# Построение дистрибутивных подрешёток

## Определение

*Решётка* $\mathcal{L}' = \langle L', \preceq \rangle$ *— подрешётка решётки* $\mathcal{L} = \langle L, \preceq \rangle$*, если* $L' \subseteq L$*,* $(\preceq') \subseteq (\preceq)$ *и при* $a, b \in L'$ *выполнено* $a +_{\mathcal{L}'} b = a +_{\mathcal{L}} b$ *и* $a \cdot_{\mathcal{L}'} b = a \cdot_{\mathcal{L}} b$

## Лемма

*Существует дистрибутивная подрешётка* $\mathcal{L}'$*, содержащая* $a_1, \ldots, a_n$*, что* $|L'| \le 2^{2^n}$*.*

## Доказательство.

Пусть $\mathcal{L}' = \langle \{\varphi(a_1, \ldots, a_n) \mid \varphi \text{ составлено из } (+) \text{ и } (\cdot)\}, (\preceq) \rangle$. Заметим, что если $p, q \in L'$, то $p \star_{\mathcal{L}} q \in L'$ (так как $\varphi_p(\overrightarrow{a}) \star \varphi_q(\overrightarrow{a}) = \psi(\overrightarrow{a})$). Также ясно, что если $\sup_L\{p, q\} \in L'$ (или $\inf_L\{p, q\} \in L'$), то $p \star_{\mathcal{L}} q = p \star_{\mathcal{L}'} q$. Значит, $\mathcal{L}'$ также дистрибутивна. Построим «ДНФ»:

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\text{Кн} \in \text{ДНФ}(\varphi)} \prod_{i \in \text{Кн}} a_i$$

Всего не больше $2^n$ возможных компонент и $2^{2^n}$ возможных формул $\varphi(\overrightarrow{a})$. □

# Разрешимость ИИВ

### Теорема

*Если $\nvdash \alpha$ в ИИВ, то существует $\mathcal{G}$, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$, причём $|\mathcal{G}| \le 2^{2^{|\alpha|+2}}$.*

### Доказательство.

Если $\nvdash \alpha$, то по полноте найдётся алгебра Гейтинга $\mathcal{H}$, что $\mathcal{H} \not\models \alpha$.
Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — подформулы $\alpha$. Пусть $\mathcal{G}$ — дистрибутивная подрешётка $\mathcal{H}$, построенная по $[\![\varphi_1]\!], \dots, [\![\varphi_n]\!]$, 0 и 1.
Очевидно, что $\mathcal{G}$ — алгебра Гейтинга, и можно показать, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$ (псевдодополнения не обязаны сохраниться). Тогда по лемме, $|\mathcal{G}| \le 2^{2^{n+2}}$. □

### Теорема

*ИИВ разрешимо.*

### Доказательство.

По формуле $\alpha$ построим все возможные алгебры Гейтинга $\mathcal{G}$ размера не больше $2^{2^{|\alpha|+2}}$, если $\mathcal{G} \models \alpha$, то $\vdash \alpha$. □

# Арифметизация логики

# Общие замечания

- Рассматриваем функции $\mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$.
- Обозначим вектор $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ как $\overrightarrow{x}$.

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

2. *Примитив «Инкремент» (N)*

$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*
$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$
2. *Примитив «Инкремент» (N)*
$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$
3. *Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$*
$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0, \qquad U_n^k(\overrightarrow{x}) = x_k$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*
$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$
2. *Примитив «Инкремент» (N)*
$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$
3. *Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \le n$*
$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0, \qquad U_n^k(\overrightarrow{x}) = x_k$$
4. *Примитив «Подстановка» (S) — семейство функций; пусть*
$g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0, \quad f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$
$$S\langle g, f_1, f_2, \dots, f_k\rangle(\overrightarrow{x}) = g(f_1(\overrightarrow{x}), \dots, f_k(\overrightarrow{x}))$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$)

*Пусть* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$)

*Пусть* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$*. Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$*, причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$)

*Пусть* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

## Пример

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) \quad = g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2))$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$)

*Пусть* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$*. Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$*, причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

## Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \end{aligned}$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$)

*Пусть* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

## Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1)))) \end{aligned}$$

# Примитивная рекурсия

## Определение (примитив «примитивная рекурсия», $R$)

*Пусть* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

## Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

## Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1)))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, f(\overrightarrow{x})))) \end{aligned}$$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

*Функция $f$ — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$ и $R$.*

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

*Функция $f$ — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$ и $R$.*

## Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

*Функция $f$ — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$ и $R$.*

## Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

*Функция $f$ — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$ и $R$.*

## Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

*Функция $f$ — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$ и $R$.*

## Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

$f, g = N$

# Примитивно-рекурсивные функции

## Определение

*Функция $f$ — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$ и $R$.*

## Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

$f, g = N$
$S\langle N, N\rangle(x) = N(N(x)) = (x + 1) + 1$ □

# Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

## Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

# Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

**Лемма**

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

**Доказательство.**

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

# Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

## Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$

# Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

## Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$

# Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

**Лемма**

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

**Доказательство.**

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$

# Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

## Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, x + y) =$

# Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

## Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

## Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, x+y) =$
  $\ldots = N(x+y) = x+y+1$

$\square$

# Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание

# Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление

# Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел

# Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел
4. Неформально: все функции, вычисляемые конечным числом вложенных циклов for:

```
for (int i1 = 0; i_1 < g1(x1...xn); i1++) {
    for (int i2 = 0; i_2 < g2(x1...xn,i1); i2++) {
        ...
          for (int ik = 0; ik < gk(x1...xn,i1,i2...); ik++) {
              // выражение без циклов
          }
        ...
    }
}
```

# Общерекурсивные функции

## Определение

*Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$, $R$ и примитива минимизации:*

$$M\langle f\rangle(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

*Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) > 0$ при любом $y$, результат неопределён.*

# Общерекурсивные функции

## Определение

*Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов $Z$, $N$, $U$, $S$, $R$ и примитива минимизации:*

$$M\langle f\rangle(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

*Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) > 0$ при любом $y$, результат неопределён.*

Пример:
Пусть $f(x, y) = x - y^2$, тогда $\lceil\sqrt{x}\rceil = M\langle f\rangle(x)$

```
int sqrt(int x) {
    int y = 0;
    while (x-y*y > 0) y++;
    return y;
}
```

# Выразительная сила

## Определение

*Функция Аккермана:*

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & m=0 \\ A(m-1,1), & m>0, n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)), & m>0, n>0 \end{cases}$$

## Пример

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | 13 | |
| 1 | 2 | 3 | 5 | 13 | 65533 | |
| 2 | 3 | 4 | 7 | 29 | $2^{65536}-3$ | |
| $n$ | $n+1$ | $n+2$ | $2n+3$ | $2^{n+3}-3$ | $\underbrace{2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}}_{n+3} - 3$ | |

# Лемма о росте функции Аккермана

### Определение

$$A^{(p)}(k,x) = \underbrace{A(k, A(k, A(k, \ldots, A(k,x)))}_{p \text{ раз}}$$

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & m = 0 \\ A(m-1, 1), & m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

### Лемма

1. $A(p,q) = A^{(q+1)}(p-1, 1)$
2. $A^{(x+2)}(k,x) < A(k+2, x)$

$A(0,n) = n+1$
$A(2,n) = 2n+3$

### Доказательство.

1. $A(p,q) = A(p-1, A(p, q-1)) = \cdots = A(p-1, A(p-1, \ldots A(p,0)) = A^{(q)}(p-1, A(p,0)) = A^{(q+1)}(p-1,1)$
2. $A(k+2,x) = A(k+1, A(k+2, x-1)) = A^{(A(k+2,x-1)+1)}(k,1) \geq A^{(A(2,x-1)+1)}(k,1) = A^{(2(x-1)+3+1)}(k,1) = A^{(2x+2)}(k,1) = A^{(x+2)}(k, A^{(x)}(k,1)) \geq A^{(x+2)}(k, A^{(x)}(0,1)) = A^{(x+2)}(k, x+1) > A^{(x+2)}(k,x)$

$\square$

# Функция Аккермана не пративно-рекурсивна

## Теорема

*Пусть* $f(\overrightarrow{x})$ — *примитивно-рекурсивная. Тогда найдётся* $k$, *что* $f(\overrightarrow{x}) < A(k, \max(\overrightarrow{x}))$

## Доказательство.

Индукция по структуре $f$.

1. $f = Z$, тогда $k = 0$, т.к. $A(0, x) = x + 1 > Z(x) = 0$;
2. $f = N$, тогда $k = 1$, т.к. $A(1, x) = x + 2 > N(x) = x + 1$;
3. $f = U_s^n$, тогда $k = 0$, т.к. $f(\overrightarrow{x}) \le \max(\overrightarrow{x}) < A(0, \max(\overrightarrow{x}))$;
4. $f = S\langle g, h_1, \dots, h_n \rangle$, тогда $k = k_g + \max(k_{h_1}, \dots, k_{h_n}) + 2$;
5. $f = R\langle g, h \rangle$, тогда $k = \max(k_g, k_h) + 2$.

$\square$

# Доказательство оценки для R

### Лемма

*Пусть* $f = R\langle g, h\rangle$. *Тогда при* $k = \max(k_g, k_h) + 2$ *выполнено* $f(\overrightarrow{x}, y) \leq A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y))$.

### Доказательство.

Индукция по $y$.

- База: $y = 0$. Тогда:
  $f(\overrightarrow{x}, 0) = g(\overrightarrow{x}) \leq A(k_g, \max(\overrightarrow{x})) \leq A^{(1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, 0))$.
- Переход: пусть $f(\overrightarrow{x}, y) \leq A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y))$. Тогда
  $f(\overrightarrow{x}, y+1) = h(\overrightarrow{x}, y, f(\overrightarrow{x}, y)) \leq A(k_h, \max(\overrightarrow{x}, y, f(\overrightarrow{x}, y))) \leq A(k_h, \max(\overrightarrow{x}, y, A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)))) = A(k_h, A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y))) \leq A^{(y+2)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y+1))$

$\square$

Заметим, что $A^{(y+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)) \leq A^{(\max(\overrightarrow{x}, y)+1)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)) \leq A^{(\max(\overrightarrow{x}, y)+2)}(k-2, \max(\overrightarrow{x}, y)) < A(k, \max(\overrightarrow{x}, y))$

# Тезис Чёрча

## Определение

*Тезис Чёрча для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция* $\mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ *является общерекурсивной.*

# Новые обозначения

## Определение

*Запись вида* $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

# Новые обозначения

### Определение

*Запись вида* $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

### Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

# Новые обозначения

### Определение

*Запись вида* $\psi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \ldots, x_n := \theta_n]$

### Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$.

# Новые обозначения

## Определение

*Запись вида* $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

## Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \text{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$. Тогда $\psi(\overline{3})$ соответствует формуле $0''' = 0$

# Выразимость отношений в Ф.А.

## Определение

*Будем говорить, что отношение* $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* $\rho$, *что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

# Выразимость отношений в Ф.А.

## Определение

*Будем говорить, что отношение* $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* $\rho$*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

## Теорема

*отношение «равно» выразимо в Ф.А.:* $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

# Выразимость отношений в Ф.А.

## Определение

*Будем говорить, что отношение* $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* $\rho$*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

## Теорема

*отношение «равно» выразимо в Ф.А.:* $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

## Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$.

# Выразимость отношений в Ф.А.

## Определение

*Будем говорить, что отношение* $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* $\rho$*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

## Теорема

*отношение «равно» выразимо в Ф.А.:* $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

## Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$:

# Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

*Будем говорить, что отношение* $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* $\rho$*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$

### Теорема

*отношение «равно» выразимо в Ф.А.:* $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

### Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...

# Выразимость отношений в Ф.А.

## Определение

*Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула $\rho$, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

## Теорема

*отношение «равно» выразимо в Ф.А.:* $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

## Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.

# Выразимость отношений в Ф.А.

### Определение

*Будем говорить, что отношение* $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* $\rho$*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

### Теорема

*отношение «равно» выразимо в Ф.А.:* $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

### Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.
  $\vdash \neg 0 = 0'$, $\vdash \neg 0 = 0''$, $\vdash \neg 0''' = 0'$, ...

$\square$

# Представимость функций в Ф.А.

## Определение

*Будем говорить, что функция* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *представима в ФА, если существует формула* $\varphi$*, что:*

1. *если* $f(a_1, \dots, a_n) = u$*, то* $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
2. *если* $f(a_1, \dots, a_n) \neq u$*, то* $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
3. *для всех* $a_i \in \mathbb{N}_0$ *выполнено*
   $\vdash (\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, x)) \mathbin{\&} (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, p) \mathbin{\&} \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, q) \to p = q)$

# Соответствие рекурсивных и представимых функций

### Теорема

*Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.*

# Соответствие рекурсивных и представимых функций

**Теорема**

*Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.*

**Теорема**

*Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.*

# Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

**Теорема**

*Примитивы $Z$, $N$ и $U^k_n$ представимы в Ф.А.*

# Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

### Теорема

*Примитивы $Z$, $N$ и $U_n^k$ представимы в Ф.А.*

### Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$,

# Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

**Теорема**

*Примитивы $Z$, $N$ и $U_n^k$ представимы в Ф.А.*

**Доказательство.**

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$

# Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

*Примитивы $Z$, $N$ и $U_n^k$ представимы в Ф.А.*

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$

# Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

### Теорема

*Примитивы $Z$, $N$ и $U_n^k$ представимы в Ф.А.*

### Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$
- $\upsilon(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

# Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

**Теорема**

*Примитивы $Z$, $N$ и $U_n^k$ представимы в Ф.А.*

**Доказательство.**

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$
- $\upsilon(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

  формальнее: $\upsilon(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (\mathop{\&}\limits_{i \neq k, n+1} x_i = x_i) \,\&\, x_k = x_{n+1}$

$\square$

# Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

# Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

### Теорема

*Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.*

# Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

### Теорема

*Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.*

### Доказательство.

Пусть $f$, $g_1$, ..., $g_k$ представляются формулами $\varphi$, $\gamma_1$, ..., $\gamma_k$.

# Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

## Теорема

*Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.*

## Доказательство.

Пусть $f$, $g_1$, ..., $g_k$ представляются формулами $\varphi$, $\gamma_1$, ..., $\gamma_k$.
Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ будет представлена формулой

$$\exists g_1. \ldots .\exists g_k.\varphi(g_1, \ldots, g_k, x_{n+1})\ \&\ \gamma_1(x_1, \ldots, x_n, g_1)\ \&\ \cdots\ \&\ \gamma_k(x_1, \ldots, x_n, g_k)$$

$\square$

# $\beta$-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

# $\beta$-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

## Определение

*$\beta$-функция Гёделя:* $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
*Здесь (%) — остаток от деления.*

# $\beta$-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

### Определение

*$\beta$-функция Гёделя:* $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
*Здесь (%) — остаток от деления.*

### Теорема

*$\beta$-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой*

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

# $\beta$-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

## Определение

*$\beta$-функция Гёделя:* $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
*Здесь (%) — остаток от деления.*

## Теорема

*$\beta$-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой*

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление $b$ на $x$ с остатком: найдутся частное ($q$) и остаток ($d$), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \leq d < x$.

# $\beta$-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

### Определение

*$\beta$-функция Гёделя:* $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
*Здесь (%) — остаток от деления.*

### Теорема

*$\beta$-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой*

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \& (d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление $b$ на $x$ с остатком: найдутся частное ($q$) и остаток ($d$), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \le d < x$.

### Теорема

*Если $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие $b, c \in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b, c, i)$*

# Доказательство свойства $\beta$-функции

## Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если* $u_0, \ldots, u_n$ *— попарно взаимно-просты, и* $0 \le a_i < u_i$*, то существует такой* $b$*, что* $a_i = b \% u_i$*.*

# Доказательство свойства $\beta$-функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой $b$, что $a_i = b\% u_i$.*

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

# Доказательство свойства $\beta$-функции

## Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой $b$, что $a_i = b \% u_i$.*

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

# Доказательство свойства $\beta$-функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой $b$, что $a_i = b\% u_i$.*

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

  Пусть $p$ — простое, $u_i \,\vdots\, p$ и $u_j \,\vdots\, p$ $(i < j)$.

# Доказательство свойства $\beta$-функции

### Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой $b$, что $a_i = b \% u_i$.*

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть $p$ — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$.

# Доказательство свойства $\beta$-функции

## Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой $b$, что $a_i = b \% u_i$.*

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть $p$ — простое, $u_i \,\vdots\, p$ и $u_j \,\vdots\, p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \,\vdots\, p$ или $(j - i) \,\vdots\, p$. Так как $j - i \le n$, то $c \,\vdots\, (j - i)$, потому если и $(j - i) \,\vdots\, p$, всё равно $c \,\vdots\, p$.

# Доказательство свойства $\beta$-функции

## Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой $b$, что $a_i = b \% u_i$.*

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть $p$ — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.

# Доказательство свойства $\beta$-функции

## Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если* $u_0, \dots, u_n$ *— попарно взаимно-просты, и* $0 \le a_i < u_i$*, то существует такой* $b$*, что* $a_i = b\% u_i$*.*

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

  Пусть $p$ — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.
- $0 \le a_i < u_i$.

# Доказательство свойства $\beta$-функции

## Теорема

*Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой $b$, что $a_i = b \% u_i$.*

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

  Пусть $p$ — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.
- $0 \le a_i < u_i$.

Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся $b$, что

$$a_i = b \% (1 + c \cdot (i + 1)) = \beta(b, c, i)$$

$\square$

## Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами $\varphi$ и $\gamma$.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

# Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами $\varphi$ и $\gamma$.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

| Шаг вычисления | Об. | Утверждение в Ф.А. |
|---|---|---|
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$ | $a_0$ | $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$ |

## Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами $\varphi$ и $\gamma$.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

| Шаг вычисления | Об. | Утверждение в Ф.А. |
|---|---|---|
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$ | $a_0$ | $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$ |
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$ | $a_1$ | $\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$ |

## Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами $\varphi$ и $\gamma$.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

| Шаг вычисления | Об. | Утверждение в Ф.А. |
|---|---|---|
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$ | $a_0$ | $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$ |
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$ | $a_1$ | $\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$ |
| $\dots$ | | |
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$ | $a_y$ | $\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$ |

# Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами $\varphi$ и $\gamma$.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

| Шаг вычисления | Об. | Утверждение в Ф.А. |
|---|---|---|
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$ | $a_0$ | $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$ |
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$ | $a_1$ | $\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$ |
| $\dots$ | | |
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$ | $a_y$ | $\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$ |

По свойству $\beta$-функции, найдутся $b$ и $c$, что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \le i \le y$.

# Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами $\varphi$ и $\gamma$.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

| Шаг вычисления | Об. | Утверждение в Ф.А. |
|---|---|---|
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$ | $a_0$ | $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$ |
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$ | $a_1$ | $\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$ |
| $\dots$ | | |
| $R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$ | $a_y$ | $\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$ |

По свойству $\beta$-функции, найдутся $b$ и $c$, что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \le i \le y$.

### Теорема

*Примитив $R\langle f, g\rangle$ представим в Ф.А. формулой $\rho(x_1, \dots, x_n, y, a)$:*

$$\begin{array}{ll} & \exists b.\exists c.(\exists a_0.\hat{\beta}(b, c, 0, a_0)\&\varphi(x_1, ...x_n, a_0)) \\ \& & \forall k.k < y \to \exists d.\exists e.\hat{\beta}(b, c, k, d)\&\hat{\beta}(b, c, k', e)\&\gamma(x_1, ..x_n, k, d, e) \\ \& & \hat{\beta}(b, c, y, a) \end{array}$$

# Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

### Теорема

*Пусть функция* $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y, r)$*.*
*Тогда примитив* $M\langle f \rangle$ *представим в Ф.А. формулой*

$$\mu(x_1, \ldots, x_n, y) := \varphi(x_1, \ldots, x_n, y, 0) \mathbin{\&} \forall u.u < y \to \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n, u, 0)$$

# Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

### Теорема

*Пусть функция* $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$*.*
*Тогда примитив* $M\langle f \rangle$ *представим в Ф.А. формулой*

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \,\&\, \forall u. u < y \to \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

### Теорема

*Если* $f$ *— рекурсивная функция, то она представима в Ф.А.*

### Доказательство.

Индукция по структуре $f$. $\square$

# Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем $f$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

# Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем $f$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна $\varphi$, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

# Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем $f$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна $\varphi$, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

# Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем $f$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна $\varphi$, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.

# Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем $f$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна $\varphi$, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.

# Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем $f$ и $x_1, x_2, \dots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. По представимости нам известна $\varphi$, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.
3. Параллельный перебор значений и доказательств: $s = 2^y \cdot 3^p$. Переберём все $s$, по $s$ получим $y$ и $p$. Проверим, что $p$ — код доказательства $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

# Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

| Номер | Символ | Номер | Символ | Имя | $k, n$ | Гёделев номер |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | ( | 17 | & | 0 | $0, 0$ | $27 + 6$ |
| 5 | ) | 19 | $\forall$ | $(')$ | $0, 1$ | $27 + 6 \cdot 3$ |
| 7 | , | 21 | $\exists$ | $(+)$ | $0, 2$ | $27 + 6 \cdot 9$ |
| 9 | . | 23 | $\vdash$ | $(\cdot)$ | $1, 2$ | $27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$ |
| 11 | $\neg$ | $25 + 6 \cdot k$ | $x_k$ | $(=)$ | $0, 2$ | $29 + 6 \cdot 9$ |
| 13 | $\rightarrow$ | $27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | $f_k^n$ | | | |
| 15 | $\vee$ | $29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | $P_k^n$ | | | |

# Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

| Номер | Символ | Номер | Символ | Имя | $k, n$ | Гёделев номер |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | ( | 17 | $\&$ | 0 | $0, 0$ | $27 + 6$ |
| 5 | ) | 19 | $\forall$ | $(')$ | $0, 1$ | $27 + 6 \cdot 3$ |
| 7 | , | 21 | $\exists$ | $(+)$ | $0, 2$ | $27 + 6 \cdot 9$ |
| 9 | . | 23 | $\vdash$ | $(\cdot)$ | $1, 2$ | $27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$ |
| 11 | $\neg$ | $25 + 6 \cdot k$ | $x_k$ | $(=)$ | $0, 2$ | $29 + 6 \cdot 9$ |
| 13 | $\rightarrow$ | $27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | $f_k^n$ | | | |
| 15 | $\vee$ | $29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | $P_k^n$ | | | |

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.

# Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

| Номер | Символ | Номер | Символ | Имя | $k, n$ | Гёделев номер |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | ( | 17 | & | 0 | $0, 0$ | $27 + 6$ |
| 5 | ) | 19 | $\forall$ | $(')$ | $0, 1$ | $27 + 6 \cdot 3$ |
| 7 | , | 21 | $\exists$ | $(+)$ | $0, 2$ | $27 + 6 \cdot 9$ |
| 9 | . | 23 | $\vdash$ | $(\cdot)$ | $1, 2$ | $27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$ |
| 11 | $\neg$ | $25 + 6 \cdot k$ | $x_k$ | $(=)$ | $0, 2$ | $29 + 6 \cdot 9$ |
| 13 | $\rightarrow$ | $27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | $f_k^n$ | | | |
| 15 | $\vee$ | $29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$ | $P_k^n$ | | | |

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.
3. Доказательство. $\Pi = \delta_0 \delta_1 \ldots \delta_{k-1}$, его гёделев номер: $\ulcorner \Pi \urcorner = 2^{\ulcorner \delta_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \delta_1 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_{k-1}^{\ulcorner \delta_{k-1} \urcorner}$

# Проверка доказательства на корректность

## Теорема

*Следующая функция рекурсивна:*

$$proof(f, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода}, f = \ulcorner\phi\urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

# Проверка доказательства на корректность

**Теорема**

*Следующая функция рекурсивна:*

$$proof(f, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \textit{ — гёделев номер вывода}, f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

**Идея доказательства.**

1. Проверка доказательства вычислима.

# Проверка доказательства на корректность

## Теорема

*Следующая функция рекурсивна:*

$$proof(f, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \textit{ — гёделев номер вывода}, f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

## Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.
2. Согласно тезису Чёрча, любая вычислимая функция вычислима с помощью рекурсивных функций.

□

# Перебор доказательств

### Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.

# Перебор доказательств

### Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

# Перебор доказательств

## Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

## Теорема

*Если* $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, *и* $f$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi$, *то* $f$ *— рекурсивна.*

# Перебор доказательств

## Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

## Теорема

*Если* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* $f$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi$, *то* $f$ *— рекурсивна.*

## Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ищем $\langle y, p \rangle$, что $\mathrm{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = 1$,

# Перебор доказательств

## Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

## Теорема

*Если* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* $f$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi$, *то* $f$ *— рекурсивна.*

## Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ищем $\langle y, p\rangle$, что $\mathrm{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p = \ulcorner\Pi\urcorner$, $\Pi$ — доказательство $\varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

# Перебор доказательств

## Лемма

*Следующие функции рекурсивны:*

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \,\vdots\, k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

## Теорема

*Если* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* $f$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi$, *то* $f$ *— рекурсивна.*

## Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ищем $\langle y, p\rangle$, что $\mathrm{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p = \ulcorner\Pi\urcorner$, $\Pi$ — доказательство $\varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

$$f = S\langle \mathrm{fst}, M\langle S\langle \mathrm{proof}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, U^1_{n+1}, U^2_{n+1}, \ldots, U^n_{n+1}, S\langle \mathrm{fst}, U^{n+1}_{n+1}\rangle, S\langle \mathrm{snd}, U^{n+1}_{n+1}\rangle\rangle\rangle\rangle$$

$\square$