

# Мощность множеств

# Отношения

## Определение

$A \times B := \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$

Бинарное отношение —  $R \subseteq A \times B$

Функциональное бинарное отношение (функция)  $R$  — такое, что

$\forall x. x \in A \rightarrow \exists! y. \langle x, y \rangle \in R$

$R$  — инъективная функция, если  $\forall x. \forall y. \langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, t \rangle \in R \rightarrow x = y$ .

$R$  — сюръективная функция, если  $\forall y. y \in B \rightarrow \exists x. \langle x, y \rangle \in R$ .

# Равномощные множества

## Определение

*Множество  $A$  равномощно  $B$  ( $|A| = |B|$ ), если существует биекция  $f : A \rightarrow B$ .*

*Множество  $A$  имеет мощность, не превышающую мощности  $B$  ( $|A| \leq |B|$ ), если существует инъекция  $f : A \rightarrow B$ .*

# Теорема Кантора-Бернштейна

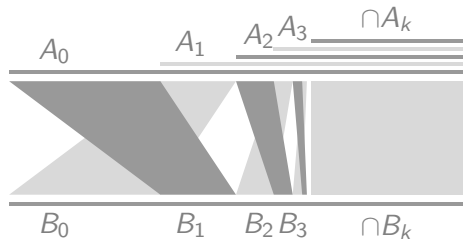
## Теорема

Если  $|A| \leq |B|$  и  $|B| \leq |A|$ , то  $|A| = |B|$ .

Заметим,  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow A$  — инъекции, но не обязательно  $g(f(x)) = x$ .

## Доказательство.

Избавимся от множества  $B$ : пусть  $A_0 = A$ ;  $A_1 = g(B)$ ;  $A_{k+2} = g(f(A_k))$ .



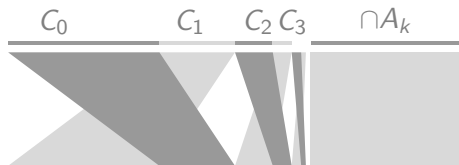
Тогда, если существует  $h : A_0 \rightarrow A_1$  — биекция, то тогда  $g^{-1} \circ h : A \rightarrow B$  — требуемая биекция.



## Построение биекции $h : A_0 \rightarrow A_1$

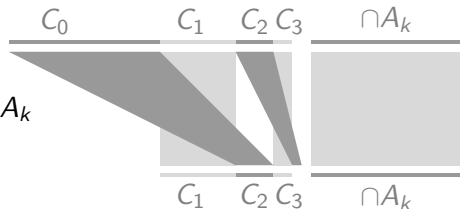
Пусть  $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$ . Тогда

$$g(f(C_k)) = g(f(A_k)) \setminus g(f(A_{k+1})) = A_{k+2} \setminus A_{k+3} = C_{k+2}.$$



Тогда определим  $h(x)$  следующим образом:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in C_{2k+1} \vee x \in \cap A_k \\ g(f(x)), & x \in C_{2k} \end{cases}$$



# Кардинальные числа

## Определение

*Кардинальное число — наименьший ординал, не равномощный никакому меньшему:*

$$\forall x. x \in c \rightarrow |x| < |c|$$

## Теорема

*Конечные ординалы — кардинальные числа.*

## Определение

*Мощность множества ( $|S|$ ) — равномощное ему кардинальное число.*

# Диагональный метод

## Лемма

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

## Доказательство.

Рассмотрим  $a \in (0, 1)$  и десятичную запись:  $0.a_0a_1a_2\dots$ . Пусть существует биективная  $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ . По функции найдём значение  $\sigma$ , не являющееся образом никакого натурального числа.

$n$	$f(n)$	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$f(n)_5$	$\dots$
$n_0$	0.3	3	0	0	0	0	0	$\dots$
$n_1$	$\pi/10$	3	1	4	1	5	9	$\dots$
$n_2$	$1/7$	1	4	2	8	5	7	$\dots$

# Диагональный метод

## Лемма

$$|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$$

## Доказательство.

Рассмотрим  $a \in (0, 1)$  и десятичную запись:  $0.a_0a_1a_2\dots$ . Пусть существует биективная  $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$ . По функции найдём значение  $\sigma$ , не являющееся образом никакого натурального числа.

$n$	$f(n)$	$f(n)_0$	$f(n)_1$	$f(n)_2$	$f(n)_3$	$f(n)_4$	$f(n)_5$	$\dots$
$n_0$	0.3	3	0	0	0	0	0	$\dots$
$n_1$	$\pi/10$	3	1	4	1	5	9	$\dots$
$n_2$	$1/7$	1	4	2	8	5	7	$\dots$
$\sigma$		8	6	7	$\dots \sigma_k = (f(n_k)_k + 5) \% 10$			





# Теорема Кантора

## Теорема

$$|\mathcal{P}(S)| > |S|$$

## Доказательство.

Пусть  $S = \{a, b, c, \dots\}$

$n$	$a \in f(n)$	$b \in f(n)$	$c \in f(n)$	$\dots$
$a$	И	Л	И	
$b$	Л	И	И	
$c$	И	И	И	
	Л	И	Л	$y \notin f(y)$

# Теорема Кантора

## Теорема

$$|\mathcal{P}(S)| > |S|$$

## Доказательство.



















Пусть  $S = \{a, b, c, \dots\}$

$n$	$a \in f(n)$	$b \in f(n)$	$c \in f(n)$	$\dots$
$a$	И	Л	И	
$b$	Л	И	И	
$c$	И	И	И	
	Л	И	Л	$y \notin f(y)$

Пусть  $f : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$  — биекция. Тогда  $\sigma = \{y \in S \mid y \notin f(y)\}$ . Пусть  $f(x) = \sigma$ . Но  $x \in f(x)$  тогда и только тогда, когда  $x \notin \sigma$ , то есть  $f(x) \neq \sigma$ . □

## О буквах

[https://en.wikipedia.org/wiki/Proto-Sinaitic\\_script](https://en.wikipedia.org/wiki/Proto-Sinaitic_script)

Hieroglyph	Proto-Sinaitic	IPA value	Reconstructed name	Phoenician	Imperial Aramaic	Hebrew
 		/ʔ/	'alp "ox"			
 		/b/	bayt "house"			
 		/g/	gaml "throwstick"			

## Иерархии $\aleph_n$ и $\beth_n$

### Определение

$$\aleph_0 := |\omega|; \aleph_{k+1} := \min\{a \mid a - \text{ординал}, \aleph_k < |a|\}$$

### Определение

$$\beth_0 := |\omega|; \beth_{k+1} := |\mathcal{P}(\beth_k)|$$

Континуум-гипотеза (Г.Кантор, 1877):  $\aleph_1 = \beth_1$  (не существует мощности, промежуточной между счётной и континуумом).

Обобщённая континуум-гипотеза:  $\aleph_n = \beth_n$  при всех  $n$ .

### Определение

Утверждение  $\alpha$  противоречит аксиоматике:  $\vdash \alpha$  ведёт к противоречию.

Утверждение  $\alpha$  не зависит от аксиоматики:  $\not\vdash \alpha$  и  $\not\vdash \neg\alpha$ .

## Иерархии $\aleph_n$ и $\beth_n$

### Определение

$$\aleph_0 := |\omega|; \aleph_{k+1} := \min\{a \mid a - \text{ординал}, \aleph_k < |a|\}$$

### Определение

$$\beth_0 := |\omega|; \beth_{k+1} := |\mathcal{P}(\beth_k)|$$

Континуум-гипотеза (Г.Кантор, 1877):  $\aleph_1 = \beth_1$  (не существует мощности, промежуточной между счётной и континуумом).

Обобщённая континуум-гипотеза:  $\aleph_n = \beth_n$  при всех  $n$ .

### Определение

Утверждение  $\alpha$  противоречит аксиоматике:  $\vdash \alpha$  ведёт к противоречию.

Утверждение  $\alpha$  не зависит от аксиоматики:  $\nvdash \alpha$  и  $\nvdash \neg\alpha$ .

Теорема (О независимости континуум-гипотезы, Дж.Коэн, 1963)

Утверждение  $\aleph_1 = \beth_1$  не зависит от аксиоматики ZFC.

## Примеры мощностей множеств

Пример	мощность
$\omega$	$\aleph_0$
$\omega^2, \omega^\omega$	$\aleph_0$
$\mathbb{R}$	$\beth_1$
все непрерывные функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\beth_1$
все функции $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\beth_2$

# Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$ :

$j$  — гёделев номер названия научного журнала (книги);

$y$  — год издания;

$n$  — номер;

$p$  — страница;

$r$  — строка;

$c$  — позиция

## Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$ :

$j$  — гёделев номер названия научного журнала (книги);

$y$  — год издания;

$n$  — номер;

$p$  — страница;

$r$  — строка;

$c$  — позиция

2. Попробуете предъявить число  $x$ , не имеющее номера? Это рассуждение сразу даст номер.



# Мощность модели и аксиоматизации

## Определение

*Пусть задана модель  $\langle D, F_n, P_n \rangle$  для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность  $D$ .*

# Мощность модели и аксиоматизации

## Определение

*Пусть задана модель  $\langle D, F_n, P_n \rangle$  для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность  $D$ .*

## Определение

*Пусть задана формальная теория с аксиомами  $\alpha_n$ . Её мощность — мощность множества  $\{\alpha_n\}$ .*

# Мощность модели и аксиоматизации

## Определение

*Пусть задана модель  $\langle D, F_n, P_n \rangle$  для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность  $D$ .*

## Определение

*Пусть задана формальная теория с аксиомами  $\alpha_n$ . Её мощность — мощность множества  $\{\alpha_n\}$ .*

## Пример

*Формальная арифметика, исчисление предикатов, исчисление высказываний — счётно-аксиоматизируемые.*

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

## Пример

Когда сужение  $\mathcal{M}$  не является элементарной подмоделью?



# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

## Пример

Когда сужение  $\mathcal{M}$  не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$ . Истинно в  $\mathbb{N}$ .

# Элементарная подмодель

## Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$  — элементарная подмодель  $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$ , если:

1.  $D' \subseteq D$ ,  $F'_n, P'_n$  — сужение  $F_n, P_n$  (замкнутое на  $D'$ ).
2.  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  при  $x_i \in D'$ .

## Пример

Когда сужение  $\mathcal{M}$  не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$ . Истинно в  $\mathbb{N}$ . Но пусть  $D' = \{0\}$ .

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

## Теорема

*Пусть  $T$  — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель  $\mathcal{M}$ . Тогда найдётся элементарная подмодель  $\mathcal{M}'$ , причём  $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$ .*

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

## Теорема

*Пусть  $T$  — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель  $\mathcal{M}$ . Тогда найдётся элементарная подмодель  $\mathcal{M}'$ , причём  $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$ .*

## Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим  $D_0$  — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.

# Теорема Лёвенгейма-Сколема

## Теорема

Пусть  $T$  — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель  $M$ . Тогда найдётся элементарная подмодель  $M'$ , причём  $|M'| = \max(\aleph_0, |T|)$ .

## Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим  $D_0$  — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.
2. Будем последовательно пополнять  $D_i$ :  $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \dots$ , следя за мощностью.  $D' = \bigcup D_i$ .
3. Покажем, что  $\langle D', F_n, P_n \rangle$  — требуемая подмодель.



Начальный  $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .

## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .
2. Если таких  $f_k^0$  нет, возьмём какое-нибудь одно значение из  $D$ .



## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .
2. Если таких  $f_k^0$  нет, возьмём какое-нибудь одно значение из  $D$ .

## Начальный $D_0$

Пусть  $\{f_k^0\}$  — все 0-местные функциональные символы теории.

1.  $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$ , если есть хотя бы один  $f_k^0$ .
2. Если таких  $f_k^0$  нет, возьмём какое-нибудь одно значение из  $D$ .

Очевидно,  $|D_0| \leq |T|$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $u$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории. Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ .



## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории. Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ . Вместе добавим всевозможные  $\llbracket \theta(y') \rrbracket$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ . Вместе добавим всевозможные  $\llbracket \theta(y') \rrbracket$ .

Всего добавили не больше  $|T| \cdot |D_k|$ .

## Пополнение $D$

Фиксируем некоторый  $D_k$ . Напомним,  $T$  — множество всех формул теории.  
Рассмотрим  $\varphi \in T$ .

1.  $\varphi$  не имеет свободных переменных — пропустим.
2.  $\varphi$  имеет хотя бы одну свободную переменную  $y$ .
  - 2.1  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  бывает истинным и ложным — ничего не меняем
  - 2.2  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y \in D$  и  $x_i \in D_k$  либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
  - 2.3  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  при  $y, x_i \in D_k$  тождественно истинен или ложен, но при  $y' \in D \setminus D_k$  отличается — добавим  $y'$  к  $D_{k+1}$ . Вместе добавим всевозможные  $\llbracket \theta(y') \rrbracket$ .

Всего добавили не больше  $|T| \cdot |D_k|$ .  $|\cup D_i| \leq |T| \cdot |D_k| \cdot |\aleph_0| = \max(|T|, |\aleph_0|)$

$\mathcal{M}'$  — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.



## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $y_t, y_f \in D$ , то  $y_t, y_f \in D_{t+1}$  (по построению).

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $u_t, u_f \in D$ , то  $u_t, u_f \in D_{t+1}$  (по построению). Поэтому, если  $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ , то и  $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $u_t, u_f \in D$ , то  $u_t, u_f \in D_{t+1}$  (по построению). Поэтому, если  $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ , то и  $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Если же  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  не меняется от  $u$ , то тем более  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

## $\mathcal{M}'$ — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул  $\tau \in T$  покажем, что все формулы можно вычислить, и что  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .

1. База, 0 связок.  $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ . Если  $x_i \in D'$ , то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть  $t$ ). Поэтому в  $D_{t+1}$  можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из  $k$  связок сохраняют значения. Рассмотрим  $\tau$  с  $k + 1$  связкой.
  - 2.1  $\tau \equiv \rho \star \sigma$  — очевидно.
  - 2.2  $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Каждый  $x_i$  добавлен на каком-то шаге — максимум  $t$ . Если  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  бывает истинен и ложен при  $u_t, u_f \in D$ , то  $u_t, u_f \in D_{t+1}$  (по построению). Поэтому, если  $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ , то и  $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ . Если же  $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  не меняется от  $u$ , то тем более  $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$ .
  - 2.3  $\tau \equiv \exists u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$  — аналогично.

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ .

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория.



## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ .

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ . В чём ошибка?

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ . В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке.

## «Парадокс» Сколема

1. Как известно,  $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$ . Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть  $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ . В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке. Внутри теории не выразить все способы нумерации, которые возможны.