

# Исчисление предикатов

## Ограничения языка исчисления высказываний

Каждый человек смертен	Сократ есть человек
<hr/>	
Сократ смертен	

# Ограничения языка исчисления высказываний

Каждый человек смертен	Сократ есть человек
<hr/>	
Сократ смертен	

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

# Ограничения языка исчисления высказываний

Каждый человек смертен	Сократ <b>есть</b> человек
<hr/>	
Сократ смертен	

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с **предикатами** ( $P : D \rightarrow V$ ) и **кванторами** ( $\forall x. H(x) \rightarrow S(x)$ ).

$\forall x. H(x) \rightarrow S(x)$	$H(\text{Сократ})$
<hr/>	
$S(\text{Сократ})$	

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

## Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
  - 1.1 Предметные переменные ( $x$ ).

## Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
  - 1.1 Предметные переменные ( $x$ ).
  - 1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».

## Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
  - 1.1 Предметные переменные ( $x$ ).
  - 1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
  - 1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» ( $0$ ) и «один» ( $1$ ).



## Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
  - 1.1 Предметные переменные ( $x$ ).
  - 1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
  - 1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» ( $0$ ) и «один» ( $1$ ).
2. Логические выражения
  - 2.1 Предикатные символы «равно» и «больше»

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная  $\theta$ .

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная  $\theta$ .
  - ▶ Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метапеременные  $x, y$ .

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная  $\theta$ .
  - ▶ Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метAPEReменные  $x, y$ .
  - ▶ Функциональные выражения:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменные  $f, g, \dots$

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная  $\theta$ .
  - ▶ Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метAPEReменные  $x, y$ .
  - ▶ Функциональные выражения:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменные  $f, g, \dots$
  - ▶ Примеры:  $r, q(p(x, s), r)$ .

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная  $\theta$ .
  - ▶ Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метAPEReменные  $x, y$ .
  - ▶ Функциональные выражения:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменные  $f, g, \dots$
  - ▶ Примеры:  $r, q(p(x, s), r)$ .
3. Логические выражения: метAPEReменные  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .
  - ▶ Предикатные выражения:  $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменная  $P$ .

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная  $\theta$ .
  - ▶ Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метAPEReменные  $x, y$ .
  - ▶ Функциональные выражения:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменные  $f, g, \dots$
  - ▶ Примеры:  $r, q(p(x, s), r)$ .
3. Логические выражения: метAPEReменные  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .
  - ▶ Предикатные выражения:  $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменная  $P$ .  
Имена:  $A, B, C, \dots$



# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPEReменная  $\theta$ .
  - ▶ Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метAPEReменные  $x, y$ .
  - ▶ Функциональные выражения:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменные  $f, g, \dots$
  - ▶ Примеры:  $r, q(p(x, s), r)$ .
3. Логические выражения: метAPEReменные  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .
  - ▶ Предикатные выражения:  $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPEReменная  $P$ .  
Имена:  $A, B, C, \dots$
  - ▶ Связки:  $(\varphi \vee \psi), (\varphi \& \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi)$ .

# Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метAPERменная  $\theta$ .
  - ▶ Предметные переменные:  $a, b, c, \dots$ , метAPERменные  $x, y$ .
  - ▶ Функциональные выражения:  $f(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPERменные  $f, g, \dots$
  - ▶ Примеры:  $r, q(p(x, s), r)$ .
3. Логические выражения: метAPERменные  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ .
  - ▶ Предикатные выражения:  $P(\theta_1, \dots, \theta_n)$ , метAPERменная  $P$ .  
Имена:  $A, B, C, \dots$
  - ▶ Связки:  $(\varphi \vee \psi), (\varphi \& \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\neg \varphi)$ .
  - ▶ Кванторы:  $(\forall x. \varphi)$  и  $(\exists x. \varphi)$ .

# Сокращения записи, метаязык

## 1. Метаварьиные:

- ▶  $\psi, \phi, \pi, \dots$  — формулы
- ▶  $P, Q, \dots$  — предикатные символы
- ▶  $\theta, \dots$  — термы
- ▶  $f, g, \dots$  — функциональные символы
- ▶  $x, y, \dots$  — предметные переменные

# Сокращения записи, метаязык

## 1. Метаварьиные:

- ▶  $\psi, \phi, \pi, \dots$  — формулы
- ▶  $P, Q, \dots$  — предикатные символы
- ▶  $\theta, \dots$  — термы
- ▶  $f, g, \dots$  — функциональные символы
- ▶  $x, y, \dots$  — предметные переменные

## 2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$\underbrace{(\forall a. A \vee B \vee C \rightarrow \underbrace{\exists b. D \& \neg E}_{\exists b \dots}) \& F}_{\forall a \dots}$$

# Сокращения записи, метаязык

## 1. Метаварьиные:

- ▶  $\psi, \phi, \pi, \dots$  — формулы
- ▶  $P, Q, \dots$  — предикатные символы
- ▶  $\theta, \dots$  — термы
- ▶  $f, g, \dots$  — функциональные символы
- ▶  $x, y, \dots$  — предметные переменные

## 2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$\underbrace{(\forall a. A \vee B \vee C \rightarrow \underbrace{\exists b. D \& \neg E}_{\exists b \dots}) \& F}_{\forall a \dots}$$

## 3. Дополнительные обозначения при необходимости:

- ▶  $(\theta_1 = \theta_2)$  вместо  $E(\theta_1, \theta_2)$
- ▶  $(\theta_1 + \theta_2)$  вместо  $p(\theta_1, \theta_2)$
- ▶  $0$  вместо  $z$
- ▶  $\dots$

## Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

## 1. Истинностные (логические) значения:

- 1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

## 1. Истинностные (логические) значения:

- 1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
- 1.2 логические связки и кванторы.



# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

## 1. Истинностные (логические) значения:

- 1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
- 1.2 логические связки и кванторы.

## 2. Предметные значения:

- 2.1 предметные переменные;

# Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

## 1. Истинностные (логические) значения:

- 1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
- 1.2 логические связки и кванторы.

## 2. Предметные значения:

- 2.1 предметные переменные;
- 2.2 функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

*Оценка — упорядоченная четвёрка  $\langle D, F, T, E \rangle$ , где:*

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка  $\langle D, F, T, E \rangle$ , где:

1.  $D$  — предметное множество;

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка  $\langle D, F, T, E \rangle$ , где:

1.  $D$  — предметное множество;
2.  $F$  — оценка для функциональных символов; пусть  $f_n$  —  $n$ -местный функциональный символ:

$$F_{f_n} : D^n \rightarrow D$$

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка  $\langle D, F, T, E \rangle$ , где:

1.  $D$  — предметное множество;
2.  $F$  — оценка для функциональных символов; пусть  $f_n$  —  $n$ -местный функциональный символ:

$$F_{f_n} : D^n \rightarrow D$$

3.  $T$  — оценка для предикатных символов; пусть  $P_n$  —  $n$ -местный предикатный символ:

$$T_{P_n} : D^n \rightarrow V$$

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка  $\langle D, F, T, E \rangle$ , где:

1.  $D$  — предметное множество;
2.  $F$  — оценка для функциональных символов; пусть  $f_n$  —  $n$ -местный функциональный символ:

$$F_{f_n} : D^n \rightarrow D$$

3.  $T$  — оценка для предикатных символов; пусть  $P_n$  —  $n$ -местный предикатный символ:

$$T_{P_n} : D^n \rightarrow V \quad V = \{И, Л\}$$

# Оценка исчисления предикатов

## Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка  $\langle D, F, T, E \rangle$ , где:

1.  $D$  — предметное множество;
2.  $F$  — оценка для функциональных символов; пусть  $f_n$  —  $n$ -местный функциональный символ:

$$F_{f_n} : D^n \rightarrow D$$

3.  $T$  — оценка для предикатных символов; пусть  $P_n$  —  $n$ -местный предикатный символ:

$$T_{P_n} : D^n \rightarrow V \quad V = \{И, Л\}$$

4.  $E$  — оценка для предметных переменных.

$$E(x) \in D$$



## Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=I} = I$$

## Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=I} = I$$

1. Правила для связок  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$  остаются прежние;

## Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=I} = I$$

1. Правила для связок  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$  остаются прежние;
2.  $\llbracket f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = F_{f_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$

## Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=I} = I$$

1. Правила для связок  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$  остаются прежние;
2.  $\llbracket f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = F_{f_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$
3.  $\llbracket P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = T_{P_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$

## Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=I} = I$$

1. Правила для связок  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$  остаются прежние;
2.  $\llbracket f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = F_{f_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$
3.  $\llbracket P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = T_{P_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$
- 4.

$$\llbracket \forall x. \phi \rrbracket = \begin{cases} I, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = I \text{ при всех } t \in D \\ L, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = L \end{cases}$$

## Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$\llbracket \phi \rrbracket \in V, \quad \llbracket Q(x, f(x)) \vee R \rrbracket^{x:=1, f(t):=t^2, R:=I} = I$$

1. Правила для связок  $\vee$ ,  $\&$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$  остаются прежние;

2.  $\llbracket f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = F_{f_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$

3.  $\llbracket P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \rrbracket = T_{P_n}(\llbracket \theta_1 \rrbracket, \llbracket \theta_2 \rrbracket, \dots, \llbracket \theta_n \rrbracket)$

4.

$$\llbracket \forall x. \phi \rrbracket = \begin{cases} I, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = I \text{ при всех } t \in D \\ L, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = L \end{cases}$$

5.

$$\llbracket \exists x. \phi \rrbracket = \begin{cases} I, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = I \\ L, & \text{если } \llbracket \phi \rrbracket^{x:=t} = L \text{ при всех } t \in D \end{cases}$$

## Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

## Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим оценку:

- ▶  $D := \mathbb{N}$ ;
- ▶  $F_1 := 1$ ,  $F_{(+)}$  — сложение в  $\mathbb{N}$ ;
- ▶  $P_{(=)}$  — равенство в  $\mathbb{N}$ .



## Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим оценку:

- ▶  $D := \mathbb{N}$ ;
- ▶  $F_1 := 1$ ,  $F_{(+)}$  — сложение в  $\mathbb{N}$ ;
- ▶  $P_{(=)}$  — равенство в  $\mathbb{N}$ .

Фиксируем  $x \in \mathbb{N}$ . Тогда:

$$\llbracket x + 1 = y \rrbracket^{y:=x} = \text{Л}$$

## Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим оценку:

- ▶  $D := \mathbb{N}$ ;
- ▶  $F_1 := 1$ ,  $F_{(+)}$  — сложение в  $\mathbb{N}$ ;
- ▶  $P_{(=)}$  — равенство в  $\mathbb{N}$ .

Фиксируем  $x \in \mathbb{N}$ . Тогда:

$$\llbracket x + 1 = y \rrbracket^{y:=x} = \text{Л}$$

поэтому при любом  $x \in \mathbb{N}$ :

$$\llbracket \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket = \text{И}$$

## Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим оценку:

- ▶  $D := \mathbb{N}$ ;
- ▶  $F_1 := 1$ ,  $F_{(+)}$  — сложение в  $\mathbb{N}$ ;
- ▶  $P_{(=)}$  — равенство в  $\mathbb{N}$ .

Фиксируем  $x \in \mathbb{N}$ . Тогда:

$$\llbracket x + 1 = y \rrbracket^{y:=x} = \text{Л}$$

поэтому при любом  $x \in \mathbb{N}$ :

$$\llbracket \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket = \text{И}$$

Итого:

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket = \text{И}$$

Пример (странная интерпретация)

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

## Пример (странная интерпретация)

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим интерпретацию:

- ▶  $D := \{\square\};$
- ▶  $F_{(1)} := \square, F_{(+)}(x, y) := \square;$
- ▶  $P_{(=)}(x, y) := \text{И}.$

## Пример (странная интерпретация)

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим интерпретацию:

- ▶  $D := \{\square\};$
- ▶  $F_{(1)} := \square, F_{(+)}(x, y) := \square;$
- ▶  $P_{(=)}(x, y) := \text{И}.$

Тогда:

$$\llbracket x + 1 = y \rrbracket^{x:=\square, y:=\square} = \text{И}$$

## Пример (странная интерпретация)

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим интерпретацию:

- ▶  $D := \{\square\};$
- ▶  $F_{(1)} := \square, F_{(+)}(x, y) := \square;$
- ▶  $P_{(=)}(x, y) := \mathbb{I}.$

Тогда:

$$\llbracket x + 1 = y \rrbracket^{x \in D, y \in D} = \mathbb{I}$$

## Пример (странный интерпретация)

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket$$

Зададим интерпретацию:

- ▶  $D := \{\square\};$
- ▶  $F_{(1)} := \square, F_{(+)}(x, y) := \square;$
- ▶  $P_{(=)}(x, y) := \text{И}.$

Тогда:

$$\llbracket x + 1 = y \rrbracket^{x \in D, y \in D} = \text{И}$$

Итого:

$$\llbracket \forall x. \exists y. \neg x + 1 = y \rrbracket = \text{Л}$$



# Общезначимость

## Определение

*Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:*

$$\models \phi$$

# Общезначимость

## Определение

*Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:*

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых  $D$ ,  $F$ ,  $P$  и  $E$ .

## Пример: общезначимая формула

### Теорема

$$\llbracket \forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket$$

### Доказательство.

Фиксируем  $D, F, P, E$ .

## Пример: общезначимая формула

### Теорема

$$\llbracket \forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket$$

### Доказательство.

Фиксируем  $D, F, P, E$ . Пусть  $x \in D$ .

## Пример: общезначимая формула

### Теорема

$$\llbracket \forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket$$

### Доказательство.

Фиксируем  $D, F, P, E$ . Пусть  $x \in D$ . Обозначим  $P_Q(F_f(E_x))$  за  $t$ .

## Пример: общезначимая формула

### Теорема

$$\llbracket \forall x. Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket$$

### Доказательство.

Фиксируем  $D, F, P, E$ . Пусть  $x \in D$ . Обозначим  $P_Q(F_f(E_x))$  за  $t$ . Ясно, что  $t \in V$ . Разберём случаи.

- ▶ Если  $t = \text{И}$ , то  $\llbracket Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$ , потому  
 $\llbracket Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$
- ▶ Если  $t = \text{Л}$ , то  $\llbracket \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$ , потому всё равно  
 $\llbracket Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x)) \rrbracket^{Q(f(x)):=t} = \text{И}$



# Свободные вхождения

## Определение

*Вхождение подформулы в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.*

Вхождения  $x$  в формулу:  $(\forall x.A(x) \vee \exists x.B(x)) \vee C(x)$

## Определение

*Рассмотрим формулу  $\forall x.\psi$  (или  $\exists x.\psi$ ). Здесь переменная  $x$  связана в  $\psi$ . Все вхождения переменной  $x$  в  $\psi$  — связанные.*

## Определение

*Вхождение  $x$  в  $\psi$  свободное, если не находится в области действия никакого квантора по  $x$ . Переменная входит свободно в  $\psi$ , если имеет хотя бы одно свободное вхождение.  $FV(\psi), FV(\Gamma)$  — множества свободных переменных в  $\psi$ , в  $\Gamma$*

## Пример

$\exists y.(\forall x.P(x)) \vee P(x) \vee Q(y)$

## Подстановка, свобода для подстановки

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \neq x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \neq x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \neq x \end{cases}$$

### Определение

Терм  $\theta$  свободен для подстановки вместо  $x$  в  $\psi$  ( $\psi[x := \theta]$ ), если ни одно свободное вхождение переменных в  $\theta$  не станет связанным после подстановки.

Свобода есть	Свободы нет
$(\forall x.P(y))[y := z]$	$(\forall x.P(y))[y := x]$
$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$	$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$



# Теория доказательств

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде  $\theta$  свободен для подстановки вместо  $x$  в  $\varphi$ ):

$$11. \quad (\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$$

$$12. \quad \varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x.\varphi$$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде  $x$  не входит свободно в  $\varphi$ ):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi} \quad \text{Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x.\psi) \rightarrow \varphi} \quad \text{Правило для } \exists$$

## Определение

*Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.*

## Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- ▶ Рассмотрим формулу  $(\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$

## Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- ▶ Рассмотрим формулу  $(\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$
- ▶ Соответствует 11 схеме

$$(\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \quad \varphi \equiv \exists y. \neg x = y \quad \theta \equiv y$$

## Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- ▶ Рассмотрим формулу  $(\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$
- ▶ Соответствует 11 схеме

$$(\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \quad \varphi \equiv \exists y. \neg x = y \quad \theta \equiv y$$

- ▶ Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y. \neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y. \neg y = y)$$

## Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- ▶ Рассмотрим формулу  $(\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$
- ▶ Соответствует 11 схеме

$$(\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \quad \varphi \equiv \exists y. \neg x = y \quad \theta \equiv y$$

- ▶ Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y. \neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y. \neg y = y)$$

- ▶ Пусть  $D = \mathbb{N}$  и  $(=)$  есть равенство на  $\mathbb{N}$ . Тогда

$$\llbracket \exists y. \neg x = y \rrbracket = \text{И} \quad \llbracket (\exists y. \neg x = y)[x := y] \rrbracket = \text{Л}$$

## Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- ▶ Рассмотрим формулу  $(\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$
- ▶ Соответствует 11 схеме

$$(\forall x. \varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \quad \varphi \equiv \exists y. \neg x = y \quad \theta \equiv y$$

- ▶ Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y. \neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y. \neg y = y)$$

- ▶ Пусть  $D = \mathbb{N}$  и  $(=)$  есть равенство на  $\mathbb{N}$ . Тогда

$$\llbracket \exists y. \neg x = y \rrbracket = \text{И} \quad \llbracket (\exists y. \neg x = y)[x := y] \rrbracket = \text{Л}$$

- ▶  $\not\models (\forall x. \exists y. \neg x = y) \rightarrow ((\exists y. \neg x = y)[x := y])$

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .*

Доказательство.

$(\Rightarrow)$  — как в КИВ

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  — как в КИВ  $(\Leftarrow)$  — та же схема, два новых случая.



# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  — как в КИВ  $(\Leftarrow)$  — та же схема, два новых случая.

Перестроим:  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$  в  $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$ .

Дополним: обоснуем  $\alpha \rightarrow \delta_n$ , если предыдущие уже обоснованы.

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  — как в КИВ  $(\Leftarrow)$  — та же схема, два новых случая.

Перестроим:  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$  в  $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$ .

Дополним: обоснуем  $\alpha \rightarrow \delta_n$ , если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для  $\forall$  и  $\exists$ . Рассмотрим  $\forall$ .

Доказываем  $(n) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$  (правило для  $\forall$ ), значит, доказано  $(k) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ .

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  — как в КИВ  $(\Leftarrow)$  — та же схема, два новых случая.

Перестроим:  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$  в  $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$ .

Дополним: обоснуем  $\alpha \rightarrow \delta_n$ , если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для  $\forall$  и  $\exists$ . Рассмотрим  $\forall$ .

Доказываем  $(n) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$  (правило для  $\forall$ ), значит, доказано  $(k) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ .

$(n - 0.9) \dots (n - 0.8)$	$(\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n - 0.6)$	$(\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	М.Р. $k, n - 0.8$

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

*Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .*

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  — как в КИВ  $(\Leftarrow)$  — та же схема, два новых случая.

Перестроим:  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$  в  $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$ .

Дополним: обоснуем  $\alpha \rightarrow \delta_n$ , если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для  $\forall$  и  $\exists$ . Рассмотрим  $\forall$ .

Доказываем  $(n) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$  (правило для  $\forall$ ), значит, доказано  $(k) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ .

$(n - 0.9) \dots (n - 0.8)$	$(\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	Т. о полноте КИВ
-----------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------

$(n - 0.6)$	$(\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	М.Р. $k, n - 0.8$
-------------	----------------------------------------	-------------------

$(n - 0.4)$	$(\alpha \& \psi) \rightarrow \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$ , $n - 0.6$
-------------	--------------------------------------------------	-----------------------------------

# Теорема о дедукции для исчисления предикатов

## Теорема

Если  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ . Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ .

## Доказательство.

$(\Rightarrow)$  — как в КИВ  $(\Leftarrow)$  — та же схема, два новых случая.

Перестроим:  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$  в  $\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_n$ .

Дополним: обоснуем  $\alpha \rightarrow \delta_n$ , если предыдущие уже обоснованы.

Два новых похожих случая: правила для  $\forall$  и  $\exists$ . Рассмотрим  $\forall$ .

Доказываем  $(n) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$  (правило для  $\forall$ ), значит, доказано  $(k) \alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$ .

$(n - 0.9) \dots (n - 0.8)$	$(\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n - 0.6)$	$(\alpha \& \psi) \rightarrow \varphi$	М.Р. $k, n - 0.8$
$(n - 0.4)$	$(\alpha \& \psi) \rightarrow \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$ , $n - 0.6$
$(n - 0.3) \dots (n - 0.2)$	$((\alpha \& \psi) \rightarrow \forall x.\varphi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi)$	Т. о полноте КИВ
$(n)$	$\alpha \rightarrow \psi \rightarrow \forall x.\varphi$	М.Р. $n - 0.4, n - 0.2$



# Следование

## Определение

$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$ , если выполнено два условия:

1.  $\alpha$  выполнено всегда, когда выполнено  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ;
2.  $\alpha$  не использует кванторов по переменным, входящим свободно в  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ .

## Теорема

Если  $\Gamma \vdash \alpha$  и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из  $\Gamma$ , то  $\Gamma \models \alpha$

## Важность второго условия

### Пример

*Покажем, что  $\Gamma \models \alpha$  ведёт себя неестественно, если в  $\alpha$  используются кванторы по переменным, входящим свободно в  $\Gamma$ .*

## Важность второго условия

### Пример

*Покажем, что  $\Gamma \models \alpha$  ведёт себя неестественно, если в  $\alpha$  используются кванторы по переменным, входящим свободно в  $\Gamma$ .*

*Легко показать, что  $P(x) \vdash \forall x.P(x)$ .*



## Важность второго условия

### Пример

Покажем, что  $\Gamma \models \alpha$  ведёт себя неестественно, если в  $\alpha$  используются кванторы по переменным, входящим свободно в  $\Gamma$ .

Легко показать, что  $P(x) \vdash \forall x.P(x)$ .

- |     |                                                                     |                           |
|-----|---------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $P(x)$                                                              | Гипотеза                  |
| (2) | $P(x) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$ | Сх. акс. 1                |
| (3) | $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$                  | М.Р. 1, 2                 |
| (4) | $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.P(x)$        | Правило для $\forall$ , 3 |
| (5) | $(A \rightarrow A \rightarrow A)$                                   | Сх. акс. 1                |
| (6) | $\forall x.P(x)$                                                    | М.Р. 5, 4                 |

## Важность второго условия

### Пример

Покажем, что  $\Gamma \models \alpha$  ведёт себя неестественно, если в  $\alpha$  используются кванторы по переменным, входящим свободно в  $\Gamma$ .

Легко показать, что  $P(x) \vdash \forall x.P(x)$ .

- |     |                                                                     |                           |
|-----|---------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $P(x)$                                                              | Гипотеза                  |
| (2) | $P(x) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$ | Сх. акс. 1                |
| (3) | $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$                  | М.Р. 1, 2                 |
| (4) | $(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.P(x)$        | Правило для $\forall$ , 3 |
| (5) | $(A \rightarrow A \rightarrow A)$                                   | Сх. акс. 1                |
| (6) | $\forall x.P(x)$                                                    | М.Р. 5, 4                 |

Пусть  $D = \mathbb{Z}$  и  $P(x) = x > 0$ . Тогда не будет выполнено  $P(x) \models \forall x.P(x)$ .

# Корректность

## Теорема

Если  $\theta$  свободен для подстановки вместо  $x$  в  $\varphi$ , то  $\llbracket \varphi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \varphi[x := \theta] \rrbracket$

Доказательство (индукция по структуре  $\varphi$ ).

- ▶ База:  $\varphi$  не имеет кванторов. Очевидно.
- ▶ Переход: пусть справедливо для  $\psi$ . Покажем для  $\varphi = \forall u. \psi$ .
  - ▶  $x = u$  либо  $x \notin FV(\psi)$ . Тогда:  $\llbracket \forall u. \psi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \forall u. \psi \rrbracket = \llbracket (\forall u. \psi)[x := \theta] \rrbracket$
  - ▶  $x \neq u$ . Тогда:  $\llbracket \forall u. \psi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \llbracket \psi \rrbracket^{y \in D; x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \dots$

Свобода для подстановки:  $u \notin \theta$ .

$$\dots = \llbracket \psi \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket; y \in D} = \dots$$

Индукционное предположение.

$$\dots = \llbracket \psi[x := \theta] \rrbracket^{y \in D} = \llbracket \forall u. (\psi[x := \theta]) \rrbracket = \dots$$

Но  $\forall u. (\psi[x := \theta]) \equiv (\forall u. \psi)[x := \theta]$  (как текст). Отсюда:

$$\dots = \llbracket (\forall u. \psi)[x := \theta] \rrbracket$$



# Корректность

## Теорема

Если  $\Gamma \vdash \alpha$  и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из  $FV(\Gamma)$ , то  $\Gamma \models \alpha$

## Доказательство.

Фиксируем  $D, F, P$ . Индукция по длине доказательства  $\alpha$ : при любом  $E$  выполнено  $\Gamma \models \alpha$  при длине доказательства  $n$ , покажем для  $n + 1$ .

- ▶ Схемы аксиом (1)..(10), правило М.Р.: аналогично И.В.
- ▶ Схемы (11) и (12), например, схема  $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$ :

$$\llbracket (\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta] \rrbracket = \llbracket ((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi)[x := \theta] \rrbracket = \llbracket ((\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi) \rrbracket^{x:=\llbracket \theta \rrbracket} = \text{И}$$

- ▶ Правила для кванторов: например, введение  $\forall$ :  
Пусть  $\llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket = \text{И}$ . Причём  $x \notin FV(\Gamma)$  и  $x \notin FV(\psi)$ . То есть, при любом  $x$  выполнено  $\llbracket \psi \rightarrow \varphi \rrbracket^{x:=x} = \text{И}$ . Тогда  $\llbracket \psi \rightarrow (\forall x.\varphi) \rrbracket = \text{И}$ .

