Теоретические ("малые") домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3234-M3239, весна 2018 года

Домашнее задание №1

Докажите при любых подстановках метапеременных α, β и γ:

1. $\vdash \alpha \& \beta \to \beta \& \alpha$
2. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$
3. $\vdash \alpha \& (\beta \vee \gamma) \to (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma)$
4. $\vdash \neg(\alpha \& \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta$
5. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Домашнее задание №2

В данном домашнем задании вам будет предложено доказать несколько важных лемм, используемых в теореме о полноте исчисления высказываний. Подробнее с этой теоремой можно ознакомиться в конспекте курса, глава 5. В решениях можно пользоваться всем ранее доказанным на парах и в других домашних заданиях.

1. Докажите при любых значениях метапеременных α, β:
   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
   (b) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (c) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (e) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (g) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (h) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (i) $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (j) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$
   (k) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (l) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$
   (m) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (n) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
2. Докажите, что при любых значениях метапеременной α справедливо $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
3. Докажите, что при любых списках формул Γ и Δ и при любых значениях метапеременных γ,δ,ζ если $\Gamma \vdash \gamma$, $\Delta \vdash \delta$ и $\gamma, \delta \vdash \zeta$, то $\Gamma, \Delta \vdash \zeta$
4. Докажите, что если $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$