Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3232-M3239, весна 2023 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

При решении заданий вам может потребоваться теорема о дедукции (будет доказана на второй лекции): $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Например, если было показано существование вывода $A \vdash A$, то тогда теорема гарантирует и существование вывода $\vdash A \to A$.

1. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$
   (b) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to B \,\&\, A$
   (d) $\vdash A \vee B \to B \vee A$
   (e) $A \,\&\, \neg A \vdash B$
2. Докажите:
   (a) $\vdash A \to \neg\neg A$
   (b) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
   (d) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (e) $\neg A, B \vdash A \to B$
3. Докажите:
   (a) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$
   (b) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *(правило контрапозиции)*
   (c) $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$
   (d) $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \,\&\, B)$
   (e) $\vdash (A \to B) \to (\neg A \vee B)$
   (f) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$
   (g) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*
4. Следует ли какая-нибудь расстановка скобок из другой: $(A \to B) \to C$ и $A \to (B \to C)$? Предложите вывод в исчислении высказываний или докажите, что его не существует (например, воспользовавшись теоремой о корректности, предложив соответствующую оценку).
5. Предложите схемы аксиом, позволяющие добавить следующие новые связки к исчислению.
   (a) связка «и-не» («штрих шеффера», “|”): $A \mid B$ истинно, когда один из аргументов ложен. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить конъюнкцию и отрицание из исчисления.

   Поясним, что мы понимаем под словами «исключить связку». Как вы знаете, конъюнкция и отрицание выражаются через «и-не» ($\neg\alpha := \alpha \mid \alpha$ и т.п.). При такой замене все схемы аксиом для конъюнкции и отрицания должны стать теоремами. При этом исчисление должно остаться корректным относительно классической модели исчисления высказываний.

   (b) связка «или-не» («стрелка пирса», “$\downarrow$”): $A \downarrow B$ истинно, когда оба аргумента ложны. Новые схемы аксиом должны давать возможность исключить дизъюнкцию и отрицание из исчисления.
   (c) Нуль-местная связка «ложь» (“$\perp$”). Мы ожидаем вот такую замену: $\neg A := A \to \perp$. Аналогично, аксиомы для отрицания в новом исчислении должны превратиться в теоремы.
6. Достаточно ли лжи и «исключённого или» ($A \oplus B$ истинно, когда $A \neq B$) для выражения всех остальных связок?
7. Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\nvdash \beta \to \alpha$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\nvdash \gamma \to \alpha$ и $\nvdash \beta \to \gamma$.
8. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о исчислении высказываний. Интуиционистская логика.

1. Покажите, что в классическом исчислении высказываний $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.
2. Покажите, что следующие высказывания не доказуемы в интуиционистской логике:
   (a) $\neg\neg A \to A$
   (b) $((A \to B) \to A) \to A$
   (c) $(A \to B) \vee (B \to A)$
   (d) $(A \to B \vee \neg B) \vee (\neg A \to B \vee \neg B)$
   (e) $\bigvee_{i=0,n-1} A_i \to A_{(i+1)\%n}$
3. Выполнены ли формулы де Моргана в интуиционистской логике? Докажите или опровергните.
   (a) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$ и $\neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta) \vdash \alpha \vee \beta$
   (b) $\neg\alpha \,\&\, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$ и $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$
   (c) $\alpha \to \beta \vdash \neg\alpha \vee \beta$ и $\neg\alpha \vee \beta \vdash \alpha \to \beta$
4. Покажите, что никакие связки не выражаются друг через друга: то есть, нет такой формулы $\varphi(A, B)$ из языка интуиционистской логики, не использующей связку $\star$, что $\vdash A \star B \to \varphi(A, B)$ и $\vdash \varphi(A, B) \to A \star B$. Покажите это для каждой связки в отдельности:
   (a) $\star$ — конъюнкция;
   (b) $\star$ — дизъюнкция;
   (c) $\star$ — импликация;
   (d) $\star$ — отрицание.
5. Существует несколько схожих вариантов аксиомы исключённого третьего. Не пользуясь 10 схемой аксиом, покажите следующее:
   (a) $\alpha \vee \neg\alpha, \alpha \to \neg\alpha \to \beta \vdash ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
   (b) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha, \alpha \to \neg\alpha \to \beta \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$
6. Рассмотрим несколько моделей троичной логики. Логики похожи истинностными значениями ($V = \{-1, 0, 1\}$, истиной считаем 1) и определением большинства операций: $[\![A \,\&\, B]\!] = \min([\![A]\!], [\![B]\!])$, $[\![A \vee B]\!] = \max([\![A]\!], [\![B]\!])$, $[\![\neg A]\!] = -[\![A]\!]$. Отличаются логики определением импликации (ниже), и в одном случае – определением отрицания. Про каждую из них ответьте на четыре вопроса: являются ли они корректными и/или полными моделями классического и/или интуиционистского исчисления высказываний.
   (a) Сильная логика неопределённости Клини: $[\![A \to B]\!] = [\![\neg A \vee B]\!]$.
   (b) Троичная логика Лукасевича: $[\![A \to B]\!] = \min(1, 1 - [\![A]\!] + [\![B]\!])$
   (c) Логика Гёделя G_3:

$$[\![\neg A]\!] = \begin{cases} 1, & [\![A]\!] = -1 \\ -1, & \text{иначе} \end{cases} \qquad [\![A \to B]\!] = \begin{cases} 1, & [\![A]\!] \leqslant [\![B]\!] \\ [\![B]\!], & \text{иначе} \end{cases}$$

7. Изоморфизм Карри-Ховарда — соответствие между интуиционистским исчислением высказываний, с одной стороны, и языками программирования, с другой. А именно, можно заметить, что программа соответствует доказательству, тип программы — логическому высказыванию. Связки (как составные части логического высказывания) соответствуют определённым типовым конструкциям: функция — импликации, конъюнкция — упорядоченной паре, дизъюнкция — алгебраическому типу (`std::variant` и т.п.).

   Например, функция `A id(A x) { return x; }` доказывает $A \to A$, а функция

```
std::pair<A,B> swap(std::pair<B,A> x) { return std::pair(x.second, x.first); }
```

доказывает $B \,\&\, A \to A \,\&\, B$.

Ложь выражается менее очевидно. Давайте за ложь мы возьмём выражение, имеющее тип несвязанного типового параметра (идея в том, чтобы данное выражение легко приводилось бы к любому типу: из лжи следует всё, что угодно). Данный код доказывает $\neg Z$, то есть $Z \to \bot$:

```
template <class A>
A negate(Z x) { throw ("Value of type Z is impossible"); }
```

Конечно, в смысле изоморфизма Карри-Ховарда большинство языков программирования противоречивы.

В завершение теоретической части заметим, что в свете BHK-интерпретации в изоморофизме Карри-Ховарда нет ничего странного: если под конструкцией мы понимаем тип, то любое значение типа — это метод построения конструкции (типы, значения которых можно построить, мы будем называть *обитаемыми*), а функция — это способ перестроения одного значения в другое.

Докажите следующие утверждения, написав соответствующую программу:

(a) $A \to B \to A$

(b) $A \,\&\, B \to A \vee B$

(c) $(A \,\&\, (B \vee C)) \to ((A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C))$

(d) $(A \to C) \,\&\, (B \to C) \,\&\, A \vee B \to C$

(e) $(B \vee C \to A) \to (B \to A) \,\&\, (C \to A)$

(f) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

(g) $((A \to B) \to C) \to (A \to (B \to C))$

(h) $(A \to B) \,\&\, (A \to \neg B) \to \neg A$

(i) Выразимые в интуиционистском исчислении высказываний аналоги правил де Моргана для импликации.

(j) $\bot$