

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3232-М3239, весна 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции): $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Например, если было показано существование вывода $A \vdash A$, то тогда теорема гарантирует и существование вывода $\vdash A \rightarrow A$.

1. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (b) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
- (e) $A \& \neg A \vdash B$

2. Докажите:

- (a) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
- (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:

- (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$
- (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (правило контрапозиции)
- (c) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
- (d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \& B)$
- (e) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
- (f) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
- (g) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (закон Пирса)

4. Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой: $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ и $A \rightarrow (B \rightarrow C)$? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку).

5. Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению.

- (a) связка «и-не» («штрих шепфера», “|”): $A | B$ истинно, когда один из аргументов ложен. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления. Поясним, что мы понимаем под словами «исключить связку». Как вы знаете, конъюнкция и отрицание выражаются через «и-не» ($\neg\alpha := \alpha | \alpha$ и т.п.). При такой замене все схемы аксиом для конъюнкции и отрицания должны стать теоремами. При этом исчисление должно остаться корректным относительно классической модели исчисления высказываний.
- (b) связка «или-не» («стрелка пирса», “ \downarrow ”): $A \downarrow B$ истинно, когда оба аргумента ложны. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.
- (c) Нуль-местная связка «ложь» (“ \perp ”). Мы ожидаем вот такую замену: $\neg A := A \rightarrow \perp$. Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.

6. Достаточно ли лжи и «исключённого или» ($A \oplus B$ истинно, когда $A \neq B$) для выражения всех остальных связок?

7. Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$ и $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$.

8. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о исчислении высказываний. Интуиционистская логика.

- Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.
- Покажите, что следующие высказывания не доказуемы в интуиционистской логике:
 - $\neg\neg A \rightarrow A$
 - $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
 - $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$
 - $(A \rightarrow B \vee \neg B) \vee (\neg A \rightarrow B \vee \neg B)$
 - $\bigvee_{i=0, n-1} A_i \rightarrow A_{(i+1)\%n}$
- Выполнены ли формулы де Моргана в интуиционистской логике? Докажите или опровергните.
 - $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \& \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$
 - $\neg\alpha \& \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \& \neg\beta$
 - $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку \star , что $\vdash A \star B \rightarrow \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \rightarrow A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:
 - \star — конъюнкция;
 - \star — дизъюнкция;
 - \star — импликация;
 - \star — отрицание.
- Существует несколько схожих вариантов аксиомы исключённого третьего. Не пользуясь 10 схемой аксиом, покажите следующее:
 - $\alpha \vee \neg\alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta \vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
 - $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- Рассмотрим несколько моделей троичной логики. Логика похожа истинностными значениями ($V = \{-1, 0, 1\}$, истиной считаем 1) и определением большинства операций: $\llbracket A \& B \rrbracket = \min(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$, $\llbracket A \vee B \rrbracket = \max(\llbracket A \rrbracket, \llbracket B \rrbracket)$, $\llbracket \neg A \rrbracket = -\llbracket A \rrbracket$. Отличаются логики определением импликации (ниже), и в одном случае — определением отрицания. Про каждую из них ответьте на четыре вопроса: являются ли они корректными и/или полными моделями классического и/или интуиционистского исчисления высказываний.
 - Сильная логика неопределённости Клини: $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket = \llbracket \neg A \vee B \rrbracket$.
 - Троичная логика Лукасевича: $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket = \min(1, 1 - \llbracket A \rrbracket + \llbracket B \rrbracket)$
 - Логика Гёделя G_3 :

$$\llbracket \neg A \rrbracket = \begin{cases} 1, & \llbracket A \rrbracket = -1 \\ -1, & \text{иначе} \end{cases} \quad \llbracket A \rightarrow B \rrbracket = \begin{cases} 1, & \llbracket A \rrbracket \leq \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket B \rrbracket, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Изоморфизм Карри-Ховарда — соответствие между интуиционистским исчислением высказываний, с одной стороны, и языками программирования, с другой. А именно, можно заметить, что программа соответствует доказательству, тип программы — логическому высказыванию. Связки (как составные части логического высказывания) соответствуют определённым типовым конструкциям: функция — импликация, конъюнкция — упорядоченной паре, дизъюнкция — алгебраическому типу (`std::variant` и т.п.).

Например, функция `A id(A x) { return x; }` доказывает $A \rightarrow A$, а функция

```
std::pair<A,B> swap(std::pair<B,A> x) { return std::pair(x.second, x.first); }
```

доказывает $B \& A \rightarrow A \& B$.

Ложь выражается менее очевидно. Давайте за ложь мы возьмём выражение, имеющее тип несвязанного типового параметра (идея в том, чтобы данное выражение легко приводилось бы к любому типу: из лжи следует всё, что угодно). Данный код доказывает $\neg Z$, то есть $Z \rightarrow \perp$:

```
template <class A>
A negate(Z x) { throw ("Value of type Z is impossible"); }
```

Конечно, в смысле изоморфизма Карри-Ховарда большинство языков программирования противоречивы.

В завершение теоретической части заметим, что в свете ВНК-интерпретации в изоморфизме Карри-Ховарда нет ничего странного: если под конструкцией мы понимаем тип, то любое значение типа — это метод построения конструкции (типы, значения которых можно построить, мы будем называть *обитаемыми*), а функция — это способ перестроения одного значения в другое.

Докажите следующие утверждения, написав соответствующую программу:

- (a) $A \rightarrow B \rightarrow A$
- (b) $A \& B \rightarrow A \vee B$
- (c) $(A \& (B \vee C)) \rightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$
- (d) $(A \rightarrow C) \& (B \rightarrow C) \& A \vee B \rightarrow C$
- (e) $(B \vee C \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \& (C \rightarrow A)$
- (f) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- (g) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
- (h) $(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$
- (i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.
- (j) \perp

Задание №3. Топология, решётки.

1. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Внутренностью* множества A° назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в A . *Замыканием* множества \bar{A} назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее A . Назовём *окрестностью* точки x такое открытое множество V , что $x \in V$. Будем говорить, что точка $x \in A$ *внутренняя*, если существует окрестность V , что $V \subseteq A$. Точка x — *граничная*, если любая её окрестность V пересекается как с A , так и с его дополнением.

- (a) Покажите, что A открыто тогда и только тогда, когда все точки A — внутренние. Также покажите, что $A^\circ = \{x | x \in A \text{ и } x \text{ — внутренняя точка}\}$.
 - (b) Покажите, что A замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что $\bar{A} = \{x | x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$. Верно ли, что $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$?
 - (c) Введём топологию на деревьях способом, рассмотренным на лекции. Рассмотрим некоторое множество вершин V . Опишите множества V° и \bar{V} . Какие вершины будут являться граничными для V ?
 - (d) Пусть $A \subseteq B$. Как связаны A° и B° , а также \bar{A} и \bar{B} ?
 - (e) Верно ли $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ и $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$?
 - (f) Покажите, что $\overline{(A^\circ)^\circ} = \bar{A}^\circ$.
 - (g) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутреннейности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться?
2. Напомним, что евклидовой топологией называется топология на \mathbb{R} с базой $\mathcal{B} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.
- (a) Связны ли \mathbb{Q} и $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ как топологические подпространства \mathbb{R} ?
 - (b) Связен ли интервал $(0, 1)$?

3. Примеры топологий. Для каждого из примеров ниже проверьте, задано ли в нём топологическое пространство, и ответьте на следующие вопросы, если это так: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы замкнутые множества в данной топологии; связно ли данное пространство.
 - (a) Топология Зарисского на \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ конечно}\}$, то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.
 - (b) Топология стрелки на \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$, то есть пустое, всё пространство и все открытые лучи.
 - (c) Множество всех бесконечных подмножеств \mathbb{R} : $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ бесконечно}\}$
 - (d) Множество всевозможных объединений арифметических прогрессий: $A(a) = \{a \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$; $X \in \Omega$, если $X = \emptyset$ или $X = \bigcup_i A(a_i)$ (все $a_i > 0$).
4. Непрерывной функцией называется такая, для которой прообраз открытого множества всегда открыт. Путём на топологическом пространстве X назовём непрерывное отображение вещественного интервала $[0, 1]$ в X . Опишите пути (то есть, опишите, какие функции могли бы являться путями):
 - (a) на \mathbb{N} (с дискретной топологией);
 - (b) в топологии Зарисского;
 - (c) на дереве (с топологией с лекции);
5. Связным множеством в топологическом пространстве назовём такое, которое связно как подпространство. Линейно связным множеством назовём такое, в котором две произвольные точки могут быть соединены путём, образ которого целиком лежит в множестве.
 - (a) покажите, что линейно связное множество всегда связно;
 - (b) покажите, что связное не обязательно линейно связное.
6. Всегда ли непрерывным образом связного пространства является другое связное (под)пространство? Докажите или опровергните.
7. Рассмотрим подмножество частично упорядоченного множества, и рассмотрим следующие свойства:
 - (a) наличие наибольшего элемента; (б) наличие супремума; (в) наличие единственного максимального элемента. Всего можно рассмотреть шесть утверждений ((a) влечёт (б), (a) влечёт (в), и т.п.) — про каждое определите, выполнено ли оно в общем случае, и приведите либо доказательство, либо контрпример. Задача состоит из одного пункта, для получения баллов все шесть утверждений должны быть разобраны.
8. Покажите следующие утверждения для импликативных решёток:
 - (a) монотонность: пусть $a \leq b$ и $c \leq d$, тогда $a + c \leq b + d$ и $a \cdot c \leq b \cdot d$;
 - (b) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;
 - (c) $a \leq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (d) из $a \leq b$ следует $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$;
 - (e) из $a \leq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \leq c$;
 - (f) $b \leq a \rightarrow b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$;
 - (g) $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (h) $a \leq b \rightarrow a \cdot b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$;
 - (i) $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$;
 - (j) импликативная решётка дистрибутивна: $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
9. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что интуиционистское исчисление высказываний корректно, если в качестве модели выбрать алгебру Гейтинга.
10. Покажите, что на конечном множестве дистрибутивная решётка всегда импликативна.
11. Постройте пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
12. Покажите, что в дистрибутивной решётке всегда $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
13. Покажите, что (\leq) — отношение предпорядка, а (\approx) — отношение эквивалентности.
14. Покажите, что $[\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}}$. Зависит ли результат от выбора представителей классов эквивалентности $[\alpha]$ и $[\beta]$? Ответ также докажите.
15. Покажите, что $[\alpha \rightarrow \beta]_{\mathcal{L}}$ — псевдодополнение $[\alpha]_{\mathcal{L}}$ до $[\beta]_{\mathcal{L}}$.

Задание №4. Модели Крипке. Естественный вывод.

1. Опровергните формулы, построив соответствующие модели Крипке:

- (a) $\neg\neg A \rightarrow A$
- (b) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
- (c) $(A \rightarrow B \vee \neg B) \vee (\neg A \rightarrow B \vee \neg B)$
- (d) $\bigvee_{i=0, n-1} A_i \rightarrow A_{(i+1)\%n}$

2. Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых W_i, W_j, α , если $W_i \leq W_j$ и $W_i \Vdash \alpha$, то $W_j \Vdash \alpha$.

3. Несколько задач на упрощение структуры миров моделей Крипке.

- (a) Покажите, что формула опровергается моделью Крипке тогда и только тогда, когда она опровергается древовидной моделью Крипке.
- (b) Верно ли, что если формула опровергается некоторой древовидной моделью Крипке (причём у каждой вершины не больше двух сыновей), то эту древовидную модель можно достроить до полного бинарного дерева, с сохранением свойства опровержимости?
- (c) Верно ли, что если некоторая модель Крипке опровергает некоторую формулу, то добавление любого мира к модели в качестве потомка к любому из узлов оставит опровержение в силе?

4. Постройте формулу, которая не может быть опровергнута моделью Крипке (ответ требуется доказать):

- (a) глубины 2 и меньше;
- (b) глубины $n \in \mathbb{N}$ и меньше.

5. Покажите аналог теоремы о дедукции для естественного вывода: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

6. Определим отображение между языками вывода (гильбертов и естественный вывод):

$$|\varphi|_e = \begin{cases} |\alpha|_e \star |\beta|_e, & \varphi = \alpha \star \beta \\ |\alpha|_e \rightarrow \perp, & \varphi = \neg\alpha \\ X, & \varphi = X \end{cases} \quad |\varphi|_g = \begin{cases} |\alpha|_g \star |\beta|_g, & \varphi = \alpha \star \beta \\ A \& \neg A, & \varphi = \perp \\ X, & \varphi = X \end{cases}$$

- (a) покажите, что $\vdash_e \alpha$ влечёт $\vdash_g |\alpha|_g$;
- (b) покажите, что $\vdash_g \alpha$ влечёт $\vdash_e |\alpha|_e$.

7. Классическое исчисление высказываний также можно сформулировать в стиле естественного вывода, заменив правило исключения лжи на такое:

$$\frac{\Gamma, \varphi \rightarrow \perp \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi} \text{ (удал}\neg\neg\text{)}$$

В этом задании будем обозначать через $\Gamma \vdash_{\kappa} \varphi$ тот факт, что формула φ выводится из контекста Γ в классическом И.В. в варианте естественного вывода.

- (a) Покажите, что если $\vdash_{\kappa} \varphi$ и A_1, \dots, A_n — все пропозициональные переменные из φ , то $\vdash_e A_1 \vee \neg A_1 \rightarrow A_2 \vee \neg A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \vee \neg A_n \rightarrow \varphi$.
- (b) Покажите теорему Гливенко: если $\vdash_{\kappa} \varphi$, то $\vdash_e \neg\neg\varphi$.