Теоретические («малые») домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3234-M3239, весна 2018 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

Докажите при любых подстановках метапеременных α, β и γ:

1. $\vdash \alpha \& \beta \rightarrow \beta \& \alpha$
2. $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$
3. $\vdash \alpha \& (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma)$
4. $\vdash \neg(\alpha \& \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$
5. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Домашнее задание №2: «теорема о полноте исчисления высказываний»

В данном домашнем задании вам будет предложено доказать несколько важных лемм, используемых в теореме о полноте исчисления высказываний. Подробнее с этой теоремой можно ознакомиться в конспекте курса, глава 5. В решениях можно пользоваться всем ранее доказанным на парах и в других домашних заданиях.

1. Докажите при любых значениях метапеременных α, β:
   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
   (b) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (c) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (e) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (g) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (h) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (i) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (j) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
   (k) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (l) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (m) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (n) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
2. Докажите, что при любых значениях метапеременной α справедливо $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
3. Докажите, что при любых списках формул Γ и Δ и при любых значениях метапеременных γ,δ,ζ если $\Gamma \vdash \gamma$, $\Delta \vdash \delta$ и $\gamma, \delta \vdash \zeta$, то $\Gamma, \Delta \vdash \zeta$
4. Докажите, что если $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$

Домашнее задание №3: «интуиционистское исчисление высказываний»

Введём обозначение: нижним индексом у «турникета» будем указывать логику, в которой проводится доказательство. Если высказывание α доказуемо в интуиционистской логике, будем писать $\vdash_{\text{И}} \alpha$, если в классической — $\vdash_{\text{К}} \alpha$.

1. Напомним, как на лекции определялась оценка высказываний интуиционистского исчисления на топологическом пространстве $\langle X, \Omega \rangle$:

   $[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$
   $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$
   $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] = \mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])$
   $[\![\neg\alpha]\!] = \mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]))$

   Также, положим, что высказывание α истинно, если $[\![\alpha]\!] = X$ (т.е. любое доказуемое высказывание неизбежно имеет оценку, равную всему пространству). Докажите, что так опеределённая оценка корректна.

2. Докажите теорему Гливенко: $\vdash_{\text{К}} \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$. Чтобы это сделать, сперва докажите три вспомогательных утверждения:

   (a) $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$, если α — некоторая аксиома интуиционистского исчисления высказываний.

   (b) При любом α выполнено $\vdash_{\text{И}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$

   (c) При любых α и β, если $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\text{И}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, то $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\beta$

3. Покажите с помощью опровергающего примера, что в интуиционистской логике не выполнено:

   (a) $\vdash_{\text{И}} \neg\neg P \rightarrow P$

   (b) $\vdash_{\text{И}} ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ («закон Пирса»)

4. (Задача Куратовского) Будем применять к множеству в некоторой топологии различные последовательности операций int и cl и смотреть на получившиеся результаты. Некоторые множества будут совпадать: скажем, всегда $\mathrm{int}A = \mathrm{int}(\mathrm{int}A)$, а некоторые будут различны. Сколько вообще возможно получить различных множеств таким способом?

Классное-домашнее задание №4: «Алгебры Гейтинга и Линденбаума»

Прежде чем приступить к формулировке заданий, напомним некоторые определения с лекций. Мы рассматриваем интуиционистское исчисление высказываний, пусть все высказывания этого исчисления образуют множество F.

1. Будем писать $\alpha \sqsubseteq^* \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.

2. Будем писать $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$

3. Пусть задано некоторое отношение эквивалентности R, тогда имеют место следующие определения:

   - $[\alpha]_R = \{\beta \in F \mid R(\alpha, \beta)\}$. Нижний индекс у квадратных скобок мы будем опускать, если ясно, о каком отношении идёт речь.
   - *(фактор-множество)* $F/R = \{[\alpha]_R \mid \alpha \in F\}$.

4. Рассмотрим фактор-множество $F/{\approx}$. Будем писать $[\alpha]_{\approx} \sqsubseteq [\beta]_{\approx}$, если $\alpha_1 \sqsubseteq^* \beta_1$ при всех $\alpha_1 \in [\alpha]_{\approx}$ и $\beta_1 \in [\beta]_{\approx}$.

5. Дистрибутивная решётка — решётка, в которой при любых значениях a, b и c выполнено $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

6. Импликативная решётка — решётка, в которой для любых элементов a и b определена операция псевдодополнения ($a \rightarrow b = \max\{c \mid a \cdot c \leq b\}$)

7. Алгебра Гейтинга — импликативная решётка с 0.

Задания

1. Покажите, что $[\alpha]_R = [\beta]_R$ тогда и только тогда, когда $R(\alpha, \beta)$.
2. Покажите, что $[\alpha]_R$ и $[\beta]_R$ либо совпадают, либо не пересекаются.
3. Покажите, что если при некоторых α, α_1, β, β_1 выполнено $\alpha_1 \in [\alpha]_\approx$, $\beta_1 \in [\beta]_\approx$ и $\alpha_1 \sqsubseteq^* \beta_1$, то $[\alpha]_\approx \sqsubseteq [\beta]_\approx$.
4. Покажите, что $(\sqsubseteq^*)$ является отношением предпорядка, а $(\sqsubseteq)$ — отношением порядка.
5. Покажите, что $F/\approx$ с отношением $\sqsubseteq$ является: (а) решёткой, (б) импликативной решёткой, (в) алгеброй Гейтинга.

Домашнее задание №5: «Алгебры Гейтинга и Линденбаума, часть 2»

1. Рассмотрим некоторую модель Крипке на множестве миров W с отношением порядка $\sqsubseteq$. Рассмотрим топологическое пространство $\langle W, \{s \subseteq W \mid a \in s \text{ и } a \sqsubseteq b \text{ влечёт } b \in s\}\rangle$; иными словами, открытые множества — все множества, содержащие с элементом все большие его. Рассмотрим алгебру Гейтинга, построенную по данному топологическому пространству: элементы алгебры — все открытые множества, упорядоченные включением. За $[\![P]\!]$ возьмём множество всех миров, на которых переменная P вынуждена (поясните, почему это — открытое множество). Тогда покажите, что $W_k \Vdash \alpha \vee \beta$ (а также: $\alpha \& \beta$, $\alpha \to \beta$, $\neg\alpha$) тогда и только тогда, когда $W_k \in [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$ (соответственно: $[\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$, $\mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])$, $\mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]))$). С использованием этого восполните все пробелы в доказательстве того, что модели Крипке — частный случай алгебр Гейтинга.
2. Из общего определения, данного на лекции, на основе операций в алгебре Гейтинга A определите формально операции $(+)$, $(\cdot)$, $(\to)$, $(\sim)$ в $\Gamma(A)$.
3. Постройте опровергающие модели Крипке для следующих формул: $P \vee \neg P$, $((P \to Q) \to P) \to P$, $(P \to Q) \vee (P \to \neg Q)$
4. Будем рассматривать модели Крипке, в которых отношения между мирами образуют дерево (у двух миров не бывает одного и того же потомка). Укажите формулу, для которой не существует опровергающей модели Крипке с глубиной дерева меньше 2, 3, n.
5. Покажите, что любая импликативная решётка является дистрибутивной решёткой.
6. Покажите следующие свойства алгебр Гейтинга:
   (a) При любых a и b выполнено $a \cdot (a \to b) \le b$.
   (b) При любых a, b и c верно, что $a \cdot c \le b$ влечёт $c \le a \to b$.
   (c) При любых a и b верно, что $a \le b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$.
   (d) При любых a и b верно, что $b \le a \to b$
   (e) При любых a, b и c выполнено $a \to b \le (a \to (b \to c)) \to (a \to c)$
   (f) При любых a, b и c выполнено $a \to c \le (b \to c) \to (a + b \to c)$
7. Пользуясь предыдущими пунктами, покажите, что алгебры Гейтинга являются корректными моделями ИИВ.

Домашнее задание №6: «Исчисление предикатов»

1. (Вдогонку к заданию №5) В предыдущем дз было доказано, что при любых a, b и c верно, что $a \cdot c \le b$ влечёт $c \le a \to b$. Справедливо ли обратное утверждение: $c \le a \to b$ всегда влечёт $a \cdot c \le b$? Докажите его, либо предложите контрпример.
2. Предложите формулы ϕ (и ψ при необходимости) и модель M для исчисления предикатов (формулы и модели могут быть разными для каждого случая), такие, что:
   (a) При нарушении ограничений на свободу для подстановки некорректна аксиома 11:
$$[\![(\forall x.\phi) \to (\phi[x := \theta])]\!]_M = \text{Л}$$

(b) При нарушении ограничений некорректна аксиома 12:

$$[\![(\phi[x := \theta]) \to (\exists x.\phi)]\!]_M = \text{Л}$$

(c) При нарушении ограничений на вхождение переменных некорректно правило введения квантора всеобщности: если $\vdash \psi \to \phi$, то

$$[\![\psi \to \forall x.\phi]\!] = \text{Л}$$

(d) При нарушении ограничений на вхождение переменных некорректно правило введения квантора существования: если $\vdash \phi \to \psi$, то

$$[\![(\exists x.\phi) \to \psi]\!] = \text{Л}$$

3. Докажите, что $(\exists x.\phi) \to \psi \vdash (\forall x.\phi) \to \psi$.

4. Докажите, что каковы бы ни были формула ϕ и переменная x, всегда выполнено $\phi \vdash \forall x.\phi$.

5. Чтобы доказать теорему о дедукции для исчисления предикатов, мы следуем тому же принципу, что и в исчислении высказываний: из доказательства $\delta_1, \ldots, \delta_n$ строим схему доказательства $\alpha \to \delta_1, \ldots, \alpha \to \delta_n$, в которой затем последовательно заполняем все «дыры».

   При заполнении дыр мы разбираемся, как получено текущее высказывание δ_k — является ли оно аксиомой, предположением α или результатом применения правил.

   Если речь идёт про первые два случая, они доказываются идентично исчислению высказываний. Однако, в исчислении предикатов используются два новых правила, для которых в исчислении высказываний не было аналогов. В данном задании требуется построить недостающие доказательства для этих правил.

   Докажите, что если в условиях теоремы о дедукции для предикатов мы уже построили из доказательства $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ доказательство $\ldots, \alpha \to \delta_1, \ldots, \alpha \to \delta_{k-1}$, то:

   (a) если δ_k получено по правилу введения всеобщности, мы можем достроить недостающие шаги и доказать $\alpha \to \delta_k$;

   (b) то же справедливо для правила введения существования.

6. Рассмотрим следующие четыре формулы: $\forall x.\forall y.\phi$, $\forall x.\exists y.\phi$, $\exists x.\forall y.\phi$, $\exists x.\exists y.\phi$. Какие из них следуют из каких? Для каждой пары предложите либо доказательство в исчислении предикатов, либо контрпример.

7. Рассмотрим формулы $\exists x.\forall y.\phi$ и $\forall y.\exists x.\phi$. Следует ли какая-нибудь из этих формул из другой? Для каждой пары предложите либо доказательство в исчислении предикатов, либо контрпример.

Домашнее задание №7: Теорема Гёделя о полноте

Для доказательства теоремы Гёделя о полноте нам потребуется для произвольной формулы F уметь находить такую формулу G, что $F \vdash G$, и в G все кванторы находятся снаружи, т.е. например $\forall x \exists z \forall y (P(x, f(y)) \to H(z, g(x, y, z)))$ — подходящий нам вид. Приведение к такому виду мы будем делать в три этапа.

1. На первом этапе выкинем все импликации, для этого докажем следующую лемму:

   (a) $\phi \to \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$

   q

2. На втором этапе научимся строить доказательство $F \vdash F'$, где в F' знак отрицания может находиться только непосредственно перед предикатом. Здесь нам потребуется доказать следующую парочку лемм:

   (a) $\neg(\phi \vee \psi) \vdash (\neg\phi) \wedge (\neg\psi)$
   (b) $\neg(\phi \wedge \psi) \vdash (\neg\phi) \vee (\neg\psi)$
   (c) $\neg\neg\phi \vdash \phi$
   (d) $\neg(\exists x.\phi) \vdash \forall x.\neg\phi$
   (e) $\neg(\forall x.\phi) \vdash \exists x.\neg\phi$

3. На последнем этапе вынесем кванторы наружу. Для этого нам потребуется ещё несколько лемм. *Замечание: здесь мы считаем, что если переменная x под квантором, то она не входит свободно во вторую часть формулы. Например: если формула имеет вид $(\forall x.\phi) \vee \psi$, то мы всегда можем преобразовать её в формулу $(\forall y.\phi[x := y]) \vee \psi$, где y не входит свободно в ψ*

   (a) $(\exists x.\phi) \vee \psi \vdash \exists x.(\phi \vee \psi)$

   (b) $(\forall x.\phi) \vee \psi \vdash \forall x.(\phi \vee \psi)$

   (c) $(\exists x.\phi) \wedge \psi \vdash \exists x.(\phi \wedge \psi)$

   (d) $(\forall x.\phi) \wedge \psi \vdash \forall x.(\phi \wedge \psi)$

   (e) $\phi \vee (\exists x.\psi) \vdash \exists x.(\phi \vee \psi)$

   (f) $\phi \vee (\forall x.\psi) \vdash \forall x.(\phi \vee \psi)$

   (g) $\phi \wedge (\exists x.\psi) \vdash \exists x.(\phi \wedge \psi)$q

   (h) $\phi \wedge (\forall x.\psi) \vdash \forall x.(\phi \wedge \psi)$

Домашнее задание №8: Формальная арифметика и рекурсивные функции

1. Докажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными: сложение, умножение, ограниченное вычитание единицы (ограниченное потому, что $0 - 1 = 0$), ограниченное вычитание, целочисленное деление, остаток от деления, частичный логарифм ($\mathrm{plog}_a(x)$ — это $\max\{t \in \mathbb{N}_0 \mid x \,\vdots\, a^t\}$).

2. Постройте в формальной арифметике доказательства $2+2 = 4$, $2 \cdot 2 = 4$, $a = a$, $a+1 = a'$, $\exists x.a+x = a$, $\neg\exists x.1 + x = 0$.

Домашнее задание №9: Формальная арифметика, гёделева нумерация

1. Пусть $a \le b$ обозначает $\exists c.a+c = b$. Тогда в формальной арифметике докажите следующие формулы:

   (a) $a = b \to a + c = b + c$

   (b) $s = r \to t \cdot s = t \cdot r$

   (c) $a = c \to a \le c$

   (d) $a \le c \to a \le c'$

   (e) $a = b \& c = 0 \to a + c = b + 0$

   (f) $a = b \& c = \overline{1} \to a + c = b + \overline{1}$

   (g) $a = b \& c = d \to a + c = b + d$

   (h) $s + t = r + t \to s = r$

   (i) $t + s = 0 \to t = 0 \& s = 0$

   (j) $t + s = \overline{1} \to (t = 0 \& s = \overline{1}) \vee (t = \overline{1} \& s = 0)$

   (k) $(\neg t = 0) \to (s \cdot t = 0 \to s = 0)$

2. Напишите рекурсивную функцию `Pair`, строящую по двум числам a и b их упорядоченную пару $2^a \cdot 3^b$.

3. Напишите рекурсивную функцию, берущую первый и второй элемент упорядоченной пары: $fst(2^a \cdot 3^b) = a$, $snd(2^a \cdot 3^b) = b$.

4. Напишите рекурсивную функцию `Num`, строящую по натуральному числу n гёделев номер его записи в формальной арифметике ($\ulcorner \overline{n} \urcorner$).

5. Напишите рекурсивную функцию, вычисляющую длину строчки по её гёделеву номеру.