Построение дистрибутивных подрешёток

Определение

Решётка $\mathcal{L}' = \langle L', \preceq \rangle$ *— подрешётка решётки* $\mathcal{L} = \langle L, \preceq \rangle$*, если* $L' \subseteq L$*,* $(\preceq') \subseteq (\preceq)$ *и при* $a, b \in L'$ *выполнено* $a +_{\mathcal{L}'} b = a +_{\mathcal{L}} b$ *и* $a \cdot_{\mathcal{L}'} b = a \cdot_{\mathcal{L}} b$*.*

Лемма

Существует дистрибутивная подрешётка $\mathcal{L}'$*, содержащая* $a_1, \dots, a_n$*, что* $|L'| \le 2^{2^n}$*.*

Доказательство.

Пусть $\mathcal{L}' = \langle \{\varphi(a_1, \dots, a_n) \mid \varphi \text{ составлено из } (+) \text{ и } (\cdot)\}, (\preceq) \rangle$. Заметим, что если $p, q \in L'$, то $p \star_{\mathcal{L}} q \in L'$ (так как $\varphi_p(\overrightarrow{a}) \star \varphi_q(\overrightarrow{a}) = \psi(\overrightarrow{a})$). Также ясно, что если $\sup_L\{p, q\} \in L'$ (или $\inf_L\{p, q\} \in L'$), то $p \star_{\mathcal{L}} q = p \star_{\mathcal{L}'} q$. Значит, $\mathcal{L}'$ также дистрибутивна. Построим «ДНФ»:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\text{Кн} \in \text{ДНФ}(\varphi)} \prod_{i \in \text{Кн}} a_i$$

Всего не больше 2^n возможных компонент и 2^{2^n} возможных формул $\varphi(\overrightarrow{a})$. □

Разрешимость ИИВ

Теорема

Если $\nvdash \alpha$ *в ИИВ, то существует* $\mathcal{G}$, *что* $\mathcal{G} \not\models \alpha$, *причём* $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{|\alpha|+2}}$.

Доказательство.

Если $\nvdash \alpha$, то по полноте найдётся алгебра Гейтинга $\mathcal{H}$, что $\mathcal{H} \not\models \alpha$.
Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — подформулы α. Пусть $\mathcal{G}$ — дистрибутивная подрешётка $\mathcal{H}$, построенная по $\llbracket\varphi_1\rrbracket, \ldots, \llbracket\varphi_n\rrbracket$, 0 и 1.
Очевидно, что $\mathcal{G}$ — алгебра Гейтинга, и можно показать, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$ (псевдодополнения не обязаны сохраниться). Тогда по лемме, $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{n+2}}$. □

Теорема

ИИВ разрешимо.

Доказательство.

По формуле α построим все возможные алгебры Гейтинга $\mathcal{G}$ размера не больше $2^{2^{|\alpha|+2}}$, если $\mathcal{G} \models \alpha$, то $\vdash \alpha$. □

Арифметизация логики

Общие замечания

- Рассматриваем функции $\mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$.
- Обозначим вектор $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ как $\overrightarrow{x}$.

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

2. *Примитив «Инкремент» (N)*

$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

2. *Примитив «Инкремент» (N)*

$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$

3. *Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$*

$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0, \qquad U_n^k(\overrightarrow{x}) = x_k$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

2. *Примитив «Инкремент» (N)*

$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$

3. *Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \le n$*

$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0, \qquad U_n^k(\overrightarrow{x}) = x_k$$

4. *Примитив «Подстановка» (S) — семейство функций; пусть*
   $g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0, \quad f_1, \ldots, f_k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$

$$S\langle g, f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle(\overrightarrow{x}) = g(f_1(\overrightarrow{x}), \ldots, f_k(\overrightarrow{x}))$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) \quad = g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2))$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \end{aligned}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y - 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 0)))) \end{aligned}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 0)))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, f(\overrightarrow{x})))) \end{aligned}$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

$f, g = N$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

$f, g = N$
$S\langle N, N\rangle(x) = N(N(x)) = (x + 1) + 1$ □

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, x + y) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, x + y) =$
  $\ldots = N(x + y) = x + y + 1$

$\square$

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел
4. Неформально: все функции, вычисляемые конечным числом вложенных циклов `for`:

```
for (int i1 = 0; i1 < g1(x1...xn); i1++) {
    for (int i2 = 0; i2 < g2(x1...xn,i1); i2++) {
        ...
           for (int ik = 0; ik < gk(x1...xn,i1,i2...); ik++) {
               // выражение без циклов
           }
        ...
    }
}
```

Общерекурсивные функции

Определение

Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов Z, N, U, S, R и примитива минимизации:

$$M\langle f\rangle(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) > 0$ при любом y, результат не определён.

Общерекурсивные функции

Определение

Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов Z, N, U, S, R и примитива минимизации:

$$M\langle f\rangle(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) > 0$ при любом y, результат не определён.

Пример:
Пусть $f(x, y) = x - y^2$, тогда $\lceil\sqrt{x}\rceil = M\langle f\rangle(x)$

```
int sqrt(int x) {
    int y = 0;
    while (x-y*y > 0) y++;
    return y;
}
```

Выразительная сила

Определение

Функция Аккермана:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & m = 0 \\ A(m-1,1), & m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Пример

n	0	1	2	3	4	...
0	1	2	3	5	13	
1	2	3	5	13	65533	
2	3	4	7	29	$2^{65536} - 3$	
n	$n+1$	$n+2$	$2n+3$	$2^{n+3} - 3$	$\underbrace{2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}}_{n+3} - 3$	

Лемма о росте функции Аккермана

Определение

$$A^{(p)}(k,x) = \underbrace{A(k, A(k, A(k, \ldots, A(k,x))))}_{p \text{ раз}}$$

Лемма

1. $A(p,q) = A^{(q+1)}(p-1,1)$
2. $A^{(x+2)}(k,x) < A(k+2,x)$

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & m=0 \\ A(m-1,1), & m>0, n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)), & m>0, n>0 \end{cases}$$

$A(0,n) = n+1$

$A(2,n) = 2n+3$

Доказательство.

1. $A(p,q) = A(p-1, A(p,q-1)) = \cdots = A(p-1, A(p-1, \ldots A(p,0)) = A^{(q)}(p-1, A(p,0)) = A^{(q+1)}(p-1,1)$
2. $A(k+2,x) = A(k+1, A(k+2,x-1)) = A^{(A(k+2,x-1)+1)}(k,1) \geq A^{(A(2,x-1)+1)}(k,1) = A^{(2(x-1)+3+1)}(k,1) = A^{(2x+2)}(k,1) = A^{(x+2)}(k, A^{(x)}(k,1)) \geq A^{(x+2)}(k, A^{(x)}(0,1)) = A^{(x+2)}(k,x+1) > A^{(x+2)}(k,x)$

$\square$

Функция Аккермана не притивно-рекурсивна

Теорема

Пусть $f(\overrightarrow{x})$ *— примитивно-рекурсивная. Тогда найдётся* k*, что* $f(\overrightarrow{x}) < A(k, \max(\overrightarrow{x}))$

Доказательство.

Индукция по структуре f.

1. $f = Z$, тогда $k = 0$, т.к. $A(0, x) = x + 1 > Z(x) = 0$;
2. $f = N$, тогда $k = 1$, т.к. $A(1, x) = x + 2 > N(x) = x + 1$;
3. $f = U_s^n$, тогда $k = 0$, т.к. $f(\overrightarrow{x}) \le \max(\overrightarrow{x}) < A(0, \max(\overrightarrow{x}))$;
4. $f = S\langle g, h_1, \ldots, h_n\rangle$, тогда $k = k_g + \max(k_{h_1}, \ldots, k_{h_n}) + 2$;
5. $f = R\langle g, h\rangle$, тогда $k = \max(k_g, k_h) + 2$.

□

Доказательство оценки для R

Лемма

Пусть $f = R\langle g, h\rangle$. *Тогда при* $k = \max(k_g, k_h) + 2$ *выполнено* $f(\overrightarrow{x}, y) \leq A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y))$.

Доказательство.

Индукция по y.

- База: $y = 0$. Тогда: $f(\overrightarrow{x}, 0) = g(\overrightarrow{x}) \leq A(k_g, \max(\overrightarrow{x})) \leq A^{(1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, 0))$.
- Переход: пусть $f(\overrightarrow{x}, y) \leq A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y))$. Тогда $f(\overrightarrow{x}, y+1) = h(\overrightarrow{x}, y, f(\overrightarrow{x}, y)) \leq A(k_h, \max(\overrightarrow{x}, y, f(\overrightarrow{x}, y))) \leq A(k_h, \max(\overrightarrow{x}, y, A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)))) = A(k_h, A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y))) \leq A^{(y+2)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y+1))$

□

Заметим, что $A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)) \leq A^{(\max(\overrightarrow{x}, y)+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)) \leq A^{(\max(\overrightarrow{x}, y)+2)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)) < A(k, \max(\overrightarrow{x}, y))$

Тезис Чёрча

Определение

Тезис Чёрча для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция $\mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ *является общерекурсивной.*

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \ldots, x_n := \theta_n]$

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \ldots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \textit{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \textit{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$.

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \textit{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \textit{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$. Тогда $\psi(\overline{3})$ соответствует формуле $0''' = 0$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* ρ*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* ρ, *что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* ρ*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$.

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* ρ*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$:

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ, что:

1. *если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, то $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$*
2. *если $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, то $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$*

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ, что:

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ, что:

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, …
- $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.
  $\vdash \neg 0 = 0'$, $\vdash \neg 0 = 0''$, $\vdash \neg 0''' = 0'$, …

□

Представимость функций в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ представима в ФА, если существует формула φ, что:

1. *если* $f(a_1, \dots, a_n) = u$, *то* $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
2. *если* $f(a_1, \dots, a_n) \neq u$, *то* $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
3. *для всех* $a_i \in \mathbb{N}_0$ *выполнено*
   $\vdash (\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, x)) \mathbin{\&} (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, p) \mathbin{\&} \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, q) \to p = q)$

Соответствие рекурсивных и представимых функций

Теорема

Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.

Соответствие рекурсивных и представимых функций

Теорема

Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.

Теорема

Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N *и* U_n^k *представимы в Ф.А.*

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$,

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \;\&\; x_2 = 0$

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \& x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$
- $\upsilon(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$
- $\upsilon(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

  формальнее: $\upsilon(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) := (\underset{i \neq k, n+1}{\&} x_i = x_i) \,\&\, x_k = x_{n+1}$

□

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ *представимы в Ф.А. Тогда* $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ *представима в Ф.А.*

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.

Доказательство.

Пусть f, g_1, ..., g_k представляются формулами φ, γ_1, ..., γ_k.

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.

Доказательство.

Пусть f, g_1, ..., g_k представляются формулами φ, γ_1, ..., γ_k.
Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ будет представлена формулой

$$\exists g_1.\ldots.\exists g_k.\varphi(g_1, \ldots, g_k, x_{n+1}) \mathbin{\&} \gamma_1(x_1, \ldots, x_n, g_1) \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \gamma_k(x_1, \ldots, x_n, g_k)$$

□

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

Теорема

β-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

Теорема

β-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \leq d < x$.

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

Теорема

β-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \le d < x$.

Теорема

Если $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие $b, c \in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b, c, i)$

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ *— попарно взаимно просты, и* $0 \le a_i < u_i$, *то существует такой* b, *что* $a_i = b\%u_i$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ *— попарно взаимно просты, и* $0 \le a_i < u_i$, *то существует такой* b, *что* $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ *— попарно взаимно просты, и* $0 \le a_i < u_i$, *то существует такой* b, *что* $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \mathrel{\vdots} p$ и $u_j \mathrel{\vdots} p$ $(i < j)$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ *— попарно взаимно просты, и* $0 \le a_i < u_i$*, то существует такой* b*, что* $a_i = b \% u_i$*.*

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.
- $0 \le a_i < u_i$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ *— попарно взаимно просты, и* $0 \leq a_i < u_i$, *то существует такой* b, *что* $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$. Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \leq n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.
- $0 \leq a_i < u_i$.

Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся b, что

$$a_i = b\%(1 + c \cdot (i + 1)) = \beta(b, c, i)$$

$\square$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.

Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$
$\dots$		
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$	a_y	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$
$\dots$		
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$	a_y	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$

По свойству β-функции, найдутся b и c, что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \le i \le y$.

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$
$\dots$		
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$	a_y	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$

По свойству β-функции, найдутся b и c, что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \le i \le y$.

Теорема

Примитив $R\langle f, g\rangle$ представим в Ф.А. формулой $\rho(x_1, \dots, x_n, y, a)$:

$$\begin{array}{ll} & \exists b.\exists c.(\exists a_0.\hat{\beta}(b, c, 0, a_0)\&\varphi(x_1, ...x_n, a_0)) \\ \& & \forall k.k < y \to \exists d.\exists e.\hat{\beta}(b, c, k, d)\&\hat{\beta}(b, c, k', e)\&\gamma(x_1, ..x_n, k, d, e) \\ \& & \hat{\beta}(b, c, y, a) \end{array}$$

Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

Теорема

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$*.*
Тогда примитив $M\langle f \rangle$ *представим в Ф.А. формулой*

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \,\&\, \forall u.u < y \to \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

Теорема

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}_0$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$. *Тогда примитив* $M\langle f \rangle$ *представим в Ф.А. формулой*

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \mathbin{\&} \forall u.u < y \rightarrow \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

Теорема

Если f *— рекурсивная функция, то она представима в Ф.А.*

Доказательство.

Индукция по структуре f. □

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.
3. Параллельный перебор значений и доказательств: $s = 2^y \cdot 3^p$. Переберём все s, по s получим y и p. Проверим, что p — код доказательства $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(	17	&	0	$0, 0$	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	$(')$	$0, 1$	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	$(+)$	$0, 2$	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	$(\cdot)$	$1, 2$	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	x_k	$(=)$	$0, 2$	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\to$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(	17	&	0	$0, 0$	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	$(')$	$0, 1$	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	$(+)$	$0, 2$	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	$(\cdot)$	$1, 2$	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	x_k	$(=)$	$0, 2$	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\to$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(	17	&	0	$0, 0$	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	$(')$	$0, 1$	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	$(+)$	$0, 2$	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	$(\cdot)$	$1, 2$	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	x_k	$(=)$	$0, 2$	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.
3. Доказательство. $\Pi = \delta_0 \delta_1 \dots \delta_{k-1}$, его гёделев номер:
   $\ulcorner \Pi \urcorner = 2^{\ulcorner \delta_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \delta_1 \urcorner} \cdot \dots \cdot p_{k-1}^{\ulcorner \delta_{k-1} \urcorner}$

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$proof(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода}, f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$proof(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \textit{ — гёделев номер вывода}, f = \ulcorner\phi\urcorner \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$proof(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода}, f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.
2. Согласно тезису Чёрча, любая вычислимая функция вычислима с помощью рекурсивных функций.

☐

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ищем $\langle y, p\rangle$, что $\mathrm{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$,

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ищем $\langle y, p \rangle$, что $\text{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = \ulcorner\Pi\urcorner$, Π — доказательство $\varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ищем $\langle y, p\rangle$, что $\text{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p = \ulcorner\Pi\urcorner$, Π — доказательство $\varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

$$f = S\langle \text{fst}, M\langle S\langle \text{proof}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, U_{n+1}^1, U_{n+1}^2, \dots, U_{n+1}^n, S\langle \text{fst}, U_{n+1}^{n+1}\rangle, S\langle \text{snd}, U_{n+1}^{n+1}\rangle\rangle\rangle\rangle$$

□