

Теоремы об интуиционистском исчислении высказываний

Модели Крипке

Определение

Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, \preceq, (\Vdash) \rangle$:

- ▶ \mathcal{W} — множество миров, (\preceq) — нестрогий частичный порядок на \mathcal{W} ;
- ▶ $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ — отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash X$, то $W_j \Vdash X$.

Доопределим вынужденность:

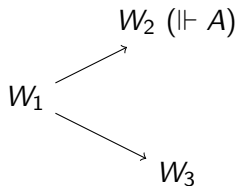
- ▶ $W \Vdash \alpha \ \& \ \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
- ▶ $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
- ▶ $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
- ▶ $W \Vdash \neg \alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \not\Vdash \alpha$.

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке.

Исключённое третье

Пример

Покажем, что $\not\models A \vee \neg A$.



Тогда, $W_3 \models \neg A$, но $W_1 \not\models A$ (по определению) и $W_1 \not\models \neg A$ (так как $W_1 \preceq W_2$ и $W_2 \models A$). Значит, $W_1 \not\models A \vee \neg A$.

Корректность моделей Крипке

Лемма

Если $W_1 \Vdash \alpha$ и $W_1 \preceq W_2$, то $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема

Пусть $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ — некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.

Доказательство.

Доказательство для древовидного (\preceq), обобщение на произвольный порядок легко построить.

Заметим, что $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} \mid w \Vdash \alpha\}$ открыто в топологии для деревьев. Значит, положив $V = \{S \mid S \subseteq \mathcal{W} \text{ \& } S \text{ — открыто}\}$ и $\llbracket \alpha \rrbracket = V(\alpha)$, получим алгебру Гейтинга. □

Табличные модели

Определение

Пусть задано V , значение $T \in V$ («истина»), функция $f_P : P \rightarrow V$, функции $f_{\&}, f_V, f_{\rightarrow} : V \times V \rightarrow V$, функция $f_{\neg} : V \rightarrow V$.

Тогда оценка $\llbracket X \rrbracket = f_P(X)$, $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$, $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$ — табличная.

Если $\vdash \alpha$ влечёт $\llbracket \alpha \rrbracket = T$ при всех оценках пропозициональных переменных f_P , то $M := \langle V, T, f_{\&}, f_V, f_{\rightarrow}, f_{neg} \rangle$ — табличная модель.

Определение

Табличная модель конечна, если V конечно.

Теорема

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство нетабличности: α_n

Пусть существует полная конечная табличная модель \mathcal{M} , $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. То есть, если $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Рассмотрим

$$\alpha_n = \bigvee_{1 \leq p < q \leq n+1} A_p \rightarrow A_q$$

Рассмотрим оценку $f_p : \{A_1 \dots A_{n+1}\} \rightarrow \{v_1 \dots v_n\}$. По принципу Дирихле существуют $p \neq q$, что $\llbracket A_p \rrbracket = \llbracket A_q \rrbracket$. Значит,

$$\llbracket A_p \rightarrow A_q \rrbracket = f_{\rightarrow}(\llbracket A_p \rrbracket, \llbracket A_q \rrbracket) = f_{\rightarrow}(v, v)$$

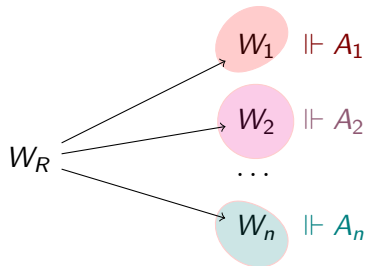
С другой стороны, $\vdash X \rightarrow X$ — поэтому $f_{\rightarrow}(\llbracket X \rrbracket, \llbracket X \rrbracket) = T$, значит,

$$\llbracket A_p \rightarrow A_q \rrbracket = f_{\rightarrow}(v, v) = f_{\rightarrow}(\llbracket X \rrbracket, \llbracket X \rrbracket) = T$$

Аналогично, $\vdash \sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau$, откуда $\llbracket \alpha_n \rrbracket = \llbracket \sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau \rrbracket = T$.

Доказательство нетабличности: противоречие

Однако, в такой модели $\not\models \alpha_n$:



Если $q > 1$, то $W_1 \not\models A_q$ и $W_1 \not\models A_1 \rightarrow A_q$

Если $q > 2$, то $W_2 \not\models A_q$ и $W_2 \not\models A_2 \rightarrow A_q$

$W_n \not\models A_{n+1}$; $W_n \not\models A_n \rightarrow A_{n+1}$

Если $p < q$, то $W_p \not\models A_q$ и $W_p \not\models A_p \rightarrow A_q$

Если $p < q$, то $W_p \not\models A_p \rightarrow A_q$, то есть $W_R \not\models A_p \rightarrow A_q$.

Отсюда: $W_R \not\models \bigvee_{p < q} A_p \rightarrow A_q$, $W_R \not\models \alpha_n$, потому что $\not\models \alpha_n$ и $\not\models \alpha_n$.

Дизъюнктивность ИИВ

Определение

Исчисление дизъюнктивно, если при любых α и β из $\vdash \alpha \vee \beta$ следует $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

Определение

Решётка гёделева, если $a + b = 1$ влечёт $a = 1$ или $b = 1$.

Теорема

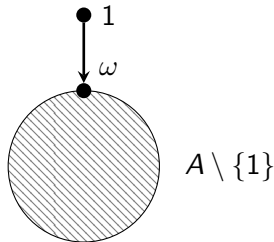
Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно

«Гёделеви́зация» (операция $\Gamma(\mathcal{A})$)

Определение

Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq) \rangle$ определим операцию «гёделеви́зации»:
 $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})}) \rangle$, где отношение $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ — минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:

- ▶ $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, если $a \preceq_{\mathcal{A}} b$ и $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
- ▶ $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, если $a \neq 1$;
- ▶ $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



Теорема

$\Gamma(\mathcal{A})$ — гёделева алгебра.

Доказательство.

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если $a \preceq \omega$ и $b \preceq \omega$, то $a + b \preceq \omega$. □

Оценка $\Gamma(\mathcal{L})$

Теорема

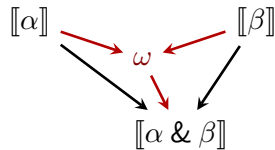
Рассмотрим оценку $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}}$. Тогда она является согласованной с ИИВ.

Индукция по структуре формулы и перебор операций. Рассмотрим ($\&$).

Неформально: почти везде $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot \llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} \cdot \llbracket \beta \rrbracket_{\mathcal{L}}$, поскольку $\llbracket \sigma \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq \omega$,

... но нет ли случаев, когда

$\omega = \text{наиб}\{x \mid x \preceq \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \& x \preceq \llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}\}$?



Чтобы убедиться, что всегда $\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot \llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}$, надо показать:

- ▶ $[\alpha \& \beta]$ — из множества нижних граней: $\alpha \& \beta \vdash \alpha$ и $\alpha \& \beta \vdash \beta$;
 - ▶ $[\alpha \& \beta]$ — наибольшая нижняя грань: $x \preceq [\alpha]$ и $x \preceq [\beta]$ влечёт $x \preceq [\alpha \& \beta]$
- Разбор случаев ($x \in \mathcal{L}$, $x = \omega$). $\omega \preceq [\alpha]$ и $\omega \preceq [\beta]$ влечёт $[\alpha] = [\beta] = 1$, отсюда $[\alpha \& \beta] = [\alpha] \cdot [\beta] = 1$

Гомоморфизм алгебр

Определение

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} — алгебры Гейтинга. Тогда $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — гомоморфизм, если $g(a \star b) = g(a) \star g(b)$, $g(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$ и $g(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Определение

Будем говорить, что оценка $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$ согласована с $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$ и гомоморфизмом g , если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $g(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$.

Доказательство дизъюнктивности ИИВ

Определение ($\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$)

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма

\mathcal{G} — гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{L})$ и \mathcal{L} , причём оценка $\llbracket \cdot \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}$ согласована с \mathcal{G} и $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}}$.

Теорема

Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то либо $\vdash \alpha$, либо $\vdash \beta$.

Доказательство.

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как данная оценка согласована с ИИВ).

Тогда $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ или $\llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как $\Gamma(\mathcal{L})$ гёделева).

Пусть $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$, тогда $\mathcal{G}(\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} = 1$, тогда $\vdash \alpha$ (по полноте \mathcal{L}). □

Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод)

- ▶ Формулы языка (секвенции) имеют вид: $\Gamma \vdash \alpha$. Правила вывода:
- ▶ Аксиома:
$$\frac{\text{посылка 1} \quad \text{посылка 2} \quad \dots}{\text{заключение}} \quad (\text{аннотация})$$
$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha} \text{ (акс.)}$$
- ▶ Правила введения связок:
$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}, \quad \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}$$
- ▶ Правила удаления связок:
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}$$
- ▶ Пример доказательства:
$$\frac{\frac{\frac{A \& B \vdash A \& B}{A \& B \vdash B} \text{ (акс.)}}{A \& B \vdash B} \text{ (удал\&)} \quad \frac{\frac{\frac{A \& B \vdash A \& B}{A \& B \vdash A} \text{ (акс.)}}{A \& B \vdash A} \text{ (удал\&)}}{A \& B \vdash B \& A} \text{ (введ\&)}$$