

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, весна 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции): $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Например, если было показано существование вывода $A \vdash A$, то тогда теорема гарантирует и существование вывода $\vdash A \rightarrow A$.

1. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e) $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$
- (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (правило контрапозиции)
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \& B)$
- (e) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (f) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (g) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (закон Пирса)

4. Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой: $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ и $A \rightarrow (B \rightarrow C)$? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку).

5. Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению.

- (a) связка «и-не» («штрих шеффера», “|”): $A | B$ истинно, когда один из аргументов ложен. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления. Поясним, что мы понимаем под словами «исключить связку». Как вы знаете, конъюнкция и отрицание выражаются через «и-не» ($\neg \alpha := \alpha | \alpha$ и т.п.). При такой замене все схемы аксиом для конъюнкции и отрицания должны стать теоремами. При этом исчисление должно остаться корректным относительно классической модели исчисления высказываний.
- (b) связка «или-не» («стрелка пирса», “ \downarrow ”): $A \downarrow B$ истинно, когда оба аргумента ложны. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.
- (c) Нуль-местная связка «ложь» (“ \perp ”). Мы ожидаем вот такую замену: $\neg A := A \rightarrow \perp$. Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.

6. Достаточно ли лжи и «исключённого или» ($A \oplus B$ истинно, когда $A \neq B$) для выражения всех остальных связок?

7. Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\not\vdash \beta \rightarrow \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\not\vdash \gamma \rightarrow \alpha$ и $\not\vdash \beta \rightarrow \gamma$.

8. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg \alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.