Аксиома выбора

Аксиома выбора

Аксиома (Аксиома выбора)

Из любого семейства дизъюнктных непустых множеств $\{A_i\}$ *можно выбрать непустую трансверсаль — множество* S, *что* $S \cap A_i = \{x_i\}$. *Иначе,* $S \in \times\{A_i\}$.

Теорема (Аксиома выбора)

Пусть $\{A_i\}$ *— семейство непустых множеств. Тогда существует* $f : \{A_i\} \to \cup A_i$, *причём* $\forall a.a \in \{A_i\} \to f(a) \in a$

Доказательство.

По семейству A_i рассмотрим семейство множеств $X(A_i)$:
$X(A_i) = \{\langle A_i, a\rangle \mid a \in A_i\}$, если $A_i \neq A_j$, то $X(A_i) \cap X(A_j) = \varnothing$, тогда $\exists f.f \in \times\{X(A_i)\}$. $\square$

Обратное утверждение также легко показать.

Аксиома выбора: альтернативные формулировки

Теорема (Лемма Цорна)

Если задано $\langle M, (\preceq)\rangle$ *и для всякого линейно-упорядоченного* $S \subseteq M$ *выполнено* $upb_M S \in M$, *то в* M *существует максимальный элемент.*

Теорема (Теорема Цермело)

На любом множестве можно задать полный порядок.

Теорема

У любой сюрьективной функции существует частичная обратная.

Теорема

Аксиома выбора $\Rightarrow$ *лемма Цорна: без доказательства*

Начальный отрезок

Определение

Будем говорить, что $\langle S, (\prec_S)\rangle$ *— начальный отрезок* $\langle T, (\prec_T)\rangle$*, если:*

- $S \subseteq T$;
- *если* $a, b \in S$*, то* $a \prec_S b$ *тогда и только тогда, когда* $a \prec_T b$;
- *если* $a \in S$*,* $b \in T \setminus S$*, то* $a \prec_T b$.

Будем записывать это как $S \prec T$.

Теорема

Если множество начальных отрезков X *линейно упорядочено, то в нём есть наибольший элемент.*

Доказательство.

Пусть $M = \cup\{T | \langle T, (\prec)\rangle \in X\}$ и $(\prec)_M = \cup\{(\prec) | \langle T, (\prec)\rangle \in X\}$.
Раз все элементы X сравнимы, значит, любые два отношения порядка не противоречат друг другу (одно – продолжение другого). Поэтому что все множества в X — начальные отрезки M. $\square$

Лемма Цорна $\Rightarrow$ теорема Цермело

Пусть выполнена лемма Цорна и дано некоторое X. Покажем, что на нём можно ввести линейный порядок.

- Пусть $S = \{\langle P, (\prec) \rangle \mid P \subseteq X, (\prec)$ — полный порядок$\}$. Например, для $X = \{0, 1\}$ множество $S = \{\langle \varnothing, \varnothing \rangle, \langle \{0\}, \varnothing \rangle, \langle \{1\}, \varnothing \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle, \langle X, 1 \prec 0 \rangle\}$
- Введём порядок на S: положим $\langle P, (\prec_p) \rangle < \langle Q, (\prec_q) \rangle$, если $P \subseteq Q$, $a \prec_p b$ тогда и только тогда, когда $a \prec_q b$, при $a, b \in P$, $a \prec_q b$ при $a \in P, b \in Q \setminus P$.
- Заметим, что $\langle \varnothing, \varnothing \rangle < \langle \{0\}, \varnothing \rangle$, но $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$ несравним с $\langle X, 1 \prec 0 \rangle$.
- Любое линейно-упорядоченное подмножество $\langle T, (<) \rangle$ (где $T \subseteq S$) имеет верхнюю грань (она же максимальный элемент): $\langle \cup T, \cup(\prec) \rangle$ (например, для $\{\langle \varnothing, \varnothing \rangle, \langle \{0\}, \varnothing \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle\}$ это $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$.
- По лемме Цорна тогда есть $\langle R, \sqsubset \rangle = \max S$. Заметим, что $R = X$, потому что иначе пусть $a \in X \setminus R$. Тогда положив $M = \langle R \cup \{a\}, (\prec_R) \cup \{x \prec a \mid x \in R\} \rangle$ получим, что M тоже вполне упорядоченное (и потому $M \in S$), значит, R не максимальное.

Теорема Цермело $\Rightarrow$ существование обратной $\Rightarrow$ аксиома выбора

Теорема

Теорема Цермело $\Rightarrow$ у сюрьективных функций существует частичная обратная.

Доказательство.

Рассмотрим сюрьективную $f : A \to B$. Рассмотрим семейство $R_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Построим полный порядок на каждом из R_b. Тогда $f^{-1}(b) = \min R_b$. □

Теорема

Существует частичная обратная у сюръективных функций $\Rightarrow$ существует трансверсаль у дизъюнктных множеств.

Доказательство.

Пусть дано семейство дизъюнктных множеств $\{A_i\}$. Рассмотрим $f : \cup A_i \to \{A_i\}$, что $f(a) = \cup\{A_i \in \{A_i\} \mid a \in A_i\}$. Поскольку A_i дизъюнктны, $f(a) = A_i$ при всех a. Тогда существует $f^{-1}(A_i) \in A_i$. Тогда $\{f^{-1}(A_i)\} \in \times\{A_i\}$. □

Зачем нужна аксиома выбора?

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Коши называется такой y, что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ . \exists \delta . \forall x . |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$$

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Гейне называется такой y, что для любой $x_n \to x_0$ выполнено $f(x_n) \to y$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, тогда* $\forall \varepsilon . \exists \delta . \forall x . |x_\delta - x_0| < \delta \to |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon . \forall \delta . \exists x_\delta . |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. $\square$

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, тогда* $\forall \varepsilon . \exists \delta . \forall x . |x_\delta - x_0| < \delta \to |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon . \forall \delta . \exists x_\delta . |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n *— как множество.* $\langle p_1, p_2, p_3, \ldots \rangle$*?*

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, тогда* $\forall \varepsilon . \exists \delta . \forall x . |x_\delta - x_0| < \delta \to |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon . \forall \delta . \exists x_\delta . |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. $\square$

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n *— как множество.* $\langle p_1, p_2, p_3, \ldots \rangle$*?*
... Фиксируем ε *и рассмотрим* $X_\delta = \{x_\delta \mid |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon\}$*. Возьмём* $\delta_n = \frac{1}{n}$ *и* $x_{\frac{1}{n}} \in X_{\frac{1}{n}}$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *по Гейне, тогда* $\forall \varepsilon . \exists \delta . \forall x . |x_\delta - x_0| < \delta \to |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon . \forall \delta . \exists x_\delta . |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \ge \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \to x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \to y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \ge \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n *— как множество.* $\langle p_1, p_2, p_3, \dots \rangle$*?*

... Фиксируем ε *и рассмотрим* $X_\delta = \{ x_\delta \mid |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \ge \varepsilon \}$*. Возьмём* $\delta_n = \frac{1}{n}$ *и* $x_{\frac{1}{n}} \in X_{\frac{1}{n}}$*.*

... То есть, по семейству непустых множеств $\{X_\delta\}$ *по аксиоме выбора построим* $p : \{X_\delta\} \to \cup X_\delta$*, что* $p(X_\delta) \in X_\delta$*, и построим последовательность* $p(X_{\frac{1}{n}}) \to x_0$*.*

Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *и дана* $x_n \to x_0$*. Тогда* $f(x_n) \to y$*.*

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- (определение предела по Коши) существует δ, что $\forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$.
- (сходимость x_n к x_0) найдётся N, что $\forall n. n > N \to |x_n - x_0| < \delta$.
- (предыдущие два пункта) $\forall n. n > N \to |f(x_n) - y| < \varepsilon$.

$\square$

Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ *и дана* $x_n \to x_0$*. Тогда* $f(x_n) \to y$*.*

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- (определение предела по Коши) существует δ, что $\forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon$.
- (сходимость x_n к x_0) найдётся N, что $\forall n. n > N \to |x_n - x_0| < \delta$.
- (предыдущие два пункта) $\forall n. n > N \to |f(x_n) - y| < \varepsilon$.

□

Почему здесь не требуется аксиома выбора? Потому что нам нужен δ из единственного множества $\{\delta \in \mathbb{R} \mid \forall x. |x - x_0| < \delta \to |f(x) - y| < \varepsilon\}$. То же про N. Аксиома выбора для конечного семейства множеств доказуема в ZF.

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ *и* $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. *Верно ли, что* $A_0 = A_1$*?*

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ *и* $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. *Верно ли, что* $A_0 = A_1$*?*
Да, так как $\forall x . x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$.

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ *и* $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. *Верно ли, что* $A_0 = A_1$*?*
Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$.

Теорема

Если $f : A \to B$, *также* $a, b \in A$ *и* $a = b$, *то* $f(a) = f(b)$.

Доказательство.

Пусть $F \subseteq A \times B$ — график функции f.
Легко показать, что если $a = b$ и $y_1 = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle$.
По определению функции, $\forall x. \forall y_1. \forall y_2. \langle x, y_1 \rangle \in F \,\&\, \langle x, y_2 \rangle \in F \to y_1 = y_2$.
Также, если $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle \in F$ и $\langle b, y_2 \rangle \in F$.
Тогда: $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$, то есть $f(a) = y_2 = f(b)$.

$\square$

Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} | x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} | x = 1 \vee P\}$.
$\{A_0, A_1\}$ — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует $f : \{A_0, A_1\} \to \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P, то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{\mathcal{B}\}$).

$\vdash f(A_0) \in A_0 \mathbin{\&} f(A_1) \in A_1$	$f(A_i) \in A_i$
$\vdash (f(A_0) \in \mathcal{B} \mathbin{\&} f(A_0) = 0 \vee P) \mathbin{\&} (f(A_1) \in \mathcal{B} \mathbin{\&} f(A_1) = 1 \vee P)$	Опр. A_i
$\vdash (f(A_0) = 0 \mathbin{\&} f(A_1) = 1) \vee P$	Удал. (&) + дист.
$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$	Перегруппировка

Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} | x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} | x = 1 \vee P\}$.
$\{A_0, A_1\}$ — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует $f : \{A_0, A_1\} \to \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P, то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{\mathcal{B}\}$).

$\vdash f(A_0) \in A_0 \,\&\, f(A_1) \in A_1$	$f(A_i) \in A_i$
$\vdash (f(A_0) \in \mathcal{B} \,\&\, f(A_0) = 0 \vee P) \,\&\, (f(A_1) \in \mathcal{B} \,\&\, f(A_1) = 1 \vee P)$	Опр. A_i
$\vdash (f(A_0) = 0 \,\&\, f(A_1) = 1) \vee P$	Удал. (&) + дист.
$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$	Перегруппировка
$\vdash P \to A_0 = A_1$	Определение A_i
$\vdash A_0 = A_1 \to f(A_0) = f(A_1)$	Теорема выше
$\vdash f(A_0) \neq f(A_1) \to \neg P$	Контрапозиция
$\vdash P \vee \neg P$	Подставили

$\square$

Слабые варианты аксиомы выбора

Теорема (конечного выбора)

Если $X_1 \neq \varnothing, \dots, X_n \neq \varnothing$, $X_i \cap X_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$, *то* $\times\{X_1, \dots, X_n\} \neq \varnothing$.

Доказательство.

- База: $n = 1$. Тогда $\exists x_1.x_1 \in X_1$, поэтому $\exists x_1.\{x_1\} \in \times\{X_1\}$.
- Переход:
  $\exists v.v \in \times\{X_{1,n}\} \to \exists x_{n+1}.x_{n+1} \in X_{n+1} \to v \cup \{x_{n+1}\} \in \times(X_{1,n} \cup \{X_{n+1}\})$

$\square$

Аксиома (счётного выбора)

Для счётного семейства непустых множеств существует функция, каждому из которых сопоставляющая один из своих элементов

Аксиома (зависимого выбора)

если $\forall x \in E.\exists y \in E.xRy$, *то существует последовательность* $x_n : \forall n.x_n R x_{n+1}$

Аксиома конструктивности: V=L

Определение

Универсум фон Неймана V — все наследственные фундированные множества. Конструктивный универсум $L = \cup_a L_a$, где:

$$L_a = \begin{cases} \varnothing, & a = 0 \\ \{\{x \in L_b \mid \varphi(x, t_1, \ldots, t_k)\} \mid \varphi - \text{формула}, t_i \in L_b\}, & a = b' \\ \bigcup_{b<a}(L_b), & a - \text{пред.} \end{cases}$$

При наличии аксиомы фундирования можно показать, что $V = \cup_a V_a$, где:

$$V_a = \begin{cases} \varnothing, & a = 0 \\ \mathcal{P}(V_b), & a = b' \\ \bigcup_{b<a}(V_b), & a - \text{предельный} \end{cases}$$

Аксиома конструктивности: $V = L$, то есть все фундированные множества задаются формулами.