Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, весна 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции): $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Например, если было показано существование вывода $A \vdash A$, то тогда теорема гарантирует и существование вывода $\vdash A \to A$.

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$
   (d) $\vdash A \vee B \to B \vee A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
2. Докажите:
   (a) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \to B$
3. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$
   (b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(правило контрапозиции)*
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$
   (d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \,\&\, B)$
   (e) $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$
   (f) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$
   (g) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*
4. Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой: $(A \to B) \to C$ и $A \to (B \to C)$? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку).
5. Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению.
   (a) связка «и-не» («штрих шеффера», “|”): $A \mid B$ истинно, когда один из аргументов ложен. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления.

      Поясним, что мы понимаем под словами «исключить связку». Как вы знаете, конъюнкция и отрицание выражаются через «и-не» ($\neg\alpha := \alpha \mid \alpha$ и т.п.). При такой замене все схемы аксиом для конъюнкции и отрицания должны стать теоремами. При этом исчисление должно остаться корректным относительно классической модели исчисления высказываний.
   (b) связка «или-не» («стрелка пирса», “$\downarrow$”): $A \downarrow B$ истинно, когда оба аргумента ложны. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.
   (c) Нуль-местная связка «ложь» (“$\perp$”). Мы ожидаем вот такую замену: $\neg A := A \to \perp$. Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.
6. Достаточно ли лжи и «исключённого или» ($A \oplus B$ истинно, когда $A \neq B$) для выражения всех остальных связок?
7. Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\not\vdash \beta \to \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\not\vdash \gamma \to \alpha$ и $\not\vdash \beta \to \gamma$.
8. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о исчислении высказываний. Интуиционистская логика.

1. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.
2. Покажите, что следующие высказывания не доказуемы в интуиционистской логике:
   (a) $\neg\neg A \to A$
   (b) $((A \to B) \to A) \to A$
   (c) $(A \to B) \vee (B \to A)$
   (d) $(A \to B \vee \neg B) \vee (\neg A \to B \vee \neg B)$
   (e) $\bigvee_{i=0,n-1} A_i \to A_{(i+1)\%n}$
3. Выполнены ли формулы де Моргана в интуиционистской логике? Докажите или опровергните.
   (a) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$
   (b) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$
   (c) $\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$
4. Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку $\star$, что $\vdash A \star B \to \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \to A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:
   (a) $\star$ — конъюнкция;
   (b) $\star$ — дизъюнкция;
   (c) $\star$ — импликация;
   (d) $\star$ — отрицание.
5. Существует несколько схожих вариантов аксиомы исключённого третьего. Не пользуясь 10 схемой аксиом, покажите следующее:
   (a) $\alpha \vee \neg\alpha, \alpha \to \neg\alpha \to \beta \vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
   (b) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha, \alpha \to \neg\alpha \to \beta \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$
6. Рассмотрим несколько моделей троичной логики. Логики похожи истинностными значениями ($V = \{-1, 0, 1\}$, истиной считаем 1) и определением большинства операций: $[\![A \,\&\, B]\!] = \min([\![A]\!], [\![B]\!])$, $[\![A \vee B]\!] = \max([\![A]\!], [\![B]\!])$, $[\![\neg A]\!] = -[\![A]\!]$. Отличаются логики определением импликации (ниже), и в одном случае – определением отрицания. Про каждую из них ответьте на четыре вопроса: являются ли они корректными и/или полными моделями классического и/или интуиционистского исчисления высказываний.
   (a) Сильная логика неопределённости Клини: $[\![A \to B]\!] = [\![\neg A \vee B]\!]$.
   (b) Троичная логика Лукасевича: $[\![A \to B]\!] = \min(1, 1 - [\![A]\!] + [\![B]\!])$
   (c) Логика Гёделя G_3:

$$[\![\neg A]\!] = \begin{cases} 1, & [\![A]\!] = -1 \\ -1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad [\![A \to B]\!] = \begin{cases} 1, & [\![A]\!] \leqslant [\![B]\!] \\ [\![B]\!], & \text{иначе} \end{cases}$$

7. Изоморфизм Карри-Ховарда — соответствие между интуиционистским исчислением высказываний, с одной стороны, и языками программирования, с другой. А именно, можно заметить, что программа соответствует доказательству, тип программы — логическому высказыванию. Связки (как составные части логического высказывания) соответствуют определённым типовым конструкциям: функция — импликации, конъюнкция — упорядоченной паре, дизъюнкция — алгебраическому типу (`std::variant` и т.п.).

   Например, функция `A id(A x) { return x; }` доказывает $A \to A$, а функция

```
std::pair<A,B> swap(std::pair<B,A> x) { return std::pair(x.second, x.first); }
```

доказывает $B \& A \to A \& B$.

Ложь выражается менее очевидно. Давайте за ложь мы возьмём выражение, имеющее тип несвязанного типового параметра (идея в том, чтобы данное выражение легко приводилось бы к любому типу: из лжи следует всё, что угодно). Данный код доказывает $\neg Z$, то есть $Z \to \perp$:

```
template <class A>
A negate(Z x) { throw ("Value of type Z is impossible"); }
```

Конечно, в смысле изоморфизма Карри-Ховарда большинство языков программирования противоречивы.

В завершение теоретической части заметим, что в свете ВНК-интерпретации в изоморофизме Карри-Ховарда нет ничего странного: если под конструкцией мы понимаем тип, то любое значение типа — это метод построения конструкции (типы, значения которых можно построить, мы будем называть *обитаемыми*), а функция — это способ перестроения одного значения в другое.

Докажите следующие утверждения, написав соответствующую программу:

(a) $A \to B \to A$
(b) $A \& B \to A \vee B$
(c) $(A \& (B \vee C)) \to ((A \& B) \vee (A \& C))$
(d) $(A \to C) \& (B \to C) \& A \vee B \to C$
(e) $(B \vee C \to A) \to (B \to A) \& (C \to A)$
(f) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
(g) $((A \to B) \to C) \to (A \to (B \to C))$
(h) $(A \to B) \& (A \to \neg B) \to \neg A$
(i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.
(j) $\perp$

Задание №3. Топология, решётки.

1. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Внутренностью* множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A. *Замыканием* множества $\overline{A}$ назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A. Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V, что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V, что $V \subseteq A$. Точка x — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A, так и с его дополнением.

   (a) Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x | x \in A \,\&\, x \text{ — внутренняя точка}\}$.
   (b) Покажите, что A замкнуто тогда и только когда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\overline{A} = \{x \mid x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$. Верно ли, что $\overline{A} = X \backslash ((X \backslash A)^\circ)$?
   (c) Введём топологию на деревьях способом, рассмотренным на лекции. Рассмотрим некоторое множество вершин V. Опишите множества V° и $\overline{V}$. Какие вершины будут являться граничными для V?
   (d) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B°, а также $\overline{A}$ и $\overline{B}$?
   (e) Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?
   (f) Покажите, что $\overline{\left(\overline{A^\circ}\right)^\circ} = \overline{A^\circ}$.
   (g) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутренности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться?

2. Напомним, что эвклидовой топологией называется топология на $\mathbb{R}$ с базой $\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Связны ли $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ как топологические подпространства $\mathbb{R}$?
   (b) Связен ли интервал $(0, 1)$?

3. Примеры топологий. Для каждого из примеров ниже проверьте, задано ли в нём топологическое пространство, и ответьте на следующие вопросы, если это так: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы замкнутые множества в данной топологии; связно ли данное пространство.

   (a) Топология Зарисского на $\mathbb{R}$: $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R}\backslash X$ конечно$\}$, то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.

   (b) Топология стрелки на $\mathbb{R}$: $\Omega = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\}$, то есть пустое, всё пространство и все открытые лучи.

   (c) Множество всех бесконечных подмножеств $\mathbb{R}$: $\Omega = \{\varnothing\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X$ бесконечно$\}$

   (d) Множество всевозможных объединений арифметических прогрессий: $A(a) = \{a \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$; $X \in \Omega$, если $X = \varnothing$ или $X = \bigcup_i A(a_i)$ (все $a_i > 0$).

4. Непрерывной функцией называется такая, для которой прообраз открытого множества всегда открыт. Путём на топологическом пространстве X назовём непрерывное отображение вещественного интервала $[0, 1]$ в X. Опишите пути (то есть, опишите, какие функции могли бы являться путями):

   (a) на $\mathbb{N}$ (с дискретной топологией);

   (b) в топологии Зарисского;

   (c) на дереве (с топологией с лекции);

5. Связным множеством в топологическом пространстве назовём такое, которое связно как подпространство. Линейно связным множеством назовём такое, в котором две произвольные точки могут быть соединены путём, образ которого целиком лежит в множестве.

   (a) покажите, что линейно связное множество всегда связно;

   (b) покажите, что связное не обязательно линейно связное.

6. Всегда ли непрерывным образом связного пространства является другое связное (под)пространство? Докажите или опровергните.

7. Рассмотрим подмножество частично упорядоченного множества, и рассмотрим следующие свойства: (а) наличие наибольшего элемента; (б) наличие супремума; (в) наличие единственного максимального элемента. Всего можно рассмотреть шесть утверждений ((а) влечёт (б), (а) влечёт (в), и т.п.) — про каждое определите, выполнено ли оно в общем случае, и приведите либо доказательство, либо контрпример. Задача состоит из одного пункта, для получения баллов все шесть утверждений должны быть разобраны.

8. Покажите следующие утверждения для импликативных решёток:

   (a) монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;

   (b) *Законы поглощения:* $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;

   (c) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;

   (d) из $a \preceq b$ следует $b \to c \preceq a \to c$ и $c \to a \preceq c \to b$;

   (e) из $a \preceq b \to c$ следует $a \cdot b \preceq c$;

   (f) $b \preceq a \to b$ и $a \to (b \to a) = 1$;

   (g) $a \to b \preceq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;

   (h) $a \preceq b \to a \cdot b$ и $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$

   (i) $a \to c \preceq (b \to c) \to (a + b \to c)$

   (j) импликативная решётка дистрибутивна: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

9. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что интуиционистское исчисление высказываний корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.

10. Покажите, что на конечном множестве дистрибутивная решётка всегда импликативна.

11. Постройте пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.

12. Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

13. Покажите, что $(\preceq)$ — отношение предпорядка, а $(\approx)$ — отношение эквивалентности.

14. Покажите, что $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$. Зависит ли результат от выбора представителей классов эквивалентности $[\alpha]$ и $[\beta]$? Ответ также докажите.

15. Покажите, что $[\alpha \to \beta]_{\mathcal{L}}$ — псевдодополнение $[\alpha]_{\mathcal{L}}$ до $[\beta]_{\mathcal{L}}$.

Задание №4. Модели Крипке. Естественный вывод.

1. Опровергните формулы, построив соответствующие модели Крипке:

   (a) $\neg\neg A \to A$

   (b) $((A \to B) \to A) \to A$

   (c) $(A \to B \vee \neg B) \vee (\neg A \to B \vee \neg B)$

   (d) $\bigvee_{i=0,n-1} A_i \to A_{(i+1)\%n}$

2. Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых W_i, W_j, α, если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash \alpha$, то $W_j \Vdash \alpha$.

3. Несколько задач на упрощение структуры миров моделей Крипке.

   (a) Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается древовидной моделью Крипке.

   (b) Верно ли, что если формула опровергается некоторой древовидной моделью Крипке (причём у каждой вершины не больше двух сыновей), то эту древовидную модель можно достроить до полного бинарного дерева, с сохранением свойства опровержимости?

   (c) Верно ли, что если некоторая модель Крипке опровергает некоторую формулу, то добавление любого мира к модели в качестве потомка к любому из узлов оставит опровержение в силе?

4. Постройте опровержимую в ИИВ формулу, которая не может быть опровергнута моделью Крипке (ответ требуется доказать):

   (a) глубины 2 и меньше;

   (b) глубины $n \in \mathbb{N}$ и меньше.

5. Покажите аналог теоремы о дедукции для естественного вывода: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

6. Определим отображение между языками вывода (гильбертов и естественный вывод):

$$|\varphi|_{\text{е}} = \begin{cases} |\alpha|_{\text{е}} \star |\beta|_{\text{е}}, & \varphi = \alpha \star \beta \\ |\alpha|_{\text{е}} \to \bot, & \varphi = \neg\alpha \\ X, & \varphi = X \end{cases} \qquad |\varphi|_{\text{г}} = \begin{cases} |\alpha|_{\text{г}} \star |\beta|_{\text{г}}, & \varphi = \alpha \star \beta \\ A \,\&\, \neg A, & \varphi = \bot \\ X, & \varphi = X \end{cases}$$

   (a) покажите, что $\vdash_{\text{е}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{г}} |\alpha|_{\text{г}}$;

   (b) покажите, что $\vdash_{\text{г}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{е}} |\alpha|_{\text{е}}$.

7. Классическое исчисление высказываний также можно сформулировать в стиле естественного вывода, заменив правило исключения лжи на такое:

$$\frac{\Gamma, \varphi \to \bot \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ (удал}\neg\neg\text{)}$$

   В этом задании будем обозначать через $\Gamma \vdash_{\text{к}} \varphi$ тот факт, что формула φ выводится из контекста Γ в классическом И.В. в варианте естественного вывода.

   (a) Покажите, что если $\vdash_{\text{к}} \varphi$ и $A_1, \dots, A_n$ — все пропозициональные переменные из φ, то $\vdash_{\text{е}} A_1 \vee \neg A_1 \to A_2 \vee \neg A_2 \to \dots \to A_n \vee \neg A_n \to \varphi$.

   (b) Покажите теорему Гливенко: если $\vdash_{\text{к}} \varphi$, то $\vdash_{\text{е}} \neg\neg\varphi$.