Теоремы об интуиционистском исчислении высказываний

Модели Крипке

Определение

Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, \preceq, (\Vdash) \rangle$*:*

- $\mathcal{W}$ *— множество миров,* $(\preceq)$ *— нестрогий частичный порядок на* $\mathcal{W}$*;*
- $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ *— отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если* $W_i \preceq W_j$ *и* $W_i \Vdash X$*, то* $W_j \Vdash X$*.*

Доопределим вынужденность:

- $W \Vdash \alpha \mathbin{\&} \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
- $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
- $W \Vdash \neg\alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \nVdash \alpha$.

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке.

Исключённое третье

Пример

Покажем, что $\not\models A \vee \neg A$.

$$
\begin{tikzcd}
 & W_2\ (\Vdash A) \\
W_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & W_3
\end{tikzcd}
$$

Тогда, $W_3 \Vdash \neg A$, *но* $W_1 \nVdash A$ *(по определению) и* $W_1 \nVdash \neg A$ *(так как* $W_1 \preceq W_2$ *и* $W_2 \Vdash A$*). Значит,* $W_1 \nVdash A \vee \neg A$.

Корректность моделей Крипке

Лемма

Если $W_1 \Vdash \alpha$ *и* $W_1 \preceq W_2$, *то* $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема

Пусть $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ *— некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.*

Доказательство.

Доказательство для древовидного $(\preceq)$, обобщение на произвольный порядок легко построить.
Заметим, что $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} \mid w \Vdash \alpha\}$ открыто в топологии для деревьев.
Значит, положив $V = \{\ S \mid S \subseteq \mathcal{W}\ \ \&\ \ S$ — открыто $\}$ и $[\![\alpha]\!] = V(\alpha)$, получим алгебру Гейтинга. □

Табличные модели

Определение

Пусть задано V*, значение* $T \in V$ *(«истина»), функция* $f_P : P \to V$*, функции* $f_\&, f_\vee, f_\to : V \times V \to V$*, функция* $f_\neg : V \to V$*.*
Тогда оценка $[\![X]\!] = f_P(X)$*,* $[\![\alpha \star \beta]\!] = f_\star([\![\alpha]\!], [\![\beta]\!])$*,* $[\![\neg\alpha]\!] = f_\neg([\![\alpha]\!])$ *— табличная.*
Если $\vdash \alpha$ *влечёт* $[\![\alpha]\!] = T$ *при всех оценках пропозициональных переменных* f_P*, то* $\mathcal{M} := \langle V, T, f_\&, f_\vee, f_\to, f_\neg\rangle$ *— табличная модель.*

Определение

Табличная модель конечна, если V *конечно.*

Теорема

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство нетабличности: α_n

Пусть существует полная конечная табличная модель $\mathcal{M}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. То есть, если $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, то $\vdash \alpha$.
Рассмотрим

$$\alpha_n = \bigvee_{1 \le p < q \le n+1} A_p \to A_q$$

Рассмотрим оценку $f_P : \{A_1 \dots A_{n+1}\} \to \{v_1 \dots v_n\}$. По принципу Дирихле существуют $p \neq q$, что $[\![A_p]\!] = [\![A_q]\!]$. Значит,

$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_{\to}([\![A_p]\!], [\![A_q]\!]) = f_{\to}(v, v)$$

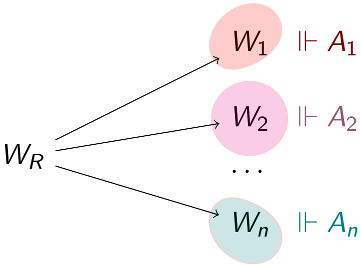
С другой стороны, $\vdash X \to X$ — поэтому $f_{\to}([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$, значит,

$$[\![A_p \to A_q]\!] = f_{\to}(v, v) = f_{\to}([\![X]\!], [\![X]\!]) = T$$

Аналогично, $\vdash \sigma \vee (X \to X) \vee \tau$, отсюда $[\![\alpha_n]\!] = [\![\sigma \vee (X \to X) \vee \tau]\!] = T$.

Доказательство нетабличности: противоречие

Однако, в такой модели $\not\Vdash \alpha_n$:



Если $q > 1$, то $W_1 \not\Vdash A_q$ и $W_1 \not\Vdash A_1 \to A_q$

Если $q > 2$, то $W_2 \not\Vdash A_q$ и $W_2 \not\Vdash A_2 \to A_q$

$W_n \not\Vdash A_{n+1}$; $W_n \not\Vdash A_n \to A_{n+1}$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_q$ и $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$

Если $p < q$, то $W_p \not\Vdash A_p \to A_q$, то есть $W_R \not\Vdash A_p \to A_q$.
Отсюда: $W_R \not\Vdash \bigvee_{p<q} A_p \to A_q$, $W_R \not\Vdash \alpha_n$, потому $\not\models \alpha_n$ и $\not\vdash \alpha_n$.

Дизъюнктивность ИИВ

Определение

Исчисление дизъюнктивно, если при любых α *и* β *из* $\vdash \alpha \vee \beta$ *следует* $\vdash \alpha$ *или* $\vdash \beta$*.*

Определение

Решётка гёделева, если $a + b = 1$ *влечёт* $a = 1$ *или* $b = 1$*.*

Теорема

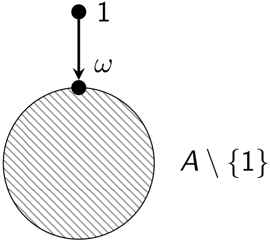
Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно

«Гёделевизация» (операция $\Gamma(\mathcal{A})$)

Определение

Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq) \rangle$ определим операцию «гёделевизации»: $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})}) \rangle$, *где отношение $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ — минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:*

- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, *если* $a \preceq_{\mathcal{A}} b$ *и* $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
- $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, *если* $a \neq 1$;
- $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



Теорема

$\Gamma(\mathcal{A})$ — *гёделева алгебра.*

Доказательство.

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если $a \preceq \omega$ и $b \preceq \omega$, то $a + b \preceq \omega$. $\square$

Оценка $\Gamma(\mathcal{L})$

Теорема

Рассмотрим оценку $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}}$. *Тогда она является согласованной с ИИВ.*

Индукция по структуре формулы и перебор операций. Рассмотрим (&).
Неформально: почти везде $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot [\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} \cdot [\![\beta]\!]_{\mathcal{L}}$, поскольку $[\![\sigma]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq \omega$,

... но нет ли случаев, когда
$\omega = \text{наиб}\{x \mid x \preceq [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \,\&\, x \preceq [\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}\}$?

$$\begin{tikzcd}
{[\![\alpha]\!]} \arrow[dr] \arrow[ddr] & & {[\![\beta]\!]} \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& \omega \arrow[d] & \\
& {[\![\alpha \,\&\, \beta]\!]} &
\end{tikzcd}$$

Чтобы убедиться, что всегда $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = [\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot [\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$, надо показать:

- $[\alpha \,\&\, \beta]$ — из множества нижних граней: $\alpha \,\&\, \beta \vdash \alpha$ и $\alpha \,\&\, \beta \vdash \beta$;
- $[\alpha \,\&\, \beta]$ — наибольшая нижняя грань: $x \preceq [\alpha]$ и $x \preceq [\beta]$ влечёт $x \preceq [\alpha \,\&\, \beta]$
  Разбор случаев ($x \in \mathcal{L}$, $x = \omega$). $\omega \preceq [\alpha]$ и $\omega \preceq [\beta]$ влечёт $[\alpha] = [\beta] = 1$, отсюда
  $[\alpha \,\&\, \beta] = [\alpha] \cdot [\beta] = 1$

Гомоморфизм алгебр

Определение

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *— алгебры Гейтинга. Тогда* $g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *— гомоморфизм, если* $g(a \star b) = g(a) \star g(b)$, $g(0_\mathcal{A}) = 0_\mathcal{B}$ *и* $g(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B}$.

Определение

Будем говорить, что оценка $[\![\cdot]\!]_\mathcal{A}$ *согласована с* $[\![\cdot]\!]_\mathcal{B}$ *и гомоморфизмом* g, *если* $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ *и* $g([\![\alpha]\!]_\mathcal{A}) = [\![\alpha]\!]_\mathcal{B}$.

Доказательство дизъюнктивности ИИВ

Определение ($\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$)

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма

$\mathcal{G}$ — гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{L})$ и $\mathcal{L}$, причём оценка $[\![\cdot]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}$ согласована с $\mathcal{G}$ и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{L}}$.

Теорема

Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то либо $\vdash \alpha$, либо $\vdash \beta$.

Доказательство.

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $[\![\alpha \vee \beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как данная оценка согласована с ИИВ).
Тогда $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ или $[\![\beta]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как $\Gamma(\mathcal{L})$ гёделева).
Пусть $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$, тогда $\mathcal{G}([\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathcal{L})}) = [\![\alpha]\!]_{\mathcal{L}} = 1$, тогда $\vdash \alpha$ (по полноте $\mathcal{L}$). $\square$

Интуиционистское И.В. (натуральный, естественный вывод)

- Формулы языка (секвенции) имеют вид: $\Gamma \vdash \alpha$. Правила вывода:

$$\frac{\text{посылка 1} \qquad \text{посылка 2} \qquad \dots}{\text{заключение}}\ \text{(аннотация)}$$

- Аксиома:

$$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}\ \text{(акс.)}$$

- Правила введения связок:

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta},\ \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}$$

- Правила удаления связок:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \qquad \Gamma \vdash \beta \to \gamma \qquad \Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}{\Gamma \vdash \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \alpha}$$

- Пример доказательства:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ \text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash B}\ \text{(удал\&)} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \,\&\, B \vdash A \,\&\, B}\ \text{(акс.)}}{A \,\&\, B \vdash A}\ \text{(удал\&)}}{A \,\&\, B \vdash B \,\&\, A}\ \text{(введ\&)}$$