

# Лямбда-исчисление

# Лямбда-исчисление, синтаксис

$$\Lambda ::= (\lambda x. \Lambda) | (\Lambda \ \Lambda) | x$$

Мета-язык:

- ▶ Мета-переменные:
  - ▶  $A \dots Z$  — мета-переменные для термов.
  - ▶  $x, y, z$  — мета-переменные для переменных.
- ▶ Правила расстановки скобок аналогичны правилам для кванторов:
  - ▶ Лямбда-выражение ест всё до конца строки
  - ▶ Аппликация левоассоциативна

Пример

- ▶  $a \ b \ c \ (\lambda d. e \ f \ \lambda g. h) \ i \equiv \left( \left( (a \ b) \ c \right) \left( \lambda d. ((e \ f) (\lambda g. h)) \right) \right) i$
- ▶  $0 := \lambda f. \lambda x. x; \quad (+1) := \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x); \quad (+2) := \lambda x. (+1) \ ((+1) \ x)$

## Альфа-эквивалентность

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\}, & A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q), & A \equiv P Q \\ FV(P) \setminus \{x\}, & A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

Примеры:

- ▶  $M := \lambda b. \lambda c. a \ c \ (b \ c); FV(M) = \{a\}$
- ▶  $N := x \ (\lambda x. (x \ (\lambda y. x))); FV(N) = \{x\}$

### Определение

$A =_{\alpha} B$ , если и только если выполнено одно из трёх:

1.  $A \equiv x, B \equiv y, x \equiv y$ ;
2.  $A \equiv P_a Q_a, B \equiv P_b Q_b$  и  $P_a =_{\alpha} P_b, Q_a =_{\alpha} Q_b$ ;
3.  $A \equiv (\lambda x. P), B \equiv (\lambda y. Q), P[x := t] =_{\alpha} Q[y := t]$ , где  $t$  не входит в  $A$  и  $B$ .

### Определение

$$L = \Lambda / =_{\alpha}$$

## Альфа-эквивалентность, пример

1.  $A \equiv x, B \equiv y, x \equiv y$ ;
2.  $A \equiv P_a Q_a, B \equiv P_b Q_b$  и  $P_a =_\alpha P_b, Q_a =_\alpha Q_b$ ;
3.  $A \equiv (\lambda x.P), B \equiv (\lambda y.Q), P[x := t] =_\alpha Q[y := t]$ , где  $t \notin FV(A) \cup FV(B)$

Лемма

$$\lambda a. \lambda b. a \ b =_\alpha \lambda b. \lambda a. b \ a$$

Доказательство.

$t$	$=_\alpha$	$t$	Правило 1
$s$	$=_\alpha$	$s$	Правило 1
$t \ s$	$=_\alpha$	$t \ s$	Правило 2
$\lambda b. (t \ b)$	$=_\alpha$	$\lambda a. (t \ a)$	Правило 3
$\lambda a. \lambda b. (a \ b)$	$=_\alpha$	$\lambda b. \lambda a. (b \ a)$	Правило 3



## Бета-редукция

Интуиция: вызов функции.

$\lambda$ -выражение	Python
$\lambda f.\lambda x.f\ x$	<code>def one(f,x): return f(x)</code>
$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$	<code>(lambda x: x x) (lambda x: x x)</code>
	<code>def omega(x): return x(x); omega(omega)</code>

## Бета-редукция

Интуиция: вызов функции.

$\lambda$ -выражение	Python
$\lambda f.\lambda x.f\ x$	<code>def one(f,x): return f(x)</code>
$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$	<code>(lambda x: x x) (lambda x: x x)</code>
	<code>def omega(x): return x(x); omega(omega)</code>

## Определение

Терм вида  $(\lambda x.P)\ Q$  — бета-редекс.

## Определение

$A \rightarrow_\beta B$ , если:

1.  $A \equiv (\lambda x.P)\ Q$ ,  $B \equiv P\ [x := Q]$ , при условии свободы для подстановки;
2.  $A \equiv (P\ Q)$ ,  $B \equiv (P'\ Q')$ , при этом  $P \rightarrow_\beta P'$  и  $Q = Q'$ , либо  $P = P'$  и  $Q \rightarrow_\beta Q'$ ;
3.  $A \equiv (\lambda x.P)$ ,  $B \equiv (\lambda x.P')$ , и  $P \rightarrow_\beta P'$ .

# Бета-редукция, пример

Пример

$$(\lambda x. x \ x) (\lambda n. n) \rightarrow_{\beta} (\lambda n. n) (\lambda n. n) \rightarrow_{\beta} \lambda n. n$$

Пример

$$(\lambda x. x \ x) (\lambda x. x \ x) \rightarrow_{\beta} (\lambda x. x \ x) (\lambda x. x \ x)$$

# Нормальная форма

## Определение

Лямбда-терм  $N$  находится в нормальной форме, если нет  $Q: N \rightarrow_{\beta} Q$ .

## Пример

В нормальной форме:

$\lambda f. \lambda x. x (f (f \lambda g. x))$



# Нормальная форма

## Определение

Лямбда-терм  $N$  находится в нормальной форме, если нет  $Q: N \rightarrow_{\beta} Q$ .

## Пример

В нормальной форме:

$\lambda f.\lambda x.x (f (f \lambda g.x))$

## Пример

Не в нормальной форме (редексы подчёркнуты):

$\lambda f.\lambda x.(\lambda g.x) (f (f x))$   
 $((\lambda x.x) (\lambda x.x))$   $((\lambda x.x) (\lambda x.x))$

## Определение

$(\rightarrow_{\beta})$  — транзитивное и рефлексивное замыкание  $(\rightarrow_{\beta})$ .

## Булевские значения

$T := \lambda x. \lambda y. x$   $F := \lambda x. \lambda y. y$

Тогда:  $Or := \lambda a. \lambda b. a \ T \ b$ :

$$\begin{aligned} Or \ F \ T &= ((\lambda a. \lambda b. a \ T \ b) \ F) \ T \rightarrow_{\beta} (\lambda b. F \ T \ b) \ T \rightarrow_{\beta} F \ T \ T = \\ &= (\lambda x. \lambda y. y) \ T \ T \rightarrow_{\beta} (\lambda y. y) \ T \rightarrow_{\beta} T \end{aligned}$$

## Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

### Определение

Чёрчевский нумерал  $\bar{n} = f^{(n)}(x)$

### Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент:  $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$

$$(\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ \bar{0} = (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta}$$

## Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

### Определение

Чёрчевский нумерал  $\bar{n} = f^{(n)}(x)$

### Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент:  $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$

$$\begin{aligned} (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ \bar{0} &= (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x') \ f \ (f \ x) &\rightarrow_{\beta} \end{aligned}$$

## Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

### Определение

Чёрчевский нумерал  $\bar{n} = f^{(n)}(x)$

### Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент:  $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$

$$\begin{aligned} (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ \bar{0} &= (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x') \ f \ (f \ x) &\rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda x'. x') \ (f \ x) &\rightarrow_{\beta} \end{aligned}$$

## Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

### Определение

Чёрчевский нумерал  $\bar{n} = f^{(n)}(x)$

### Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент:  $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$

$$\begin{aligned} (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ \bar{0} &= (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x') \ f \ (f \ x) &\rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda x'. x') \ (f \ x) &\rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. f \ x &= \bar{1} \end{aligned}$$

## Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

### Определение

Чёрчевский нумерал  $\bar{n} = f^{(n)}(x)$

### Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент:  $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$

$$\begin{aligned} (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ \bar{0} &= (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)) \ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x') \ f \ (f \ x) &\rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda x'. x') \ (f \ x) &\rightarrow_{\beta} \\ \dots \lambda f. \lambda x. f \ x &= \bar{1} \end{aligned}$$

Декремент:  $Dec = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ (\lambda g. \lambda h. h \ (g \ f)) \ (\lambda u. x) \ (\lambda u. u)$

## Упорядоченная пара и алгебраический тип

### Определение

$Pair(a, b) := \lambda s. s \ a \ b$

$Fst := \lambda p. p \ T$

$Snd := \lambda p. p \ F$

### Пример

$Fst(Pair(a, b)) = (\lambda p. p \ T) \ \lambda s. s \ a \ b \twoheadrightarrow_{\beta} (\lambda s. s \ a \ b) \ T \twoheadrightarrow_{\beta} a$

### Определение

$InL \ L := \lambda p. \lambda q. p \ L$

$InR \ R := \lambda p. \lambda q. q \ R$

$Case \ t \ f \ g := t \ f \ g$



# Теорема Чёрча-Россера

## Теорема (Чёрча-Россера)

Для любых термов  $N, P, Q$ , если  $N \twoheadrightarrow_{\beta} P$ ,  $N \twoheadrightarrow_{\beta} Q$ , и  $P \neq Q$ , то найдётся  $T$ :  $P \twoheadrightarrow_{\beta} T$  и  $Q \twoheadrightarrow_{\beta} T$ .

## Теорема

Если у терма  $N$  существует нормальная форма, то она единственна

## Доказательство.

Пусть не так и  $N \twoheadrightarrow_{\beta} P$  вместе с  $N \twoheadrightarrow_{\beta} Q$ ,  $P \neq Q$ . Тогда по теореме Чёрча-Россера существует  $T$ :  $P \twoheadrightarrow_{\beta} T$  и  $Q \twoheadrightarrow_{\beta} T$ , причём  $T \neq P$  или  $T \neq Q$  в силу транзитивности ( $\twoheadrightarrow_{\beta}$ ) □

## Бета-эквивалентность, неподвижная точка

### Пример

$\Omega = (\lambda x. x \ x) (\lambda x. x)$  не имеет нормальной формы:  $\Omega \rightarrow_\beta \Omega$

### Определение

$(=_\beta)$  — транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание  $(\rightarrow_\beta)$ .

### Теорема

Для любого терма  $N$  найдётся такой терм  $R$ , что  $R =_\beta N \ R$ .

### Доказательство.

Пусть  $Y = \lambda f. (\lambda x. f \ (x \ x)) (\lambda x. f \ (x \ x))$ . Тогда  $R := Y \ N$ :

$$Y \ N =_\beta (\lambda x. N \ (\textcolor{red}{x} \ \textcolor{blue}{x})) (\lambda x. N \ (x \ x)) =_\beta N \ ((\lambda x. \textcolor{red}{N} \ (\textcolor{red}{x} \ \textcolor{red}{x})) (\lambda x. \textcolor{blue}{N} \ (\textcolor{blue}{x} \ \textcolor{blue}{x})))$$



# Просто-типизированное лямбда-исчисление

## Определение

*Импликационный фрагмент интуиционистской логики:*

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

## Определение

*Просто-типизированное лямбда-исчисление.*

# Просто-типизированное лямбда-исчисление

## Определение

*Импликационный фрагмент интуиционистской логики:*

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

## Определение

*Просто-типизированное лямбда-исчисление. Типы:  $\tau ::= \alpha | (\tau \rightarrow \tau)$ .*

# Просто-типизированное лямбда-исчисление

## Определение

*Импликационный фрагмент интуиционистской логики:*

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

## Определение

*Просто-типизированное лямбда-исчисление. Типы:  $\tau ::= \alpha | (\tau \rightarrow \tau)$ . Язык:*

$\Gamma \vdash A : \varphi$

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

## Пример: тип чёрчевских нумералов

Пусть  $\Gamma = f : \alpha \rightarrow \alpha, x : \alpha$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash f : \alpha \rightarrow \alpha} \text{Ax}}{\overline{\{f : \alpha \rightarrow \alpha, x : \alpha\} \Gamma \vdash f (f x) : \alpha} \text{App}}}{f : \alpha \rightarrow \alpha \vdash \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha)} \lambda}{\vdash \lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)} \lambda$$

# Изоморфизм Карри-Ховарда

$\lambda$ -исчисление	исчисление высказываний
Выражение	доказательство
Тип выражения	высказывание
Тип функции	импликация
Упорядоченная пара	Конъюнкция
Алгебраический тип	Дизъюнкция
Необитаемый тип	Ложь

# Изоморфизм Карри-Ховарда: отрицание

## Определение

Ложь ( $\perp$ ) — необитаемый тип;  $failwith/raise/throw : \alpha \rightarrow \perp$ ;  $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$

Например, контрапозиция:  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Phi \vdash f : \alpha \rightarrow \beta} \text{ Ax} \quad \overline{\Phi \vdash a : \alpha} \text{ Ax}}{\Phi \vdash f a : \beta} \text{ App} \quad \overline{\Phi \vdash n : \beta \rightarrow \perp} \text{ Ax}}{\frac{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp, a : \alpha \vdash n (f a) : \perp}{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp \vdash \lambda a^\alpha. n (f a) : \neg\alpha} \lambda} \text{ Ax} \text{ App}}{\frac{f : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda n^{\beta \rightarrow \perp}. \lambda a^\alpha. n (f a) : \neg\beta \rightarrow \neg\alpha}{\lambda f^{\alpha \rightarrow \beta}. \lambda n^{\beta \rightarrow \perp}. \lambda a^\alpha. n (f a) : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)} \lambda} \lambda$$

Снятие двойного отрицания:  $((\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha$ , то есть  $\lambda f^{(\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp}. ? : \alpha$ .

$f$  угадывает, что передать  $x : \alpha \rightarrow \perp$ . Тогда надо по  $f$  угадать, что передать  $x$ .



# Исчисление по Чёрчу и по Карри

## Определение

*Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.*

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

*Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.*

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

# Исчисление по Чёрчу и по Карри

## Определение

*Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.*

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

*Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.*

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

## Пример

По Карри	По Чёрчу
$\lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	$\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}. \lambda x^{\alpha}. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$

# Исчисление по Чёрчу и по Карри

## Определение

*Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.*

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

*Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.*

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

## Пример

По Карри	По Чёрчу
$\lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	$\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}. \lambda x^{\alpha}. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$
$\lambda f. \lambda x. f (f x) : (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$	$\lambda f^{\beta \rightarrow \beta}. \lambda x^{\beta}. f (f x) : (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta)$

# Комбинаторы $S, K$

## Определение

*Комбинатор — лямбда-терм без свободных переменных*

## Определение

$S := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z), \ K := \lambda x. \lambda y. x, \ I := \lambda x. x$

## Теорема

*Пусть  $N$  — некоторый замкнутый лямбда-терм. Тогда найдётся выражение  $C$ , состоящее из комбинаторов  $S, K$ , что  $N =_{\beta} C$*

# Комбинаторы S, K

## Определение

*Комбинатор — лямбда-терм без свободных переменных*

## Определение

$S := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z), \ K := \lambda x. \lambda y. x, \ I := \lambda x. x$

## Теорема

*Пусть  $N$  — некоторый замкнутый лямбда-терм. Тогда найдётся выражение  $C$ , состоящее из комбинаторов  $S, K$ , что  $N =_{\beta} C$*

## Пример

$K := \lambda x^{\alpha}. \lambda y^{\beta}. x$

$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$

$S := \lambda x^{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma}. \lambda y^{\alpha \rightarrow \beta}. \lambda z^{\alpha}. x \ z \ (y \ z) \quad (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$

$I =_{\beta} S \ K \ K$

Дальнейшее развитие: изоморфизм Карри-Ховарда и вокруг него

## Исчисление второго порядка

- ▶ Напомним о порядках:

Порядок	Объекты	Пример
0 (И.В.)	Атомарные	$P$
1 (И.П. 1)	Множества	$\{x P(x)\}$
2 (И.П. 2)	Множества множеств	$\{P \forall t.t > 0 \rightarrow P(t)\}$

## Исчисление второго порядка

- ▶ Напомним о порядках:

Порядок	Объекты	Пример
0 (И.В.)	Атомарные	$P$
1 (И.П. 1)	Множества	$\{x P(x)\}$
2 (И.П. 2)	Множества множеств	$\{P \forall t.t > 0 \rightarrow P(t)\}$

- ▶ Можно заменить схемы аксиом на аксиомы:  $\forall a.\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$



## Исчисление второго порядка

- ▶ Напомним о порядках:

Порядок	Объекты	Пример
0 (И.В.)	Атомарные	$P$
1 (И.П. 1)	Множества	$\{x P(x)\}$
2 (И.П. 2)	Множества множеств	$\{P \forall t.t > 0 \rightarrow P(t)\}$

- ▶ Можно заменить схемы аксиом на аксиомы:  $\forall a.\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$
- ▶ Острый угол: импредикативность (формулы могут говорить о себе). Что такое «предикат»? Произвольное выражение, а подстановка — буквальная замена текста? Тогда каково  $\llbracket p(p) \rrbracket$  при  $p(x) = x(x) \rightarrow \perp$ ?

## Исчисление второго порядка

- ▶ Напомним о порядках:

Порядок	Объекты	Пример
0 (И.В.)	Атомарные	$P$
1 (И.П. 1)	Множества	$\{x P(x)\}$
2 (И.П. 2)	Множества множеств	$\{P \forall t.t > 0 \rightarrow P(t)\}$

- ▶ Можно заменить схемы аксиом на аксиомы:  $\forall a.\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$
- ▶ Острый угол: импредикативность (формулы могут говорить о себе). Что такое «предикат»? Произвольное выражение, а подстановка — буквальная замена текста? Тогда каково  $\llbracket p(p) \rrbracket$  при  $p(x) = x(x) \rightarrow \perp$ ?  
Нужна точная формализация.
- ▶ Самый простой вариант: переменные второго порядка — только булевские пропозициональные переменные.

## Исчисление второго порядка

- ▶ Напомним о порядках:

Порядок	Объекты	Пример
0 (И.В.)	Атомарные	$P$
1 (И.П. 1)	Множества	$\{x P(x)\}$
2 (И.П. 2)	Множества множеств	$\{P \forall t.t > 0 \rightarrow P(t)\}$

- ▶ Можно заменить схемы аксиом на аксиомы:  $\forall a.\forall b.a \rightarrow b \rightarrow a$
- ▶ Острый угол: импредикативность (формулы могут говорить о себе). Что такое «предикат»? Произвольное выражение, а подстановка — буквальная замена текста? Тогда каково  $\llbracket p(p) \rrbracket$  при  $p(x) = x(x) \rightarrow \perp$ ?  
Нужна точная формализация.
- ▶ Самый простой вариант: переменные второго порядка — только булевские пропозициональные переменные.

$$\llbracket \forall p.Q \rrbracket = \begin{cases} \text{И}, & \llbracket Q \rrbracket^{p:=\text{И}} = \llbracket Q \rrbracket^{p:=\text{Л}} = \text{И} \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$

# Изоморфизм Карри-Ховарда для логики второго порядка

Типы и значения, зависящие от типов.

► Что такое  $T : \forall x. x \rightarrow x$ ?

# Изоморфизм Карри-Ховарда для логики второго порядка

Типы и значения, зависящие от типов.

► Что такое  $T : \forall x. x \rightarrow x$ ?

```
template <class x> class T { x f (x); }
```

# Изоморфизм Карри-Ховарда для логики второго порядка

Типы и значения, зависящие от типов.

- ▶ Что такое  $T : \forall x. x \rightarrow x$ ?

```
template <class x> class T { x f (x); }
```

- ▶ Что такое  $T : \exists x. \tau(x)$ ?

# Изоморфизм Карри-Ховарда для логики второго порядка

Типы и значения, зависящие от типов.

- ▶ Что такое  $T : \forall x. x \rightarrow x$ ?

```
template <class x> class T { x f (x); }
```

- ▶ Что такое  $T : \exists x. \tau(x)$ ?

Абстрактный тип данных: `interface T { $\tau$ }; f(T x)`

# Зависимые типы

- ▶ Рассмотрим код  
`int n; cin >> n; int arr[n];`  
Каков тип `arr`?



## Зависимые типы

- ▶ Рассмотрим код  
`int n; cin >> n; int arr[n];`  
Каков тип `arr`?
- ▶ `sizeof(arr) = n · sizeof(int)`

## Зависимые типы

- ▶ Рассмотрим код  
`int n; cin >> n; int arr[n];`  
Каков тип `arr`?
- ▶ `sizeof(arr) = n · sizeof(int)`
- ▶  $arr = \prod n^{\text{int}}.\text{int}[n]$

## Зависимые типы

- ▶ Рассмотрим код

```
int n; cin >> n; int arr[n];
```

Каков тип `arr`?

- ▶ `sizeof(arr) = n · sizeof(int)`
- ▶ `arr =  $\prod n^{\text{int}}$ .int[n]`
- ▶ Аналогично, `printf(const char*, ...)` — капитуляция.

## Зависимые типы

- ▶ Рассмотрим код  
`int n; cin >> n; int arr[n];`  
Каков тип `arr`?
- ▶ `sizeof(arr) = n · sizeof(int)`
- ▶ `arr = Πintn.int[n]`
- ▶ Аналогично, `printf(const char*, ...)` — капитуляция.
- ▶ Есть языки, где тип выписывается (например, Идрис).

## Прямолинейное: доказательства в коде

► `Div2: (l: int) -> (even l) -> int`

## Прямолинейное: доказательства в коде

- ▶ `Div2: (l: int) -> (even l) -> int`
- ▶ `even l` — что это?

## Прямолинейное: доказательства в коде

► `Div2: (l: int) -> (even l) -> int`

► `even l` — что это?

►

$$\text{even}(x) ::= \begin{cases} EZ, & x = 0 \\ EP(\text{even}(y)), & x = y'' \end{cases}$$

## Прямолинейное: доказательства в коде

► `Div2: (l: int) -> (even l) -> int`

► `even l` — что это?

►

$$\text{even}(x) ::= \begin{cases} EZ, & x = 0 \\ EP(\text{even}(y)), & x = y'' \end{cases}$$

► `Div2 10 (EP (EP (EP (EP (EP EZ)))))`



## Прямолинейное: доказательства в коде

► `Div2: (l: int) -> (even l) -> int`

► `even l` — что это?



$$\text{even}(x) ::= \begin{cases} EZ, & x = 0 \\ EP(\text{even}(y)), & x = y'' \end{cases}$$

► `Div2 10 (EP (EP (EP (EP (EP EZ))))))`

► А если `Div2 p`? В общем случае сложно.

`Plus2: (l: int) -> (p: even l) -> (l+2, even (l+2)) = (l+2, EP p)`

## Интереснее: доказательства утверждений

Натуральные числа:  $\text{Nat} ::= 0 \mid \text{suc } \text{Nat}$ ,

$$a + b = \begin{cases} a, & b = 0 \\ \text{suc } (a + c), & b = \text{suc } c \end{cases}$$

```
func pmap A B :
```

```
Type (f : A -> B) {a a' : A} (p : a = a') : f a = f a' => ...
```

```
func +-comm (n m : Nat) : n + m = m + n
```

```
| 0, 0 => idp
```

```
| suc n, 0 => pmap suc (+-comm n 0)
```

```
| 0, suc m => pmap suc (+-comm 0 m)
```

```
| suc n, suc m => pmap suc (+-comm (suc n) m *>
```

```
pmap suc (inv (+-comm n m)) *> +-comm n (suc m))
```

# Гомотопическая теория типов

## Определение

*Изоморфизм Карри-Ховарда-Воеводского.*

<i>Логика</i>	<i><math>\lambda</math>-исчисление</i>	<i>Топология</i>
<i>Утверждение</i>	<i>Тип</i>	<i>Пространство</i>
<i>Доказательство</i>	<i>Значение</i>	<i>Точка в пространстве</i>
<i>Предикат (=)</i>	<i>Зависимый тип (=)</i>	<i>Путь между точками</i>

1. Точный смысл равенства.
2. Позволяет легко формулировать утверждения про топологию, гомологическую алгебру и т.п.
3. Можно реализовать (кубическая теория типов). Реализации для Агды, Кока, ..., отдельные языки (Аренд)

Какие вопросы пытаемся решать?

Пример

*Самое простое:  $x = y$ . Почему  $x^2 = y^2$ ?*

# Какие вопросы пытаемся решать?

## Пример

*Самое простое:  $x = y$ . Почему  $x^2 = y^2$ ?*

А что если так  $(a = b) = \{\langle a, b \rangle | a < 10 \ \& \ b < 10\}$ ? Тогда  $5 = 7$ , но  $25 \neq 49$ .

## Какие вопросы пытаемся решать?

### Пример

*Самое простое:  $x = y$ . Почему  $x^2 = y^2$ ?*

А что если так  $(a = b) = \{\langle a, b \rangle | a < 10 \ \& \ b < 10\}$ ? Тогда  $5 = 7$ , но  $25 \neq 49$ .

Постулируется в формальной арифметике: (A2)  $a = b \rightarrow a' = b'$

## Какие вопросы пытаемся решать?

### Пример

Самое простое:  $x = y$ . Почему  $x^2 = y^2$ ?

А что если так  $(a = b) = \{\langle a, b \rangle \mid a < 10 \ \& \ b < 10\}$ ? Тогда  $5 = 7$ , но  $25 \neq 49$ .

Постулируется в формальной арифметике: (A2)  $a = b \rightarrow a' = b'$

### Доказательство.

Путь  $x$  в  $y$  — функция  $f : [0, 1] \rightarrow S$ ,  $f(0) = x$ ,  $f(1) = y$ .  $f(x) = x^2$  — непрерывная функция. Тогда  $f(x^2)$  — тоже непрерывная, то есть  $x^2 = y^2$ . □

# Что ещё

- ▶ Метод резолюций и рядом — Prolog, SMT-солверы,...
- ▶ Можно пытаться совмещать ( $F^*$ , ...)