

Теоремы об исчислении высказываний.

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, $(\Gamma, \Delta_1, \dots)$ списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	\dots	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens $n+1, n$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	\dots	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens $n+1, n$

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma = \emptyset, \alpha = A$

$$A \rightarrow B \rightarrow A$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \rightarrow \delta_1, \alpha \rightarrow \delta_2, \dots, \alpha \rightarrow \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma = \emptyset, \alpha = A$

$$A \rightarrow B \rightarrow A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$A \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow A)$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Утверждение: если данная последовательность n высказываний — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то его можно перестроить в $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

- ▶ База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- ▶ Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже перестроен вывод $\delta_1, \dots, \delta_n$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$.
Достроим его. Рассмотрим 3 случая.

1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$ (выполнено без доказательства в новом выводе)

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Утверждение: если данная последовательность n высказываний — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то его можно перестроить в $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

- ▶ База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- ▶ Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже перестроен вывод $\delta_1, \dots, \delta_n$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$.

Достроим его. Рассмотрим 3 случая.

1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$ (выполнено без доказательства в новом выводе)
2. δ_{n+1} — гипотеза α

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Утверждение: если данная последовательность n высказываний — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то его можно перестроить в $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

- ▶ База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- ▶ Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже перестроен вывод $\delta_1, \dots, \delta_n$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \delta_n$.

Достроим его. Рассмотрим 3 случая.

1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$ (выполнено без доказательства в новом выводе)
2. δ_{n+1} — гипотеза α
3. δ_{n+1} — получено по правилу Modus Ponens из предыдущих формул δ_j и $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$.

В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.



Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(n)	$\alpha \rightarrow \delta_n$	
	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	δ_{n+1} — аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай аксиомы

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
$(n + 0.3)$	$\delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n + 0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n + 1)$	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	Modus Ponens $n + 0.3, n + 0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай $\delta_i = \alpha$

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
$(n + 0.2)$	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n + 0.4)$	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n + 0.6)$	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	М.Р. $n + 0.2, n + 0.4$
$(n + 0.8)$	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	Сх. акс. 1
$(n + 1)$	$\alpha \rightarrow \alpha$	М.Р. $n + 0.8, n + 0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай Modus Ponens

№ п/п	НОВЫЙ ВЫВОД	ПОЯСНЕНИЕ
	...	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	...	
(j)	$\alpha \rightarrow \delta_j$	
	...	
(k)	$\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}$	
	...	
(n + 0.3)	$(\alpha \rightarrow \delta_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
(n + 0.6)	$(\alpha \rightarrow \delta_j \rightarrow \delta_{n+1}) \rightarrow (\alpha \rightarrow \delta_{n+1})$	M.P. j, n + 0.3
(n + 1)	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	Modus Ponens n + 0.6, k

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β , справедливо, что $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β , справедливо, что $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

Лемма (правило исключённого третьего)

Какова бы ни была формула α , $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

Лемма (об исключении допущения)

Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. Тогда также справедливо $\Gamma \vdash \alpha$.

Доказательство.

Доказывается с использованием лемм, указанных выше.



Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Специальное обозначение

Определение (условное отрицание)

Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $\llbracket \alpha \rrbracket = x$.

Тогда условным отрицанием формулы α назовём следующую формулу $\langle \alpha \rangle$:

$$\langle \alpha \rangle = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg \alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$\langle \neg X \rangle^{x:=\text{Л}} = \neg X \qquad \langle \neg X \rangle^{x:=\text{И}} = \neg \neg X$$

Также, если $\Gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то за $\langle \Gamma \rangle$ обозначим $\langle \gamma_1 \rangle, \langle \gamma_2 \rangle, \dots, \langle \gamma_n \rangle$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$\llbracket A \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$	$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$\llbracket A \rrbracket$	$\llbracket B \rrbracket$	$\llbracket A \rightarrow B \rrbracket$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \rightarrow B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$\langle A \rangle, \langle B \rangle \vdash \langle A \rightarrow B \rangle$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки (\star) и докажем в них каждую строку:

$$(\varphi), (\psi) \vdash (\varphi \star \psi)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки (\star) и докажем в них каждую строку:

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$$\langle \Xi \rangle \vdash \langle \alpha \rangle$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки (\star) и докажем в них каждую строку:

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:

$$\langle \Xi \rangle \vdash \langle \alpha \rangle$$

3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $\langle \Xi \rangle \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$\langle \varphi \rangle, \langle \psi \rangle \vdash \langle \varphi \star \psi \rangle$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \& \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \& \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\varphi, \neg\psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\neg\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \neg\psi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi, \psi \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi = X_1, \dots, X_n$ — все переменные, которые используются в формуле α . И пусть задана некоторая оценка переменных.

Тогда, $(\Xi) \vdash (\neg\alpha)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi = X_1, \dots, X_n$ — все переменные, которые используются в формуле α . И пусть задана некоторая оценка переменных.

Тогда, $(\Xi) \vdash (\alpha)$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α .

- ▶ База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha = X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\Xi)^{X_i:=И} \vdash X_i$ и $(\Xi)^{X_i:=Л} \vdash \neg X_i$.
- ▶ Переход: $\alpha = \varphi \star \psi$, причём $(\Xi) \vdash (\varphi)$ и $(\Xi) \vdash (\psi)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi = X_1, \dots, X_n$ — все переменные, которые используются в формуле α . И пусть задана некоторая оценка переменных.

Тогда, $(\Xi) \vdash \langle \alpha \rangle$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α .

- ▶ База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha = X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\Xi)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$ и $(\Xi)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- ▶ Переход: $\alpha = \varphi \star \psi$, причём $(\Xi) \vdash \langle \varphi \rangle$ и $(\Xi) \vdash \langle \psi \rangle$

Тогда построим вывод:

(1) ... (n)	$\langle \varphi \rangle$	индукционное предположение
(n + 1) ... (k)	$\langle \psi \rangle$	индукционное предположение
(k + 1) ... (l)	$\langle \varphi \star \psi \rangle$	лемма о связках: $\langle \varphi \rangle$ и $\langle \psi \rangle$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы



Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\Xi) \vdash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\Xi) \vdash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n .

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\Xi) \vdash \alpha$, тогда $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n .

- ▶ База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- ▶ Переход: пусть $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1}) \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$\frac{(X_1, X_2, \dots, X_n), \neg X_{n+1} \vdash \alpha \quad (X_1, X_2, \dots, X_n), X_{n+1} \vdash \alpha}{(X_1, X_2, \dots, X_n) \vdash \alpha}$$

При этом, $(X_1, X_2, \dots, X_n) \vdash \alpha$ при всех оценках переменных X_1, \dots, X_n . Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению. □

Заключительные замечания

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.

Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.

Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.

Интуиционистская логика

Критика доказательств чистого существования

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

Критика доказательств чистого существования

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

- ▶ $2^5, 3^3, 7^{10}, \sqrt{2}^2$ — рациональны;
- ▶ $2^{\sqrt{2}}, e^{\pi}$ — иррациональны;
- ▶ задача выглядит довольно сложно.

Критика доказательств чистого существования

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b , такая, что a^b — рационально.

Доказательство.

Рассмотрим $a = b = \sqrt{2}$ и рассмотрим a^b . Возможны два варианта:

1. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рационально;
2. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррационально; отлично, тогда возьмём $a_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и получим

$$a_1^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$



Интуиционизм

“Over de Grondslagen der Wiskunde” (Брайэр, 1907 г.)

Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α , β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- ▶ \perp — конструкция, не имеющая построения

ВНК-интерпретация логических связей

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- ▶ $\alpha \& \beta$ построено, если построены α и β
- ▶ $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β , и мы знаем, что именно
- ▶ $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- ▶ \perp — конструкция, не имеющая построения
- ▶ $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \rightarrow \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — идёт дождь
- ▶ B — светит солнце
- ▶ C — в прошлом году я получил пятёрку по матанализу

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — идёт дождь
- ▶ B — светит солнце
- ▶ C — в прошлом году я получил пятёрку по матанализу

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация $A \rightarrow B$ для автора в данный момент выполнена, поскольку дождя за окном не идёт.

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- ▶ A — идёт дождь
- ▶ B — светит солнце
- ▶ C — в прошлом году я получил пятёрку по матанализу

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- ▶ Материальная импликация $A \rightarrow B$ для автора в данный момент выполнена, поскольку дождя за окном не идёт.
- ▶ Формальная импликация $A \rightarrow B$ места не имеет.

Формализация

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

Определение

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом

$$(10) \quad \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на

$$(10и) \quad \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Теория моделей: битовые шкалы и множества как модели для КИВ

Оценка: размер шкалы n (множество X) и функция $f : P \rightarrow 2^n - 1$ ($f : P \rightarrow \mathcal{X}$).

КИВ	Битовые шкалы	Множества
V	$0 \dots 2^n - 1$	$\mathcal{P}(X)$
истина	$1 \text{ shl } n - 1$	X
$\llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \text{ and } \llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$
$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$
$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket$	$((\text{not } \llbracket \alpha \rrbracket) \text{ or } \llbracket \beta \rrbracket) \text{ and } (1 \text{ shl } n - 1)$	$(X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket$
$\llbracket \neg \alpha \rrbracket$	$(\text{not } \llbracket \alpha \rrbracket) \text{ and } (1 \text{ shl } n - 1)$	$X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket$

Пример

Пусть $X = \{\square, \star, \circ\}$, $A = \{\square\}$, $B = \{\circ\}$, тогда

$$\begin{aligned}\llbracket A \rightarrow A \vee B \rrbracket &= (X \setminus \{\square\}) \cup (\{\square\} \cup \{\circ\}) = \{\star, \circ\} \cup \{\square, \circ\} = X \\ \llbracket A \rightarrow B \rrbracket &= (X \setminus \{\square\}) \cup \{\circ\} = \{\star, \circ\} \neq X\end{aligned}$$

Теория моделей ИИВ: топологическая модель

Оценка задаётся пространством $\langle X, \Omega \rangle$ и функцией $f : P \rightarrow \Omega$.

И.В.	Множества (КИВ)	Топология (ИИВ)
V	$\mathcal{P}(X)$	Ω
истина	X	X
$\llbracket \alpha \ \& \ \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket$
$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket$
$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket$	$(X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket$	$((X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket) \cup \llbracket \beta \rrbracket)^\circ$
$\llbracket \neg \alpha \rrbracket$	$X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket$	$(X \setminus \llbracket \alpha \rrbracket)^\circ$

Определение

$\models \alpha$, если $\llbracket \alpha \rrbracket$ истинно во всех пространствах при всех функциях оценки.

Теорема

ИИВ с топологической интерпретацией корректна и полна.

Закон исключённого третьего не выполнен в ИИВ

Несколько схожих формулировок (упорядочены по убыванию силы): $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$, $\alpha \vee \neg\alpha$, $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.

Теорема

$\not\models A \vee \neg A$ в интуиционистском исчислении высказываний.

Доказательство.

$$X = \mathbb{R}, A = (0, 1),$$

$$\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = (0, 1) \cup ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))^\circ = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty) \neq \mathbb{R}$$

