Теоретические («малые») домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3234-M3239, весна 2018 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

Докажите при любых подстановках метапеременных α, β и γ:

1. $\vdash \alpha \& \beta \rightarrow \beta \& \alpha$
2. $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$
3. $\vdash \alpha \& (\beta \vee \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma)$
4. $\vdash \neg(\alpha \& \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$
5. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Домашнее задание №2: «теорема о полноте исчисления высказываний»

В данном домашнем задании вам будет предложено доказать несколько важных лемм, используемых в теореме о полноте исчисления высказываний. Подробнее с этой теоремой можно ознакомиться в конспекте курса, глава 5. В решениях можно пользоваться всем ранее доказанным на парах и в других домашних заданиях.

1. Докажите при любых значениях метапеременных α, β:
   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
   (b) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (c) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (e) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (g) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (h) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (i) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (j) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
   (k) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (l) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (m) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (n) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$
2. Докажите, что при любых значениях метапеременной α справедливо $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
3. Докажите, что при любых списках формул Γ и Δ и при любых значениях метапеременных γ,δ,ζ если $\Gamma \vdash \gamma$, $\Delta \vdash \delta$ и $\gamma, \delta \vdash \zeta$, то $\Gamma, \Delta \vdash \zeta$
4. Докажите, что если $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$

Домашнее задание №3: «интуиционистское исчисление высказываний»

Введём обозначение: нижним индексом у «турникета» будем указывать логику, в которой проводится доказательство. Если высказывание α доказуемо в интуиционистской логике, будем писать $\vdash_{\text{И}} \alpha$, если в классической — $\vdash_{\text{К}} \alpha$.

1. Напомним, как на лекции определялась оценка высказываний интуиционистского исчисления на топологическом пространстве $\langle X, \Omega \rangle$:

   $[\![\alpha \& \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$
   $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$
   $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] = \mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])$
   $[\![\neg \alpha]\!] = \mathrm{int}(\mathrm{c}([\![\alpha]\!]))$

   Также, положим, что высказывание α истинно, если $[\![\alpha]\!] = X$ (т.е. любое доказуемое высказывание неизбежно имеет оценку, равную всему пространству). Докажите, что так опеределённая оценка корректна.

2. Докажите теорему Гливенко: $\vdash_{\text{К}} \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$. Чтобы это сделать, сперва докажите три вспомогательных утверждения:

   (a) $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$, если α — некоторая аксиома интуиционистского исчисления высказываний.

   (b) При любом α выполнено $\vdash_{\text{И}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$

   (c) При любых α и β, если $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\text{И}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, то $\vdash_{\text{И}} \neg\neg\beta$

3. Покажите с помощью опровергающего примера, что в интуиционистской логике не выполнено:

   (a) $\vdash_{\text{И}} \neg\neg P \rightarrow P$

   (b) $\vdash_{\text{И}} ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ («закон Пирса»)

4. (Задача Куратовского) Будем применять к множеству в некоторой топологии различные последовательности операций int и cl и смотреть на получившиеся результаты. Некоторые множества будут совпадать: скажем, всегда $\mathrm{int}A = \mathrm{int}(\mathrm{int}A)$, а некоторые будут различны. Сколько вообще возможно получить различных множеств таким способом?

Классное-домашнее задание №4: «Алгебры Гейтинга и Линденбаума»

Прежде чем приступить к формулировке заданий, напомним некоторые определения с лекций. Мы рассматриваем интуиционистское исчисление высказываний, пусть все высказывания этого исчисления образуют множество F.

1. Будем писать $\alpha \sqsubseteq^* \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.

2. Будем писать $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$

3. Пусть задано некоторое отношение эквивалентности R, тогда имеют место следующие определения:

   - $[\alpha]_R = \{\beta \in F \mid R(\alpha, \beta)\}$
   - (фактор-множество) $F/R = \{[\alpha]_R, \alpha \in R\}$

4. Рассмотрим фактор-множество $F/\approx$. Будем писать $[\alpha]_\approx \sqsubseteq [\beta]_\approx$, если $\alpha \sqsubseteq^* \beta$. Нижний индекс у квадратных скобок мы будем опускать, если ясно, о каком отношении идёт речь.

Задания

1. Покажите, что $[\alpha]_R = [\beta]_R$ тогда и только тогда, когда $R(\alpha, \beta)$.

2. Покажите, что $[\alpha]_R$ и $[\beta]_R$ либо совпадают, либо не пересекаются.

3. Покажите, что $(\sqsubseteq)$ определена корректно, то есть, несмотря на своё определение, данное по конкретным представителям классов, на деле это — отношение между множествами и не зависит от выбора конкретных представителей классов эквивалентности. Это можно сделать, показав, что если $\alpha_1 \in [\alpha]$, $\beta_1 \in [\beta]$ и $[\alpha] \sqsubseteq [\beta]$, то $\alpha_1 \sqsubseteq^* \beta_1$.

4. Покажите, что $(\sqsubseteq^*)$ является отношением предпорядка, а $(\sqsubseteq)$ — отношением порядка.

5. Покажите, что $F/\approx$ с отношением $\sqsubseteq$ является: (а) решёткой, (б) импликативной решёткой, (в) алгеброй Гейтинга.

Домашнее задание №5: «Алгебры Гейтинга и Линденбаума, часть 2»

1. Рассмотрим некоторую модель Крипке. Покажите, что в топологии, построенной по отношению частичного порядка из этой модели, результат оценки связок совпадает с определением, данным в моделях Крипке. С использованием этого восполните все пробелы в доказательстве того, что модели Крипке — частный случай алгебр Гейтинга.

2. Из общего определения, данного на лекции, на основе операций в алгебре Гейтинга A определите формально операции $(+)$, $(\cdot)$, $(\to)$, $(\sim)$ в $\Gamma(A)$.

3. Постройте опровергающие модели Крипке для следующих формул: $P \vee \neg P$, $((P \to Q) \to P) \to P$, $(P \to Q) \vee (P \to \neg Q)$

4. Будем рассматривать модели Крипке, в котором отношения между мирами образуют дерево (у двух миров не бывает одного и того же потомка). Укажите формулу, для которой не существует опровергающей модели Крипке с глубиной дерева меньше 2, 3, n.

5. Покажите следующие свойства алгебр Гейтинга:

   (a) При любых a и b выполнено $a \cdot (a \to b) \le b$.

   (b) При любых a, b и c верно, что $a \cdot c \le b$ влечёт $c \le a \to b$.

   (c) При любых a и b верно, что $a \le b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$.

   (d) При любых a и b верно, что $b \le a \to b$

   (e) При любых a, b и c выполнено $a \to b \le ((a \to (b \to c)) \to (a \to c)$

   (f) При любых a, b и c выполнено $a \to c \le (b \to c) \to (a + b \to c)$

6. Покажите, что любая импликативная решётка является дистрибутивной решёткой.

7. Пользуясь предыдущими пунктами, покажите, что алгебры Гейтинга являются корректными моделями ИИВ.