Polytech'Grenoble / INFO – Option Multimédia
Filière INFO4
Mardi 5 avril 2022

Epreuve de :

Traitement Numérique du Signal

Conditions de l'examen :
Téléphone portable, Cours, et Documents interdits, sauf une feuille RV A4 manuscrite ; Calculatrice autorisée.

Durée : 2h.

Notations : Le signal numérique en entrée de filtre est noté $x[k]$, celui en sortie $y[k]$, la suite « Echelon », $\epsilon[k]$ et l'impulsion de Dirac, $\delta[k]$. Pour les diagrammes des pôles et zéros, les pôles seront placés avec le symbole « x » et les zéros, avec le symbole « o ». Pour un filtre H, la transformée en Z est notée $H_Z(z)$ et la transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) est notée $H_F(\lambda)$ ou $H_F(f)$

La table des Transformées en Z est fournie à la fin du sujet.

Exercice 1 (30 mins) : Equations aux différences et réponse impulsionnelle

On considère un système linéaire et invariant en temps qui délivre en sortie y[.] ayant en entrée $x[.]$ tel que :

$$x[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k . \varepsilon[k] + 2^k . \epsilon[-k-1]$$
$$y[k] = 6.\left(\frac{1}{2}\right)^k . \varepsilon[k] - 6.\left(\frac{3}{4}\right)^k . \epsilon[k]$$

1°) Que pouvez vous dire du signal $x[.]$? Faire un graphe pour l'illustrer sur quelques échantillons.

2°) Par le calcul de la TZ des signaux d'entrée et de sortie, montrer alors que la fonction de transfert en Z est de la forme :

$$H_Z(z) = 4.\frac{z-2}{4z-3}$$

3°) Ce filtre sera implémenté sous sa forme causale. Tracer le diagramme des pôles et des zéros. S'agit-il d'un filtre stable ? Justifiez votre réponse. S'agit-il un filtre RII ou RIF ? justifier votre réponse.

4°) En déduire l'équation aux différences.

5°) En utilisant la transforme en Z inverse, montrer que la réponse impulsionnelle $h[k]$ peut s'écrire ainsi :

$$h[k] = \left(\frac{3}{4}\right)^k . \varepsilon[k] - 2.\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} . \epsilon[k-1]$$

6°) Expliquer et justifier votre choix d'implémentation de ce filtre.

Exercice 2 (20 mins) : Transformée de Fourier à Temps Discret

Soit un filtre causal dont la fonction de transfert en Z est telle que :

$$H_Z(z) = \frac{1 + 4z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

1°) Donner l'expression de $H_Z(z)$ qui vous permette de trouver les pôles et les zéros. Donner les valeurs des pôles et des zéros et en faire leurs représentations. Le filtre est-il stable ? Justifier votre réponse. S'agit-il un filtre RII ou RIF ? justifier votre réponse.

2°) Donner l'expression de la TFTD $H_F(\lambda)$ en fonction de $H_Z(z)$.

3°) En déduire $|H_F(\lambda)|$ pour 3 valeurs particulières de λ : 0, 0.25 et 0.5.

4°) Tracer alors approximativement $|H_F(\lambda)|$ pour λ appartenant à un intervalle que vous justifierez, de façon à avoir l'intégralité de l'information portée par $|H_F(\lambda)|$.

Exercice 3 (30 mins) : Filtre à phase nulle

Pour implémenter un filtre à phase nulle (pas de retard entre entrée et sortie), on utilise la fonction « filtfilt » dont voici le début du descriptif de l'aide fournie :

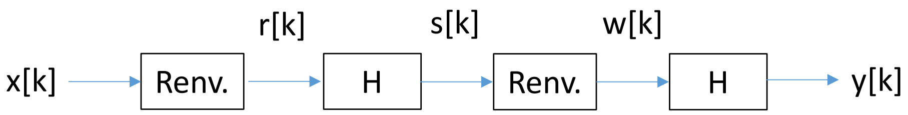
scipy.signal.filtfilt

`scipy.signal.filtfilt(b, a, x, axis=- 1, padtype='odd', padlen=None, method='pad', irlen=None)[source]`

Apply a digital filter forward and backward to a signal.

This function applies a linear digital filter twice, once forward and once backwards. The combined filter has zero phase and a filter order twice that of the original.

En pratique, il s'implémente suivant le schéma fonctionnel ci-dessous.



Le module de renversement (« Renv. ») est tel que :

$$r[k] = x[N-k]\ ;\ w[k] = s[N-k].$$

Le module « H » représente un filtre linéaire causal, stable quelconque de transformée en Z, $H_Z(z)$. Le signal $x[k]$ causal est observé sur $N+1$ échantillons.

1°) Démonter que dans le domaine en Z, le module de renversement est tel que : $R_Z(z) = z^{-N}.X_Z(z^{-1})$.

2°) Dans le domaine en Z, écrire en équation toutes les transformations successives dans la chaîne de traitement, depuis l'entrée jusqu'à la sortie. En déduire alors dans le domaine en Z, la relation qui relie $X_Z(z)$ à $Y_Z(z)$. En déduire la transformée en Z $G_Z(z)$ du filtre équivalant.

3°) Montrer alors que la fonction de transfert en fréquence $G_F(\lambda)$ est telle que :

$$G_F(\lambda) = |H_F(\lambda)|^2.$$

La fonction de transfert en fréquence $G_F(\lambda)$ est-elle réelle ou complexe ?

4°) Expliquer et commenter la phrase de l'aide « This function applies a linear digital filter twice, once forward and once backwards. The combined filter has zero phase and a filter order twice that of the original. »

Exercice 4 (15 mins) : Transformée en Z

Soit $x[k]$ un signal échantillonné à la fréquence F_E, pour $k \geq 0$ et $y[k]$ tel que $y[k] = (-1)^k . x[k]$.

1°) Ce signal $y[k]$ est obtenu en sortie d'un système noté S : $y[k] = S\{x\}[k]$. Ce système est-linéaire ? causal ? invariant en temps ? Justifier chacune des réponses.

2°) Démontrer l'expression de la transformée en Z de $y[k]$ en fonction de celle de $x[k]$. En déduire l'expression de $Y_F(f)$ en fonction de $X_F(f)$ et de F_E.

3°) A quoi peut servir un tel système ? Expliquer.

Exercice 5 (10 mins) : Agrandissement d'image

Soit I l'image d'entrée de taille N=300 lignes et M=451 colonnes dont les niveaux sont compris entre 0 et 255. Elle est représentée ci-contre. On rappelle que son énergie peut se calculer ainsi, soit dans le domaine spatial, soit dans le domaine fréquentiel :

$$E(I) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} I[i,j]^2 == \frac{1}{M.N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} |IF[k,l]|^2,$$

avec IF, la transformée de Fourier Discrète de I. Pour cette image, le calcul de l'énergie est de 94146.

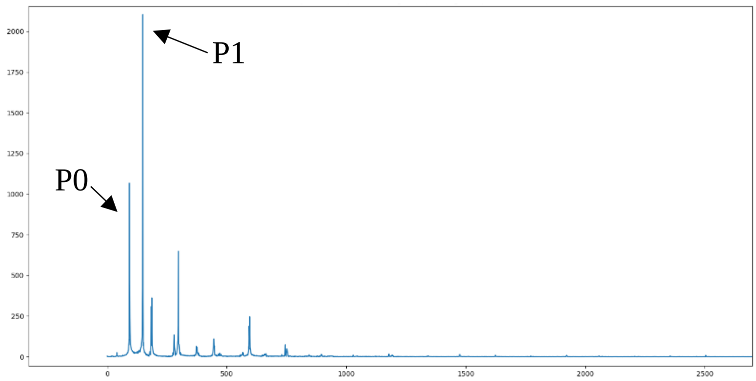
On applique la technique de « zero-padding » dans le domaine fréquentiel, à la Transformée de Fourier Discrète IF, puis on calcule la Transformée de Fourier Discrète inverse pour revenir dans le domaine spatial. On note IFzp le nouveau tableau de Transformée de Fourier Discrète et Izp la nouvelle image obtenue.

1°) En calculant $E(IFzp)$ dans le domaine fréquentiel, on trouve 3765. Combien de zéros ont été rajoutés au tableau bidimensionnel IF initial. Justifier et détailler votre calcul.

2°) Quelle est la taille de la nouvelle image $IFzp$?

3°) L'affichage de cette nouvelle image dans la gamme des niveaux entre 0 et 255 est représentée ci-contre. Expliquer le rendu de cet affichage. Que faut-il faire pour observer son contenu dans la gamme des niveaux entre 0 et 255 ?

Exercice 6 (5 mins) : Transformée de Fourier Discrète d'un signal (5 min)



On calcule et on trace le module de la Transformée de Fourier Discrète d'un signal dont on repère deux premiers pics, notés P0 et P1 sur le graphe ci-contre. Malheureusement la personne ayant calculé et tracé ce spectre n'a pas fait d'axe des fréquences. Aidez-le à déterminer les fréquences qui correspondent à ces 2 pics.

On sait que la fréquence d'échantillonnage est de $F_e = 44100$ Hz, que le signal est observé sur N=15000 échantillons et que la Transformée de Fourier Discrète est réalisée sur ce même nombre d'échantillons.

1°) Le relevé de la position respective des pics P0 et P1 dans le vecteur de TFD est respectivement 93 et 149. A quelle fréquence en Hz correspond la contribution fréquentielle du pic P0 ? Même question pour le pic P1.

2° Quelle est l'incertitude en Hz de ces deux mesures ? Expliquer. Comment pourrait-on faire pour diminuer cette incertitude ? Justifier votre réponse.

Table des Transformées en Z

Signal	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z, except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
6. $-\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
7. $n\alpha^n u[n]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| > \|\alpha\|$
8. $-n\alpha^n u[-n-1]$	$\dfrac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\|z\| < \|\alpha\|$
9. $[\cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos \omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos \omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $[\sin \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[\sin \omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos \omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos \omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos \omega_0]z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n]u[n]$	$\dfrac{[r\sin \omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos \omega_0]z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\|z\| > r$