

Домашние задания по курсу «Математическая логика»

ИТМО, группы М3234..М3239
Весна 2018 г.

Общие замечания

Для всех программ кодировка входных и выходных файлов должна быть UTF8. Задания подаются в систему Яндекс.контест, подробные описания — по ссылке из README.md. Для компиляции решения требуется использования мэйкфайлов, краткое описание принципов построения мэйкфайлов находится в файле make.pdf из данного репозитория.

Задача 0. Разбор выражения

Стоимость: 0 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 0 баллов

Данная задача разобрана, решения её приведены (см. README.md), однако, мы крайне рекомендуем написать своё её решение по двум причинам: (а) разбор высказываний можно будет переиспользовать в других задачах; (б) можно протестировать среду исполнения на Яндексе.

На вход программе (в файле `input.txt`) подаётся выражение в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}\langle \text{файл} \rangle &::= \langle \text{выражение} \rangle \\ \langle \text{выражение} \rangle &::= \langle \text{дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle \text{'->'} \langle \text{выражение} \rangle \\ \langle \text{дизъюнкция} \rangle &::= \langle \text{конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle \text{'|'} \langle \text{конъюнкция} \rangle \\ \langle \text{конъюнкция} \rangle &::= \langle \text{отрицание} \rangle \mid \langle \text{конъюнкция} \rangle \text{'\&'} \langle \text{отрицание} \rangle \\ \langle \text{отрицание} \rangle &::= (\text{'A'} \dots \text{'Z'}) \{ (\text{'A'} \dots \text{'Z'} \mid \text{'0'} \dots \text{'9'})^* \mid \text{'!'} \langle \text{отрицание} \rangle \mid (\text{'('} \langle \text{выражение} \rangle \text{'})'}\end{aligned}$$

Пробелы, символы табуляции и переноса строки должны игнорироваться. Символ `'|'` имеет ASCII-код 124₁₀.

Написать программу, разбирающую выражение и строящую его дерево разбора, и выводящую полученное дерево в файл `output.txt` в следующей грамматике.

$$\begin{aligned}\langle \text{файл} \rangle &::= \langle \text{вершина} \rangle \\ \langle \text{вершина} \rangle &::= (\text{'('} \langle \text{знак} \rangle \text{' , ' } \langle \text{вершина} \rangle \text{' , ' } \langle \text{вершина} \rangle \text{') '}) \\ &\quad \mid (\text{'('} \langle \text{вершина} \rangle \text{') '}) \\ &\quad \mid (\text{'A'} \dots \text{'Z'}) \{ (\text{'A'} \dots \text{'Z'} \mid \text{'0'} \dots \text{'9'})^* \} \\ \langle \text{знак} \rangle &::= \text{'\&'} \mid \text{'|'} \mid \text{'->'}\end{aligned}$$

Пример входного файла:

P->!QQ->!R10&S|!T&U&V

Выходной файл для данного входного файла:

(->,P,(->,(!QQ),(|,(&,(!R10),S),(&,(&,(!T),U),V))))

Задача 1. Проверка вывода

ДЕДЛАЙН: 23:59, 8 апреля

Стоимость: 7 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 9 баллов

Написать программу, проверяющую вывод $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$ в исчислении высказываний на корректность. Входной файл соответствует следующей грамматике, нетерминал $\langle \text{выражение} \rangle$ определён в грамматике из задачи 0:

$$\begin{aligned}\langle \text{файл} \rangle &::= \langle \text{заголовок} \rangle \langle 'n' \{ \langle \text{выражение} \rangle \langle 'n' \}^* \\ \langle \text{заголовок} \rangle &::= [\langle \text{выражение} \rangle \{ \langle ' \rangle \langle \text{выражение} \rangle \}^*] \langle ' - ' \rangle \langle \text{выражение} \rangle\end{aligned}$$

В первой строке входного файла (заголовок) перечислены предположения γ_i (этот список может быть пустым) и доказываемое утверждение α . В последующих строках указаны формулы, составляющие вывод формулы α . Пробелы, символы табуляции и возврата каретки (ASCII-код 13₁₀) должны игнорироваться. Символ ' | ' имеет ASCII-код 124₁₀.

Результатом работы программы должен быть файл с проаннотированным текстом доказательства, где каждая строка — соответствующая строка из вывода, расширенная в соответствии с грамматикой:

$$\begin{aligned}\langle \text{строка} \rangle &::= \langle ' \rangle \langle \text{номер} \rangle \langle ' \rangle \langle \text{выражение} \rangle \langle ' \rangle \langle \text{аннотация} \rangle \langle ' \rangle \\ \langle \text{аннотация} \rangle &::= \langle \text{Сх. акс.} \rangle \langle \text{номер} \rangle \\ &| \langle \text{Предп.} \rangle \langle \text{номер} \rangle \\ &| \langle \text{М.Р.} \rangle \langle \text{номер} \rangle \langle ' , ' \rangle \langle \text{номер} \rangle \\ &| \langle \text{Не доказано} \rangle \\ \langle \text{номер} \rangle &::= \{ \langle ' 0 \dots 9 ' \rangle \}^+\end{aligned}$$

Выражение не должно содержать пробелов, номер от выражения и выражение от аннотации должны отделяться одним пробелом. Выражения в доказательстве должны нумероваться подряд натуральными числами с 1. Если выражение δ_n получено из δ_i и δ_j , где $\delta_j \equiv \delta_i \rightarrow \delta_n$ путём применения правила Modus Ponens, то аннотация должна выглядеть как 'М.Р. i, j ', обратный порядок номеров не допускается.

Ограничения

Количество строк в файле не превосходит 52000.

Размер файла не превосходит 10 мегабайт.

Пример 1:

Входной файл:

A,B | -A&B
A
B
A->B->A&B
B->A&B
A&B

Выходной файл:

(1) A (Предп. 1)
(2) B (Предп. 2)
(3) (A->(B->(A&B))) (Сх. акс. 3)
(4) (B->(A&B)) (М.Р. 3, 1)
(5) (A&B) (М.Р. 4, 2)

Пример 2:

Входной файл:

A,B | -A&B
A
B
(A->(B->(A&B)))
(B->(A&B))
(A->A)
(A&B)

Выходной файл:

(1) A (Предп. 1)
(2) B (Предп. 2)
(3) (A->(B->(A&B))) (Сх. акс. 3)
(4) (B->(A&B)) (М.Р. 3, 1)
(5) (A->A) (Не доказано)
(6) (A&B) (М.Р. 4, 2)

Пример 3:

Входной файл:

```
| -A->A
(A->A->A)->(A->(A->A)->A)->(A->A)
(A->A->A)
(A->(A->A)->A)
(A->(A->A)->A)->(A->A)
A->A
```

Выходной файл:

```
(1) (A->A->A)->(A->(A->A)->A)->A->A (Сх. акс. 2)
(2) A->A->A (Сх. акс. 1)
(3) A->(A->A)->A (Сх. акс. 1)
(4) (A->(A->A)->A)->A->A (М.Р. 1, 2)
(5) A->A (М.Р. 4, 3)
```

Пример 4:

Входной файл:

```
| -B
A->B
A
B
```

Выходной файл:

```
(1) (A->B) (Не доказано)
(2) A (Не доказано)
(3) B (М.Р. 1, 2)
```

Задача 2. Теорема о дедукции

ДЕДЛАЙН: 23:59, 15 апреля

Стоимость: 4 балла, решение на Ocaml или Haskell: 6 баллов

Написать программу, преобразующую вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Входной файл удовлетворяет грамматике из предыдущего задания, в заголовке обязательно должно присутствовать как минимум одно предположение.

Результатом работы программы должен быть текст, содержащий преобразованный вывод. Формат выходного файла совпадает с форматом входного файла. Вы можете предполагать, что входной файл содержит корректный вывод требуемой формулы.

Ограничения

Небольшие.

Пример 1:

Входной файл:

```
A, A | -A
A
```

Выходной файл:

```
A | -A->A
A->A->A
A
A->A
```

Пример 2:

Входной файл:

```
A | -B->A
A->B->A
A
B->A
```

Выходной файл:

```
| -A->B->A
A->B->A
```

Задача 3. Теорема о полноте исчисления высказываний

ДЕДЛАЙН: 23:59, 2 мая

Стоимость: 10 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 13 баллов

Будем называть формулу классического исчисления высказываний ϕ *логическим следствием* формул $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \phi$), если для любой оценки пропозициональных переменных M , такой, что $\llbracket \gamma_k \rrbracket_M = \text{И}$, выполнено $\llbracket \phi \rrbracket_M = \text{И}$. Иными словами, формула ϕ истинна всегда, когда истинны все γ_k .

Написать программу, проверяющую $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \phi$ и строящую доказательство $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \phi$ в случае успешной проверки, либо строящую контрпример в случае неуспеха.

Входной файл состоит из единственной строки:

$$[\{ \langle \text{выражение} \rangle ' , ' \}^* \langle \text{выражение} \rangle] ' | = ' \langle \text{выражение} \rangle$$

Выходной файл должен либо содержать доказательство высказывания (в формате входного файла из первого задания), либо содержать фразу, удовлетворяющую грамматике:

$$\begin{aligned} \langle \text{строка} \rangle &::= \text{'Высказывание ложно при ' } \langle \text{назначение} \rangle \{ ' , ' \langle \text{назначение} \rangle \}^* \\ \langle \text{назначение} \rangle &::= \langle \text{переменная} \rangle ' = ' (' \text{И} ' | ' \text{Л} ') \end{aligned}$$

Ограничения

Количество связок не превосходит 12 (например в выражении $A \wedge B \vdash A \vee B$ — 2 связки).
Количество различных переменных не превосходит 5.

Пример 1:

Входной файл:

$| = !A \& !B$

Выходной файл:

Высказывание ложно при $A=\text{И}, B=\text{Л}$

Пример 2:

Входной файл:

$B, W | = A \rightarrow B$

Выходной файл:

$B, W | = A \rightarrow B$
 $B \rightarrow A \rightarrow B$
 B
 $A \rightarrow B$

Задача 4. Решётки

ДЕДЛАЙН: 23:59, 20 мая

Стоимость: 6 баллов, решение на *Ocaml* или *Haskell*: 8 баллов

По заданному на вход вашей программе графу требуется установить, задаёт ли его рефлексивное и транзитивное замыкание решётку, а также, является ли она дистрибутивной, имплективной решёткой, булевой алгеброй. Гарантируется, что рефлексивное и транзитивное замыкание графа задаёт частичный порядок.

Вершины графа мы предполагаем занумерованными числами от 1 до v . Входной файл в первой строке содержит число вершин v , после чего идёт ещё v строк, по строке для каждой вершины: вершине i соответствует строка номер $i + 1$ входного файла. В каждой такой строке через пробел перечислены все такие вершины i_k , что $i \sqsubseteq i_k$. Гарантируется, что все эти строки содержат хотя бы по одной вершине.

Выходной файл должен соответствовать следующей грамматике:

$$\begin{aligned} \langle \text{выходной файл} \rangle &::= \text{'Операция ' + ' не определена: ' } \langle \text{вершина} \rangle ' + ' \langle \text{вершина} \rangle \\ &| \text{'Операция ' * ' не определена: ' } \langle \text{вершина} \rangle ' * ' \langle \text{вершина} \rangle \\ &| \text{'Нарушается дистрибутивность: ' } \langle \text{вершина} \rangle ' * (' \langle \text{вершина} \rangle ' + ' \langle \text{вершина} \rangle ') ' \end{aligned}$$

	‘Операция ’->’ не определена: ’⟨вершина⟩’->’⟨вершина⟩
	‘Не булева алгебра: ’⟨вершина⟩’+~’⟨вершина⟩
	‘Булева алгебра’

Вам следует находить самое слабое свойство (например, если граф не является решёткой, то указание на нарушение дистрибутивности будет ошибкой). Для данной задачи будем считать, что чем ниже свойство указано в данной грамматике, тем оно сильнее.

Ограничения

Количество вершин в графе не превосходит 100.

Пример 1:

Входной файл:

```
5
2 3 4
5
5
5
5
```

Выходной файл:

Нарушается дистрибутивность: 2*(3+4)

Задача 5. Опровержение формулы ИИВ

ДЕДЛАЙН: отсутствует

Стоимость: 12 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 15 баллов

На вход программе дана формула ИИВ. Требуется построить либо алгебру Гейтинга, опровергающую формулу, либо указать, что формула общезначима.

Формат входного файла — аналогично задаче 3. Формат выходного файла:

⟨выходной файл⟩ ::=	⟨задание графа⟩ ‘\n’ ⟨переменные⟩
	‘Формула общезначима’
⟨переменные⟩ ::=	⟨имя переменной⟩ ‘=’ ⟨номер вершины⟩ [‘,’ ⟨переменные⟩]

Формат задания графа соответствует формату из входного файла в задаче 4.

Формула общезначима

Ограничения

Входная формула имеет не более трёх переменных.

Пример 1:

Входной файл:

```
A|!A
```

Выходной файл:

```
3
1
1 2
1 2 3
A=2
```

Пример 2:

Входной файл:

A->A

Выходной файл:

Формула общезначима

Задача 6. Построение алгебры Гейтинга по модели Крипке

ДЕДЛАЙН: отсутствует

Стоимость: 6 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 8 баллов

На вход программе задаётся формула ИИВ и модель Крипке, опровергающая данную формулу. Требуется построить по ней алгебру Гейтинга, также опровергающую формулу.

Модель Крипке задаётся в следующем формате:

$$\begin{aligned}\langle \text{входной файл} \rangle &::= \langle \text{формула} \rangle \backslash \mathfrak{n} \{ \langle \text{отступ} \rangle * [\langle \text{переменные} \rangle] \backslash \mathfrak{n} \}^* \\ \langle \text{переменные} \rangle &::= \langle \text{имя} \rangle [\langle \text{переменные} \rangle]\end{aligned}$$

В данной модели миры образуют лес. Каждая строка входного файла описывает некоторый мир, указанные после звёздочки переменные вынуждены в соответствующем мире.

Отступ перед звёздочкой содержит только пробелы. Их количество указывает на вложенность соответствующего миру узла в дереве — подобно тому, как это делается в Питоне. Однако, в отличие от Питона, отступ может возрастать только на 1. А именно, пусть каждый мир W_i указан в строке i и имеет отступ I_i , тогда мир W_j — непосредственный потомок W_i , если выполнены все следующие условия:

1. описание мира W_j идёт ниже по тексту: $j > i$;
2. его отступ ровно на 1 больше: $I_j = I_i + 1$
3. между строками i и j нет описаний с меньшим отступом: нет $k (i < k < j)$, что $I_i \leq I_k$.

Гарантируется, что входной файл корректен (соответствует правилам, указанным выше). Однако, не гарантируется, что заданное на вход множество миров с указанием вынужденных в них переменных действительно задаёт модель Крипке и что формула действительно ею опровергается.

Формат выходного файла аналогичен формату из задачи 5:

$$\begin{aligned}\langle \text{выходной файл} \rangle &::= \langle \text{задание графа} \rangle \backslash \mathfrak{n} \langle \text{переменные} \rangle \\ &\quad | \quad \text{‘Не модель Крипке’} \\ &\quad | \quad \text{‘Не опровергает формулу’} \\ \langle \text{переменные} \rangle &::= \langle \text{имя переменной} \rangle = \langle \text{номер вершины} \rangle [\langle \text{переменные} \rangle]\end{aligned}$$

Ограничения

Входной файл содержит описание не более 4 миров и не более 4 переменных.

Пример 1:

Входной файл:

```
A|!A
*
* A
```

Выходной файл:

```
3
1
1 2
1 2 3
A=2
```

Пример 2:

Входной файл:

```
A|B
* A,B
* A
* B
```

Выходной файл:

Не модель Крипке

Задача 7. Написать программу, проверяющую доказательство в формальной арифметике на корректность.

Стоимость: 12 баллов, решение на *Ocaml* или *Haskell*: 15 баллов

Грамматика формул формальной арифметики:

$$\begin{aligned} \langle \text{выражение} \rangle &::= \langle \text{дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle \text{'-'} \langle \text{выражение} \rangle \\ \langle \text{дизъюнкция} \rangle &::= \langle \text{конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle \text{'|'} \langle \text{конъюнкция} \rangle \\ \langle \text{конъюнкция} \rangle &::= \langle \text{унарное} \rangle \mid \langle \text{конъюнкция} \rangle \text{'\&'} \langle \text{унарное} \rangle \\ \langle \text{унарное} \rangle &::= \langle \text{предикат} \rangle \mid \text{'!'} \langle \text{унарное} \rangle \mid \text{'('} \langle \text{выражение} \rangle \text{'')}' \\ &\quad \mid \text{'@'} \mid \text{'?' } \langle \text{переменная} \rangle \text{'.'} \langle \text{унарное} \rangle \\ \langle \text{переменная} \rangle &::= \text{'a' ... 'z'} \{ \text{'0' ... '9'} \}^* \\ \langle \text{предикат} \rangle &::= \text{'A' ... 'Z'} \{ \text{'0' ... '9'} \}^* [\text{'('} \langle \text{терм} \rangle \{ \text{' , ' } \langle \text{терм} \rangle \}^* \text{'')}'] \\ &\quad \mid \langle \text{терм} \rangle \text{'='} \langle \text{терм} \rangle \\ \langle \text{терм} \rangle &::= \langle \text{слагаемое} \rangle \mid \langle \text{терм} \rangle \text{'+'} \langle \text{слагаемое} \rangle \\ \langle \text{слагаемое} \rangle &::= \langle \text{умножаемое} \rangle \mid \langle \text{слагаемое} \rangle \text{'*'} \langle \text{умножаемое} \rangle \\ \langle \text{умножаемое} \rangle &::= \text{'a' ... 'z'} \{ \text{'0' ... '9'} \}^* \text{'('} \langle \text{терм} \rangle \{ \text{' , ' } \langle \text{терм} \rangle \}^* \text{'')}' \\ &\quad \mid \langle \text{переменная} \rangle \mid \text{'('} \langle \text{терм} \rangle \text{'')}' \\ &\quad \mid \text{'0'} \mid \langle \text{умножаемое} \rangle \text{' '}' \end{aligned}$$

Выходной файл — либо фраза

Доказательство корректно.

либо указание об ошибке — текст вида:

Вывод некорректен начиная с формулы номер $\langle N \rangle$ [: $\langle \text{ошибка} \rangle$]

где вместо $\langle N \rangle$ подставлен номер первой некорректной формулы. Необязательное поле $\langle \text{ошибка} \rangle$ должно появляться, если формула не является аксиомой или допущением, не может быть выведена из предыдущих, но являлась бы (или могла бы быть выведена), если бы не нарушение ограничений на переменные. Возможные варианты ошибок:

терм $\langle X \rangle$ не свободен для подстановки в формулу $\langle Y \rangle$ вместо переменной $\langle a \rangle$.

переменная $\langle a \rangle$ входит свободно в формулу $\langle X \rangle$.

используется <правило|схема аксиом> с квантором по переменной <a>, входящей свободно в допущение <X>.