

# 1 Общие замечания

## 1.1 О тексте

Данный текст представляет из себя краткий конспект лекций по курсу «Математическая логика», рассказанных студентам ИТМО (группы М3234-М3239) в 2017-2018 учебном году.

## 1.2 Общие определения и обозначения

Прежде чем приступить к изложению содержательного материала, введём несколько базовых определений и обозначений, которые должны быть уже знакомы читателю.

1. Множество всех подмножеств обозначим как  $\mathcal{P}$ :  $\mathcal{P}(X) = \{C \mid C \subseteq X\}$
2. Упорядоченную пару каких-либо значений  $a$  и  $b$  будем обозначать как  $\langle a, b \rangle$
3. Пусть дано некоторое частично-упорядоченное отношением  $\sqsubseteq$  множество  $S$ . *Наименьшим* (*наибольшим*) элементом множества назовём такой элемент  $t \in S$ , что для любого  $s \in S$  выполнено  $t \sqsubseteq s$  ( $s \sqsubseteq t$ ).
4. Пусть дано некоторое частично-упорядоченное отношением  $\sqsubseteq$  множество  $S$ . *Минимальным* (*максимальным*) элементом множества назовём такой элемент  $t \in S$ , что не существует такого  $s \in S$ , что  $s \sqsubseteq t$  ( $t \sqsubseteq s$ ) и  $s \neq t$ . Иными словами, все остальные элементы множества либо больше (меньше), либо не сравнимы с ним.

Заметим, что наименьшее (наибольшее) значение всегда единственное, а минимальных (максимальных) значений может быть много.

# 2 Общая топология

Мы начинаем курс немного издалека: от некоторых базовых тем общей топологии. С одной стороны, эти знания пригодятся нам дальше в курсе, с другой — есть надежда, что они настроят слушателей курса на правильный лад.

**Определение 2.1.** *Топологическим пространством* мы назовём упорядоченную пару множеств  $\langle X, \Omega \rangle$ , где  $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ , отвечающую следующим трём свойствам:

1. Какое бы ни было семейство множеств  $\{A_\alpha\}$ , где  $A_\alpha \in \Omega$ , выполнено  $\cup_\alpha \{A_\alpha\} \in \Omega$
2. Какое бы ни было конечное семейство множеств  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , где  $A_i \in \Omega$ , выполнено  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$
3.  $\emptyset \in \Omega$ ,  $X \in \Omega$

**Определение 2.2.** Пусть дано топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$ . Тогда любое множество  $A \in \Omega$  назовём *открытым*. Если же  $X \setminus A \in \Omega$ , то такое множество назовём *замкнутым*.

**Теорема 2.1.** Следующие объекты являются топологическими пространствами:

1. Топология стрелки:  $\langle \mathbb{R}, \{(x, +\infty) \mid x \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\} \rangle$
2. Дискретная топология на множестве  $X$ :  $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$
3. Топология Зарисского на множестве  $X$ :  $\langle X, \{A \in \mathcal{P}(X) \mid (X \setminus A) \text{ — конечно} \} \rangle$

**Определение 2.3.** *Внутренностью* множества  $X$  (обозначается как  $\text{int}X$ ) мы назовём наибольшее по включению открытое подмножество  $X$ . *Замыканием* множества  $X$  (обозначается как  $\text{cl}X$ ) мы назовём наименьшее по включению замкнутое надмножество  $X$ .

**Определение 2.4.** *Базой* топологического пространства  $\langle X, \Omega \rangle$  назовём любое такое семейство множеств  $\mathcal{B}$ , что каждое открытое множество представляется объединением некоторого подмножества  $\mathcal{B}$ . Или, в формальной записи,  $\Omega = \{\cup S \mid S \subseteq \mathcal{B}\}$ . Также будем говорить, что данная база  $\mathcal{B}$  *задаёт* топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$ .

**Теорема 2.2.** Классическая топология Евклидова пространства  $\mathbb{R}$ : Множество

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

является базой Евклидова пространства.

**Определение 2.5.** Топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$  назовём связным, если единственные одновременно открытые и замкнутые множества в нём —  $\emptyset$  и  $X$ .

**Теорема 2.3.** Топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$  связно тогда и только тогда, когда в нём нет двух непустых открытых множеств  $A$  и  $B$ , что  $A \cup B = X$  и  $A \cap B = \emptyset$ .

**Определение 2.6.** Назовём частичным порядком ( $\sqsubseteq$ ) на множестве  $X$  любое рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на нём.

**Определение 2.7.** Рассмотрим множество  $X$  с заданным на нём частичным порядком  $\sqsubseteq$ . Рассмотрим множество  $\mathcal{B}_{\sqsubseteq} = \{\{t \in X \mid x \sqsubseteq t\} \mid x \in X\}$ . Тогда топологическое пространство  $X_{\sqsubseteq}$ , задаваемое базой топологии  $\mathcal{B}_{\sqsubseteq}$ , мы назовём *топологией частичного порядка* ( $\sqsubseteq$ ) на  $X$ .

**Теорема 2.4.** При любом выборе  $X$  и ( $\sqsubseteq$ )  $X_{\sqsubseteq}$  является топологическим пространством.

**Определение 2.8.** Пусть задано топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$ , и пусть задано множество  $A \subseteq X$ . Тогда рассмотрим  $\Omega_A = \{S \cap A \mid S \in \Omega\}$ . Будем называть топологическое пространство  $\langle A, \Omega_A \rangle$  пространством с топологией, индуцированной пространством  $\langle X, \Omega \rangle$ .

**Теорема 2.5.** При любом выборе топологического пространства  $\langle X, \Omega \rangle$  и  $A$  (подмножества  $X$ ) пространство с индуцированной топологией  $\langle A, \Omega_A \rangle$  является топологическим пространством.

**Теорема 2.6.** Пусть задано топологическое пространство  $\langle X, \Omega \rangle$ , и пусть  $A \subseteq X$ . Тогда множество  $A$  называется связным, если оно связно как пространство с индуцированной пространством  $\langle X, \Omega \rangle$  топологией.

**Теорема 2.7.** Рассмотрим ациклический граф  $G$  с множеством вершин  $V$ . Построим по нему отношение: положим, что  $x \sqsubseteq y$ , если имеется путь из  $x$  в  $y$ . Тогда граф слабо связан тогда и только тогда, когда связно соответствующее топологическое пространство частичного порядка.

### 3 Исчисление высказываний

Матлогика — это наука о правильных математических рассуждениях, а поскольку рассуждения обычно ведутся на каком-то языке, то она неразрывна связана с идеей двух языков: *языка исследователя* (или иначе его называют *метаязыком*), и *предметного языка*. Как следует из названий, языком исследователя пользуемся мы, формулируя утверждения или доказывая теоремы о разных способах математических рассуждений, или просто их обсуждая. Сами же математические рассуждения, собственно и составляющие предмет исследования, формализованы в некотором предметном языке.

Мы начнём с очень простого предметного языка — языка исчисления высказываний. Элементами (строками) данного языка являются некоторые выражения (формулы), по структуре очень похожие на арифметические, которые называются *высказываниями*.

Каждое высказывание — это либо *пропозициональная переменная* — большая буква латинского алфавита, возможно, с цифровым индексом, либо оно составлено из одного или двух высказываний меньшего размера, соединённых логической связкой.

Связок в языке мы определим 4 (хотя при необходимости этот список может быть в любой момент изменён).

- отрицание: если  $\alpha$  — высказывание, то  $\neg\alpha$  — тоже высказывание.
- конъюнкция: если  $\alpha$  и  $\beta$  — высказывания, то  $\alpha \& \beta$  — тоже высказывание.
- дизъюнкция: если  $\alpha$  и  $\beta$  — высказывания, то  $\alpha \vee \beta$  — тоже высказывание.
- импликация: если  $\alpha$  и  $\beta$  — высказывания, то  $\alpha \rightarrow \beta$  — тоже высказывание.

Также в языке можно использовать скобки вокруг выражений: если  $\alpha$  — высказывание, то  $(\alpha)$  — тоже высказывание. Если из расстановки скобок не следует иное, мы будем учитывать приоритет связок (связки в перечислении выше указаны в порядке убывания приоритета). Также, конъюнкцию и дизъюнкцию мы будем считать левоассоциативной (скобки в цепочке одинаковых связок расставляются слева направо:  $(A \vee B) \vee C$ ), а импликацию — правоассоциативной:  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ .

Высказывания, подробности которых нас не интересуют, мы будем обозначать начальными буквами греческого алфавита ( $\alpha, \beta, \gamma$  и т.п.). Ещё мы будем называть такие высказывания *метапеременными*. Одинаковым буквам всегда соответствуют одинаковые высказывания, однако, разным буквам не обязаны соответствовать разные высказывания. При подстановке выражений вместо метапеременных мы всегда предполагаем, что эти выражения взяты в скобки.

Покажем эти правила на примере. Выражение

$$\alpha \rightarrow \neg\beta \& \gamma \vee \delta \vee \epsilon \rightarrow \zeta \vee \iota$$

нужно воспринимать так:

$$(\alpha) \rightarrow (((((\neg(\beta)) \& (\gamma)) \vee (\delta)) \vee (\epsilon)) \rightarrow ((\zeta) \vee (\iota)))$$

#### 3.1 Оценка высказываний

Процесс «вычисления» значения высказываний имеет совершенно естественное определение. Мы фиксируем некоторое множество *истинностных значений*  $V$ , для начала мы в качестве такого множества возьмем множество  $\{И, Л\}$ , здесь И означает истину, а Л — ложь. Всем пропозициональным переменным мы приписываем некоторое значение, а затем рекурсивно вычисляем значение выражения естественным для указанных связок образом.

Пусть  $P$  — множество пропозициональных переменных языка. Тогда функцию  $M : P \rightarrow V$ , приписывающую истинностное значение пропозициональным переменным, мы назовём *моделью* (иначе: *интерпретацией* или *оценкой* переменных).

Функцию, сопоставляющую высказыванию  $\alpha$  и модели  $M$  истинностное значение, мы назовём *оценкой* высказывания и будем это записывать так:  $\llbracket \alpha \rrbracket^M$ . Обычно для указания модели  $M$  мы будем перечислять значения пропозициональных переменных, входящих в формулу:  $\llbracket P \rightarrow Q \rrbracket^{P:=\perp, Q:=\perp} = \text{И}$ . Если конкретная модель ясна из контекста или несущественна для изложения, мы можем упустить указание на модель опустить:  $\llbracket P \rightarrow P \rrbracket = \text{И}$

Если  $\llbracket \alpha \rrbracket^M = \text{И}$ , то мы будем говорить, что высказывание  $\alpha$  истинно в модели  $M$ , или, иными словами,  $M$  — *модель высказывания  $\alpha$* .

*Тавтологией* или *общезначимым высказыванием* мы назовём высказывание, истинное в любой модели. На языке исследователя общезначимость высказывания  $\alpha$  можно кратко записать как  $\models \alpha$ .

Указанный способ оценки высказываний мы будем называть классическим. В дальнейшем мы будем брать необычные множества истинностных значений и будем давать неожиданный смысл связкам, однако, классический способ будет всегда подразумеваться, если не указано иного. Если же мы захотим сделать на этом акцент, мы будем говорить о *классических моделях исчисления высказываний*, подразумевая, что если мы приписываем переменным классические значения истина и ложь, то и высказывание целиком мы оцениваем тоже по классическим правилам.

## 3.2 Доказательства

В любой теории есть некоторые утверждения (аксиомы), которые принимаются без доказательства. В исчислении высказываний мы должны явно определить список всех возможных аксиом. Например, мы можем взять утверждение  $A \& B \rightarrow A$  в качестве аксиомы. Однако, есть множество аналогичных утверждений, например,  $B \& A \rightarrow B$ , которые не отличаясь по сути, отличаются по записи, и формально говоря, являются другими утверждениями.

Для решения вопроса мы введём понятие *схемы аксиом* — некоторого обобщённого шаблона, подставляя значения в который, мы получаем различные, но схожие аксиомы. Например, схема аксиом  $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$  позволяет получить как аксиому  $A \& B \rightarrow A$  (при подстановке  $\alpha := A, \beta := B$ ), так и аксиому  $B \& A \rightarrow B$ .

Возьмем следующие схемы аксиом для исчисления высказываний.

- (1)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (2)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- (3)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
- (4)  $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
- (5)  $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
- (6)  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (7)  $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (8)  $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
- (9)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
- (10)  $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

Напомним, что импликация — правоассоциативная операция, поэтому скобки в схеме аксиом 1, например, расставляются так:  $(\alpha) \rightarrow ((\beta) \rightarrow (\alpha))$

Помимо аксиом, нам требуется каким-то образом научиться преобразовывать одни верные утверждения в другие. Сделаем это с помощью правил вывода. У нас пока будет одно правило вывода — *Modus Ponens*. Это также схема, она позволяет при доказанности двух формул  $\psi$  и  $\psi \rightarrow \phi$  считать доказанной формулу  $\phi$ .

**Определение 3.1.** Доказательство в исчислении высказываний — это некоторая конечная последовательность выражений  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  из языка  $L$ , такая, что каждое из утверждений  $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$  либо является аксиомой, либо получается из других утверждений  $\alpha_{P_1}, \alpha_{P_2} \dots \alpha_{P_k} (P_1 \dots P_k < i)$  по правилу вывода.

**Определение 3.2.** Высказывание  $\alpha$  называется доказуемым, если существует доказательство  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$ , и в нем  $\alpha_k$  совпадает с  $\alpha$ .

Вообще, схемы аксиом и правила вывода существуют для удобства задания исчисления. В дальнейшем будет очень неудобно возиться с этими объектами. Поэтому мы считаем, что в исчислении имеется бесконечно много аксиом и правил вывода, которые порождаются подстановкой всех возможных формул вместо параметров в схемы.

В качестве сокращения записи в языке исследователя мы будем писать  $\vdash \alpha$ , чтобы сказать, что  $\alpha$  доказуемо.

Традиционно правило вывода Modus Ponens записывают так:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

## 4 Теорема о дедукции

Соглашение об обозначениях. Будем обозначать буквами  $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Pi$  списки формул (возможно, пустые).

**Определение 4.1.** Вывод из допущений. Пусть  $\Gamma$  — некоторый список высказываний, а  $\alpha$  — некоторое высказывание. Тогда мы будем говорить, что высказывание  $\alpha$  *выводимо* из  $\Gamma$  (и записывать это как  $\Gamma \vdash \alpha$ ), если существует такая последовательность высказываний  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha$  (называемая *выводом*  $\alpha$  из  $\Gamma$ ), что каждое из высказываний  $\alpha_i$  — это

- либо аксиома,
- либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих высказываний,
- либо — высказывание из списка  $\Gamma$ .

Элементы  $\Gamma$  мы будем называть *допущениями*. Также эти элементы называют предположениями или гипотезами.

В свете данного определения можно заметить, что доказательство — это вывод из пустого списка допущений.

**Теорема 4.1.** Теорема о дедукции. Утверждение  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  справедливо тогда и только тогда, когда справедливо, что  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ .

Для доказательства рассмотрим следующую лемму:

**Лемма 4.2.**  $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

*Доказательство.*

- |  |            |
|--|------------|
| (1) $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$   | Сх. акс. 1 |
| (2) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ | Сх. акс. 2 |
| (3) $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$  | М.Р. 1,2   |
| (4) $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha))$  | Сх. акс. 1 |
| (5) $\alpha \rightarrow \alpha$  | М.Р. 4,3   |

□

*Доказательство теоремы 4.1.* Сперва докажем прямое следствие. Для этого нам достаточно научиться по любому выводу  $\alpha \rightarrow \beta$  из  $\Gamma$  строить вывод  $\beta$  из  $\Gamma, \alpha$ . Возьмем вывод формулы  $\alpha \rightarrow \beta$ , то есть некоторую последовательность формул  $\delta_1 \dots \delta_{m-1}; \alpha \rightarrow \beta$ . Добавив к выводу 2 формулы, получаем требуемый вывод:

- |                                    |                            |
|------------------------------------|----------------------------|
| (1) $\delta_1$                     |                            |
| ...                                |                            |
| ( $m-1$ ) $\delta_{m-1}$           |                            |
| ( $m$ ) $\alpha \rightarrow \beta$ |                            |
| ( $m+1$ ) $\alpha$                 | «Свежедобавленная» аксиома |
| ( $m+2$ ) $\beta$                  | М.Р. $m, m+1$              |

Теперь докажем обратное. Нам необходимо построить вывод утверждения  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$  по имеющемуся выводу  $\delta_1 \dots \delta_{m-1}, \beta$ . Мы поступим так: сперва набросаем план вывода — разместим по тексту «ключевые» формулы, которые потом дополним до полноценного вывода промежуточными формулами.

План вывода будет такой:

- |   |
|---|
| (1) $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_1$           |
| ...   |
| ( $m-1$ ) $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_{m-1}$ |
| ( $m$ ) $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$          |

Теперь надо дополнить его до полноценного вывода. Будем рассматривать формулы подряд и перед каждой формулой добавлять некоторое количество формул, обосновывающих соответствующий шаг доказательства. Рассмотрим формулу номер  $i$ . Возможны следующие варианты:

1.  $\delta_i$  — это аксиома или предположение, входящее в  $\Gamma$ . Тогда перед этой формулой вставим формулы  $\delta_i$  и  $\delta_i \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_i)$ , и окажется, что  $i$ -я формула выводится из предыдущих двух формул путем применения правила Modus Ponens.
2.  $\delta_i$  совпадает с  $\alpha$ . Тогда мы вставим перед ней 4 первые формулы из леммы, и  $\delta_i \rightarrow \alpha$  будет получаться по правилу Modus Ponens.
3.  $\delta_i$  выводится по правилу Modus Ponens из каких-то других утверждений  $\delta_j$  и  $\delta_k$  (при этом  $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$ ), где  $j < i$  и  $k < i$ . Покажем, что  $\alpha \rightarrow \delta_i$  тоже может быть выведена из утверждений  $\alpha \rightarrow \delta_j$  и  $\alpha \rightarrow (\delta_j \rightarrow \delta_i)$ .

Для этого добавим два высказывания:

$$\begin{array}{ll} (\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\delta_j \rightarrow \delta_i)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_i)) & \text{Сх. акс. 2} \\ ((\alpha \rightarrow (\delta_j \rightarrow \delta_i)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_i)) & \text{М.Р. из } j \text{ и } i - 6 \end{array}$$

□

По аналогии мы можем рассмотреть отношение *следования*. Будем говорить, что высказывание  $\alpha$  следует из высказываний  $\Gamma$ , если при любой оценке пропозициональных переменных, входящих в высказывания  $\Gamma$  и  $\alpha$ , на которых все высказывания из  $\Gamma$  истинны,  $\alpha$  также истинно. Записывать, что  $\alpha$  следует из  $\Gamma$ , будем так:  $\Gamma \models \alpha$ .

## 5 Теорема о полноте исчисления высказываний

**Определение 5.1.** Введем обозначение. Пусть  $\alpha$  — это некоторое высказывание, а  $x$  — некоторое истинностное значение. Тогда обозначим за  $[x]\alpha$  высказывание  $\alpha$ , если  $x$  — истина, и  $\neg(\alpha)$ , если  $x$  — ложь. Также, если формула  $\alpha$  — это формула с  $n$  пропозициональными переменными  $P_1 \dots P_n$ , и  $x_1 \dots x_n$  — некоторые истинностные значения, то за  $\llbracket \alpha \rrbracket^{P_1:=x_1, \dots, P_n:=x_n}$  обозначим значение формулы  $\alpha$  при подстановке значений  $x_1 \dots x_n$  вместо переменных  $P_1 \dots P_n$ .

**Лемма 5.1.** Если  $\Gamma, \Sigma \vdash \alpha$ , то  $\Gamma, \Delta, \Sigma \vdash \alpha$ . Если  $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Pi \vdash \alpha$ , то  $\Gamma, \Sigma, \Delta, \Pi \vdash \alpha$ .

*Доказательство.* Упражнение

□

**Лемма 5.2.** Если справедливы 3 утверждения:  $\Gamma \vdash \gamma$ ,  $\Delta \vdash \delta$  и  $\gamma, \delta \vdash \alpha$ , то справедливо и  $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$

*Доказательство.* Упражнение

□

Возьмем некоторую связку исчисления высказываний, например конъюнкцию:  $A \& B$ . Построим для нее таблицу истинности. По каждой строчке построим утверждение, в котором отрицания появляются там, где в таблице истинности находится  $L$ :

$A$	$B$	$A \& B$	утверждение
Л	Л	Л	$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
Л	И	Л	$\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \& B$

**Лемма 5.3.** Каждое из построенных по таблицам истинности утверждений доказуемо.

*Доказательство.* Упражнение. □

**Лемма 5.4** (Правило контрапозиции). Каковы бы ни были формулы  $\alpha$  и  $\beta$ , справедливо, что  $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

*Доказательство.* Сперва докажем, что  $\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$ .

- |     |  |            |
|-----|--|------------|
| (1) | $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$ | Сх. акс. 9 |
| (2) | $\alpha \rightarrow \beta$   | Допущение  |
| (3) | $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha$  | М.Р. 2,1   |
| (4) | $\neg\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta)$   | Сх. акс. 1 |
| (5) | $\neg\beta$  | Допущение  |
| (6) | $\alpha \rightarrow \neg\beta$   | М.Р. 5,4   |
| (7) | $\neg\alpha$   | М.Р. 6,3   |

Тогда, применив 2 раза Теорему о дедукции, получим вывод требуемого утверждения. □

**Лемма 5.5.** Правило исключенного третьего. Какова бы ни была формула  $\alpha$ ,  $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

*Доказательство.* Доказательство проведем в 3 этапа.

1. Для начала покажем  $\vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ :

- |                 |  |                   |
|-----------------|--|-------------------|
| (1)             | $\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$  | Сх. акс. 6        |
| (2) ... (n + 1) | $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, (\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha)$ | Д-во из леммы 5.4 |
| (n + 2)         | $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$  | М.Р. 1, n + 1     |

2. Затем докажем  $\vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$ :

- |                 |  |                   |
|-----------------|--|-------------------|
| (1)             | $\neg\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha$  | Сх. акс. 7        |
| (2) ... (k + 1) | $\delta_1, \dots, \delta_{k-1}, (\neg\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha)$ | Д-во из леммы 5.4 |
| (k + 2)         | $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$  | М.Р. 1, k + 1     |

3. Теперь докажем все вместе:

- |     |  |             |
|-----|--|-------------|
| (1) | $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$  | по пункту 1 |
| (2) | $\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha$  | по пункту 2 |
| (3) | $(\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow (\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha))$ | Сх. акс. 9  |
| (4) | $(\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$   | М.Р. 1,3    |
| (5) | $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$   | М.Р. 2,4    |
| (6) | $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \rightarrow (\alpha \vee \neg\alpha)$  | Сх. акс. 10 |
| (7) | $\alpha \vee \neg\alpha$   | М.Р. 5,6    |

□

**Лемма 5.6.** Об исключении допущения. Пусть справедливо  $\Gamma, \rho \vdash \alpha$  и  $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$ . Тогда также справедливо  $\Gamma \vdash \alpha$ .

*Доказательство.* Упражнение □

**Теорема 5.7.** О полноте исчисления высказываний. Пусть справедливо  $\models \alpha$ . Тогда также справедливо, что  $\vdash \alpha$ .



*Доказательство.* Для доказательства теоремы мы докажем чуть более сильное утверждение — что для любого  $k$  от 0 до  $n$  и любой оценки переменных  $x_1, \dots, x_k$  справедливо  ${}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_k]}P_k \vdash \alpha$ . Нетрудно заметить, что утверждение теоремы непосредственно следует из данного утверждения для  $k = 0$ . Доказательство будет вестись индукцией по  $n - k$ .

**База.** Пусть  $n - k = 0$ , то есть  $k = n$ .  $\models \alpha$  означает, что при любой оценке  $x_1, \dots, x_n$  пропозициональных переменных  $P_1, \dots, P_n$  справедливо  $\alpha[P_1 := x_1, \dots, P_n := x_n] = \text{И}$ . Возьмем некоторую оценку переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Тогда, по лемме 5,  ${}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_n]}P_n \vdash \alpha[P_1 := x_1, \dots, P_n := x_n]\alpha$  то есть  ${}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_n]}P_n \vdash \alpha$ .

**Переход.** Пусть утверждение уже доказано для некоторого  $n - k > 0$ , покажем его для  $n - k + 1$  (то есть доказано для  $k < n$ , покажем его для  $k - 1$ ). Возьмем некоторую оценку переменных  $x_1, \dots, x_{k-1}$ . По предположению,  ${}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_k]}P_k \vdash \alpha$ , то есть

$$\begin{aligned} {}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_{k-1}]}P_{k-1}, \neg P_k &\vdash \alpha \\ {}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_{k-1}]}P_{k-1}, P_k &\vdash \alpha \end{aligned}$$

Тогда по лемме об исключении допущения, справедливо  ${}_{[x_1]}P_1, \dots, {}_{[x_{k-1}]}P_{k-1} \vdash \alpha$ .

□

**Теорема 5.8.** О корректности исчисления высказываний. Пусть справедливо  $\vdash \alpha$ . Тогда также справедливо, что  $\models \alpha$ .

*Доказательство.* По условию теоремы, у нас есть доказательство высказывания  $\alpha$ , то есть последовательность высказываний  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Каждое высказывание — это либо аксиома, либо применение правила Modus Ponens. Докажем, что для каждого  $k$  все высказывания  $\alpha_i$  при  $l \leq k$  — тавтологии. Доказательство будем вести индукцией по  $k$ .

**База.** Пусть  $k = 0$ , тогда нет ни одного высказывания, про которое нужно доказать, что оно — тавтология, то есть утверждение автоматически верно.

**Переход.** Пусть для некоторого  $k$  утверждение справедливо, докажем его для  $k + 1$ . Выберем некоторую оценку  $x_1, \dots, x_n$  пропозициональных переменных  $P_1, \dots, P_n$ , использованных в высказываниях  $\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}$ . Рассмотрим случаи.

Пусть  $\alpha_{k+1}$  — аксиома. В данную аксиому входят одна, две или три формулы  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Подставив всех возможных истинностных значений вместо данных формул можно проверить, что все аксиомы являются тавтологиями, значит, они будут истинны и на тех конкретных значениях, которые примут данные формулы после подстановки значений  $x_1, \dots, x_n$ .

Пусть  $\alpha_{k+1}$  получается по правилу Modus Ponens из  $\alpha_p$  и  $\alpha_q$ , причем  $\alpha_q \equiv \alpha_p \rightarrow \alpha_{k+1}$ . Тогда  $\llbracket \alpha_p \rrbracket^{P_1 := x_1, \dots, P_n := x_n} = \text{И}$  и  $\llbracket \alpha_p \rightarrow \alpha_{k+1} \rrbracket^{P_1 := x_1, \dots, P_n := x_n} = \text{И}$ . Из таблицы истинности импликации следует, что неизбежно  $\llbracket \alpha_{k+1} \rrbracket^{P_1 := x_1, \dots, P_n := x_n} = \text{И}$ .

□

Заметим, что вместе из этих двух теорем следует, что если неверно, что  $\vdash \alpha$ , то неизбежно найдется контрпример.

## 6 Интуиционистское исчисление высказываний

Одна из главных причин возникновения математической логики — кризис в математике начала XX века. Классический пример такого — парадокс Рассела, утверждающий, что понятие «множества всех не принадлежащих себе множеств» противоречиво. В самом деле, пусть  $X = \{t \mid t \notin t\}$ . Рассмотрим  $X \in X$ . Обе возможных альтернативы —  $X \in X$  и  $X \notin X$  — вступают в противоречие с определением множества  $X$ . Значит, мы можем сделать вывод, множества  $X$  не существует.

С одной стороны, в этом нет проблемы: мы не переживаем, если не найдём числа  $t \in \mathbb{N}$ , такого, что  $t = t$  и  $t \neq t$  одновременно. Но, с другой стороны, в формальном определении множества  $X$  на первый взгляд нет никаких проблем. Единственная, по-видимому, для современного читателя непривычная деталь в данном определении — множество, принадлежащее самому себе, но если вспомнить язык Java, то это возражение не должно вызывать никаких серьёзных сомнений. Просто рассмотрите следующее определение:

```
class IntList {  
    IntList next;  
    int value;  
}
```

Парадокс Рассела был получен не сразу, а через несколько лет после появления теории множеств и построения значительного количества математических теорий на её основе. Из этого возникает сомнение, нет ли таких же противоречий и в определении, например, вещественных чисел, просто глубже скрытых. Вдруг через несколько лет какой-то математик найдёт противоречия в математическом анализе — и значительную часть теории придётся пересмотреть или вообще признать ошибочной.

Было предложено много подходов к решению этой проблемы. Современный (классический) подход состоит в том, чтобы так формализовать теорию множеств, чтобы в ней не возникало парадоксов. Была сформулирована программа, предполагавшая своей целью доказательство непротиворечивости такой формальной теории. Однако, в 30-е годы Куртом Гёделем было показано, что такое доказательство минимально удовлетворительной надёжности построить невозможно. Конечно, самая распространённая формализация теории множеств — аксиоматика Цермело-Френкеля — оформилась в современном виде в 1925 году, почти 100 лет назад, и пока никаких противоречий в ней не было найдено. Но здесь всегда остаётся место для сомнений.

Поэтому интерес представляют альтернативные подходы к проблеме. Данный раздел посвящён интуиционистской логике. Математики, стоявшие у истоков данной логики, видели решение в том, чтобы исключить из рассмотрения «неконструктивные» объекты — объекты, метода построения которых не предложено. В частности, множество  $X$  из примера выше является примером неконструктивного объекта. Мы слишком легко приняли на веру возможность его существования и получили противоречие.

Столь резкие результаты получаются не всегда, но в целом в математике имеет место довольно много утверждений, пусть и не противоречивых, но выглядящих совершенно антиинтуитивно. Например, широко известна теорема Банаха-Тарского, утверждающая, что трёхмерный шар можно разрезать на конечное число попарно непересекающихся частей, из которых потом можно составить два шара того же размера.

### ВНК-интерпретация

ВНК-интерпретация логики названа по имени математиков, её предложивших (Л. Брауэром, А. Гейтингом и А. Колмогоровым). Они решили изменить сам подход к математиче-

скому рассуждению. Они пришли к выводу, что математик не думает в стиле классической логики, он думает в каком-то другом, «интуитивном» стиле, и предложили поэтому изменить взгляд на доказательства вообще.

Данная интерпретация предлагает иное понимание связок, и определяется индуктивно. Пусть даны высказывания  $P$  и  $Q$ , тогда:

- мы считаем  $P \& Q$  доказанным, если у нас есть доказательство высказывания  $P$  и доказательство высказывания  $Q$ ;
- мы считаем  $P \vee Q$  доказанным, если у нас есть доказательство  $P$  или есть доказательство  $Q$  (т.е. мы знаем, какая из двух альтернатив выполнена);
- мы считаем  $P \rightarrow Q$  доказанным, если мы умеем перестраивать любое доказательство высказывания  $P$  в доказательство высказывания  $Q$ ;
- мы считаем  $\perp$  утверждением, не имеющим доказательства.
- $\neg P$  есть сокращение для  $P \rightarrow \perp$ . Иными словами, мы считаем  $\neg P$  доказанным, если мы умеем из доказательства  $P$  получить противоречие.

Проиллюстрировать подход можно на примере следующей теоремы.

**Теорема 6.1.** Существуют два таких вещественных иррациональных числа  $p$  и  $q$ , что  $p^q \in \mathbb{Q}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим два случая:

1. если  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ , то мы нашли требуемые числа:  $p = q = \sqrt{2}$ ;
2. если же  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ , то рассмотрим  $p = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  и  $q = \sqrt{2}$ , тогда  $p^q = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{Q}$ .

□

Данная теорема, хоть и доказывает факт существования таких чисел, ничего не говорит по поводу того, какой из двух случаев имеет место — то есть, она неконструктивна. В самом деле, обозначим факт того, что  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$  за  $P$ , а итоговое утверждение теоремы — за  $S$ . Мы показываем, что  $P \rightarrow S$ , и что  $\neg P \rightarrow S$ . Однако, чтобы перейти к просто  $S$ , нам нужно показать  $P \vee \neg P$ . Несложно видеть, что в ВНК-интерпретации нет простого способа это сделать: чтобы считать дизъюнкцию доказанной, мы должны знать, какой из случаев имеет место.

Для программистов же здесь важным является следующее соображение: эта теорема не позволяет написать программу, ищущую эти два числа. Скажем, теорема о дедукции не такова: её доказательство позволяет построить такую программу, предъявляющую объект, существование которого утверждает теорема.

## Формализация интуиционистской логики

Исходный постулат интуиционистской логики состоит в том, что никакая формализация не является первичной. Мы выбираем те или иные правила только потому, что они соответствуют заявленным целям. Мы также вольны в любой момент правила поменять, если на то будут серьёзные основания.

У интуиционистской логики есть несколько формализаций, рассмотрим наиболее распространённую. Заменим аксиому устранения двойного отрицания (10-ю) на  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ .

Полученную систему назовём аксиоматикой интуиционистского исчисления высказываний.

В у данной аксиоматики есть интересные свойства, отсутствующие в классическом исчислении высказываний. Например, если  $\vdash_{\text{и}} \alpha \vee \beta$ , то  $\vdash_{\text{и}} \alpha$ , либо  $\vdash_{\text{и}} \beta$  — сравните с ВНК-интерпретацией дизъюнкции. Данное следствие поясняет обоснованность замены аксиомы, в дальнейшем оно будет доказано формально.

## 6.1 Булева алгебра и Топологическая интерпретация интуиционистского исчисления высказываний

Мы построим две параллельные интерпретации для классической и интуиционистской логики.

### Определение 6.1.

Пусть дано некоторое исчисление высказываний, для которого нам нужно построить модель — предложить способ оценки истинности выражений. Начинаем мы с множества истинностных значений. Возьмем в качестве этого множества все открытые множества некоторого заранее выбранного топологического пространства. Определим оценку для связок интуиционистского исчисления высказываний следующим образом:

$$\begin{aligned}\llbracket A \& B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cap \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket A \vee B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cup \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket A \rightarrow B \rrbracket &= (c[\llbracket A \rrbracket \cup \llbracket B \rrbracket])^\circ \\ \llbracket \neg A \rrbracket &= (c[\llbracket A \rrbracket])^\circ\end{aligned}$$

Будем считать, что формула истинна в данной модели, если её значение оказалось равно всему пространству.

Например, возьмем в качестве пространства  $\mathbb{R}$ , и вычислим значение формулы  $A \vee \neg A$  при  $A$  равном  $(0, 1)$ :  $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = (0, 1) \cup \llbracket \neg A \rrbracket = (0, 1) \cup (c(0, 1))^\circ = (0, 1) \cup ((-\infty, 0) \cup (1, \infty)) = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$ . Нетрудно видеть, что данная формула оказалась не общезначимой в данной интерпретации.

## 7 Литература

### Список литературы

- [1] Виро О.Я., Иванов А.О., Нецветаев Н.Ю., Харламов В.М. Элементарная топология — М.: МЦНМО, 2012