

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3234-М3239, весна 2018 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

Докажите при любых подстановках метаварiableных α , β и γ :

1. $\vdash \alpha \& \beta \rightarrow \beta \& \alpha$
2. $\vdash \alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$
3. $\vdash \alpha \& (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma)$
4. $\vdash \neg(\alpha \& \beta) \rightarrow \neg \alpha \vee \neg \beta$
5. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$

Домашнее задание №2: «теорема о полноте исчисления высказываний»

В данном домашнем задании вам будет предложено доказать несколько важных лемм, используемых в теореме о полноте исчисления высказываний. Подробнее с этой теоремой можно ознакомиться в конспекте курса, глава 5. В решениях можно пользоваться всем ранее доказанным на парах и в других домашних заданиях.

1. Докажите при любых значениях метаварiableных α , β :

- (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
- (b) $\neg \alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
- (c) $\alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
- (d) $\neg \alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
- (e) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
- (f) $\neg \alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
- (g) $\alpha, \neg \beta \vdash \alpha \vee \beta$
- (h) $\neg \alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
- (i) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (j) $\alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
- (k) $\neg \alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (l) $\neg \alpha, \neg \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (m) $\neg \alpha \vdash \neg \alpha$
- (n) $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$

2. Докажите, что при любых значениях метаварiableной α справедливо $\vdash \alpha \vee \neg \alpha$
3. Докажите, что при любых списках формул Γ и Δ и при любых значениях метаварiableных γ, δ, ζ если $\Gamma \vdash \gamma$, $\Delta \vdash \delta$ и $\gamma, \delta \vdash \zeta$, то $\Gamma, \Delta \vdash \zeta$
4. Докажите, что если $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg \rho \vdash \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$

Домашнее задание №3: «интуиционистское исчисление высказываний»

Введём обозначение: нижним индексом у «турникета» будем указывать логику, в которой проводится доказательство. Если высказывание α доказуемо в интуиционистской логике, будем писать $\vdash_i \alpha$, если в классической — $\vdash_k \alpha$.

1. Напомним, как на лекции определялась оценка высказываний интуиционистского исчисления на топологическом пространстве $\langle X, \Omega \rangle$:

$$\begin{aligned}\llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \text{int}(c(\llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket) \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \text{int}(c(\llbracket \alpha \rrbracket))\end{aligned}$$

Также, положим, что высказывание α истинно, если $\llbracket \alpha \rrbracket = X$ (т.е. любое доказуемое высказывание неизбежно имеет оценку, равную всему пространству). Докажите, что так определённая оценка корректна.

2. Докажите теорему Гливенко: $\vdash_K \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_I \neg\neg\alpha$. Чтобы это сделать, сперва докажите три вспомогательных утверждения:
 - (a) $\vdash_I \neg\neg\alpha$, если α — некоторая аксиома интуиционистского исчисления высказываний.
 - (b) При любом α выполнено $\vdash_I \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
 - (c) При любых α и β , если $\vdash_I \neg\neg\alpha$ и $\vdash_I \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, то $\vdash_I \neg\neg\beta$
3. Покажите с помощью опровергающего примера, что в интуиционистской логике не выполнено:
 - (a) $\vdash_I \neg\neg P \rightarrow P$
 - (b) $\vdash_I ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ («закон Пирса»)
4. (Задача Куратовского) Будем применять к множеству в некоторой топологии различные последовательности операций int и cl и смотреть на получившиеся результаты. Некоторые множества будут совпадать: скажем, всегда $\text{int}A = \text{int}(\text{int}A)$, а некоторые будут различны. Сколько вообще возможно получить различных множеств таким способом?

Классное-домашнее задание №4: «Алгебры Гейтинга и Линденбаума»

Прежде чем приступить к формулировке заданий, напомним некоторые определения с лекций. Мы рассматриваем интуиционистское исчисление высказываний, пусть все высказывания этого исчисления образуют множество F .

1. Будем писать $\alpha \sqsubseteq^* \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.
2. Будем писать $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$
3. Пусть задано некоторое отношение эквивалентности R , тогда имеют место следующие определения:
 - $[\alpha]_R = \{\beta \in F \mid R(\alpha, \beta)\}$. Нижний индекс у квадратных скобок мы будем опускать, если ясно, о каком отношении идёт речь.
 - (фактор-множество) $F/R = \{[\alpha]_R \mid \alpha \in F\}$.
4. Рассмотрим фактор-множество F/\approx . Будем писать $[\alpha]_\approx \sqsubseteq [\beta]_\approx$, если $\alpha_1 \sqsubseteq^* \beta_1$ при всех $\alpha_1 \in [\alpha]_\approx$ и $\beta_1 \in [\beta]_\approx$.
5. Дистрибутивная решётка — решётка, в которой при любых значениях a , b и c выполнено $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
6. Импликативная решётка — решётка, в которой для любых элементов a и b определена операция псевдодополнения $(a \rightarrow b = \max\{c \mid a \cdot c \leq b\})$
7. Алгебра Гейтинга — импликативная решётка с 0.

Задания

1. Покажите, что $[\alpha]_R = [\beta]_R$ тогда и только тогда, когда $R(\alpha, \beta)$.
2. Покажите, что $[\alpha]_R$ и $[\beta]_R$ либо совпадают, либо не пересекаются.
3. Покажите, что если при некоторых $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ выполнено $\alpha_1 \in [\alpha]_{\approx}, \beta_1 \in [\beta]_{\approx}$ и $\alpha_1 \sqsubseteq^* \beta_1$, то $[\alpha]_{\approx} \sqsubseteq [\beta]_{\approx}$.
4. Покажите, что (\sqsubseteq^*) является отношением предпорядка, а (\sqsubseteq) — отношением порядка.
5. Покажите, что F/\approx с отношением \sqsubseteq является: (а) решёткой, (б) импликативной решёткой, (в) алгеброй Гейтинга.

Домашнее задание №5: «Алгебры Гейтинга и Линденбаума, часть 2»

1. Рассмотрим некоторую модель Крипке на множестве миров W с отношением порядка \sqsubseteq . Рассмотрим топологическое пространство $\langle W, \{s \subseteq W \mid a \in s \text{ и } a \sqsubseteq b \text{ влечёт } b \in s\} \rangle$; иными словами, открытые множества — все множества, содержащие с элементом все большие его. Рассмотрим алгебру Гейтинга, построенную по данному топологическому пространству: элементы алгебры — все открытые множества, упорядоченные включением. За $\llbracket P \rrbracket$ возьмём множество всех миров, на которых переменная P вынуждена (поясните, почему это — открытое множество). Тогда покажите, что $W_k \Vdash \alpha \vee \beta$ (а также: $\alpha \& \beta, \alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha$) тогда и только тогда, когда $W_k \in \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$ (соответственно: $\llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket, \text{int}(c(\llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket), \text{int}(c(\llbracket \alpha \rrbracket))$). С использованием этого восполните все пробелы в доказательстве того, что модели Крипке — частный случай алгебр Гейтинга.
2. Из общего определения, данного на лекции, на основе операций в алгебре Гейтинга A определите формально операции $(+), (\cdot), (\rightarrow), (\sim)$ в $\Gamma(A)$.
3. Постройте опровергающие модели Крипке для следующих формул: $P \vee \neg P, ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P, (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$
4. Будем рассматривать модели Крипке, в которых отношения между мирами образуют дерево (у двух миров не бывает одного и того же потомка). Укажите формулу, для которой не существует опровергающей модели Крипке с глубиной дерева меньше 2, 3, n .
5. Покажите, что любая импликативная решётка является дистрибутивной решёткой.
6. Покажите следующие свойства алгебр Гейтинга:
 - (а) При любых a и b выполнено $a \cdot (a \rightarrow b) \leq b$.
 - (б) При любых a, b и c верно, что $a \cdot c \leq b$ влечёт $c \leq a \rightarrow b$.
 - (в) При любых a и b верно, что $a \leq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$.
 - (г) При любых a и b верно, что $b \leq a \rightarrow b$
 - (д) При любых a, b и c выполнено $a \rightarrow b \leq (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$
 - (е) При любых a, b и c выполнено $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
7. Пользуясь предыдущими пунктами, покажите, что алгебры Гейтинга являются корректными моделями ИИВ.

Домашнее задание №6: «Исчисление предикатов»

1. (Вдогонку к заданию №5) В предыдущем дз было доказано, что при любых a, b и c верно, что $a \cdot c \leq b$ влечёт $c \leq a \rightarrow b$. Справедливо ли обратное утверждение: $c \leq a \rightarrow b$ всегда влечёт $a \cdot c \leq b$? Докажите его, либо предложите контрпример.
2. Предложите формулы ϕ (и ψ при необходимости) и модель M для исчисления предикатов (формулы и модели могут быть разными для каждого случая), такие, что:
 - (а) При нарушении ограничений на свободу для подстановки некорректна аксиома 11:

$$\llbracket (\forall x. \phi) \rightarrow (\phi[x := \theta]) \rrbracket_M = \perp$$

(b) При нарушении ограничений некорректна аксиома 12:

$$\llbracket (\phi[x := \theta]) \rightarrow (\exists x.\phi) \rrbracket_M = \perp$$

(c) При нарушении ограничений на вхождение переменных некорректно правило введения квантора всеобщности: если $\vdash \psi \rightarrow \phi$, то

$$\llbracket \psi \rightarrow \forall x.\phi \rrbracket = \perp$$

(d) При нарушении ограничений на вхождение переменных некорректно правило введения квантора существования: если $\vdash \phi \rightarrow \psi$, то

$$\llbracket (\exists x.\phi) \rightarrow \psi \rrbracket = \perp$$

3. Докажите, что $(\exists x.\phi) \rightarrow \psi \vdash (\forall x.\phi) \rightarrow \psi$.

4. Докажите, что каковы бы ни были формула ϕ и переменная x , всегда выполнено $\phi \vdash \forall x.\phi$.

5. Чтобы доказать теорему о дедукции для исчисления предикатов, мы следуем тому же принципу, что и в исчислении высказываний: из доказательства $\delta_1, \dots, \delta_n$ строим схему доказательства $\alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$, в которой затем последовательно заполняем все «дыры».

При заполнении дыр мы разбираемся, как получено текущее высказывание δ_k — является ли оно аксиомой, предположением α или результатом применения правил.

Если речь идёт про первые два случая, они доказываются идентично исчислению высказываний. Однако, в исчислении предикатов используются два новых правила, для которых в исчислении высказываний не было аналогов. В данном задании требуется построить недостающие доказательства для этих правил.

Докажите, что если в условиях теоремы о дедукции для предикатов мы уже построили из доказательства $\delta_1, \dots, \delta_{k-1}$ доказательство $\dots, \alpha \rightarrow \delta_1, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{k-1}$, то:

(a) если δ_k получено по правилу введения всеобщности, мы можем достроить недостающие шаги и доказать $\alpha \rightarrow \delta_k$;

(b) то же справедливо для правила введения существования.

6. Рассмотрим следующие четыре формулы: $\forall x.\forall y.\phi$, $\forall x.\exists y.\phi$, $\exists x.\forall y.\phi$, $\exists x.\exists y.\phi$. Какие из них следуют из каких? Для каждой пары предложите либо доказательство в исчислении предикатов, либо контрпример.

7. Рассмотрим формулы $\exists x.\forall y.\phi$ и $\forall y.\exists x.\phi$. Следует ли какая-нибудь из этих формул из другой? Для каждой пары предложите либо доказательство в исчислении предикатов, либо контрпример.

Домашнее задание №7: Теорема Гёделя о полноте

Для доказательства теоремы Гёделя о полноте нам потребуется для произвольной формулы F уметь найти такую формулу G , что $F \vdash G$, и в G все кванторы находятся снаружи, т.е. например $\forall x \exists z \forall y (P(x, f(y)) \rightarrow H(z, g(x, y, z)))$ — подходящий нам вид. Приведение к такому виду мы будем делать в три этапа.

1. На первом этапе выкинем все импликации, для этого докажем следующую лемму:

(a) $\phi \rightarrow \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$

q

2. На втором этапе научимся строить доказательство $F \vdash F'$, где в F' знак отрицания может находиться только непосредственно перед предикатом. Здесь нам потребуется доказать следующую парочку лемм:

(a) $\neg(\phi \vee \psi) \vdash (\neg\phi) \wedge (\neg\psi)$

(b) $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash (\neg\phi) \vee (\neg\psi)$

(c) $\neg\neg\phi \vdash \phi$

(d) $\neg(\exists x.\phi) \vdash \forall x.\neg\phi$

(e) $\neg(\forall x.\phi) \vdash \exists x.\neg\phi$

3. На последнем этапе вынесем кванторы наружу. Для этого нам потребуется ещё несколько лемм.
Замечание: здесь мы считаем, что если переменная x под квантором, то она не входит свободно во вторую часть формулы. Например: если формула имеет вид $(\forall x.\phi) \vee \psi$, то мы всегда можем преобразовать её в формулу $(\forall y.\phi[x := y]) \vee \psi$, где y не входит свободно в ψ

- (a) $(\exists x.\phi) \vee \psi \vdash \exists x.(\phi \vee \psi)$
- (b) $(\forall x.\phi) \vee \psi \vdash \forall x.(\phi \vee \psi)$
- (c) $(\exists x.\phi) \wedge \psi \vdash \exists x.(\phi \wedge \psi)$
- (d) $(\forall x.\phi) \wedge \psi \vdash \forall x.(\phi \wedge \psi)$
- (e) $\phi \vee (\exists x.\psi) \vdash \exists x.(\phi \vee \psi)$
- (f) $\phi \vee (\forall x.\psi) \vdash \forall x.(\phi \vee \psi)$
- (g) $\phi \wedge (\exists x.\psi) \vdash \exists x.(\phi \wedge \psi)$
- (h) $\phi \wedge (\forall x.\psi) \vdash \forall x.(\phi \wedge \psi)$

Домашнее задание №8: Формальная арифметика и рекурсивные функции

- Докажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными: сложение, умножение, ограниченное вычитание единицы (ограниченное потому, что $0 - 1 = 0$), ограниченное вычитание, целочисленное деление, остаток от деления, частичный логарифм ($\text{plog}_a(x)$ — это $\max\{t \in \mathbb{N}_0 \mid x \leq a^t\}$).
- Постройте в формальной арифметике доказательства $2 + 2 = 4$, $a = a$, $a + 1 = a'$, $\exists x.a + x = a$, $\neg \exists x.1 + x = 0$.