

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, весна 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции): $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Например, если было показано существование вывода $A \vdash A$, то тогда теорема гарантирует и существование вывода $\vdash A \rightarrow A$.

1. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e) $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$
- (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (правило контрапозиции)
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \& B)$
- (e) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (f) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (g) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (закон Пирса)

4. Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой: $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ и $A \rightarrow (B \rightarrow C)$? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку).

5. Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению.

- (a) связка «и-не» («штрих шепфера», “|”): $A | B$ истинно, когда один из аргументов ложен. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления. Поясним, что мы понимаем под словами «исключить связку». Как вы знаете, конъюнкция и отрицание выражаются через «и-не» ($\neg\alpha := \alpha | \alpha$ и т.п.). При такой замене все схемы аксиом для конъюнкции и отрицания должны стать теоремами. При этом исчисление должно остаться корректным относительно классической модели исчисления высказываний.
- (b) связка «или-не» («стрелка пирса», “ \downarrow ”): $A \downarrow B$ истинно, когда оба аргумента ложны. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.
- (c) Нуль-местная связка «ложь» (“ \perp ”). Мы ожидаем вот такую замену: $\neg A := A \rightarrow \perp$. Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.

6. Достаточно ли лжи и «исключённого или» ($A \oplus B$ истинно, когда $A \neq B$) для выражения всех остальных связок?

7. Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$ и $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$.

8. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о исчислении высказываний. Интуиционистская логика.

- Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.
- Покажите, что следующие высказывания не доказуемы в интуиционистской логике:
 - $\neg\neg A \rightarrow A$
 - $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
 - $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
 - $(A \rightarrow B \vee \neg B) \vee (\neg A \rightarrow B \vee \neg B)$
 - $\bigvee_{i=0, n-1} A_i \rightarrow A_{(i+1)\%n}$
- Выполнены ли формулы де Моргана в интуиционистской логике? Докажите или опровергните.
 - $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \& \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$
 - $\neg\alpha \& \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \& \neg\beta$
 - $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку \star , что $\vdash A \star B \rightarrow \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \rightarrow A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:
 - \star — конъюнкция;
 - \star — дизъюнкция;
 - \star — импликация;
 - \star — отрицание.
- Существует несколько схожих вариантов аксиомы исключённого третьего. Не пользуясь 10 схемой аксиом, покажите следующее:
 - $\alpha \vee \neg\alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta \vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
 - $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- Рассмотрим несколько моделей троичной логики. Логика похожа истинностными значениями ($V = \{-1, 0, 1\}$, истиной считаем 1) и определением большинства операций: $\llbracket A \& B \rrbracket = \max(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$, $\llbracket A \vee B \rrbracket = \min(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$, $\llbracket \neg A \rrbracket = -\llbracket A \rrbracket$. Отличаются логики определением импликации (ниже), и в одном случае — определением отрицания. Про каждую из них ответьте на четыре вопроса: являются ли они корректными и/или полными моделями классического и/или интуиционистского исчисления высказываний.
 - Сильная логика неопределённости Клини: $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket = \llbracket \neg A \vee B \rrbracket$.
 - Троичная логика Лукасевича: $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket = \min(1, 1 - \llbracket A \rrbracket + \llbracket B \rrbracket)$
 - Логика Гёделя G_3 :

$$\llbracket \neg A \rrbracket = \begin{cases} 1, & \llbracket A \rrbracket = -1 \\ -1, & \text{иначе} \end{cases} \quad \llbracket A \rightarrow B \rrbracket = \begin{cases} 1, & \llbracket A \rrbracket \leq \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket B \rrbracket, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Изоморфизм Карри-Ховарда — соответствие между интуиционистским исчислением высказываний, с одной стороны, и языками программирования, с другой. А именно, можно заметить, что программа соответствует доказательству, тип программы — логическому высказыванию. Связки (как составные части логического высказывания) соответствуют определённым типовым конструкциям: функция — импликация, конъюнкция — упорядоченной паре, дизъюнкция — алгебраическому типу (`std::variant` и т.п.).

Например, функция `A id(A x) { return x; }` доказывает $A \rightarrow A$, а функция

```
std::pair<A,B> swap(std::pair<B,A> x) { return std::pair(x.second, x.first); }
```

доказывает $B \& A \rightarrow A \& B$.

Ложь выражается менее очевидно. Давайте за ложь мы возьмём выражение, имеющее тип несвязанного типового параметра (идея в том, чтобы данное выражение легко приводилось бы к любому типу: из лжи следует всё, что угодно). Данный код доказывает $\neg Z$, то есть $Z \rightarrow \perp$:

```
template <class A>
A negate(Z x) { throw ("Value of type Z is impossible"); }
```

Конечно, в смысле изоморфизма Карри-Ховарда большинство языков программирования противоречивы.

В завершение теоретической части заметим, что в свете ВНК-интерпретации в изоморфизме Карри-Ховарда нет ничего странного: если под конструкцией мы понимаем тип, то любое значение типа — это метод построения конструкции (типы, значения которых можно построить, мы будем называть *обитаемыми*), а функция — это способ перестроения одного значения в другое.

Докажите следующие утверждения, написав соответствующую программу:

- (a) $A \rightarrow B \rightarrow A$
- (b) $A \& B \rightarrow A \vee B$
- (c) $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$
- (d) $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \& A \vee B \rightarrow C$
- (e) $(B \vee C \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \& (C \rightarrow A)$
- (f) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- (g) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- (h) $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
- (i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.
- (j) \perp