# Programmation Linéaire - Cours 3

F. Clautiaux
francois.clautiaux@math.u-bordeaux1.fr

Université Bordeaux 1
Bât A33 - Bur 265

# Sommaire

Simplex : forme matricielle
Forme matricielle

Dualité

Dualité faible / forte

# Notations matricielles

En forme standard :

$$\begin{array}{lll} \max & \mathbf{cx} & \\ \text{s.c.} & A\mathbf{x} & = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq \mathbf{0^{n+m}} \end{array}$$

avec

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 1 & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & & & & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & \dots & x_{n+m} \end{pmatrix}$$

# Partitionnement des indices

On peut partitionner les indices des variables en deux parties :

- Ceux des variables en base : $\mathcal{B}$
- Ceux des variables hors-base : $\mathcal{N}$

Cette partition peut-être effectuée dans chacune des contraintes :

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{i,j}x_j = \sum_{j\in\mathcal{B}} a_{i,j}x_j + \sum_{j\in\mathcal{N}} a_{i,j}x_j = b_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n.$$

D'un point de vue matriciel : partition des colonnes de $A$ et des composantes des vecteurs $\mathbf{c}$ et $\mathbf{x}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{c} & = & \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{\mathcal{B}} & \mathbf{c}_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} \\ A & = & \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} & = & \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\mathcal{B}} & \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} \end{array}$$

(on notera que $B$ est une matrice carrée)

# Dictionnaire au format matriciel

Exprimons les variables en base en fonction des variables hors-base :

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Leftrightarrow \quad B\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + N\mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{aligned}$$

Possible uniquement si $B$ est une matrice inversible.

En remplaçant $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ dans l'objectif, on obtient :

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad &= \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}}\mathbf{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{c}_{\mathcal{N}}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ &= \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}}(B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_{\mathcal{N}} + \mathbf{c}_{\mathcal{N}}\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ &= \quad \mathbf{c}_{\mathcal{B}}B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}_{\mathcal{B}}B^{-1}N)\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \end{aligned}$$

$$\text{On a :} \qquad \begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}_{\mathcal{B}}B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}_{\mathcal{B}}B^{-1}N)\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ \text{s.c.} & \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ & \mathbf{x}_{\mathcal{B}},\, \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \geq 0 \end{array}$$

# Solutions de base

Toute sous-matrice carrée $m \times m$ de $A$ inversible ($B$ est une base de $\mathbb{R}^m$) est appelée **matrice de base**.
À chaque matrice de base $B$ est associée une solution de base définie par un dictionnaire.

$$\begin{array}{rl} \max & z = \mathbf{c}_{\mathcal{B}} B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}_{\mathcal{B}} B^{-1} N)\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ \text{s.c.} & \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1} N \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ & \mathbf{x}_{\mathcal{B}}, \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Solution de base :} & \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{b} \\ & z = \mathbf{c}_{\mathcal{B}} B^{-1}\mathbf{b} \\ \text{Condition de réalisabilité :} & B^{-1}\mathbf{b} \geq 0 \\ \text{Condition d'optimalité :} & \mathbf{c}_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}_{\mathcal{B}} B^{-1} N \leq 0 \end{array}$$

# Algorithme du simplex matriciel

On commence avec une solution de base réalisable donnée par un dictionnaire :

$$\begin{array}{ll} \max & z = \mathbf{c}_{\mathcal{B}} B^{-1}\mathbf{b} + (\mathbf{c}_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}_{\mathcal{B}} B^{-1} N)\mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ \text{s.c.} & \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1} N \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \\ & \mathbf{x}_{\mathcal{B}}, \mathbf{x}_{\mathcal{N}} \geq 0 \end{array}$$

1. Si $\bar{\mathbf{c}}_{\mathcal{N}} = \mathbf{c}_{\mathcal{N}} - \mathbf{c}_{\mathcal{B}} B^{-1} N \leq 0$, alors cette solution est optimale, STOP.
2. choisir une variable entrante $k \in \mathcal{N}$ telle que $(\bar{\mathbf{c}}_{\mathcal{N}})_k > 0$.
3. Si $(\bar{a}_{i,k})_{i=1,\dots,m} = (B^{-1}N)_k \leq 0$, le problème est non borné, STOP.
4. Choisir une variable sortante $s \in \mathcal{B}$ telle que
$$s = \operatorname{argmin}_{j \in \mathcal{B}} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{j,k}} = \frac{B^{-1}_{j,.}\mathbf{b}}{B^{-1}_{j,.} N_{.,k}} : \bar{a}_{j,k} > 0 \right\}$$
5. Pivoter : $\mathcal{B} = (\mathcal{B} \setminus \{s\}) \cup \{k\}$ et $\mathcal{N} = (\mathcal{N} \setminus \{k\}) \cup \{s\}$ et retourner en 1.

# Sommaire

Simplex : forme matricielle

Dualité
- Motivation
- Primal / dual

Dualité faible / forte

# Motivation

*Obtenir une borne supérieure sur le profit maximum*

- Toute solution réalisable donne une **borne inférieure (LB)** sur le profit maximum.
- Une **borne supérieure (UB)** est utile pour juger de la qualité d'une solution réalisable (voire prouver son optimalité si LB = UB).

**Remarque :**
Toute combinaison linéaire de contraintes du programme linéaire donne une contrainte valide (satisfaite par toutes les solutions réalisables)

# Exemple du yaourt

$$
\begin{array}{lrrll}
\max & 4x_1 + & 5x_2 & & \\
 & 2x_1 + & x_2 & \leq 800 & (1) \\
 & x_1 + & 2x_2 & \leq 700 & (2) \\
 & & x_2 & \leq 300 & (3) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

# Exemple du yaourt

$$
\begin{array}{lrrll}
\max & 4x_1+ & 5x_2 & & \\
 & 2x_1+ & x_2 & \leq 800 & (1) \\
 & x_1+ & 2x_2 & \leq 700 & (2) \\
 & & x_2 & \leq 300 & (3) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$$5 * (1) \Rightarrow 4x_1 + 5x_2 \leq \ 10x_1 + 5x_2 \leq 4000$$
$$4 * (2) \Rightarrow 4x_1 + 5x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 2800$$
$$2 * (1) + 3 * (3) \Rightarrow 4x_1 + 5x_2 \leq 2500$$

# Deuxième exemple

(le PL n'est pas sous forme normale)

$$
\begin{array}{lrrrll}
\max & 4x_1+ & 2x_2 & -x_3 & & \\
 & x_1+ & x_2+ & x_3 & \leq 10 & (1) \\
 & & x_2+ & x_3 & \geq 6 & (2) \\
 & x_1 & & -x_3 & \geq 0 & (3) \\
 & x_1, & x_2 & x_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Par exemple $2 * (1) - 2 * (3)$

# Modélisation du problème

**Problème :** Trouver les meilleurs coefficients multiplicatifs pour chaque contrainte afin d'obtenir la meilleure borne supérieure.

- A chaque contrainte $i = 1, \ldots, 3$, on associe une variable $y_i$.
- La combinaison linéaire doit être telle que le coefficient obtenu pour chaque variable doit être plus grand que le coefficient de la variable dans l'objectif.
- On cherche à minimiser le membre de droite de la contrainte issue de la combinaison linéaire.

# Modélisation du problème

$$
\begin{array}{lrrll}
\text{Max} & 4x_1 + & 5x_2 & & \\
 & 2x_1 + & x_2 & \leq 800 & (y_1) \\
 & x_1 + & 2x_2 & \leq 700 & (y_2) \\
 & & x_2 & \leq 300 & (y_3) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

# Modélisation du problème

$$
\begin{array}{lrrll}
\text{Max} & 4x_1 + & 5x_2 & & \\
 & 2x_1 + & x_2 & \leq 800 & (y_1) \\
 & x_1 + & 2x_2 & \leq 700 & (y_2) \\
 & & x_2 & \leq 300 & (y_3) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrl}
\text{Min} & 800y_1 + & 700y_2 + & 300y_3 & \\
 & 2y_1 + & y_2 & & \geq 4 \\
 & y_1 + & 2y_2 + & y_3 & \geq 5 \\
 & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

# Modélisation du problème

$$\begin{array}{lrrll}
\text{Max} & 4x_1 + & 5x_2 & & \\
 & 2x_1 + & x_2 & \leq 800 & (y_1) \\
 & x_1 + & 2x_2 & \leq 700 & (y_2) \\
 & & x_2 & \leq 300 & (y_3) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl}
\text{Min} & 800y_1 + & 700y_2 + & 300y_3 & \\
 & 2y_1 + & y_2 & & \geq 4 \\
 & y_1 + & 2y_2 + & y_3 & \geq 5 \\
 & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0
\end{array}$$

Solution optimale : $y_1^* = 1$, $y_2^* = 2$, $y_3^* = 0$ et opt $= 2200$.

# Primal / Dual

Les PL vont toujours par paires :
**Primal :**

$$
\begin{array}{lll}
\max & \sum_j c_j x_j & \\
\text{s.c.} & \sum_j a_{i,j} x_j \leq b_i & \text{pour } i = 1, \ldots, m \\
 & x_j \geq 0 & \text{pour } j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

**Dual :**

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_i b_i y_i & \\
\text{s.c.} & \sum_i a_{i,j} y_i \geq c_j & \text{pour } j = 1, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

A venir : si solutions optimales alors égales

# Primal / Dual : forme matricielle

Les PL vont toujours par paires :

**Primal :**

$$\begin{array}{rrl} \max & \mathbf{cx} & \\ \text{s.c.} & A\mathbf{x} & \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq \mathbf{0^n} \end{array}$$

**Dual :**

$$\begin{array}{rrl} \min & \mathbf{by} & \\ \text{s.c.} & A^\top\mathbf{y} & \geq \mathbf{c} \\ & \mathbf{y} & \geq \mathbf{0^m} \end{array}$$

# Interprétation économique du dual

- Sans ressource, le profit serait nul. L'idée est d'essayer d'évaluer la contribution de chaque ressource au profit observé. Dans ce contexte, les variables

  $$y_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, m$$

  représentent les valeurs unitaires des ressources $i$ : $y_i$ est la mesure de la contribution d'une unité de $i$ dans le profit. C'est donc aussi le prix auquel on évalue la ressource $i$ (prix auquel on serait prêt à vendre la ressource au lieu de l'utiliser).

# Interprétation économique du dual

- Un système de prix $y$ (auquel on serait prêt à vendre nos ressources) pour être acceptable doit compenser le profit qu'on aurait pu faire en utilisant ces ressources. Il faut

  $$\sum_i a_{i,j} y_i \geq c_j \text{ pour } j = 1, \ldots, n$$

  ce qu'on interprète aussi comme le fait que la valeur des ingrédients doit justifier entièrement le profit attribué à chaque produit.

# Interprétation économique du dual

- Un système de prix $y$ (auquel on serait prêt à vendre nos ressources) pour être acceptable doit compenser le profit qu'on aurait pu faire en utilisant ces ressources. Il faut
$$\sum_i a_{i,j} y_i \geq c_j \text{ pour } j = 1, \ldots, n$$
ce qu'on interprète aussi comme le fait que la valeur des ingrédients doit justifier entièrement le profit attribué à chaque produit.
- L'acheteur de nos ressources veillera à minimiser le coût total d'achat
$$\text{Minimiser } \sum_i b_i y_i$$

# Int. éco. de la solution optimale du dual

A l'optimum :

$$
\begin{array}{ccc}
z^* = \sum_j c_j x_j^* & = & \sum_i b_i y_i^* \\
\sum_j a_{i,j} x_j^* \leq b_i & \text{et} & \sum_i a_{i,j} y_i^* \geq c_j
\end{array}
$$

# Int. éco. de la solution optimale du dual

A l'optimum :

$$
\begin{array}{ccc}
z^* = \sum_j c_j x_j^* & = & \sum_i b_i y_i^* \\
\sum_j a_{i,j} x_j^* \leq b_i & \text{et} & \sum_i a_{i,j} y_i^* \geq c_j
\end{array}
$$

- Les multiplicateurs optimaux (solution optimale du dual) expliquent la responsabilité de chacune des contraintes de capacité en ressource dans la limitation du profit.
- Ces valeurs duales indiquent "localement" de combien augmenterait le profit par unité d'augmentation des ressources associées.
- $y_i^*$ est une mesure de l'augmentation marginale du profit par unité d'augmentation de $b_i$.

$$y_i^* = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z^*(b_i + \epsilon) - z^*(b_i)}{\epsilon}$$

## Théorème

*Si le problème*

$$P \left\{ \begin{array}{llll} \max & \sum_j c_j x_j & & \\ \text{s.c.} & \sum_j a_{i,j} x_j \leq & b_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq & 0 & j = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

*admet une solution de base optimale non dégénérée de valeur* $z^*$*, alors* $\exists \epsilon > 0$ *tel que si* $|t_i| \leq \epsilon$ *pour* $i = 1, \ldots, m$*, le problème*

$$P' \left\{ \begin{array}{llll} \max & \sum_j c_j x_j & & \\ \text{s.c.} & \sum_j a_{i,j} x_j \leq & b_i + t_i & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq & 0 & j = 1, \ldots, n \end{array} \right.$$

*admet une solution optimale dont la valeur est*

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} t_i y_i^*$$

*où* $y^*$ *est la solution (unique) au problème dual.*

## Retour dans le yaourt

$$\begin{array}{lrrl} \text{Max} & 4x_1 + & 5x_2 & \\ & 2x_1 + & x_2 & \leq 800 \\ & x_1 + & 2x_2 & \leq 700 \\ & & x_2 & \leq 300 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrl} \text{Min} & 800y_1 + & 700y_2 + & 300y_3 & \\ & 2y_1 + & y_2 & & \geq 4 \\ & y_1 + & 2y_2 + & y_3 & \geq 5 \\ & y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0 \end{array}$$

Solution optimale : $y_1^* = 1$, $y_2^* = 2$, $y_3^* = 0$ et UB $= 2200$.
Prix de vente minimum d'une unité de ressource 1 : 1 euro.
Prix de vente minimum d'une unité de ressource 2 : 2 euros.
Prix de vente minimum d'une unité de ressource 3 : 0 euro.

# Si le primal n'est pas borné

$$\begin{aligned} &\max 5x + 3y \\ &\qquad 3x + y \geq 3 \\ &\qquad x \leq 5 \\ &\qquad x, y \geq 0 \end{aligned}$$

# Relations Primal / Dual

- Le dual du dual est le primal.

| | | DUAL | | |
|---|---|---|---|---|
| | | optimal | irréalisable | non-borné |
| | optimal | possible | impossible | impossible |
| PRIMAL | irréalisable | impossible | possible | possible |
| | non-borné | impossible | possible | impossible |

- On peut appliquer le simplex au dual au lieu du primal si le dual a moins de contraintes que le primal (cf complexité empirique du simplex).

# Passage du primal au dual

Il n'est pas nécessaire de passer en forme normale pour écrire le dual d'un programme linéaire.

Tableau de passage :

| Primal (Max) | Dual (Min) |
|---|---|
| Contraintes | Variables |
| $\leq$ | $\geq 0$ |
| $\geq$ | $\leq 0$ |
| $=$ | non restreinte |
| Variables | Contraintes |
| $\geq 0$ | $\geq$ |
| $\leq 0$ | $\leq$ |
| non restreinte | $=$ |

# Passage du primal au dual : exemple

$$\begin{aligned} \max 5x - 3y + 5z \\ x + y = 2 \\ 2y + 3z \leq 10 \\ x + 5z \geq 5 \\ x \leq 0 \\ y, z \geq 0 \end{aligned}$$

Cf. forme matricielle

# Sommaire

Simplex : forme matricielle

Dualité

Dualité faible / forte

# Dualité faible

## Théorème

**Dualité faible :** *Pour toute solution réalisable $x$ du problème primal et toute solution réalisable $y$ du problème dual, on a*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

*Preuve :*
On sait que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \forall j$.
On sait que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_i, \forall i$.

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \leq & \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i) x_j & & \\ & & = & & \\ & & \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j) y_i & \leq & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \end{array}$$

# Dualité faible

**Corollaire**

*Si $\bar{x}$ est une solution réalisable du problème primal et $\bar{y}$ une solution réalisable du problème dual tel que*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} b_j \bar{y}_j ,$$

*alors $\bar{x}$ est optimale pour le primal et $\bar{y}$ est optimale pour le dual.*

# Dualité faible

*Preuve :*
Supposons au contraire que $\bar{x}$ n'est pas une solution optimale du primal. Il existe donc une solution $x^*$ telle que

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j < \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{m} b_j \bar{y}_j < \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$$

ce qui est contraire au théorème de dualité faible.
La solution $\bar{x}$ est donc optimale.

*La preuve est similaire pour $\bar{y}$.*

# Dualité forte

## Théorème

**Dualité forte :** *Si le primal a une solution optimale* $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, *alors le dual a une solution optimale* $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *telle que*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Idée pour la preuve :

$$z^* = c_{\mathcal{B}} B^{-1} b = cx^*$$

# Dualité forte

### Théorème

**Dualité forte :** *Si le primal a une solution optimale* $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, *alors le dual a une solution optimale* $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ *telle que*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*.$$

Idée pour la preuve :

$$z^* = c_{\mathcal{B}} B^{-1} b = cx^* = y^* b$$

On devine qu'on doit avoir

$$(y_1^*, \dots, y_m^*) = c_{\mathcal{B}} B^{-1}.$$

On va montrer que cette solution est réalisable et optimale pour le dual.

# Preuve dualité forte

Remarque sur les coûts réduits :

$$\bar{c}x = \quad (c_{\mathcal{B}} - c_{\mathcal{B}}B^{-1}B)x_{\mathcal{B}} + (c_{\mathcal{N}} - c_{\mathcal{B}}B^{-1}N)x_{\mathcal{N}}$$

Comme tous les coûts réduits sont négatifs ou nuls on a $c_{\mathcal{N}} - c_{\mathcal{B}}B^{-1}N \leq 0$ et donc $c_{\mathcal{B}}B^{-1}N \geq c_{\mathcal{N}}$.
On a aussi $c_{\mathcal{B}}B^{-1}B \geq c_{\mathcal{B}}$

# Preuve dualité forte

Si on regroupe les indices entre var. de décision $(A^D)$ et var. d'écart $(I)$, on a :
$c_{\mathcal{B}} B^{-1} A^D \geq c$
$c_{\mathcal{B}} B^{-1} I \geq 0$
On obtient directement $y^* A \geq c$ et $y^* \geq 0$, qui sont les conditions de réalisabilité du dual.
De plus : $y^* b = c_{\mathcal{B}} B^{-1} b = c x^*$.
Par le corollaire précédent, $y^*$ est une solution optimale du dual.

# Utilité de la dualité forte

Si on a une paire $(x^*, y^*)$ de solutions du primal et du dual, on peut facilement vérifier

- la réalisabilité de $x^*$ pour le problème primal,
- la réalisabilité de $y^*$ pour le problème dual,
- l'égalité des deux objectifs.

On a alors un certificat d'optimalité pour la paire $(x^*, y^*)$.