# 3. Минимизация булевых функций

Под *минимизацией* булевых функций будем понимать их представление в самом экономичном коротком виде. Задачу минимизации будем решать в области дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) булевых функций (п. **??**). В области ДНФ минимизация доведена до конечного алгоритма.

## 3.1. Классификация двоичных наборов

Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, — произвольные двоичные наборы.

1. Наборы $A$ и $B$ — *соседние*, если отличаются ровно одной координатой. *Например*, $A = (1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1)$, $B = (1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1)$ — соседние наборы.

2. Наборы $A$ и $B$ — *несоседние*, если отличаются более, чем одной координатой. *Например*, $A = (1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1)$, $B = (1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1)$ — несоседние наборы.

3. Наборы $A$ и $B$ — *противоположные*, если являются отрицанием друг друга. *Например*, $A = (1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1)$, $B = (0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0)$ — противоположные наборы.

4. Наборы $A$ и $B$ — *сравнимые*, если одновременно для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется $a_i \geqslant b_i$ или $a_i \leqslant b_i$. *Например*, $A = (1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1)$, $B = (1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0)$ — сравнимые наборы.

5. Сравнимые наборы делятся на *большие* и *меньшие*. Пусть наборы $A$ и $B$ — *сравнимые* и для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется $a_i \geqslant b_i$, тогда записывают $A \geqslant B$. Если же для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется $a_i > b_i$, то записывают $A > B$.

## 3.2. Геометрическая интерпретация минимизации

Рассмотрим пример минимизации булевой функции трех переменных $f(x, y, z)$, заданной таблично (табл. 3.1). В таблице $A$ — столбец обозначений наборов; $A_i$ — $i$-й порядковый набор в таблице истинности; $K^1$ — столбец конституент 1 для каждого набора таблицы истинности.

Таблица 3.1

| $A$ | $x\ y\ z$ | $f(x,y,z)$ | $K^1$ |
|---|---|---|---|
| $A_0$ | 0 0 0 | 0 | $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| $A_1$ | 0 0 1 | 0 | $\overline{x}\,\overline{y}\,z$ |
| $A_2$ | 0 1 0 | 1 | $\overline{x}\,y\,\overline{z}$ |
| $A_3$ | 0 1 1 | 0 | $\overline{x}\,y\,z$ |
| $A_4$ | 1 0 0 | 1 | $x\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| $A_5$ | 1 0 1 | 1 | $x\,\overline{y}\,z$ |
| $A_6$ | 1 1 0 | 1 | $x\,y\,\overline{z}$ |
| $A_7$ | 1 1 1 | 1 | $x\,y\,z$ |

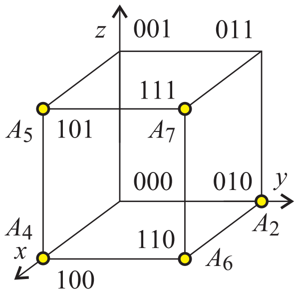


Рис. 3.1

Рассмотрим графическое представление (п. **??**) выбранной функции $f(x,y,z)$. Область определения $f(x,y,z)$ — множество наборов $\{A_0, A_1, \ldots, A_7\}$ координат точек вершин единичного трехмерного куба (рис. 3.1). В соответствии с таблицей истинности (табл. 3.1) отметим вершины, в которых булева функция равна 1. *Представленный таким образом куб — это объемная таблица истинности булевой функции. Объемное представление таблицы истинности позволяет визуально оценивать распределение вершин по кубу, в которых функция равна 1.*

Запишем рассматриваемую функцию в СДНФ. При записи конституент 1 в СДНФ будем придерживаться такой их последовательности, где учитывается отношение соседства вершин на кубе (рис. 3.1), в которых функция равна 1. Полагаем, что две вершины соседние, если их наборы являются соседними, т. е. отличаются одной координатой. На кубе соседние вершины — это вершины одного ребра. Итак,

$$f(x,y,z) = \underbrace{x\,\overline{y}\,\overline{z}}_{A_4} \vee \underbrace{x\,\overline{y}\,z}_{A_5} \vee \underbrace{x\,y\,\overline{z}}_{A_6} \vee \underbrace{x\,y\,z}_{A_7} \vee \underbrace{\overline{x}\,y\,\overline{z}}_{A_2}.$$

Используя аксиомы булевой алгебры, упростим $f(x,y,z)$. Заметим, что каждая пара соседних вершин имеет свою общую часть, чем и воспользуемся. Тогда

$$f(x,y,z) = \underbrace{x\,\overline{y}\,(\overline{z} \vee z)}_{A_4A_5} \vee \underbrace{x\,y\,(\overline{z} \vee z)}_{A_6A_7} \vee \underbrace{\overline{x}\,y\,\overline{z}}_{A_2} = \underbrace{x\,\overline{y}}_{A_4A_5} \vee \underbrace{x\,y}_{A_6A_7} \vee \underbrace{\overline{x}\,y\,\overline{z}}_{A_2}.$$

После «склеивания» соседних вершин их общую часть можно интерпретировать ребрами, которые их *покрывают*. Ребро представляется конъюнкцией двух переменных. Значит последнее выражение для $f(x, y, z)$ включает ребро $A_4A_5$, ребро $A_6A_7$ и вершину $A_2$.

Ребра $A_4A_5$ и $A_6A_7$ также являются соседними, соответствующие им выражения (наборы) отличаются одной координатой. Выполним склеивание таких ребер:

$$f(x,y,z) = \underbrace{x\,(\overline{y} \vee y)}_{A_4A_5A_6A_7} \vee \underbrace{\overline{x}\,y\,\overline{z}}_{A_2} = \underbrace{x}_{A_4A_5A_6A_7} \vee \underbrace{\overline{x}\,y\,\overline{z}}_{A_2}.$$

Общую часть соседних ребер будем интерпретировать гранью, которая их покрывает. Грань представляется одной переменной. Теперь выражение для $f(x, y, z)$ включает одну грань $A_4A_5A_6A_7$ и вершину $A_2$.

*Геометрическая интерпретация* выполненных аналитических преобразований, направленных на упрощение исходной функции $f(x, y, z)$, дает основание заключить, что уменьшение длины выражения $f(x, y, z)$ возможно лишь в том случае, если имеется в наличие хотя бы одна пара соседних объектов (вершин, ребер и т. д.).

Вернемся к объемной таблице истинности (рис. 3.1) исходной булевой функции $f(x, y, z)$. Здесь вершина $A_2$ имеет соседнюю вершину $A_6$, в которой функция равна 1. Склеиванием указанных вершин, с целью уменьшения длины $f(x, y, z)$, мы не воспользовались, так как вершина $A_6$ участвовала в склеивании с вершиной $A_7$.

Однако и в этом случае длина $f(x, y, z)$ еще может быть уменьшена. Воспользуемся свойством операции дизъюнкция: $g \vee h \vee h = g \vee (h \vee h) = g \vee h$, где $g$ и $h$ — произвольные функции. Это означает, что булева функция не изменяется при повторном многократном включении ее дизъюнктивных членов.

Воспользуемся этим свойством и добавим повторно в $f(x, y, z)$ ее же вершину $A_6$ как соседнюю с $A_2$. Склеивание этих вершин уменьшит длину последнего выражения $f(x, y, z)$ на 1:

$$f(x,y,z) = \underbrace{x}_{A_4A_5A_6A_7} \vee \underbrace{\overline{x}\,y\,\overline{z}}_{A_2} \vee \underbrace{x\,y\,\overline{z}}_{A_6} =$$

$$= \underbrace{x}_{A_4A_5A_6A_7} \vee \underbrace{y\,\overline{z}\,(\overline{x} \vee x)}_{A_2A_6} = \underbrace{x}_{A_4A_5A_6A_7} \vee \underbrace{y\,\overline{z}}_{A_2A_6}.$$

Последнее выражение позволяет заключить, что вершина $A_6$ оказалась покрытой дважды: гранью $A_4A_5A_6A_7$ и ребром $A_2A_6$.

*Сформулируем общие правила аналитического описания геометрических объектов (вершин, ребер, граней и т. д.).*

1. Выписывается конъюнкция тех переменных, которые не изменяются в пределах данного геометрического объекта.
2. Переменная берется с отрицанием, если на данном геометрическом объекте она равна 0 и без отрицания, если равна 1.

**Основные правила минимизации булевых функций в геометрической интерпретации**

1. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — исходная булева функция, которую необходимо минимизировать. Рассмотрим ее графическое представление. Множество наборов области определения функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это множество координат точек вершин единичного $n$-мерного куба. Отметим вершины такого куба, в которых функция равна 1. Постороенный таким образом $n$-мерный куб является объемной таблицей истинности исходной функции.
2. *Минимизация* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в геометрической интерпретации заключается в том, чтобы *покрыть* (склеить) все вершины единичного $n$-мерный куб, в которых булева функция равна 1, геометрическими объектами (вершинами, ребрами, гранями и т. д.) *максимально возможной размерности*. Покрывать следует таким образом, чтобы ни одна из вершин, в которых функция равна 0, не оказалась покрытой.
3. Вершины куба можно покрывать произвольное число раз. Значение функции при этом не изменяется.
4. Минимальная ДНФ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это дизъюнкция геометрических объектов (их аналитических представлений), участвовавших в покрытии вершин куба, в которых функция равна 1.

**Пример 3.1.** Найти минимальную ДНФ булевой функции $f(x,y,z)$, заданной таблично (табл. 3.2).

Таблица 3.2

| $A$ | $x\ y\ z$ | $f(x,y,z)$ | $K^1$ |
|---|---|---|---|
| $A_0$ | 0 0 0 | 0 | $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| $A_1$ | 0 0 1 | 1 | $\overline{x}\,\overline{y}\,z$ |
| $A_2$ | 0 1 0 | 1 | $\overline{x}\,y\,\overline{z}$ |
| $A_3$ | 0 1 1 | 0 | $\overline{x}\,y\,z$ |
| $A_4$ | 1 0 0 | 1 | $x\,\overline{y}\,\overline{z}$ |
| $A_5$ | 1 0 1 | 0 | $x\,\overline{y}\,z$ |
| $A_6$ | 1 1 0 | 1 | $x\,y\,\overline{z}$ |
| $A_7$ | 1 1 1 | 1 | $x\,y\,z$ |

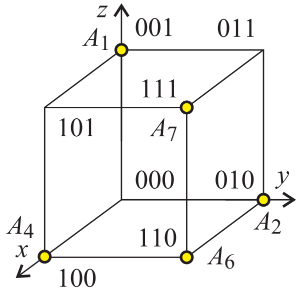

Рис. 3.2

На рис. 3.2 представлен куб пространственной таблицы истинности рассматриваемой функции. Яркими выделены вершины, в которых $f(x,y,z)$ равна 1. Геометрический объект, максимально возможной размерности, которым можно покрывать вершины куба данного примера, — это ребро. Покрываем только те вершины, в которых функция равна 1. Вершины можно покрыть тремя ребрами $A_4A_6$, $A_7A_6$, $A_2A_6$ и одной вершиной $A_1$. Отсюда минимальная ДНФ имеет вид

$$f(x,y,z)_{\substack{min\\ \text{ДНФ}}} = \underbrace{x\,\overline{z}}_{A_4A_6} \vee \underbrace{x\,y}_{A_7A_6} \vee \underbrace{y\,\overline{z}}_{A_2A_6} \vee \underbrace{\overline{x}\,\overline{y}\,z}_{A_1}.$$

## Контрольные вопросы

1. Дайте определение соседних наборов.
2. Сформулируйте основные правила минимизации булевых функций в геометрической интерпретации.
3. Запишите а аналитическом виде минимальную ДНФ, которая в одной вершине равна 0, а во всех стальных вершинах равна 1.
4. Какое максимальное число несоседних вершин можно отметить на 3-мерном кубе?
5. Пусть $A(0,1,1)$ — вершина 3-мерного куба. В этой вершине булева функция равна 1 и равна 1 во вех вершинах, соседних

с данной вершиной $A$. Во всех остальных вершинах функция равна 0. Запишите для данной функции ее минимальную ДНФ.

6. Сколько у одного ребра может быть соседних ребер?
7. Сколько у одной грани может быть соседних граней?
8. Сколько переменных в аналитическом описании грани куба?
9. Сколько переменных в минимальной ДНФ функции, которая равна 1 во всех вершинах куба, кроме одной?
10. Если минимальная ДНФ трех переменных равна $\overline{z}$, то в каких вершинах куба (назовите их координаты) функция равна 0?
11. Если минимальная ДНФ трех переменных равна $x \vee z$, то в каких вершинах куба (назовите их координаты) функция равна 0?
12. Если минимальная ДНФ трех переменных равна $\overline{x} \vee \overline{yz}$, то в каких вершинах куба (назовите их координаты) функция равна 0?

## 3.3. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.1.** Минимизировать геометрически на трёхмерном на кубе следующие булевы функции трёх переменных:

1). $x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$

2). $x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

3). $x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,z$

4). $x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z}$

5). $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z$

6). $\overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$

7). $x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z$

8). $x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$

9). $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z}$

10). $\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z$

11). $\overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z}$

12). $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z$

13). $x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,z$

14). $x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z$

15). $x\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z$
16). $\overline{x}\,y\,z \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,\overline{z}$
17). $\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z$
18). $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z$
19). $\overline{x}\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee x\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z}$
20). $x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,z$
21). $x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z$
22). $x\,y\,z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z}$
23). $\overline{x}\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z$
24). $x\,y\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
25). $\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,y\,z \vee \overline{x}\,y\,z$

**Задача 3.2.** Минимизировать геометрически на трёхмерном на кубе следующие булевы функции трёх переменных:

1). $x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,z \vee \overline{x}\,z \vee x\,y$
2). $\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,z \vee x\,\overline{z}$
3). $y\,\overline{z} \vee x\,y \vee x\,z \vee \overline{y}\,z$
4). $x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,z \vee \overline{x}\,z \vee \overline{x}\,y$
5). $y\,z \vee x\,z \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}$
6). $\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee x\,z \vee \overline{x}\,y$
7). $\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,z \vee \overline{x}\,y \vee y\,\overline{z} \vee x\,\overline{z}$
8). $y\,z \vee x\,z \vee x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{z}$
9). $x\,y \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,z \vee x\,z \vee y\,\overline{z}$
10). $y\,z \vee x\,z \vee x\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,y$