

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, весна 2023 года

## Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции):  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Например, если было показано существование вывода  $A \vdash A$ , то тогда теорема гарантирует и существование вывода  $\vdash A \rightarrow A$ .

1. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b)  $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c)  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d)  $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e)  $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b)  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e)  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$
- (b)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (правило контрапозиции)
- (c)  $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (d)  $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \& B)$
- (e)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (f)  $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (g)  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$  (закон Пирса)

4. Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой:  $(A \rightarrow B) \rightarrow C$  и  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ ? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку).

5. Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению.

- (a) связка «и-не» («штрих шеффера», “|”):  $A | B$  истинно, когда один из аргументов ложен. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления. Поясним, что мы понимаем под «исключить». Как вы знаете, конъюнкция и отрицание выражаются через «и-не», например, так выражается отрицание:  $\neg\alpha := \alpha | \alpha$ . При такой замене все схемы аксиом для конъюнкции и отрицания должны стать теоремами. При этом множество доказуемых в исчислении формул должно остаться без изменений.
- (b) связка «или-не» («стрелка пирса», “ $\downarrow$ ”):  $A \downarrow B$  истинно, когда оба аргумента ложны. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.
- (c) Нуль-местная связка «ложь» (“ $\perp$ ”). Мы ожидаем вот такую замену:  $\neg A := A \rightarrow \perp$ . Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.

6. Достаточно ли лжи и «исключённого или» ( $A \oplus B$  истинно, когда  $A \neq B$ ) для выражения всех остальных связок?

7. Даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  и  $\not\vdash \beta \rightarrow \alpha$ . Укажите способ построения высказывания  $\gamma$ , такого, что  $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$  и  $\vdash \gamma \rightarrow \beta$ , причём  $\not\vdash \gamma \rightarrow \alpha$  и  $\not\vdash \beta \rightarrow \gamma$ .

8. Покажите, что если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\neg\alpha \vdash \beta$ , то  $\vdash \beta$ .