Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, весна 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции): $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Например, если было показано существование вывода $A \vdash A$, то тогда теорема гарантирует и существование вывода $\vdash A \rightarrow A$.

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
   (b) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow B \,\&\, A$
   (d) $\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$

2. Докажите:
   (a) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

3. Докажите:
   (a) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$
   (b) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *(правило контрапозиции)*
   (c) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
   (d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \,\&\, B)$
   (e) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
   (f) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow A \vee B$
   (g) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ *(закон Пирса)*

4. Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой: $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ и $A \rightarrow (B \rightarrow C)$? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку).

5. Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению.
   (a) связка «и-не» («штрих шеффера», “$|$”): $A \mid B := \neg(A \,\&\, B)$. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления (то есть, при замене $\neg\alpha$ на $\alpha \mid \alpha$ все схемы аксиом для отрицания должны стать теоремами, то же и для конъюнкции).
   (b) связка «или-не» («стрелка пирса», “$\downarrow$”): $A \downarrow B := \neg(A \vee B)$. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.
   (c) Нуль-местная связка «ложь» (“$\perp$”). Мы ожидаем вот такую замену: $\neg A := A \rightarrow \perp$. Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.

6. Достаточно ли лжи и «исключённого или» ($A \oplus B$ истинно, когда $A \neq B$) для выражения всех остальных связок?

7. Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\nvdash \beta \rightarrow \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\nvdash \gamma \rightarrow \alpha$ и $\nvdash \beta \rightarrow \gamma$.

8. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.