

Аксиома выбора

Аксиома выбора

Аксиома (Аксиома выбора)

Из любого семейства дизъюнктивных непустых множеств $\{A_i\}$ можно выбрать непустую трансверсаль — множество S , что $S \cap A_i = \{x_i\}$. Иначе, $S \in \times \{A_i\}$.

Теорема (Аксиома выбора)

Пусть $\{A_i\}$ — семейство непустых множеств. Тогда существует $f : \{A_i\} \rightarrow \cup A_i$, причём $\forall a. a \in \{A_i\} \rightarrow f(a) \in a$

Доказательство.

По семейству A_i рассмотрим семейство множеств $X(A_i)$:

$X(A_i) = \{\langle A_i, a \rangle \mid a \in A_i\}$, если $A_i \neq A_j$, то $X(A_i) \cap X(A_j) = \emptyset$, тогда $\exists f. f \in \times \{X(A_i)\}$.



Обратное утверждение также легко показать.

Аксиома выбора: альтернативные формулировки

Теорема (Лемма Цорна)

Если задано $\langle M, (\preceq) \rangle$ и для всякого линейно-упорядоченного $S \subseteq M$ выполнено $\text{prb}_M S \in M$, то в M существует максимальный элемент.

Теорема (Теорема Цермело)

На любом множестве можно задать полный порядок.

Теорема

У любой сюръективной функции существует частичная обратная.

Теорема

Аксиома выбора \Rightarrow лемма Цорна: без доказательства

Начальный отрезок

Определение

Будем говорить, что $\langle S, (\prec_S) \rangle$ — начальный отрезок $\langle T, (\prec_T) \rangle$, если:

- ▶ $S \subseteq T$;
- ▶ если $a, b \in S$, то $a \prec_S b$ тогда и только тогда, когда $a \prec_T b$;
- ▶ если $a \in S, b \in T \setminus S$, то $a \prec_T b$.

Будем записывать это как $S \prec T$.

Теорема

Если множество начальных отрезков X линейно упорядочено, то в нём есть наибольший элемент.

Доказательство.

Пусть $M = \cup \{ T \mid \langle T, (\prec) \rangle \in X \}$ и $(\prec)_M = \cup \{ (\prec) \mid \langle T, (\prec) \rangle \in X \}$.

Раз все элементы X сравнимы, значит, любые два отношения порядка не противоречат друг другу (одно — продолжение другого). Поэтому что все множества в X — начальные отрезки M .



Лемма Цорна \Rightarrow теорема Цермело

Пусть выполнена лемма Цорна и дано некоторое X . Покажем, что на нём можно ввести линейный порядок.

- ▶ Пусть $S = \{\langle P, (\prec) \rangle \mid P \subseteq X, (\prec) \text{ — полный порядок}\}$. Например, для $X = \{0, 1\}$ множество $S = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{0\}, \emptyset \rangle, \langle \{1\}, \emptyset \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle, \langle X, 1 \prec 0 \rangle\}$
- ▶ Введём порядок на S : положим $\langle P, (\prec_p) \rangle < \langle Q, (\prec_q) \rangle$, если $P \subseteq Q$, а \prec_p титт \prec_q при $a, b \in P$, а \prec_q при $a \in P, b \in Q \setminus P$.
- ▶ Заметим, что $\langle \emptyset, \emptyset \rangle < \langle \{0\}, \emptyset \rangle$, но $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$ несравним с $\langle X, 1 \prec 0 \rangle$.
- ▶ Любое линейно-упорядоченное подмножество $\langle T, (<) \rangle$ (где $T \subseteq S$) имеет верхнюю грань (она же максимальный элемент): $\langle \cup T, \cup (<) \rangle$ (например, для $\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{0\}, \emptyset \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle\}$ это $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$).
- ▶ По лемме Цорна тогда есть $\langle R, \sqsubset \rangle = \max S$. Заметим, что $R = X$, потому что иначе пусть $a \in X \setminus R$. Тогда положив $M = \langle R \cup \{a\}, (\prec_R) \cup \{x \prec a \mid x \in R\} \rangle$ получим, что M тоже вполне упорядоченное (и потому $M \in S$), значит, R не максимальное.

Теорема Цермело \Rightarrow существование обратной \Rightarrow аксиома выбора

Теорема

Теорема Цермело \Rightarrow у сюръективных функций существует частичная обратная.

Доказательство.

Рассмотрим сюръективную $f : A \rightarrow B$. Рассмотрим семейство

$R_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Построим полный порядок на каждом из R_b . Тогда $f^{-1}(b) = \min R_b$. □

Теорема

Существует частичная обратная у сюръективных функций \Rightarrow существует трансверсаль у дизъюнктивных множеств.

Доказательство.

Пусть дано семейство дизъюнктивных множеств $\{A_i\}$. Рассмотрим $f : \cup A_i \rightarrow \{A_i\}$, что $f(a) = \cup \{A_i \in \{A_i\} \mid a \in A_i\}$. Поскольку A_i дизъюнктивны, $f(a) = A_i$ при всех a . Тогда существует $f^{-1}(A_i) \in A_i$. Тогда $\{f^{-1}(A_i)\} \in \times \{A_i\}$. □

Зачем нужна аксиома выбора?

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Коши называется такой y , что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+. \exists \delta. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Гейне называется такой y , что для любой $x_n \rightarrow x_0$ выполнено $f(x_n) \rightarrow y$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, тогда $\forall \varepsilon. \exists \delta. \forall x. |x_\delta - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon. \forall \delta. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, тогда $\forall \varepsilon. \exists \delta. \forall x. |x_\delta - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon. \forall \delta. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n — как множество. $\langle p_1, p_2, p_3, \dots \rangle$?

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, тогда $\forall \varepsilon. \exists \delta. \forall x. |x_\delta - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon. \forall \delta. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n — как множество. $\langle p_1, p_2, p_3, \dots \rangle$?
... Фиксируем ε и рассмотрим $X_\delta = \{x_\delta \mid |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon\}$. Возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $x_{\frac{1}{n}} \in X_{\frac{1}{n}}$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, тогда $\forall \varepsilon. \exists \delta. \forall x. |x_\delta - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_\delta) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так. То есть, $\exists \varepsilon. \forall \delta. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $|f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n — как множество. $\langle p_1, p_2, p_3, \dots \rangle$?
... Фиксируем ε и рассмотрим $X_\delta = \{x_\delta \mid |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon\}$. Возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $x_{\frac{1}{n}} \in X_{\frac{1}{n}}$.
... То есть, по семейству непустых множеств $\{X_\delta\}$ по аксиоме выбора построим $p: \{X_\delta\} \rightarrow \cup X_\delta$, что $p(X_\delta) \in X_\delta$, и построим последовательность $p(X_{\frac{1}{n}}) \rightarrow x_0$.

Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ и дана $x_n \rightarrow x_0$. Тогда $f(x_n) \rightarrow y$.

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- ▶ (определение предела по Коши) существует δ , что $\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.
- ▶ (сходимость x_n к x_0) найдётся N , что $\forall n. n > N \rightarrow |x_n - x_0| < \delta$.
- ▶ (предыдущие два пункта) $\forall n. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$.



Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ и дана $x_n \rightarrow x_0$. Тогда $f(x_n) \rightarrow y$.

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- ▶ (определение предела по Коши) существует δ , что $\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.
- ▶ (сходимость x_n к x_0) найдётся N , что $\forall n. n > N \rightarrow |x_n - x_0| < \delta$.
- ▶ (предыдущие два пункта) $\forall n. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$.



Почему здесь не требуется аксиома выбора? Потому что нам нужен δ из единственного множества $\{\delta \in \mathbb{R} \mid \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon\}$. То же про N . Аксиома выбора для конечного семейства множеств доказуема в ZF.

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ и $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. Верно ли, что $A_0 = A_1$?

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ и $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. Верно ли, что $A_0 = A_1$?

Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$.

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ и $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. Верно ли, что $A_0 = A_1$?
Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$.

Теорема

Если $f : A \rightarrow B$, также $a, b \in A$ и $a = b$, то $f(a) = f(b)$.

Доказательство.

Пусть $F \subseteq A \times B$ — график функции f .

Легко показать, что если $a = b$ и $y_1 = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle$.

По определению функции, $\forall x. \forall y_1. \forall y_2. \langle x, y_1 \rangle \in F \ \& \ \langle x, y_2 \rangle \in F \rightarrow y_1 = y_2$.

Также, если $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle \in F$ и $\langle b, y_2 \rangle \in F$.

Тогда: $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$, то есть $f(a) = y_2 = f(b)$.



Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 1 \vee P\}$.

$\{A_0, A_1\}$ — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует $f : \{A_0, A_1\} \rightarrow \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P , то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{B\}$).

$$\vdash f(A_0) \in A_0 \ \& \ f(A_1) \in A_1$$

$$f(A_i) \in A_i$$

$$\vdash (f(A_0) \in \mathcal{B} \ \& \ f(A_0) = 0 \vee P) \ \& \ (f(A_1) \in \mathcal{B} \ \& \ f(A_1) = 1 \vee P)$$

$$\text{Опр. } A_i$$

$$\vdash (f(A_0) = 0 \ \& \ f(A_1) = 1) \vee P$$

$$\text{Удал. } (\&) + \text{дист.}$$

$$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$$

$$\text{Перегруппировка}$$

Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 1 \vee P\}$.

$\{A_0, A_1\}$ — непустое семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует $f : \{A_0, A_1\} \rightarrow \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P , то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{B\}$).

$$\vdash f(A_0) \in A_0 \ \& \ f(A_1) \in A_1$$

$$f(A_i) \in A_i$$

$$\vdash (f(A_0) \in \mathcal{B} \ \& \ f(A_0) = 0 \vee P) \ \& \ (f(A_1) \in \mathcal{B} \ \& \ f(A_1) = 1 \vee P)$$

Опр. A_i

$$\vdash (f(A_0) = 0 \ \& \ f(A_1) = 1) \vee P$$

Удал. (&) + дист.

$$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$$

Перегруппировка

$$\vdash P \rightarrow A_0 = A_1$$

Определение A_i

$$\vdash A_0 = A_1 \rightarrow f(A_0) = f(A_1)$$

Теорема выше

$$\vdash f(A_0) \neq f(A_1) \rightarrow \neg P$$

Контрапозиция

$$\vdash P \vee \neg P$$

Подставили



Слабые варианты аксиомы выбора

Теорема (конечного выбора)

Если $X_1 \neq \emptyset, \dots, X_n \neq \emptyset$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\times\{X_1, \dots, X_n\} \neq \emptyset$.

Доказательство.

► База: $n = 1$. Тогда $\exists x_1. x_1 \in X_1$, поэтому $\exists x_1. \{x_1\} \in \times\{X_1\}$.

► Переход:

$$\exists v. v \in \times\{X_{1,n}\} \rightarrow \exists x_{n+1}. x_{n+1} \in X_{n+1} \rightarrow v \cup \{x_{n+1}\} \in \times(X_{1,n} \cup \{X_{n+1}\})$$



Аксиома (счётного выбора)

Для счётного семейства непустых множеств существует функция, каждому из которых сопоставляющая один из своих элементов

Аксиома (зависимого выбора)

если $\forall x \in E. \exists y \in E. xRy$, то существует последовательность $x_n : \forall n. x_n R x_{n+1}$

Аксиома конструктивности: $V=L$

Определение

Универсум фон-Неймана V — все наследственные фундированные множества.

Конструктивный универсум $L = \bigcup_a L_a$, где:

$$L_a = \begin{cases} \emptyset, & a = 0 \\ \{\{x \in L_b \mid \varphi(x, t_1, \dots, t_k)\} \mid \varphi - \text{формула}, t_i \in L_b\}, & a = b' \\ \bigcup_{b < a} (L_b), & a - \text{пред.} \end{cases}$$

При наличии аксиомы фундирования можно показать, что $V = \bigcup_a V_a$, где:

$$V_a = \begin{cases} \emptyset, & a = 0 \\ \mathcal{P}(V_b), & a = b' \\ \bigcup_{b < a} (V_b), & a - \text{предельный} \end{cases}$$

Аксиома конструктивности: $V = L$, то есть все фундированные множества задаются формулами.