

Домашние задания по курсу «Математическая логика»

ИТМО, группы М3234..М3239
Весна 2018 г.

Общие замечания

Для всех программ кодировка входных и выходных файлов должна быть UTF8. Задания подаются в систему Яндекс.контест, подробные описания — по ссылке из README.md. Для компиляции решения требуется использования мэйкфайлов, краткое описание принципов построения мэйкфайлов находится в файле make.pdf из данного репозитория.

Задача 0. Разбор выражения

Стоимость: 0 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 0 баллов

Данная задача разобрана, решения её приведены (см. README.md), однако, мы крайне рекомендуем написать своё её решение по двум причинам: (а) разбор высказываний можно будет переиспользовать в других задачах; (б) можно протестировать среду исполнения на Яндексе.

На вход программе (в файле `input.txt`) подаётся выражение в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}\langle \text{файл} \rangle &::= \langle \text{выражение} \rangle \\ \langle \text{выражение} \rangle &::= \langle \text{дизъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle \text{'->'} \langle \text{выражение} \rangle \\ \langle \text{дизъюнкция} \rangle &::= \langle \text{конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{дизъюнкция} \rangle \text{'|'} \langle \text{конъюнкция} \rangle \\ \langle \text{конъюнкция} \rangle &::= \langle \text{отрицание} \rangle \mid \langle \text{конъюнкция} \rangle \text{'\&'} \langle \text{отрицание} \rangle \\ \langle \text{отрицание} \rangle &::= (\text{'A'} \dots \text{'Z'}) \{ (\text{'A'} \dots \text{'Z'} \mid \text{'0'} \dots \text{'9'})^* \mid \text{'!'} \langle \text{отрицание} \rangle \mid \text{'('} \langle \text{выражение} \rangle \text{'('} \end{aligned}$$

Пробелы, символы табуляции и возврата каретки (ASCII-код 13₁₀) должны игнорироваться. Символ '(' имеет ASCII-код 124₁₀.

Написать программу, разбирающую выражение и строящую его дерево разбора, и выводящую полученное дерево в файл `output.txt` в следующей грамматике.

$$\begin{aligned}\langle \text{файл} \rangle &::= \langle \text{вершина} \rangle \\ \langle \text{вершина} \rangle &::= \text{'('} \langle \text{знак} \rangle \text{' , ' } \langle \text{вершина} \rangle \text{' , ' } \langle \text{вершина} \rangle \text{') ' } \\ &\quad \mid \text{'('} \langle \text{вершина} \rangle \text{') ' } \\ &\quad \mid (\text{'A'} \dots \text{'Z'}) \{ (\text{'A'} \dots \text{'Z'} \mid \text{'0'} \dots \text{'9'})^* \} \\ \langle \text{знак} \rangle &::= \text{'\&'} \mid \text{'|'} \mid \text{'->'} \end{aligned}$$

Пример входного файла:

P->!QQ->!R10&S|!T&U&V

Выходной файл для данного входного файла:

(->,P,(->,(!QQ),(|,(&,(!R10),S),(&,(&,(!T),U),V))))

Задача 1. Проверка вывода

Стоимость: 7 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 9 баллов

Написать программу, проверяющую вывод $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$ в исчислении высказываний на корректность. Входной файл соответствует следующей грамматике, нетерминал $\langle \text{выражение} \rangle$ определён в грамматике из задачи 0:

$$\begin{aligned}\langle \text{файл} \rangle &::= \langle \text{заголовок} \rangle \backslash \mathbf{n} \{ \langle \text{выражение} \rangle \backslash \mathbf{n} \}^* \\ \langle \text{заголовок} \rangle &::= [\langle \text{выражение} \rangle \{ \text{'}, \text{' } \langle \text{выражение} \rangle \}^*] \text{' } | \text{' } \langle \text{выражение} \rangle\end{aligned}$$

В первой строке входного файла (заголовок) перечислены предположения γ_i (этот список может быть пустым) и доказываемое утверждение α . В последующих строках указаны формулы, составляющие вывод формулы α . Пробелы, символы табуляции и возврата каретки (ASCII-код 13₁₀) должны игнорироваться. Символ ' | ' имеет ASCII-код 124₁₀.

Результатом работы программы должен быть файл с проаннотированным текстом доказательства, в котором первая строка — это заголовок из входного файла, каждая же последующая строка — соответствующая строка из вывода, расширенная в соответствии с грамматикой:

$$\begin{aligned}\langle \text{строка} \rangle &::= \text{' } (\langle \text{номер} \rangle \text{' }) \text{' } \langle \text{выражение} \rangle \text{' } (\langle \text{аннотация} \rangle \text{' }) \text{' } \\ \langle \text{аннотация} \rangle &::= \text{'Сх. акс. } \langle \text{номер} \rangle \\ &\quad | \text{'Предп. } \langle \text{номер} \rangle \\ &\quad | \text{'М.Р. } \langle \text{номер} \rangle \text{'}, \text{' } \langle \text{номер} \rangle \\ &\quad | \text{'Не доказано'} \\ \langle \text{номер} \rangle &::= \{ \text{'0'} \dots \text{'9'} \}^+\end{aligned}$$

Выражение не должно содержать пробелов, номер от выражения и выражение от аннотации должны отделяться одним пробелом. Выражения в доказательстве должны нумероваться подряд натуральными числами с 1. Если выражение δ_n получено из δ_i и δ_j , где $\delta_j \equiv \delta_i \rightarrow \delta_n$ путём применения правила Modus Ponens, то аннотация должна выглядеть как 'М.Р. i, j ', обратный порядок номеров не допускается.

Ограничения

Количество строк в файле не превосходит 52000.

Размер файла не превосходит 10 мегабайт.

Пример 1:

Входной файл:

A,B | -A&B
A
B
A->B->A&B
B->A&B
A&B

Выходной файл:

(1) A (Предп. 1)
(2) B (Предп. 2)
(3) (A->(B->(A&B))) (Сх. акс. 3)
(4) (B->(A&B)) (М.Р. 3, 1)
(5) (A&B) (М.Р. 4, 2)

Пример 2:

Входной файл:

A,B | -A&B
A
B
(A->(B->(A&B)))
(B->(A&B))
(A->A)
(A&B)

Выходной файл:

(1) A (Предп. 1)
(2) B (Предп. 2)
(3) (A->(B->(A&B))) (Сх. акс. 3)
(4) (B->(A&B)) (М.Р. 3, 1)
(5) (A->A) (Не доказано)
(6) (A&B) (М.Р. 4, 2)

Пример 3:

Входной файл:

```
| -A->A
(A->A->A)->(A->(A->A)->A)->(A->A)
(A->A->A)
(A->(A->A)->A)
(A->(A->A)->A)->(A->A)
A->A
```

Выходной файл:

```
(1) (A->A->A)->(A->(A->A)->A)->A->A (Сх. акс. 2)
(2) A->A->A (Сх. акс. 1)
(3) A->(A->A)->A (Сх. акс. 1)
(4) (A->(A->A)->A)->A->A (М.Р. 1, 2)
(5) A->A (М.Р. 4, 3)
```

Задача 2. Теорема о дедукции

Стоимость: 4 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 6 баллов

Написать программу, преобразующую вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Входной файл удовлетворяет грамматике из предыдущего задания, в заголовке обязательно должно присутствовать как минимум одно предположение.

Результатом работы программы должен быть текст, содержащий преобразованный вывод. Формат выходного файла совпадает с форматом входного файла. Вы можете предполагать, что входной файл содержит корректный вывод требуемой формулы.

Задача 3. Теорема о полноте исчисления высказываний

Стоимость: 10 баллов, решение на Ocaml или Haskell: 13 баллов

Будем называть формулу классического исчисления высказываний ϕ *логическим следствием* формул $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (и записывать это как $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \phi$), если для любой оценки пропозициональных переменных M , такой, что $\llbracket \gamma_k \rrbracket_M = \text{И}$, выполнено $\llbracket \phi \rrbracket_M = \text{И}$. Иными словами, формула ϕ истинна всегда, когда истинны все γ_k .

Написать программу, проверяющую $\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \phi$ и строящую доказательство $\gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \phi$ в случае успешной проверки, либо строящую контрпример в случае неуспеха.

Входной файл состоит из единственной строки:

$$[\{ \langle \text{выражение} \rangle ' , ' \}^* \langle \text{выражение} \rangle] ' | = ' \langle \text{выражение} \rangle$$

Выходной файл должен либо содержать доказательство высказывания (в формате входного файла из первого задания), либо содержать фразу, удовлетворяющую грамматике:

$$\begin{aligned} \langle \text{строка} \rangle &::= \text{'Высказывание ложно при ' } \langle \text{назначение} \rangle \{ ' , ' \langle \text{назначение} \rangle \}^* \\ \langle \text{назначение} \rangle &::= \langle \text{переменная} \rangle ' = ' (' \text{И} ' \mid ' \text{Л} ') \end{aligned}$$

Пример 1:

Входной файл:

```
|=!A&!B
```

Выходной файл:

```
Высказывание ложно при A=И, B=Л
```

Пример 2:

Входной файл:

```
B,W|A->B
```

Выходной файл:

```
B,W| -A->B
B->A->B
B
A->B
```