1. Введение в булеву алгебру

Математическая логика (называемая также *символической логикой*, *формальной логикой*) — это логика, развиваемая с помощью математических методов. Изучать математическую логику — значит, изучать логику, используемую в математике. Математическая логика как наука насыщена весьма богатым и разнообразным материалом. Мы начнём с некоторых ее вспомогательных важных разделов, чтобы затем иметь возможность продвигаться вширь и вглубь.

Под алгеброй в современной математике понимают *множество объектов* произвольной природы с определенными на них *операциями* и свойствами этих операций, даваемых в форме *аксиом*. Запишем основные требования, предъявляемые к алгебре. Операции алгебры должны быть применимы ко всем объектам множества. В результате выполнения операций должны получаться объекты той же природы, что и исходные. В этом случае говорят, что множество объектов замкнуто относительно операций. Операций в алгебре должно быть конечное число и каждая операция должна быть конечноместной и т. д.

Прежде формального введения в булеву алгебру удобно познакомиться с неформальным изложением данного вопроса. Это означает, что необходимо рассмотреть различного рода понятия, определения и, конечно же, объекты алгебры, возможные операции и их свойства.

1.1. Булевы функции

Определение 1.1. Переменная x называется *булевой*, если она способна принимать только два значения 0 и 1. В качестве примера интерпретации такого рода переменных может выступать обычный настенный выключатель света на два положения. Здесь 1 соответствует положению переключателя вверх и 0 — положению вниз.

Определение 1.2. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *булевой* (или логической, или функцией алгебры логики, или переключательной), если все ее аргументы x_i являются булевыми, а сама функция также может принимать только два значения 0 и 1.

Множество всех булевых функций от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначают через P_2.

Способы задания булевых функций

Способы задания булевых функций не отличаются от способов задания обычных функций анализа. К таковым способам задания стандартно относятся:

1) табличный;
2) графический;
3) аналитический.

(1) Табличный способ задания

Пусть $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — булева функция n аргументов. Область определения данной функции можно рассматривать и как множество упорядоченных наборов (или векторов, или двоичных наборов) $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\},\ i = 1, 2, \dots, n\}$, на каждом из которых функция принимает одно из двух значений: $w \in \{0,1\}$. Количество таких наборов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, согласно правилу прямого произведения (см. п. 1.2), равно $|D| = |\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{n}| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Нетрудно определить и количество всех функций $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Отдельная функция $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана, если определены ее значения $(w_1, w_2, \dots, w_{2^n})$ на всех наборах $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, где $w_j \in \{0,1\}$ — значение функции $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на j-м наборе $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (01 \cdots 1) \in D$, $j = 1, 2, \dots, 2^n$. Итак, количество булевых функций $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ совпадает с числом двоичных наборов $(w_1, w_2, \dots, w_{2^n})$, где $w_j \in \{0,1\}$. Согласно правилу прямого произведения (см. п. 1.2), число последних равно $|\underbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{2^n}| = 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{2^n}$.

В качестве примера рассмотрим табличное представление булевой функции трех аргументов $w = f(x, y, z)$, где $w, x, y, z \in \{0,1\}$. Область определения функции — это множество двоичных наборов $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0,1\}\}$. Их число есть $|D| = 2^3 = 8$, а количество таких функций равно $2^{|D|} = 2^{2^3} = 256$.

Значения функции $f(x, y, z)$ удобно представить в виде табл. 1.1, где перечислены всевозможные наборы из нулей и единиц длины 3 и для каждого набора указано значение функции $f_i \in \{0, 1\}$ на этом наборе.

Таблица 1.1

№	$x\ y\ z$	$w = f(x, y, z)$
0	0 0 0	$f_0 = 1 \quad = f(0,0,0)$
1	0 0 1	$f_1 = 1 \quad = f(0,0,1)$
2	0 1 0	$f_2 = 0 \quad = f(0,1,0)$
3	0 1 1	$f_3 = 1 \quad = f(0,1,1)$
4	1 0 0	$f_4 = 0 \quad = f(1,0,0)$
5	1 0 1	$f_5 = 0 \quad = f(1,0,1)$
6	1 1 0	$f_6 = 0 \quad = f(1,1,0)$
7	1 1 1	$f_7 = 1 \quad = f(1,1,1)$

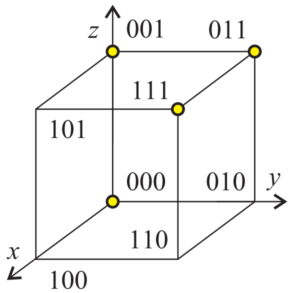

Рис. 1.1

В таблицах, аналогичных табл. 1.1, обычно употребляется расположение наборов, соответствующих порядку естественного роста двоичных чисел $0, 1, \ldots, 2^n - 1$, в примере $n = 3$.

Определение 1.3. Таблицы значений булевых функций, подобные табл. 1.1, называются *таблицами истинности* булевых функций. Название таблиц происходит от интерпретации значений 1 — истина (TRUE), 0 — ложь (FALSE).

(2) Графический способ задания

Рассмотрим графическое представление булевой функции трех аргументов $w = f(x, y, z)$, заданной таблично (табл. 1.1). Заметим, что множество наборов области определения функции $D = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1\}\}$ является множеством координат точек вершин единичного трехмерного куба (рис. 1.1). Очевидный способ графического представления булевой функции — это отметить каким–то образом вершины куба, в которых функция принимает значение 1. Именно так на рис. 1.1 и сделано. В соответствии с таблицей значений (табл. 1.1) отмечены вершины, в которых булева функция равна 1.

Замечание 1.1. *Очевидно, что область определения булевой функции n аргументов $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ состоит из наборов координат точек вершин единичного n-мерного куба.*

(3) Аналитический способ задания

Приведем таблицы истинности, обозначения и названия булевых функций одного и двух аргументов. В табл. 1.2 представлены все (их $2^{2^1} = 4$) функции одного аргумента, в табл. 1.3 — все функции двух аргументов (их $2^{2^2} = 16$).

Таблица 1.2

№\\x	0 1	Обозначение	Название
0	0 0	0	Нуль, *const* 0
1	0 1	x	Повторение x
2	1 0	$\neg x,\ \overline{x}$	Отрицание x, не x
3	1 1	1	Единица, *const* 1

Таблица 1.3

x y	0 0 1 1 0 1 0 1	Обозначение	Название
0	0 0 0 0	0	Нуль, *const* 0
1	0 0 0 1	$x \cdot y,\ x \wedge y,\ x \& y$	Конъюнкция
2	0 0 1 0	$y \nrightarrow x,\ x \cdot \overline{y}$	Запрет по y
3	0 0 1 1	x	Повторение x
4	0 1 0 0	$x \nrightarrow y,\ \overline{x} \cdot y$	Запрет по x
5	0 1 0 1	y	Повторение y
6	0 1 1 0	$x \oplus y$	Сумма по модулю 2
7	0 1 1 1	$x \vee y$	Дизъюнкция
8	1 0 0 0	$x \downarrow y$	Стрелка Пирса
9	1 0 0 1	$x \sim y$	Эквивалентность
10	1 0 1 0	$\neg y,\ \overline{y}$	Отрицание y
11	1 0 1 1	$y \rightarrow x,\ y \Rightarrow x,\ y \supset x$	Импликация от y к x
12	1 1 0 0	$\neg x,\ \overline{x}$	Отрицание x
13	1 1 0 1	$x \rightarrow y,\ x \Rightarrow y,\ x \supset y$	Импликация от x к y
14	1 1 1 0	$x \mid y$	Штрих Шеффера
15	1 1 1 1	1	Единица, *const* 1

Функции 0 и 1 называются соответственно *тождественным нулем* и *тождественной единицей*. Иногда эти функции 0 и 1

рассматривают как функции, зависящие от пустого множества переменных.

Функции одного и двух аргументов, представленные в таблицах 1.2 и 1.3, называются *элементарными*.

Символы $\neg$, $|$, $\downarrow$, $\wedge$, $\nrightarrow$, $\vee$, $\rightarrow$, $\oplus$, $\sim$, участвующие в обозначениях элементарных функций, называются *логическими связками (операциями) или функциональными символами*.

1.2. Формулы, реализация функций формулами

Построение *формул* выполняется из *элементарных булевых функций* и носит рекурсивный характер. Пусть X — некоторый фиксированный *алфавит переменных*, $\sigma = \{\neg, |, \downarrow, \wedge, \nrightarrow, \vee, \rightarrow, \oplus, \sim\}$ — *множество функциональных символов (базис)* и F — множество булевых функций, соответствующих функциональным символам σ.

Определение 1.4. *Формулой над* σ называется всякое (и только такое) выражение вида:

1) x — любая переменная из множества X;

2) $(\neg A)$, $(A|B)$, $(A \downarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \nrightarrow B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \oplus B)$, $(A \sim B)$, где A, B — это формулы над σ.

Примеры формул. $G_1 = ((y \rightarrow x) \oplus ((\neg y) \cdot x))$, $G_2 = (\neg(x \nrightarrow (((\neg x)|((\neg x)|(\neg y))) \downarrow y) \vee y))$, $G_3 = ((x \vee y) \sim z)$.

Реализация функций формулами. Всякой формуле G однозначно соответствует некоторая функция f_G. Понятие булевой функции f_G, реализуемой формулой G, вводится рекурсивно следующим образом:

1) формуле $G = x$, где $x \in X$, сопоставляется функция $f_G(x) = x$;

2) если G равна одной из формул $(\neg A)$, $(A|B)$, $(A \downarrow B)$, $(A \wedge B)$, $(A \nrightarrow B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \oplus B)$, $(A \sim B)$, где A, B — это формулы над σ, то f_G равна соответствующей элементарной булевой функции $\neg f_A$, $f_A | f_B$, $f_A \downarrow f_B$, $f_A \wedge f_B$, $f_A \nrightarrow f_B$, $f_A \vee f_B$, $f_A \rightarrow f_B$, $f_A \oplus f_B$, $f_A \sim f_B$. Если $f_G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in X$, то значение ее на произвольном наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$ совпадает со значением на этом наборе для соответствующей ей элементарной булевой функции.

Таким образом, зная таблицы истинности элементарных функций *(функций базиса)* (табл. 1.3), можно вычислить и таблицу истинности функции f_G, которую реализует формула G.

Эквивалентные формулы. Формулы G_1 и G_2 над σ называются эквивалентными, если они реализуют равные булевы функции f_{G_1} и f_{G_2}.

Приоритет операций. Для булевых формул допустима и бесскобочная их запись. Например, $G = x \oplus y \sim z \to z \to y \vee z$. Для составления таблицы истинности таких формул необходимо установить последовательность выполнения операций — расставить скобки. С этой целью каждой логической операции $\neg, |, \downarrow, \wedge, \nrightarrow, \vee, \to, \oplus, \sim$ назначается свой отличный от других приоритет операций. Приоритет операций устанавливается следующим их списком:

$$\neg,\ |,\ \downarrow,\ \wedge,\ \nrightarrow,\ \vee,\ \to,\ \oplus,\ \sim, \tag{1.1}$$

где чем левее расположение операции по списку, тем выше ее приоритет.

Порядок выполнения операций в формулах

1. Если формула написана со скобками, то порядок определяется скобками.
2. Если формула написана без скобок, то одинаковые операции выполняются в порядке их появления; порядок же различных операций, в этом случае, определяется в соответствии с их приоритетом (1.1): $\neg, |, \downarrow, \wedge, \nrightarrow, \vee, \to, \oplus, \sim$.

Определение 1.5. Формула называется *тождественно–истинной*, если ее значение на всех наборах переменных равно 1. Формула называется *тождественно–ложной*, если ее значение на всех наборах переменных равно 0. В противном случае формула называется *условно–истинной*.

Пример 1.1. Составить таблицу истинности формулы

$$G = x \oplus y \sim z \to z \to y \vee z.$$

Решение. Расстановка скобок в формуле G дает следующий порядок выполнения операций

$$G = \underbrace{\underbrace{((x \oplus y)}_{4} \sim \underbrace{(\underbrace{(z \to z)}_{2} \to \underbrace{(y \vee z)}_{1})}_{3})}_{5}.$$

Значения истинности для формулы G приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
№	$x\ y\ z$	$y \vee z$	$z \to z$	$(2) \to (1)$	$x \oplus y$	$(4) \sim (3)$
0	0 0 0	0	1	0	0	1
1	0 0 1	1	1	1	0	0
2	0 1 0	1	1	1	1	1
3	0 1 1	1	1	1	1	1
4	1 0 0	0	1	0	1	0
5	1 0 1	1	1	1	1	1
6	1 1 0	1	1	1	0	0
7	1 1 1	1	1	1	0	0

1.3. Замена переменных и суперпозиция

В основу рекурсивного правила получения новых формул (п. 1.2) из элементарных булевых функций положены *операции замены переменных и суперпозиции*. Рассмотрим их определение и примеры использования.

Определение 1.6. Операцией замены переменных булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется переименование ее переменных или замена их порядка. Пусть $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ — перестановка, тогда операция замены исходных переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на новые $(y_{\pi_1}, y_{\pi_2}, \ldots, y_{\pi_n})$ записывается как

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Big|_{\substack{x_1 := y_{\pi_1} \\ x_2 := y_{\pi_2} \\ \ldots \\ x_n := y_{\pi_n}}} = f(y_{\pi_1}, y_{\pi_2}, \ldots, y_{\pi_n}),$$

где $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — новая булева функция — результат операции замены переменных. Ниже даны примеры таких операций:

$$(x \oplus y) \vee z \underset{\begin{array}{|l} x := z \\ y := z \\ z := x \end{array}}{=} (z \oplus z) \vee x, \quad (x \sim y) \nrightarrow z \underset{\begin{array}{|l} x := y \\ y := z \\ z := w \end{array}}{=} (y \sim z) \nrightarrow w.$$

Определение 1.7. Операция суперпозиции (или наложения) булевых функций состоит в том, что вместо аргументов данной булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подставляются некоторые другие булевы функции $h_1(y_{k_{11}}, y_{k_{12}}, \ldots, y_{k_{1m_1}})$, $h_2(y_{k_{21}}, y_{k_{22}}, \ldots, y_{k_{2m_2}})$, ..., $h_r(y_{k_{r1}}, y_{k_{r2}}, \ldots, y_{k_{rm_r}})$ и записывают

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \underset{\begin{array}{|l} x_{i_1} := h_1(y_{k_{11}}, y_{k_{12}}, \ldots, y_{k_{1m_1}}) \\ x_{i_2} := h_2(y_{k_{21}}, y_{k_{22}}, \ldots, y_{k_{2m_2}}) \\ \ldots \\ x_{i_r} := h_r(y_{k_{r1}}, y_{k_{r2}}, \ldots, y_{k_{rm_r}}) \end{array}}{=} g(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s}, y_{k_{11}}, y_{k_{12}}, \ldots, y_{k_{rm_r}}).$$

Пример суперпозиции функций:

$$x \oplus y \underset{\begin{array}{|l} x := (x \sim z) \oplus (z \to y) \\ y := x \,|\, (y \nrightarrow x) \end{array}}{=} ((x \sim z) \oplus (z \to y)) \oplus (x|(y \nrightarrow x)).$$

Замечание 1.2. *Нетрудно заметить, что операция замены переменных является частным случаем операции суперпозиции, если в последней в качестве функций $h_1, h_2, \ldots, h_r$ положить обычные булевы переменные.*

1.4. Существенные и фиктивные переменные

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *существенно* зависит от переменной x_i, если существует такой набор значений $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ переменных $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Переменная x_i в этом случае называется *существенной*. В противном случае x_i называется *несущественной* или *фиктивной*.

Рассмотрим следующий пример таблиц истинности (табл. 1.5) двух функций f_1 и f_2:

Таблица 1.5

№	x	y	f_1	f_2
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0
2	1	0	0	1
3	1	1	0	0

Фиктивными является для функции f_1 переменная y, для функции f_2 переменная x.

Замечание 1.3. *Булевы функции f_1 и f_2 будут равными, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции f_1 и f_2 принимают равные значения.*

Пример 1.2. Составить таблицу истинности формулы

$$G = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(x \sim y}_{1} \sim \overline{x})}_{2} \sim \underbrace{(\underbrace{x \downarrow y}_{3} \downarrow \overline{z})}_{4}}_{5}\,.$$

Значения истинности для формулы G приведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
№	$x\ y\ z$	$x \sim y$	$(1) \sim \overline{x}$	$x \downarrow y$	$(3) \downarrow \overline{z}$	$(2) \sim (4)$
0	0 0 0	1	1	1	0	0
1	0 0 1	1	1	1	0	0
2	0 1 0	0	0	0	0	1
3	0 1 1	0	0	0	1	0
4	1 0 0	0	1	0	0	0
5	1 0 1	0	1	0	1	1
6	1 1 0	1	0	0	0	1
7	1 1 1	1	0	0	1	0

Контрольные вопросы

1. Таблица истинности функции $x \oplus y$ равна:
   $a)\,1001$, $b)\,0110$, $c)\,1010$, $d)\,01010$.
2. Запишите таблицу истинности булевой функции запрет $x \nrightarrow y$.
3. Сколько всего двоичных наборов длины 6?
4. Расставьте скобки для вычисления выражения
   $x \uparrow y \sim z \to z \to y \oplus z \vee y | x \wedge z$.
5. Что значит булева функция $f(x, y, z)$ существенно зависит от переменной z?
6. Составить таблицу истинности функции
   $f(x, y, z) = x \oplus \neg(xz) | \neg(xy) \downarrow y$.
   Составить таблицу истинности для булевой функции $w = f(x, y, z)$, заданной графически на рисунке.