Теоретические («малые») домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3234-M3239, весна 2018 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

Докажите при любых подстановках метапеременных α, β и γ:

1. $\vdash \alpha \& \beta \rightarrow \beta \& \alpha$
2. $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$
3. $\vdash \alpha \& (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma)$
4. $\vdash \neg(\alpha \& \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$
5. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Домашнее задание №2: «теорема о полноте исчисления высказываний»

В данном домашнем задании вам будет предложено доказать несколько важных лемм, используемых в теореме о полноте исчисления высказываний. Подробнее с этой теоремой можно ознакомиться в конспекте курса, глава 5. В решениях можно пользоваться всем ранее доказанным на парах и в других домашних заданиях.

1. Докажите при любых значениях метапеременных α, β:
   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
   (b) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (c) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (e) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (g) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (h) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (i) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (j) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
   (k) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (l) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (m) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (n) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
2. Докажите, что при любых значениях метапеременной α справедливо $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
3. Докажите, что при любых списках формул Γ и Δ и при любых значениях метапеременных γ,δ,ζ если $\Gamma \vdash \gamma$, $\Delta \vdash \delta$ и $\gamma, \delta \vdash \zeta$, то $\Gamma, \Delta \vdash \zeta$
4. Докажите, что если $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$

Домашнее задание №3: «интуиционистское исчисление высказываний»

Введём обозначение: нижним индексом у «турникета» будем указывать логику, в которой проводится доказательство. Если высказывание α доказуемо в интуиционистской логике, будем писать $\vdash_{\text{И}} \alpha$, если в классической — $\vdash_{\text{К}} \alpha$.

1. Напомним, как на лекции определялась оценка высказываний интуиционистского исчисления на топологическом пространстве $\langle X, \Omega \rangle$:

   $$
   \begin{aligned}
   &[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!] \\
   &[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!] \\
   &[\![\alpha \to \beta]\!] = \mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!]) \\
   &[\![\neg\alpha]\!] = \mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]))
   \end{aligned}
   $$

   Также, положим, что высказывание α истинно, если $[\![\alpha]\!] = X$ (т.е. любое доказуемое высказывание неизбежно имеет оценку, равную всему пространству). Докажите, что так опеределённая оценка корректна.

2. Докажите теорему Гливенко: $\vdash_{\text{К}} \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$. Чтобы это сделать, сперва докажите три вспомогательных утверждения:

   (a) $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$, если α — некоторая аксиома интуиционистского исчисления высказываний.

   (b) При любом α выполнено $\vdash_{\text{И}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$

   (c) При любых α и β, если $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\text{И}} \neg\neg(\alpha \to \beta)$, то $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\beta$

3. Покажите с помощью опровергающего примера, что в интуиционистской логике не выполнено:

   (a) $\vdash_{\text{И}} \neg\neg P \to P$

   (b) $\vdash_{\text{И}} ((P \to Q) \to P) \to P$ («закон Пирса»)

4. (Задача Куратовского) Будем применять к множеству в некоторой топологии различные последовательности операций int и cl и смотреть на получившиеся результаты. Некоторые множества будут совпадать: скажем, всегда $\mathrm{int}A = \mathrm{int}(\mathrm{int}A)$, а некоторые будут различны. Сколько вообще возможно получить различных множеств таким способом?