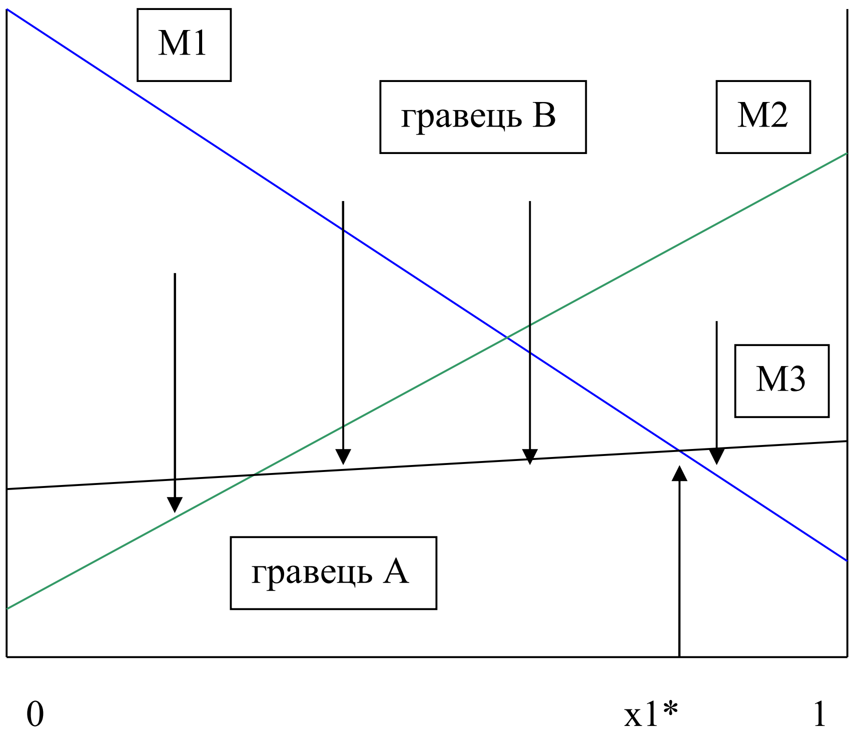

Рис. 7.1. Гра **2х*n***

Далі розв’язуємо систему з тими чистими стратегіями гравця В, які знаходяться на перетині M^*.

В **іграх порядку *m*х2** гравець А має m чистих стратегій, а гравець В – дві. Матриця гри має вигляд

$$A=\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & a_{11} & a_{12} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_m & a_{m1} & a_{m2} \end{array}.$$

Якщо гра не має сідлової точки, то необхідно знайти такі мішані стратегії, для яких виконувалися б умови:

$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq \nu$, (6)

$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq \nu$,

$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$, $\forall x_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, (8)

$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq \nu$, (7)

...

$a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 \leq \nu$,

$y_1 + y_2 = 1$, $y_1, y_2 \geq 0$. (9)

Оскільки гра не має сідлової точки, то нерівності (6) перетворяться в рівності:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m = \nu,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m = \nu. \quad (10)$$

Для знаходження розв'язку використаємо **графічний метод**. Уведемо позначення для лівої частини нерівностей (7):

$$M_i(y_1) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 = (a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2},$$

де $M_i(y_1)$ – середній програш гравця В, коли він застосовує змішану стратегію $x = (x_1, x_2)$, а гравець А – чисту стратегію A_i. Гравець А прагне максимізувати виграш, тобто обрати $M(y_1) = \max\limits_i M_i(y_1)$, а гравець В – зменшити свій програш $M(y_1^*) = \min\limits_{y_1} M(y_1)$. Так визначається оптимальна мішана стратегія гравця В $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ та пара чистих стратегій гравця А, які в перетині дають $M^* = M(y_1^*)$ (рис. 7.2).

Далі розв'язуємо систему з тими чистими стратегіями гравця А, які знаходяться на перетині M^*.

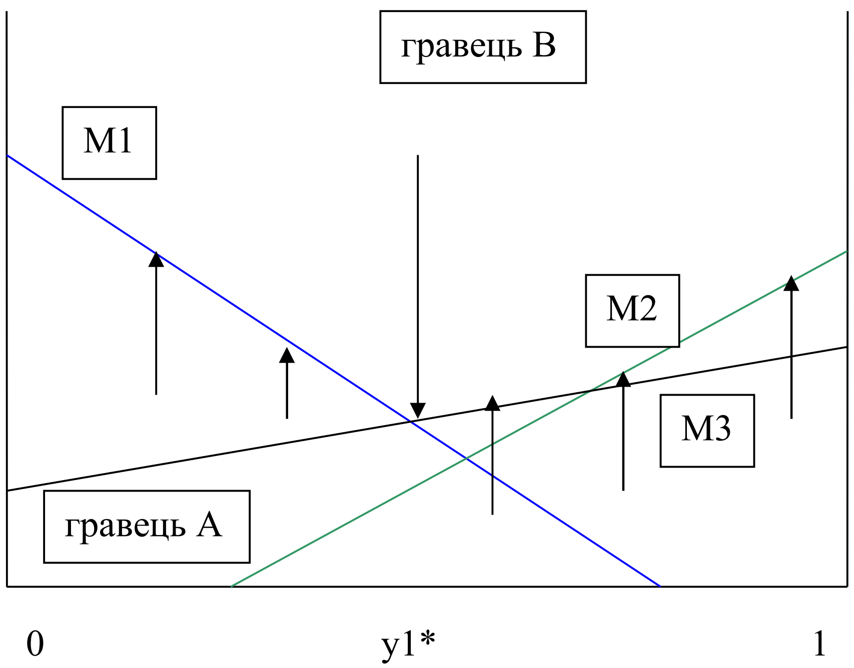

Рис. 7.2. Гра ***m*х2**

Приклад 7.7. *Графічне розв'язання гри.*

Розв'язати графічно гру, задану матрицею:

$$A=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 12 & 6 \end{array}\right].$$

Розв'язання.

Випишемо середні виграші гравця А при застосуванні ним мішаної стратегії, а гравцем В – чистої для кожної з чистих стратегій гравця В:

$$M_1(x_1) = (10-1)x_1 + 1 = 9x_1 + 1,$$
$$M_2(x_1) = (8-2)x_1 + 2 = 6x_1 + 2,$$
$$M_3(x_1) = (6-4)x_1 + 4 = 2x_1 + 4,$$
$$M_4(x_1) = (4-3)x_1 + 3 = x_1 + 3,$$
$$M_5(x_1) = (2-12)x_1 + 12 = -10x_1 + 12,$$
$$M_6(x_1) = (3-6)x_1 + 6 = -3x_1 + 6.$$

Можна виключити доміновані стратегії, які, як побачимо нижче, не впливають на розв'язок.

Зобразимо середні виграші графічно:

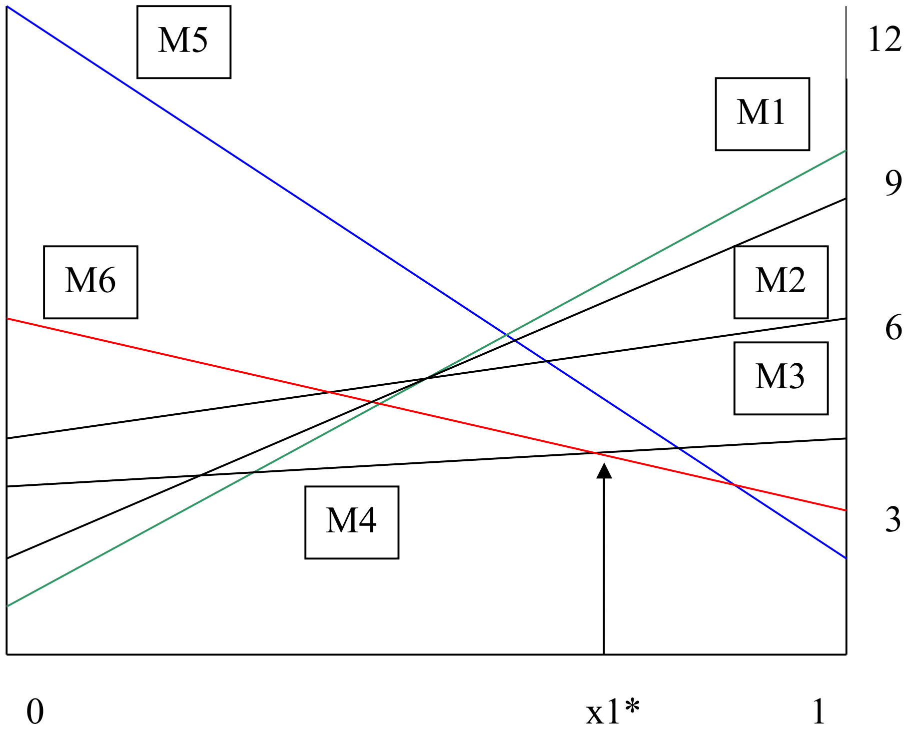

Рис. 7.3. Графічне знаходження розв'язку

Гравець А матиме найбільший виграш, якщо він обере мішану стратегію, що відповідатиме застосуванню гравцем В суміші чистих стратегій B_4 та B_6.

Тому записуємо системи рівнянь для визначення мішаних стратегій гравців А та В:

$4x_1 + 3x_2 = \nu,$ $\qquad$ $4y_4 + 3y_6 = \nu,$ враховуючи (5),

$3x_1 + 6x_2 = \nu,$ $\qquad$ $3y_4 + 6y_6 = \nu,$

$x_1 + x_2 = 1,$ $\qquad$ $y_4 + y_6 = 1.$

Розв'язуючи, отримаємо $x_1^* = \frac{3}{4}, x_2^* = \frac{1}{4}, y_4^* = \frac{3}{4}, y_6^* = \frac{1}{4}, \nu = \frac{15}{4}$. Отже, оптимальні стратегії гравців будуть $x^* = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), y^* = (0,0,\frac{3}{4},0,\frac{1}{4})$, а ціна гри $\nu = \frac{15}{4}$.

Позиційні ігри та ігри декількох осіб

Поняття про позиційні ігри

Позиційна гра – це природне розширення матричної гри двох гравців з нульовою сумою, в якій може брати участь скінченна кількість гравців, кожен з яких може робити послідовно скінченну кількість ходів, причому деякі з них можуть бути випадковими, а інформація про них може змінюватись від одного ходу до іншого. Такі ігри можна формалізувати, певним чином перетворивши їх до гри, еквівалентної деякій матричній грі двох осіб з нульовою сумою. Процес зведення позиційної гри до матричної називають *нормалізацією*, а отримана матрична гра – грою в нормальній формі.

Приклад 7.8. Дві корпорації мають бажання встановити між собою ділові зв'язки і вирішити питання про побудову на території другої корпорації виробництва. Гра складається з трьох ходів. 1-ша корпорація обирає число з множини {1, 2}. Після цього 2-га корпорація обирає число з цієї ж множини, знаючи, який вибір зробила 1-ша на 1-му кроці. Третій хід з цієї ж множини робить 1-ша корпорація, знаючи, який хід зробила 2-га та пам'ятаючи про свій вибір на 1-му кроці. На цьому гра завершується і розподіляються виграші: 1-й гравець виплачує 2-му певну суму, визначену функцією $M(x, y, z)$ залежно від вибору гравцями 1-го – 3-го ходів x, y, z:

$M(1, 1, 1)=-2$; $M(1, 1, 2)=-1$; $M(1, 2, 1)=3$; $M(1, 2, 2)=-4$;
$M(2, 1, 1)=5$; $M(2, 1, 2)=2$; $M(2, 2, 1)=2$; $M(2, 2, 2)=6$.

Змістовна інтерпретація цієї гри є такою:

Хід 1. 1-ша корпорація здійснює вибір з двох альтернатив: x=1 – запропонувати 2-ій побудувати на її території складальне виробництво комп'ютерів; x=2 – виробництво мікропроцесорів.

Хід 2. 2-га корпорація, знаючи, яку альтернативу обрала 1-ша на 1-му ході, здійснює вибір з двох альтернатив: y=1 – будувати складальне виробництво комп'ютерів та запропонувати це 1-ій корпорації; y=2 – будувати виробництво мікропроцесорів та запропонувати це 1-ій корпорації.
Хід 3. 1-ша корпорація, знаючи вибір 2-ої на 2-му ході та пам'ятаючи свій вибір на 1-му кроці, здійснює вибір з двох альтернатив: z=1 – погодитися з пропозицією 2-ої, : z=2 – не погодитися з пропозицією 2-ої.

Після того, як зроблені ходи, партія зіграна, і 1-ша корпорація отримує суму $M(x, y, z)$.

Для нормалізації гри необхідно відтворити стратегії 1-го та 2-го гравців.

Стратегії 2-го гравця:

- B_1 – обрати y=1 не зважаючи на вибір 1-го гравця на 1-му ході;
- B_2 – обрати y=2 не зважаючи на вибір 1-го гравця на 1-му ході;
- B_3 – погодитися з вибором 1-го гравця на 1-му ході, тобто обрати y=1, якщо x=1, і y=2, якщо x=2;
- B_4 – не погодитися з вибором 1-го гравця на 1-му ході, тобто обрати y=2, якщо x=1, і y=1, якщо x=2.

Отже, 2-й гравець має 4 стратегії.

Стратегії 1-го гравця будуємо аналогічно з урахуванням раніше зроблених виборів: вибір на 1-му кроці дає дві можливості, після вибору 2-го гравця з'являється 4 варіанти. Реалізація на 3-му ході дає 8 стратегій дії для 1-го гравця. Тому стратегію 1-го гравця зображатимемо за допомогою трійки (i, i_1, i_2), де i – вибір 1-го гравця на 1-му ході; i_1 – вибір 1-го гравця на 3-му ході за умови вибору на 2-му ході 2-им гравцем y=1; i_2 – вибір 1-го гравця на 3-му ході за умови вибору на 2-му ході 2-им гравцем y=2.

Враховуючи відтворені стратегії, будуємо матрицю гри:

	B_1 (y=1)	B_2 (y=2)	B_3 (y=x)	B_4 (y'=x)
A_1(1,1,1)	M(1,1,1)=-2	M(1,2,1)=3	M(1,1,1)=-2	M(1,2,1)=3
A_2(1,1,2)	M(1,1,1)=-2	M(1,2,2)=-4	M(1,1,1)=-2	M(1,2,2)=-4
A_3(1,2,1)	M(1,1,2)=-1	M(1,2,1)=3	M(1,1,2)=-1	M(1,2,1)=3
A_4(1,2,2)	M(1,1,2)=-1	M(1,2,2)=-4	M(1,1,2)=-1	M(1,2,2)=-4
A_5(2,1,1)	M(2,1,1)=5	M(2,2,1)=2	M(2,2,1)=2	M(2,1,1)=5
A_6(2,1,2)	M(2,1,1)=5	M(2,2,2)=6	M(2,2,2)=6	M(2,1,1)=5
A_7(2,2,1)	M(2,1,2)=2	M(2,2,1)=2	M(2,2,1)=2	M(2,1,2)=2
A_8(2,2,2)	M(2,1,2)=2	M(2,2,2)=6	M(2,2,2)=6	M(2,1,2)=2

Розв'язком гри є дві сідлові точки, ціна гри – 5.

Побудуємо дерево позиційної гри, у якому вузол позначатиме номер гравця, ребро – його хід, листя відображатимуть виграші, а кожен шлях від кореня до листка – партію. Оскільки 1-й хід робить 1-й гравець, то корінь відповідатиме ходу 1-го гравця і позначаємо його 1. 2-й гравець робить 2-й хід, тому вузли наступного рівня позначимо 2 і т.д.

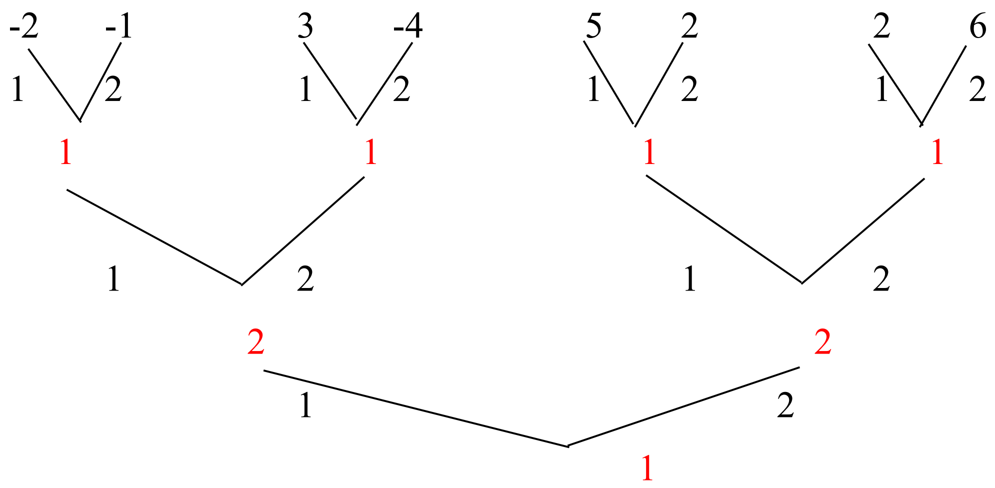

Рис. 7.4. Інформаційні множини вузлів при знанні всіх ходів

Внаслідок повного знання ходів кожен з вузлів дерева цієї гри є окремою інформаційною множиною.

Приклад 7.9. Порівняно з попереднім прикладом 3-й хід робить 1-й гравець, не пам’ятаючи, який хід він зробив першим та який другий хід зробив 2-й гравець (можна уявити 1-го гравця, як дві особи, що знаходяться в окремих кімнатах і не мають змоги обмінюватись інформацією). Дерево гри з інформаційними множинами при частковому знанні буде аналогічним, зображеному на попередньому рисунку, лише з тією відмінністю, що всі вузли 3-го рівня утворюватимуть одну інформаційну множину.

Приведемо гру до нормальної форми. У 2-го гравця є 4 такі самі стратегії, як і в попередньому прикладі. У 1-го гравця можливості зменшуються за рахунок браку інформації: оскільки він на 3-му ході не знає попередніх виборів, то його стратегія складається з пари чисел (x, z), тобто обрати 1 або 2 на 1-му ході та 1 або 2 на 3-му. Відповідна матриця гри матиме такий вигляд:

	B_1 (y=1)	B_2 (y=2)	B_3 (y=x)	B_4 (y'=x)
A_1(1,1)	M(1,1,1)=-2	M(1,2,1)=3	M(1,1,1)=-2	M(1,2,1)=3
A_2(1,2)	M(1,1,2)=-1	M(1,2,2)=-4	M(1,1,2)=-1	M(1,2,2)=-4
A_3(2,1)	M(2,1,1)=5	M(2,2,1)=2	M(2,2,1)=2	M(2,1,1)=5
A_4(2,2)	M(2,1,2)=2	M(2,2,2)=6	M(2,2,2)=6	M(2,1,2)=2

Гра не має сідлової точки. Розв’язуючи гру в мішаших стратегіях, отримаємо мішані стратегії 1-го гравця – (0, 0, 4/7, 3/7), 2-го гравця – (4/7, 3/7, 0, 0) з ціною гри $v = 26/7$.

Кооперативні ігри та методи їх дослідження

Конфліктні ситуації не завжди мають антагоністичний характер. Дуже часто учасники конфлікту, маючи свої цілі, готові вступити в переговори один з одним, укладаючи угоди чи навіть об'єднати своїх зусилля в надії отримати з цього переваги. Один з найважливіших висновків теорії ігор – це те, що певні форми кооперування гравців з різними прагненнями мають сенс, оскільки інформація, що може бути передана від одного до іншого учасника гри, переважно має велику цінність, значення рішень, що приймаються спільно, та ефект навіть від часткового об'єднання ресурсів є значними.

Ігри двох осіб посідають центральне місце в теорії ігор. Серед них виділяють біматричні, тому що вони адекватніше відображають реальні конфлікти двох осіб порівняно з матричними (навіть військові конфлікти оперативно-тактичного плану, яким притаманна наявність не менше двох ієрархічно пов'язаних ланок «напад-оборона» війна не є строгим суперництвом, оскільки обидві сторони нічию вважають кращим результатом, аніж взаємне знищення; хоча локальне зіткнення або повітряний бій доцільно розглядати як гру зі строгим суперництвом).

Біматричні ігри – це скінченні ігри двох осіб з *довільною сумою*, тобто такі, для яких виконується умова $a_{ij} + b_{ij} \neq 0$. Їх описують або за допомогою двох матриць A та B – виграшів кожного з гравців, або за допомогою складеної матриці, елементами якої є пари (a_{ij}, b_{ij}):

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) & \dots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) & \dots & (a_{2n}, b_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1}, b_{m1}) & (a_{m2}, b_{m2}) & & (a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}.$$

Біматрична гра – найпростіша ігрова модель, що припускає можливість співробітництва, тобто це гра з *нестрогим суперництвом*. Вона є грою, в якій немає однозначного суперництва, бо існує принаймні одна пара ситуацій x та x^* така, що один гравець віддає перевагу ситуації x, а не x^*, а інший не віддає перевагу ситуації x^* перед ситуацією x. Для таких ігор неможливо обрати функції корисності гравців так, щоб їх сума дорівнювала нулю, тому терміни «ігри з нестрогим суперництвом» та «ігри з ненульовою сумою» є еквівалентними. Більшість економічних, політичних і військових конфліктів можна подати у формі ігор лише в тому випадку, якщо визнати властисе їм нестроге суперництво.

В іграх зі строгим суперництвом гравці не можуть досягти обопільної вигоди посередництвом якого-небудь співробітництва, в іграх з нестрогим суперництвом, навпаки, такий обопільний виграш завжди можливий.

Існують дві різновидності біматричних ігор – безкоаліційні, що забороняють будь-яке співробітництво, та кооперативні, що його дозволяють.

Результат біматричної безкоаліційної гри рідко можна передбачити, оскільки зв'язки між виграшами сторін відсутні і є можливість діяти самостійніше. Значення **середніх виграшів гравців** А та В у біматричній грі рівні відповідно:

$$M_A[A,x,y]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_iy_j, M_B[B,x,y]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j,$$

Ситуація рівноваги – це така пара <x, y> мішаних стратегій гравців, для яких виконуються співвідношення

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_iy_j, i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}b_{ij}x_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ij}x_iy_j, j=\overline{1,n},$$

та природні обмеження

$$x_i\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1,\ \ y_j\ge 0,\ j=\overline{1,n},\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1.$$

Такі ситуації рівноваги в біматричній грі існують завжди – відповідна теорема про існування ситуацій рівноваги в мішаних стратегіях для скінченних неантагоністичних ігор двох осіб доведена американським математиком Джоном Нешем (Nash J.F.). Однак ця теорема не дає інформації, як знайти ці ситуації рівноваги. Різноманітні алгоритми для знаходження всіх ситуацій рівноваги запропоновані багатьма авторами дозволяють обчислити виграші гравців як матричні добутки:

$$H_1(X,Y)=XAY^T,\ H_2(X,Y)=XBY^T.$$

Фон Нейман і Моргенштейн займалися іграми з нульовою сумою, в яких перемога однієї сторони неминуче означає поразку іншої. У 1950 - 1953 рр.. Неш опублікував чотири без перебільшення революційні роботи, в яких представив глибокий аналіз "ігор з ненульовою сумою" – особливого класу ігор, в яких всі учасники або виграють, або терплять поразку. Прикладом такої гри можуть стати переговори про збільшення зарплати між профспілкою і керівництвом компанії. Ця ситуація може завершитися або тривалим страйком, в якому постраждають обидві сторони, або досягненням взаємовигідної угоди.

Неш зумів розгледіти нове обличчя конкуренції, змоделювавши ситуацію, що згодом отримала назву "рівновага за Нешем" або "некооперативна рівновага", за якої обидві сторони використовують ідеальну стратегію, що й приводить до створення стійкої рівноваги. Гравцям вигідно зберігати цю рівновагу, оскільки будь-яка зміна тільки погіршить їхнє становище.

Некооперативна гра двох осіб

В теорії розглядають в основному дві стратегії поведінки гравців – **максимінну** та **стратегію загрози.**

Максимінна стратегія – це стратегія украй обережної людини, яка, розраховуючи на якнайгіршу ситуацію, хотіла б мати у цьому випадку максимум можливого. Якщо гравець А застосовує свою оптимальну стратегію $x^* = (x_1^*,...,x_m^*)$, то гравець В не може покращити своє становище, тобто для оптимальної стратегії справедливі співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \geq \nu,\ j = \overline{1,n}, x_i^* \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1, i = \overline{1,m},\ \text{за умови } \nu \Rightarrow \max .$$

Перетворимо цю задачу, здійснивши підстановку $p_i = \dfrac{x_i^*}{\nu}$ та врахувавши, що гравець А прагне максимізувати свій середній виграш. Отримаємо задачу ЛП

$$\frac{1}{\nu} = \sum_{i=1}^{m} p_i \Rightarrow \min,\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq 1,\ \ j = \overline{1,n},\ \ p_i \geq 0, i = \overline{1,m},\ \text{тому що } \nu \Rightarrow \max ,$$

розв'язання якої дозволить визначити оптимальну стратегію гравця А.

Стратегія загрози – це стратегія, за якої гравець ставить за мету не виграти самому, а не дати можливості другому гравцеві виграти якнайбільше (тобто мінімізувати його виграш), при цьому він і сам може виграти найменше. Нехай гравець А, застосовуючи мішану стратегію, рахує **не свій виграш, а виграш гравця В**. Середній виграш гравця В при виборі стратегії B_j становитиме $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i$. Гравець А діє за принципом $w = \max\limits_{j} \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \Rightarrow \min\limits_{x}$, тобто він **мінімізує максимальний виграш гравця В.** Тому для знаходження оптимальної стратегії гравця А ми маємо задачу:

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i^* \leq w, j = \overline{1,n}, x_i^* \geq 0,\ \ i = \overline{1,m},\ \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1,\ \text{за умови } w \Rightarrow \min .$$

Перетворимо цю задачу, здійснивши підстановку $p_i = \frac{x_i^*}{w}$ та врахувавши, що гравець А прагне мінімізувати середній виграш гравця В ($w \Rightarrow \min, 1/w \Rightarrow \max$), отримаємо задачу ЛП

$$\frac{1}{w} = \sum_{i=1}^{m} p_i \Rightarrow \max, \ \sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_i \geq 1, j = \overline{1,n}, \ p_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \text{ тому що } w \Rightarrow \min.$$

Розглянемо докладніше випадок n=m=2. Тоді матриця виплат гри має вигляд:

$$\begin{array}{cccc} & B_1 & B_2 & \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}} & \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 = 1 - x_1 \end{array} \\ & y_1 & y_2 & \end{array}.$$

Розглянемо обидві стратегії.

Нехай гравець А в **максимінній стратегії** обирає стратегії A_1, A_2 з імовірностями $(x_1, 1 - x_1)$. За умови вибору гравцем В стратегій B_1 чи B_2 відповідно середній виграш гравця А становитиме $v = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1)$ чи $v = a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1)$. Розв'язавши рівняння

$$a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1),$$

знаходимо оптимальну мішану максимінну стратегію гравця А ($x_1^*, 1 - x_1^*$), де

$$x_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}},$$

та оптимальне значення його гарантованого виграшу при цій стратегії:

$$\nu = a_{11}x_1^* + a_{21}(1 - x_1^*).$$

Нехай гравець А в **стратегії загрози** обирає стратегії A_1, A_2 з імовірностями $(x_1, 1 - x_1)$. За умови вибору гравцем В стратегій B_1 чи B_2 відповідно середній виграш гравця В становитиме $w = b_{11}x_1 + b_{21}(1 - x_1)$ чи w= $b_{12}x_1 + b_{22}(1 - x_1)$. Розв'язавши рівняння

$$b_{11}x_1 + b_{21}(1 - x_1) = b_{12}x_1 + b_{22}(1 - x_1),$$

знаходимо оптимальну мішану стратегію загрози гравця А ($x_1^*, 1 - x_1^*$), де

$$x_1^* = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{21} - b_{12} + b_{22}},$$

та значення мінімального виграшу гравця В при цій стратегії:

$$w = b_{11}x_1^* + b_{21}(1 - x_1^*).$$

Отже, у випадку максимінної стратегії гравець А гарантує собі виграш, не менший за v, але при цьому згоджується з тим, що припускає і більший виграш гравця В порівняно з застосуванням стратегії загрози. І навпаки, діючи з позиції стратегії загрози, гравець А гарантує для гравця В отримання мінімального виграшу, але разом з тим і зменшує свій середній виграш порівняно з максимінною стратегією (відомий підхід «нехай мені буде гірше, але щоб у сусіда було найгірше»).

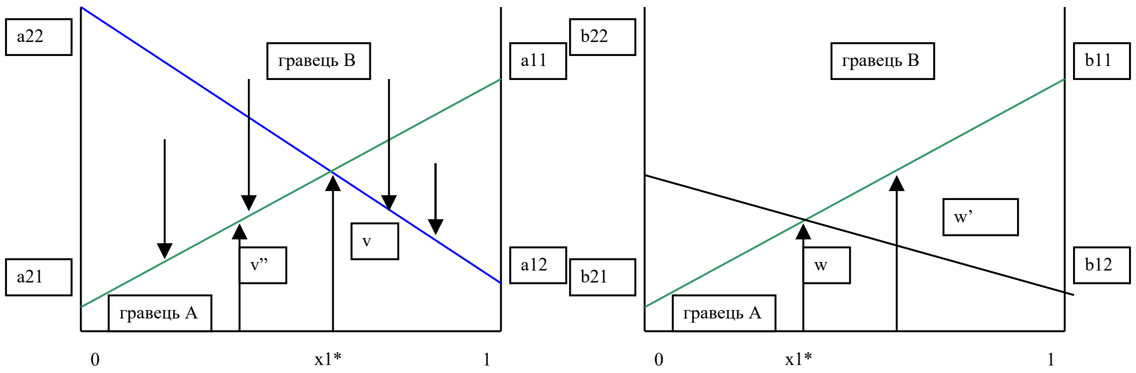

Рис. 7.5. Порівняння максимінної стратегії та стратегії загрози

Кооперативна гра двох осіб. Переговорна множина

Розглянемо гру з такою матрицею виплат:

	y	1-y
x	(2; 1)	(-1; -1)
1-x	(-1; -1)	(1; 2)

Нехай гравці А і В використовують мішані стратегії (x; 1-x) та (y; 1-y) відповідно. Тоді їх середні виграші становитимуть:

$$v = 2xy - 1x(1-y) - 1y(1-x) + 1(1-x)(1-y),$$

$$w = 1xy - 1x(1-y) - 1y(1-x) + 2(1-x)(1-y).$$

Отже, ми побудували відображення x, y в v, w (рис. 7.6), тобто отримали фігуру, обмежену прямими, що проходять через пари точок (-1; -1), (1; 2) і (-1; -1), (2; 1), а також ділянкою параболи $5(v-w)^2 = 2(v+w)-1$, що утворює «западину».

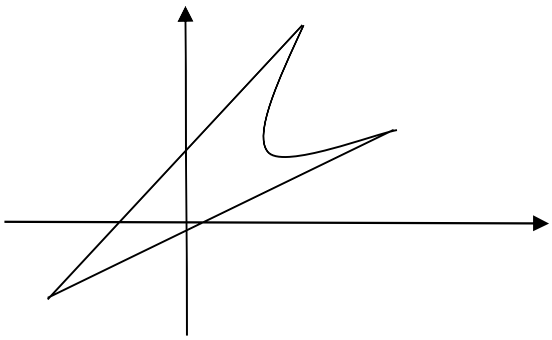

Рис. 7.6. Відображення прикладу кооперативної гри за умови повного суперництва

Припустимо, що у скінченній грі двох осіб з ненульовою сумою гравці мають нагоду домовлятися про сумісні дії. Раніше стратегія A_i першого гравця обиралась з вірогідністю x_i, стратегія B_j другого гравця – з вірогідністю y_j, і стратегії обох гравців були незалежні, тому комбінація (A_i, B_j) з'являлася з вірогідністю $x_i\, y_j$. Зараз ходи обираються спільно і тому комбінація стратегій (A_i, B_j) з'являється з деякою сумісною вірогідністю p_{ij}. Отже, сумісна гра зводиться до вибору сумісної мішаної стратегії p_{ij}, такої, що

$$\forall (i, j): p_{ij} \geq 0: \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = 1 .$$

Тоді середні виграші 1-го та 2-го гравців відповідно рівні:

$$\nu = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_{ij}, \quad w = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij} p_{ij} .$$

Область, яку заповнять значення, отримані з наведених формул, є опуклою оболонкою образів точок з координатами (a_{ij}, b_{ij}).

Для наведеного вище прикладу гри область *R* є опуклою оболонкою точок (-1; -1), (1; 2) і (2; 1) (рис. 7.7).

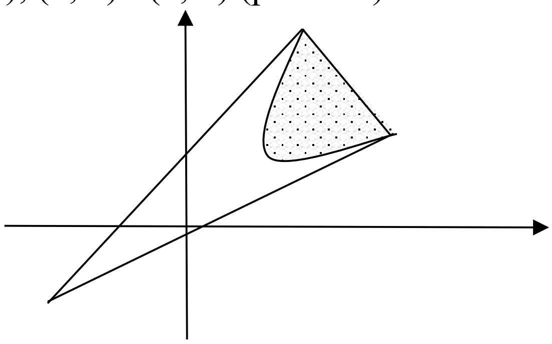

Рис. 7.7. Відображення прикладу кооперативної гри за умови співробітництва

Порівнюючи дві отримані області (рис. 7.6 і 7.7), бачимо, що застосування сумісних стратегій дозволило заповнити ту «западину», яка була при некооперативній грі.

Про що ж тепер можуть домовитись гравці? Нехай v^*, w^* – максимінні виграші 1-го та 2-го гравців відповідно. Точку (v^*, w^*) називають точкою **status quo**. Очевидно, що жоден з гравців не погодиться одержувати в результаті сумісної гри менше, ніж дає йому максимінна стратегія, тому з нашої множини розв'язків зникає область, де $v \le v^*, w < w^*$. Розглянемо область, що залишилась і визначається сумісною дією обмежень $v \ge v^* \wedge w \ge w^*$ (рис. 7.8). Задачу можна розглядати як двокритерійну з критеріями v, w. Множину Парето-оптимальних (недомінованих) розв'язків утворюють всі точки, що знаходяться на ламаній А-В-С.

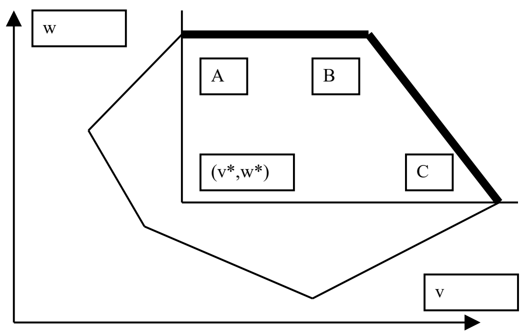

Рис. 7.8. Множина Парето-оптимальних розв'язків гри

Очевидно, що якщо точка (v, w) домінується точкою (v', w'), то в процесі гри гравці безболісно відмовляться від точки (v, w) на користь точки (v', w'), оскільки при такому переході хоча б одному стає краще, а іншому – не гірше. Точки, які домінують точку (v, w), знаходяться у правій верхній частині допустимої множини. Тому множину Парето-оптимальних розв'язків називають **переговорною множиною** гравців А та В. Результат домовленості гравців залежить від уміння вести переговори і лежить за межами математичного дослідження.

Отже, в певному сенсі, знайти розв'язок біматричної кооперативної гри двох осіб означає побудувати переговорну множину.

Схема алгоритму побудови переговорної множини.

Крок 1. Побудова образу всіх можливих мішаних стратегій в просторі (v,w).

Крок 2. Побудова опуклої оболонки образу припустимих стратегій в просторі (v,w).

Крок 3. Знаходження максимінних виграшів кожного з гравців – точки status quo.

Крок 4. Побудова множини Парето-оптимальних розв’язків як «північно-східної границі» отриманого образу в просторі (v,w), для якої виконуються умови $v \geq v^* \wedge w \geq w^*$.

Слід відзначити, що конкретні реалізації алгоритмів для біматричної гри з числом стратегій, що більше 2, є достатньо складними.

Розглянемо *приклад*, який пояснює різницю між станами рівноваги та Парето-оптимальними розв’язками в біматричних іграх. До нерегульваного перехрестя на високій швидкості з різних доріг наближаються два автомобілі. У кожного водія є дві стратегії: *Б* – безпечна (зменшити швидкість до безпечної) і *Р* – ризикована (продовжувати їхати на високій швидкості). Ситуацію, за якою два водії обирають безпечну стратегію, оцінено для кожного водія в 1, якщо обидва водії обирають ризиковану стратегію, то вони зіштовхнуться, наслідки оцінено для кожного значенням -9, якщо ж один з них поступиться, знизивши швидкість, в той час як інший продовжуватиме їхати на високій швидкості, то такий результат оцінено числом 0 для того, хто зменшив швидкість («за втрату престижу»), та числом 3 для іншого («за підвищення престижу»). Так отримуємо біматричну гру розміру 2х2, в якій водії є гравцями:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \;\;Б & \qquad Р \end{array} \\ \begin{array}{c} Б \\ Р \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (0,3) \\ (3,0) & (-9,-9) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Проаналізуємо ситуації цієї гри з точки зору стійкості. Ситуація (*Б, Б*) є нестійкою, бо тоді гравець А може отримати для себе кращий результат, змінивши стратегію *Б* на *Р*, він отримає виграш 3 замість 1. Те ж справедливе в ситуації (*Б, Б*) і для гравця В. Так само нестійкою є ситуація (*Р, Р*). Отже, нестійкість якоїсь ситуації виявляється в тому, що у випадку її виникнення їй загрожує розпад, обумовлений можливістю одного з гравців отримати кращий для себе результат шляхом одноосібної зміни своєї стратегії.

Натомість обидві ситуації (*Б, Р*) та (*Р, Б*) є стійкими: якщо вони виникли, то ні у кого з гравців немає підстав для одноосібної зміни своєї стратегії. Такі ситуації називають *ситуаціями рівноваги за Нешем*. У загальному випадку *для* *біматричної гри рівноважність ситуації* $(A_{i_0},\ B_{j_0})$ означає, що для всіх $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n},\ \ a_{ij_0}\le a_{i_0j_0},\ b_{i_0j}\le b_{i_0j_0}$. Рівноважні ситуації можна розглядати як *оптимальні сумісні розв'язки*, і оптимальність рівановажної ситуації виявляється в її стосунку щодо стійкості.

Однак природно виникає інше запитання: а наскільки добрими є рівноважні ситуації стосовно виграшів гравців? Кожен з гравців може розглядати вибір своєї стратегії як прийняття рішень в умовах невизначеності й обрати, наприклад, рішення у результаті застосування максимінної стратегії, тоді згідно з принципом гарантованого результату він матиме максимальний виграш за найгірших умов. Але у цьому випадку він *не отримає* виграш, більший, ніж в ситуації рівноваги.

Аналіз таких задач дозволяє зробити висновок, що між оптимальністю за Нешем та оптимальністю за Парето існує певна суперечність: ситуація може бути оптимальною за Нешем, але неоптимальною за Парето і навпаки. Будь-яка Парето-оптимальна ситуація, оскільки вона не може бути поліпшеною для всіх гравців відразу, є максимально вигідною для коаліції, до складу якої входять всі гравці, однак вона може виявитися невигідною для одного чи декількох гравців. Саме тому вибір гравцяит Парето-оптимального розв'язку передбачає їх взаємодію (наприклад, обмін інформацією про рішення, що приймаються), в результаті чого колективний інтерес коаліції всіх гравців ставиться вище, ніж інтерес окремого гравця. Якщо ж гравці обирають свої стратегії без взаємодії, керуючись лише приватними інтересами, то можна розраховувати лише на вибір ними ситуації, оптимальної за Нешем.

Якщо скористатись принципом децентралізації, то для децентралізованої системи природним є принцип оптимальності за Нешем, а для централізованої – за Парето. При зовнішній парадоксальності суперечності між оптимальністю за Нешем та за Парето вони мають різні «ідейні основи» - підгрунтям для першої є стійкість системи, обумовлена інтересами та можливостями її окремих підсистем, для другої – вірогідність для системи загалом. Таким чином на основі цього невеликого аналізу можна зробити такі висновки:

- існування ситуацій рівноваги в безкоаліційних іграх не визначає, взагалі кажучи, їх розв'язків, і однозначні рекомендації для оперуючих сторін відсутні;
- в багатьох випадках корисні (і навіть необхідні) контакти та угоди між гравцями, а тому моделі, що дозволяють кооперування, мають переваги;
- часткові формулювання не виключають можливості використання теорії безкоаліційних ігор, і питання про пошук ситуацій рівноваги повинно досліджуватись окремо в кожному випадку.

Перехід конфліктуючих сторін до різних форм співробітництва (кооперування) створює якісно нові ситуації. В іграх з кількома учасниками розглядають три рівні взаємодії:

- обмін інформацією про перебіг гри та ситуації, що складаються;
- сумісний вибір стратегій на грунті загальної домовленості та взаємної інформованості;
- об'єднання активних засобів (ресурсів) з відповідною координацією дій.

Кожен ступінь кооперування базується на передачі якихось даних з боку одних учасників гри до інших. Умови нормального розвитку гри можуть бути порушені за рахунок передавання спотвореної інформації – обману суперника, який має неповну інформацію.

У більшості випадків уважаємо, що що інформація, якою обмінюються учасники конфлікту, має об'єктивну вартість. До поширеного виду колективних дій належить напрацювання єдиного критерію коаліції, після чого вона може розглядатись як одна оперуюча сторона. Важливим фактором, який визначає характер кооперування, є побічні виплати – вступний внесок, податок на кооперацію, штраф за вихід з кооперації. У цих випадках йдеться про зміну виграшів в той чи інший бік порівняно з початковими умовами гри, а тому побічні виплати перетворюються в частину стратегій, що застосовуються, і впливають на результат конфлікту.

Приклад 7.10. *Приклад біматричної гри. Родинна суперечка.*

Два економічні партнери домовляються про сумісне проведення одної з дій D_1 або D_2, кожна з яких вимагає спільної участі обох партнерів. У випадку сумісного проведення дії D_1 1-й гравець отримує одну одиницю корисності, а 2-й гравець – дві одиниці. У випадку сумісного проведення дії D_2 1-й гравець отримує дві одиниці корисності, а 2-й гравець – лише одну. Якщо ж гравці виконують різні дії, то виграш кожного з них дорівнює нулю.

Розв'язання.

Ми маємо справу з біматричною грою, запишемо матриці виплат 1-го та 2-го гравців.

1-й гравець

	D_1	D_2
D_1	1	0
D_2	0	2

2-й гравець

	D_1	D_2
D_1	2	0
D_2	0	1

У багатьох роботах з теорії ігор цю гру інтерпретують як одночасний вибір подружжям вечірньої розваги: відвідування змагань з боксу чи балету, причому у відвідуванні боксу чоловік зацікавлений більше, еіж дружина, при відвідуванні балету спостерігається зворотна картина, а у випадку невизначеної розбіжності вечір взагалі виявляється зіпсутим. Саме внаслідок такої інтерпретації гру часто називають «родинною суперечкою».

Приклад 7.11. *Аналіз біматричної гри.*

Проаналізувати біматричну гру, задану такою матрицею:

	B_1	B_2
A_1	(5;2)	(0;0)
A_2	(0;0)	(2;5)

Розв'язання.

У цій грі чисті стратегії (A_1, B_1) або (A_2, B_2) утворюють стратегії рівноваги (це можна перевірити безпосередньою підстановкою у формули (111)), тобто відхилення від ситуації рівноваги приводить до зменшення виграшу. Однак перша ситуація значно краща для гравця А (він виграє 5 одиниць, в той час як В – 2), а друга для гравця В (з точністю до навпаки). Водночас один з гравців, що перебуватиме в гіршій ситуації, може прагнути погіршити її ще більше для себе. Наприклад, гравець В, знаходячись у першій ситуації рівноваги, може прагнути змінити стратегію на B_2, бо хоч у цьому випадку його виграш дорівнюватиме нулю, але й виграш гравця А теж стане нульовим. Тоді якщо А прагнутиме до виграшу, він може перейти до другої ситуації рівноваги. Тому в безкоаліційній біматричній грі, незважаючи на існування декількох ситуацій рівноваги (*нерівноцінних* для гравців!), невідомо, до якого результату можуть прийти гравці і як вони повинні діяти. В той же час, якщо припустити можливість співпраці з оплатою іншому гравцеві, то, встановивши оплату для гравця В за рахунок гравця А в першій ситуації рівноваги в розмірі 1,5 одиниці та таку ж в іншій для гравця А за рахунок В, ми отримаємо дві еквівалентні стійкі ситуації рівноваги в грі.

Приклад 7.12. *Знаходження розв'язку біматричної гри.*

Знайти виграш 1-го гравця при застосуванні ним максимінної стратегії та стратегії загрози, задано платіжну матрицю гри:

	y	$1\text{-}y$
x	(2; 1)	(-1; -1)
$1\text{-}x$	(-1; -1)	(1; 2)

Розв'язання.

Ця гра є варіантом «родинної суперечки». Чоловік (гравець А) і дружина (гравець В) можуть обрати одну з двох вечірніх розваг: футбол (i=1, j=1) або театр (i=2, j=2). Звичайно, чоловік віддає перевагу футболу, дружина – театру, але їм набагато важливіше йти разом, ніж дивитися своє видовище окремо. І якщо вони посваряться і підуть в різні боки (i=1, j=2 або i=2, j=1), то обидва програють, одержуючи (-1; -1).

Знайдемо стратегії 1-го гравця (очевидно, що через симетричність платіжної матриці стратегії 2-го гравця точно такі ж).

Розглянемо *максимінну стратегію* 1-го гравця. Якщо він обирає хід i=1 з вірогідністю x, то його виграш v буде рівним:

$$2x-(1-x) \text{ при } j=1, \quad -x+(1-x) \text{ при } j=2.$$

Значення x^* знаходимо з умови

$$2x^*-(1-x^*)=-x^*+(1-x^*),$$

звідки отримуємо x^*=2/5=0.4, мішану стратегію 1-го гравця (2/5; 3/5) і його гарантований виграш: v=2x0.4-(1-0.4)=0.2.

Застосовуючи *стратегію загрози*, 1-й гравець рахує виграш 2-го гравця w, який буде рівним:

$$x-(1-x) \text{ при } j=1, \quad -x+2(1-x) \text{ при } j=2.$$

Значення x^* знаходимо з умови

$$x^*-(1-x^*)=-x^*+2(1-x^*),$$

звідки отримуємо x^*=3/5=0.6, мішану стратегію 1-го гравця (3/5; 2/5) і виграш 2-го гравця у будь-якому випадку: w=0.6-(1-0.6)=0.2.

Таким чином, застосовуючи максимінну стратегію, 1-й гравець може **гарантувати собі** виграш, рівний 1/5; застосовуючи стратегію загрози, він може бути впевненим, що **2-й гравець** отримає **не більше** 1/5.

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Задачі прийняття рішень в умовах невизначеності близькі за ідеями та методами до теорії ігор, основною відмінністю є відсутність конфліктного забарвлення – ніхто нікому не протидіє, але наявний елемент невизначеності. Отже, невідомі умови операції залежать не від свідомого суперника, а від об'єктивної реальності («природи»), яка є байдужою інстанцією з невідомою поведінкою. Гра з природою подається матрицею, але відсутність протидії робить ситуацію якісно іншою.

Найпростішим випадком є такий, коли одна зі стратегій гравця А домінує всі інші його стратегії, тоді вибір можна звузити, виключивши з розгляду всі доміновані й еквівалентні стратегії гравця А. Окрім того, бажано ввести такі показники, які відображали б вдалість або не вдалість вибору тієї чи іншої стратегії в конкретній ситуації. З цієї метою вводять поняття **ризику** як різниці між виграшем, який можна було б отримати, якщо б ми знали умови природи (її стратегію Π_j), та виграшем, який ми отримаємо, не знаючи їх та обираючи стратегію A_i,

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij}, \text{ де } \beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Ризик – це плата за відсутність інформації, і тому бажано його мінімізувати. Отже, маємо 2 задачі: в одній необхідно отримати максимальний виграш, в іншій – мінімізувати ризик.

Найпростішим випадком невизначеності є **«доброякісна» стохастична** невизначеність. У цьому випадку стани природи характеризують вірогідностями їх виникнення $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, а оптимальною стратегією A_k буде та, для якої $k = \arg\max\limits_{i \in \underline{1,m}} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$, тобто критерій $Q = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \Rightarrow \max$, $i = \overline{1,m}$.

Відповідний критерій для ризику у випадку стохастичної невизначеності буде $R = \sum\limits_{j=1}^{n} r_{ij} p_j \Rightarrow \min$, $i = \overline{1,m}$.

Нехай тепер ймовірності природи існують, але невідомі нам.

Згідно з **критерієм Лапласа**, всі стани природи вважають рівноймовірними. Однак застосовувати його в більшості випадків не рекомендують, бо часто апріорі відомо, як відрізняються вірогідності, тоді при можливості варто провести експертне опитування або зібрати інформацію в результаті проведення декількох ігор з природою.

Якщо ж невизначеність «погана», якщо вірогідностей природи взагалі не існує або вони не піддаються навіть приблизній оцінці, то застосовують такі критерії.

Максимінний критерій Вальда (В). Згідно нього гру з природою ведуть як гру з агресивним та розумним суперником і обирають стратегію A_k, для якої $k = \arg\max\limits_{i \in \underline{1,m}} (\min\limits_{j \in \underline{1,n}} a_{ij})$. Це позиція крайнього песимізму і стосовно природи є перестрахувальною.

Критерій мінімального ризику Севіджа (С). Він теж є вкрай песимістичним, але при виборі стратегії орієнтує на мінімальний ризик. Як оптимальну вибирають стратегію A_k, для якої величина ризику в найгірших умовах мінімальна: $k = \arg\min\limits_{i \in \underline{1,m}} (\max\limits_{j \in \underline{1,n}} r_{ij})$.

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца (H). Він рекомендує при виборі розв'язку не орієнтуватись ні на песимізм, ні на оптимізм, і має вигляд:

$$H_i = \lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}, \; i = \overline{1,m}, \; \Rightarrow \max,$$

де $0 \le \lambda \le 1$ – коефіцієнт песимізму, якщо він рівний 1, то отримаємо критерій крайнього песимізму (Вальда).

Приклад 7.13. *Гра з природою*.

Задана матриця гри з природою:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2

Побудувати матрицю ризиків та обрати найкращу стратегію.

Розв'язання.

Знаходимо $\beta_j = \max_i a_{ij}$:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	1	4	5	9
A_2	3	8	4	3
A_3	4	6	6	2
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	4	8	6	9

Матриця ризиків буде мати вигляд ($r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$):

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	4	1	0
A_2	1	0	2	6
A_3	0	2	0	7

Розглядаючи матрицю ризиків, стають зрозумілішими деякі риси гри з природою. Так, в другому рядку перший та останній елементи матриці виграшів рівні 3, однак ці виграші нерівноцінні щодо вдалого вибору стратегії: при стані $П_1$ ми могли виграти найбільше 4 одиниці, і вибір A_2 для цієї ситуації майже добрий. За умови стану $П_4$ природи натомість ми могли б, обравши A_1, отримати на 6 одиниць більше, тобто вибір A_2 для цієї ситуації є поганим. Тому бажано мінімізувати ризик, що супроводжує вибір рішення.

Якщо відомий розподіл вірогідностей, то розраховуємо середні виграші. Для прикладу, якщо p=(0.5, 0.2, 0.2, 0.1), то

$Q(A_1)$=0.5 x 1 + 0.2 x 4 + 0.2 x 5 + 0.1 x 9 = 3.2;

$Q(A_2)$=0.5 x 3 + 0.2 x 8 + 0.2 x 4 + 0.1 x 3 = 4.2;

$Q(A_3)$=0.5 x 4 + 0.2 x 6 + 0.2 x 6 + 0.1 x 2 = 3.6;

оптимальною буде стратегія A_2.

Згідно з **критерієм Лапласа** p=(0.25, 0.25, 0.25, 0.25), тоді

$Q(A_1)$=0.25 x (1 + 4 + 5 + 9) = 4.75;

$Q(A_2)$=0.25 x (3 + 8 + 4 + 3) = 4.5;

$Q(A_3)$=0.25 x (4 + 6 + 6 + 2) = 4.5;

стратегії A_2 та A_3 є рівноцінними, а оптимальною буде стратегія A_1.

Приклад 7.14. *Прийняття рішень в умовах невизначеності.*

Задана матриця гри з природою:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	19	30	41	49
A_2	51	38	10	20
A_3	73	18	81	11

Обрати альтернативи за критеріями Вальда, Гурвіца з $\lambda = 0.6$, Севіджа.

Розв’язання.

Знаходимо $\min\limits_j a_{ij}, \max\limits_j a_{ij}$, H_i та $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	H_i з $\lambda = 0.6$
A_1	19	30	41	49	19	49	31
A_2	51	38	10	20	10	51	26
A_3	73	18	81	11	11	81	38
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	73	38	81	49	19 (В)	81	38 (Н)

Матриця ризиків буде мати вигляд ($r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$):

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$\max r_{ij}$
A_1	54	8	40	0	54
A_2	22	0	71	29	71
A_3	0	20	0	38	38 (С)

Отже, за критерієм Вальда обираємо стратегію A_1 (max з $\min a_{ij}$), Гурвіца з $\lambda = 0.6$ – A_3 (max з H_i), Севіджа – A_3 (min з $\max r_{ij}$).