

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

РАЗДЕЛ «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

ИТМО, группы М3232–М3239, весна 2023 г.

1. Исчисление высказываний. Общезначимость, следование, доказуемость, выводимость. Корректность, полнота, непротиворечивость. Теорема о дедукции для исчисления высказываний.
2. Теорема о полноте исчисления высказываний.
3. Интуиционистское исчисление высказываний. Вывод в Гильбертовском стиле и натуральный вывод. ВНК-интерпретация. Решётки. Булевы и псевдобулевы алгебры.
4. Алгебра Линденбаума. Полнота интуиционистского исчисления высказываний в псевдобулевых алгебрах. Модели Крипке. Сведение моделей Крипке к псевдобулевым алгебрам. Нетабличность интуиционистского исчисления высказываний.
5. Топологическое пространство. Примеры. Открытые и замкнутые множества. Связность. Непрерывные функции. Путь. Линейная связность. Теорема о том, что лес связан (является деревом) тогда и только тогда, когда связан в топологическом смысле.
6. Гёделева алгебра. Операция $\Gamma(A)$. Дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний. Разрешимость интуиционистского исчисления высказываний.
7. Исчисление предикатов. Общезначимость, следование, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.
8. Непротиворечивые множества формул. Доказательство существования моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Доказательство полноты исчисления предикатов.
9. Машина Тьюринга. Задача об останове, её неразрешимость. Доказательство неразрешимости исчисления предикатов.
10. Порядок теории $(0, 1, 2)$. Теории первого порядка, структуры и модели. Аксиоматика Пеано. Арифметические операции. Доказательство коммутативности сложения. Формальная арифметика.
11. Прimitивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Прimitивная рекурсивность арифметических функций, функций вычисления простых чисел, частичного логарифма. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Характеристические функции. Представимость примитивов N, Z, S, U в формальной арифметике. Функция Аккермана. Доказательство непрimitивнорекурсивности функции Аккермана.
12. Бета-функция Гёделя. Представимость примитивов R и M и рекурсивных функций в формальной арифметике. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.
13. Непротиворечивость (эквивалентные определения, доказательство эквивалентности), ω -непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера. Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики. Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.
14. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, *Consis*. Лемма об автоссылках. Условия Гильберта-Бернайса-Лёфа. Теорема Тарского о невыразимости истины.