ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству.

В теории вероятностей принято говорить не о комбинациях, а о выборках. Поэтому будем придерживаться термина «выборка».

1. Общие правила комбинаторики

Рассмотрим два общих правила, с помощью которых решается большинство задач комбинаторики, — **правило сложения** и **правило умножения**.

Допустим, в ящике имеется n разноцветных шариков. Произвольным образом вынимаем один шарик. Сколькими способами можно это сделать? Конечно, n. Теперь эти шарики распределим по двум ящикам: в первом — m шариков, во втором — k. Произвольно из какого-нибудь ящика вынимаем один шарик. Сколькими разными способами можно это сделать? Из первого ящика шарик можно вынуть m разными способами, из второго — k способами. Всего $n = m + k$ способами.

Если некоторый элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — k способами (не такими как A), то элемент «либо A, либо B» можно выбрать $m + k$ способами. Это правило называется **правилом сложения**.

Пусть имеется два множества. Множество A состоит из m элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Множество B — из n элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Из каждого множества выбирается по одному элементу. Спрашивается, сколько различных пар элементов при этом образуется?

Ответ на поставленный вопрос дает таблица:

$a_1b_1; a_1b_2; a_1b_3; \ldots; a_1b_n$
$a_2b_1; a_2b_2; a_2b_3; \ldots; a_2b_n$
.....
.....
$a_mb_1; a_mb_2; a_mb_3; a_mb_n$

В этой таблице m строк и в каждой строке n пар. Таким образом, общее число всевозможных пар будет равно m x n.

Итак, имеем следующее **правило умножения**: если один элемент из множества A можно выбрать m способами, а другой элемент из множества B можно выбрать n способами, независимо от выбора первого, то пару элементов из A и B можно выбрать m x n способами.

В общем виде это правило формулируется следующим образом:

Пусть имеется R групп элементов: n_1 элементов первой группы a_1, a_2, ..., a_{n1}; n_2 элементов второй группы b_1, b_2, ..., b_{n2};...; nr элементов r-ой группы Z_1, Z_2,..., Z_{nr}. Тогда элемент A можно выбрать n_1 способами, элемент B — n_2 способами, ... , Z — n_r способами. Число же всевозможных полученных комбинаций, содержащих по одному элементу из каждой группы, будет равно произведению $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$.

Примеры

1. Бросают игральную кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий восемь граней. Сколькими различными способами они могут упасть?

Решение: Так как кость может упасть 6 способами, а волчок — 8, то различных способов наборов положений кости и волчка по правилу умножения будет равно 6·8 = 48.

2. Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника тригонометрии надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Число различных комплектов из трех учебников по разным предметам можно составить 3 · 7 · 7 = 147. Здесь применяем правило умножения.

3. Сколько можно записать двузначных чисел в десятичной системе счисления?

Решение: Так как число двухзначное, то надо выбрать две цифры. Первая — число десятков может принимать одно из девяти значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вторая — число единиц может принимать те же значения и может, кроме того, быть равным нулю, т.е. одно из десяти значений. Тогда по правилу умножения получаем, что число всевозможных двухзначных чисел будет равно 9·10 = 90.

4. В букинистическом магазине лежат 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра его же романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, содержащих

романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

Решение: можно купить либо по экземпляру каждого романа $6 \cdot 3 \cdot 4 = 72$ способами, либо том, содержащий два романа «Рудин» и «Дворянское гнездо», и роман «Отцы и дети» — $5 \cdot 4 = 20$ способами, либо том, содержащий романы «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети», и отдельно роман «Рудин» — $7 \cdot 6 = 42$ способами. А всего способов получаем по правилу сложения $72 + 20 + 42 = 134$.

Упражнения

1. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
2. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание», слова «цветок»?
3. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата — белый и черный?
4. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
5. Имеется 6 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну — на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?
6. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов, Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин, после чего Таня берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Таня имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?
7. В хозяйстве имеется 20 кур и 15 гусей. Сколькими способами можно выбрать одну курицу и одного гуся? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его ещё раз?
8. У одного человека есть 7 видеокассет с интересными фильмами, а у другого — 9. Сколькими способами они могут обменять видеокассету одного на видеокассету другого?
9. Имеется три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколькими различными способами они могут упасть? Та же задача, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1?

2. Выборки без возвращения

Пусть имеется некоторое множество X, состоящее из M элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_M$. Из этого множества можно образовать разные выборки, каждая из которых имеет N элементов ($0 < N < M$).

Выбор бывает двух типов: без возвращения, когда из некоторого множества элементов X извлекают последовательно N элементов и выбранные элементы не возвращаются обратно, и с возвращением, когда на каждом шаге при последовательном извлечении элементов извлеченный элемент возвращается обратно в совокупность X.

Будем рассматривать выборки без возвращения.

Упорядоченная выборка N элементов из данного множества называется ***размещением*** из M элементов по N. Размещения отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из M элементов по N обозначается A_M^N. Подсчитаем это число. В множестве содержится M элементов, поэтому первый элемент можно выбрать M способами. Теперь в множестве осталось (M —1) элементов. Следовательно, второй элемент можно выбрать (M — 1) способами. Всего различных пар двух элементов по правилу умножения получается равным M (M — 1) способов. Третий элемент из оставшихся (M — 2) элементов выбирается (M — 2) способами. Тогда опять по правилу умножения тройки элементов можно образовать M(M — 1)(M -2) способами, по аналогии, четверки можно образовать M(M — 1)(M — 2)(M — 3) способами и так далее, размещения по N элементов — M(M — 1)(M — 2) ... (M — (N — 1)) способами. Таким образом,

$$A_M^N = M(M-1)(M-2)\ldots(M-N+1).$$

Если в формуле N = M, т.е. выбираются все элементы множества, то такие размещения из M элементов по M отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, но не самими элементами. Такие размещения называются ***перестановками*** M элементов. Их число будет

$A_M^M = M(M-1)(M-2)\ldots 1 = M!$

Число всевозможных перестановок из M элементов обозначается $P_M = M!$

На практике не всегда важен порядок расположения элементов в выборке. Неупорядоченная выборка N элементов из данного множества называется ***сочетанием*** из M элементов по N. Сочетания отличаются друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из M элементов по N меньше числа размещений из M элементов по N в число перестановок из N элементов, т.к. из каждого сочетания путем перестановок элементов можно получить N! размещений. Число сочетаний из M элементов по N обозначается

$$C_M^N = \frac{A_M^N}{P_N} = \frac{M(M-1)...(M-N+1)}{N!}$$

или эту формулу можно записать в виде

$$C_M^N = \frac{M!}{N!(M-N)!}.$$

Число сочетаний из M элементов по N обладает свойством:

$$C_M^N = C_M^{M-N}.$$

Примеры

1. В местком выбрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Так как результат работы зависит от того, кто конкретно будет председателем, а кто заместителем или секретарем, то выборка 3 человек из 9 должна быть упорядоченной. Такая выборка является размещением. Поэтому число различных способов будет равняться $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

2. Из состава конференции, на которой присутствует 52 человека, надо избрать делегацию, состоящую из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: При выборе делегации, не важно, в какой последовательности, будут включены они в список. Поэтому эта выборка является неупорядоченной, т. е. сочетанием из 52 человек по 5. Число таких сочетаний равно C_{52}^5.

3. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

Решение: Порядок в совокупности выбранных 3 красок из 5 не играет роли, поэтому такой выбор является сочетанием. Число различных способов равно $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

4. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной?

Решение: При составлении флага порядок расположения полос важен, поэтому такая выборка 3 цветов из 5 является размещением. Число их равно $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Если одна полоса красная, то надо выбрать упорядоченную совокупность двух цветов из четырёх ($A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$) и с каждым двухцветным флагом можно образовать три трёхцветных, т. к. красный цвет может быть либо наверху, либо внизу, либо в середине. Поэтому общее число флагов будет $3\,A_4^2 = 36$.

5. Компания из 7 юношей и 10 девушек танцует. Если в каком-то танце участвуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? Сколько имеется вариантов, если учитывать лишь то, какие девушки остались не приглашенными?

Решение: В первом случае важно, какая девушка с каким юношей танцует. Поэтому рассматривается упорядоченная выборка из 10 девушек по 7, т. е. размещения. Число таких размещений равно $A_{10}^7 = 604800$.

Во втором случае порядок оставшихся не приглашенных девушек несущественен. Выборка из 10 девушек трех является сочетанием. Число сочетаний равно $C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

6. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получит одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

Решение: Чашки могут быть расставлены A_4^3 способами, блюдца — A_5^3, ложки — A_6^3 способами. Всего по правилу умножения получим $= A_4^3 \cdot A_5^3 \cdot A_6^3 = 172800$ способов.

7. Сколькими способами можно расставить на полке книги четырехтомного сочинения А. С. Пушкина?

Решение: Каждый способ расстановки книг на полке отличается от другого только порядком, т.е. имеем дело с перестановками. Число перестановок из 4 элементов равно $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

8. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Решение: Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы 7! = 5040 перестановок. Но так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов несущественно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц надо считать одинаковыми. Из каждой перестановки можно получить ещё 6 новых путем вращения. Значит число 5040 надо разделить на 7. Получаем 5040 : 7 = 720 различных перестановок девушек в хороводе. Ответ 7! : 7 = 6! = 720.

9. Сколько ожерелий можно составить из 7 различных бусин?

Решение: По сравнению с предыдущей задачей ожерелье можно не только повернуть по кругу, но и перевернуть. Поэтому число ожерелий будет равно 720 : 2 = 360.

Упражнения

10. На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами турист может подняться и спуститься с неё? То же самое, при условии, что спуск и подъём происходит по разным путям.

11. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 100 м. Сколькими способами можно это сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете 100 + 200 + 400 + 800?

12. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков на любой другой из этих 5 языков?

13. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Сколькими способами можно это сделать? Во скольких случаях среди этих карт не окажется ни одного туза, окажется ровно 1, 2, 3, 4 туза?

14. Пятеро девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека в каждой команде, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

15. У одного человека есть 5 книг, а у другого — 7. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого? То же, но меняются две книги одного на две книги другого.

16. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов? То же, но при условии, что Б не должен выступать до того, как выступит А? При условии, что А должен выступать непосредственно перед Б?

17. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом? Та же задача, но они садятся не за круглый стол, а на карусель и способы, переходящие друг в друга при вращении карусели, считаются совпадающими?

18. В купе железнодорожного вагона имеется два противоположных дивана по 5 мест в каждом. Из десяти пассажиров 4 желают сидеть по ходу поезда (лицом к паровозу), А 3 — против хода (спиной к паровозу), остальным 3 безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры?

3. Выборки с возвращением

Если один и тот же элемент множества может быть выбран более одного раза, то этот способ выборки называется с возвращением или повторением.

Размещения.

Рассмотрим пример. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если одна и та же цифра может повториться несколько раз?

Для составления трёхзначного числа необходимо выбрать упорядоченную совокупность из трех цифр. Если бы не было повторений, то решением являлось число размещений из 5 элементов по 3 $A_5^3 = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$. Но в данном случае элементы могут повторяться. Такая выборка называется размещением с повторением. Число таких размещений можно получить из следующих рассуждений:

Первую цифру трехзначного числа можно выбрать 5 способами: одну из цифр 1, 2, 3, 4 и 5. Вторую — также 5 способами. Тогда число двухзначных чисел по правилу умножения получаем равное $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$. Третью цифру опять можно выбрать теми же 5 способами. Поэтому трехзначное число может быть образовано $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ способами.

Если данное множество состоит из M элементов, из которых требуется образовать размещения по N элементов с повторениями, то т.к. первый элемент можно выбрать M способами, второй — тоже M способами, третий — опять этими же M способами, ... , N-й — тоже M способами, всего размещений по правилу умножения будет равно M^N.

Перестановки.

Из букв слова «стена» можно образовать $P_5 = 5! = 120$ разных слов.

Сколько разных слов можно образовать из букв слова «гамма»?

Оказывается, меньше 120. Так как слово содержит две буквы «а» и две буквы «м», а при перестановке местами этих букв слово не меняется. Поэтому число различных слов из букв слова «гамма» будет равно $\frac{120}{2 \cdot 2} = 30$.

Такая выборка называется перестановкой с повторениями.

Пусть множество состоит из N_1 элементов «а», N_2 — элементов «в», ... N_k — элементов «k». $N_1 + N_2 + ... + N_k = M$. Составим некоторую пере-

становку. Если в этой перестановке менять местами элементы «а», то новой перестановки не получится. Аналогично, можно поступать с элементами «в», ... , «k». Элементы «а» можно переставить $P_{N1} = N_1!$ способами, элементы «в» — $P_{N2} = N_2!$ способами, ... , элементы «k» — $P_{Nk} = N_k!$ способами. Поэтому число перестановок с повторениями будет меньше числа перестановок без повторений в ($N_1!\ N_2!\ \ldots\ N_k!$) раз, т. е.

$$P_M(N_1, N_2, ..., N_k) = \frac{M!}{N_1!N_2!...N_k!}.$$

Сочетания.

Рассмотрим следующую задачу.

В буфете имеются пирожные трех видов (эклер, трубочки, бисквитные). Сколькими способами можно заказать набор из 5 пирожных?

В задаче надо определить число выборок, которые содержат 5 элементов и отличаются друг от друга составом (хотя бы 1 элементом). В каждой выборке обязательно будет повторение элементов.

Каждый заказ зашифруем нулями и единицами. Сначала напишем столько единиц, сколько заказали пирожных «эклер». Потом напишем «0». Дальше напишем число единиц, соответствующих числу заказанных «трубочек». После этого опять поставим «0» и столько единиц, сколько заказано бисквитных пирожных. Если пирожных какого-либо вида не заказано, то единицы на месте соответствующего вида отсутствуют. Количество нулей равно числу видов пирожных минус 1.

Например, а) шифр заказа «1101011» означает, что заказано 2 эклера, 1 трубочка и 2 бисквита; б) шифр «1001111» означает, что заказан 1 эклер и 4 бисквита; в) шифр «0111011» — заказаны 3 трубочки и 2 бисквита.

Каждый зашифрованный заказ представляет комбинацию пяти единиц и двух нулей. Это перестановка с повторениями. Число таких перестановок равно $P_7(5, 2) = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = C_7^2$. Или в каждом шифре надо выбрать места для 5 единиц из 5+3-1=7 мест. Число таких выборок равно , т. к. рассмотренные в задаче выборки, составленные из элементов одного и того множества (виды пирожных), имеют один и тот же объем (5 элементов), но отличаются по составу (хотя бы одним элементом). Такие неупорядоченные выборки называются сочетаниями с повторениями.

Если объем выборки равен N, а множество, из которого строятся выборки, содержит M элементов, то число сочетаний из M элементов по N с повторениями равно C_{M+N-1}^N.

Примеры

1. Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трех курьеров и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

Решение: Первое письмо можно послать любым из трех курьеров, следовательно, имеется 3 способа передачи письма. Для второго — так же имеется 3 способа и т. д., для шестого — тоже 3 способа. Имеем упорядоченную (по номерам писем) выборку из $M = 3$ элементов (курьеров) по $N = 6$ с повторениями (с одним и тем же курьером можно послать несколько писем), т. е. размещения, поэтому общее число способов равно $3^6 = 729$.

2. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им отметки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной отметки?

Решение: Каждый студент может получить одну из трех оценок: отлично, хорошо, удовлетворительно. В задаче рассматриваются упорядоченные выборки из 3 элементов (оценок) по 4 (каждому студенту) — это размещения с повторениями, число которых равно $3^4 = 81$.

3. В почтовом отделении продаются открытки — 10 сортов.

а) Сколькими способами можно купить в нем 12 открыток?

б) Сколькими способами можно купить 8 открыток?

в) Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

Решение: а) Так как один и тот же вид открыток в выборке может встречаться несколько раз, то эта выборка с возвращением из 10 элементов по 12 неупорядоченная. Следовательно, число способов равно $C_{10+12-1}^{12} = C_{21}^{12}$.

б) Аналогично, $C_{10+8-1}^{8} = C_{17}^{8}$.

в) Так как выбираемые открытки различны, то эта выборка из 10 элементов по 8 является без повторений, и следовательно, число способов равно C_{10}^{8}.

4. Сколько различных слов можно получить при перестановке букв слова «математика»?

Решение: Всего имеется 10 букв, среди которых 3 буквы «а» и по 2 буквы «т» и «м». Поэтому число перестановок с повторениями будет равно $P_{10}(3,2,2,1,1) = \dfrac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$.

5. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Выдачу фруктов можно представить в виде последовательности, например, г г я г а а я а а . Все остальные выборки можно получить перестановкой её элементов. Число перестановок с повторениями будет равно $P_9(2,3,4) = \frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$.

Упражнения

19. Сколько пятизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, если допускается повторение этих цифр?

20. Сколько пятизначных чисел можно образовать из цифр 0 и 1?

21. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт по одной карте каждой масти? То же при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых (т. е. двух королей, двух десяток и т. д.)?

22. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт по одной карте каждой масти так, чтобы карты красных мастей и карты черных мастей образовали пары (например, девятки пики и треф, валеты бубен и червей)?

23. На железнодорожной станции имеется 4 светофора. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый и зеленый?

24. В гастрономе имеются конфеты 4 наименований, упакованные в коробки 4 видов для каждого наименования конфет. Сколькими способами можно заказать набор из 3, из 7 коробок?

25. Для несения почетного караула из 10 человек могут быть приглашены офицеры пехотных войск, авиации, погранвойск, артиллерии, морского флота и ракетных войск. Сколькими способами можно избрать состав почетного караула?

26. На Всемирный фестиваль молодежи в Москву прибыла молодежь пяти континентов мира. Возникла необходимость организовать делегацию из 8 представителей разных континентов для оглашения клятвы борцов за мир. Сколькими способами можно было организовать делегацию при условии участия в ней представителей всех континентов?

27. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

28. Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «соединение»? слова «миссисипи»?

ПОНЯТИЕ СОБЫТИЙ. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В теории вероятностей приходится иметь дело с экспериментом или, иначе, опытом, испытанием, наблюдением при осуществлении определенного комплекса условий. Результатом эксперимента является событие.

Например:

1. Подбрасываем камень вверх. Событие — камень упал на Землю. Это событие всегда будет иметь место, сколько бы не проводился данный эксперимент.
2. Бросаем монету. Событие — выпал «герб». Но в результате этого эксперимента могло произойти и другое событие — выпала «решка».

Событие, которое в результате эксперимента может произойти или не произойти, называется ***случайным***.

Событие, которое в результате эксперимента непременно происходит, называется ***достоверным***. (Обозначим U).

Если же в результате эксперимента некоторое событие заведомо не может произойти, то оно называется ***невозможным***. (Обозначим V).

Например:

Событие: A — «два попадания при трех выстрелах по мишени» — случайное;

B — «появление трех гербов при бросании трех монет» — случайное;

C — «появление не более 12 очков при бросании двух игральных костей» — достоверное;

D — «появление в окошке счетчика трехзначного числа, составленного из цифр 1, 2, 3 и кратного 5" — невозможное.

Проводя эксперимент, в результате можно получить различные исходы.

При стрельбе по мишени — попал или не попал в цель; при бросании игрального кубика — выпало 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков.

Множество всевозможных взаимно исключающих исходов эксперимента называется ***пространством элементарных событий***.

Это пространство служит моделью идеализированного опыта в том смысле, что любой мыслимый исход опыта полностью описывается одним и только одним элементарным событием.

Будем обозначать пространство буквой Ω, а элементы его — w_i.

$\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n \ldots\}$

Рассмотрим эксперимент с бросанием двух монет. Опишем все исходы этого эксперимента. Оказывается, это можно сделать различными способами, которые зависят от того, что именно интересует исследователя. Пусть важно знать, выпала ли каждая монета кверху гербом (Г) или решкой (Р). Тогда множество всех исходов будет Ω_1 = {ГГ, ГР , РГ, РР}, где первая буква означает исход бросания первой монеты, а вторая — второй.

Каждый исход эксперимента соответствует в точности одному элементу множества Ω_1.

В другом случае важно знать только число выпавших гербов или решки. Обозначим исход эксперимента парой цифр (а, в), где а — число выпавших гербов, а в — решек. Тогда множество всех исходов эксперимента будет Ω_2 = {(2,0), (1,1), (0,2)}. Каждый исход эксперимента соответствует в точности одному элементу множества Ω_2.

Возможно кого-то интересует вопрос о том, упали ли монеты одинаково, т. е. обе гербом кверху или обе решкой кверху, или различно. Тогда все множество исходов Ω_3 = {О, Р} состоит из двух элементов: О — монеты упали одинаково, Р — упали различно. И здесь каждому исходу эксперимента соответствует в точности один элемент множества Ω_3 .

Итак, каждое из множеств Ω_1, Ω_2, Ω_3 дает список, соответствующий всем возможным исходам эксперимента. Каждое такое множество является пространством элементарных событий.

Теперь рассмотрим событие А — «при бросании двух монет появился хотя бы один герб». Это означает, что появился герб на обеих монетах или только на первой, или только на второй монете.

В пространстве Ω_1 событию А благоприятствуют исходы w_1 = ГГ, w_2 = ГР, w_3= РГ, т. е. если результатом эксперимента явился один из перечисленных исходов w_i, то событие А произошло.

В пространстве Ω_2 благоприятствующими исходами событию А являются w_1= (2,0) и w_2 = (1,1).

В пространстве Ω_3 событие А описать исходом w_1=О или w_2= Р невозможно, так как ни один из них не благоприятствует обязательному появлению события А.

Поэтому, когда говорят о пространстве элементарных событий, то имеют дело с *определенным* пространством, отвечающему указанному эксперименту. Тогда событие можно представить как некоторое подмножество множества Ω.

Построение множества Ω осуществляется на практике, исходя из требования, чтобы интересующие нас результаты данного эксперимента могли быть однозначно описаны на основе построенного множества Ω.

Например:

1. Пусть при бросании игральной кости нас интересует появление определенного числа очков. Выпадение конкретного числа очков i назовем элементарным событием и обозначим w_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Тогда событию A — «появление четного числа очков» благоприятствуют элементарные события $w_2=2$, $w_4=4$ и $w_6 = 6$ или $A = \{w_2, w_4, w_6\}$. A является подмножеством пространства Ω, $A \subset \Omega$.

Событию B — «появление числа очков не больше 4» благоприятствуют элементарные события $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, $B \subset \Omega$.

2. Игральная кость подбрасывается дважды. Пусть нас интересует соотношение числа очков, выпавших при первом и втором подбрасывании. Тогда элементарное событие представим парой чисел (a,b), где a — число очков, выпавших первый раз, b — выпавших второй раз. $\Omega = \{(a,b) : 1 \le a, b \le 6\}$. Тогда событию A — «оба раза выпало число очков, кратное трем» соответствуют исходы: (3,3), (6,3), (3,6), (6,6).

К системе всевозможных подмножеств множества Ω добавим пустое множество и само множество Ω.

Пустому множеству соответствует невозможное событие V, т. к. ни один из исходов эксперимента не влечет появления этого события. Напротив, всё множество Ω определяет достоверное событие U.

Как уже отмечалось, к одному и тому же эксперименту можно построить разные пространства элементарных событий. Будем рассматривать пространства, состоящие из ***равновозможных*** исходов. Иначе, ни одно из его элементарных событий не является объективно более возможным, чем другое.

Например, в примере с подбрасыванием двух монет пространства Ω_1 и Ω_3 состоят из равновозможных исходов. В пространстве Ω_2 исходы (2,0) и (1,1) не являются равновозможными. Для исхода (1,1) возможность появления определяется двумя вариантами: на первой монете выпал герб, на второй — решка; на первой монете выпала решка, на второй — герб. Для исхода (2,0) существует только одна возможность появления — на двух монетах выпал герб.

Введем классическое определение вероятности.

Пусть для некоторого эксперимента введено пространство элементарных событий, определяемое *n* равновозможными исходами. Событию A благоприятствует *m* элементарных событий.

Тогда ***вероятностью*** события А называют отношение числа *m* исходов благоприятных событию *A* к общему числу исходов *n* и обозначают $P(A) = \frac{m}{n}$

Из введенного определения, т. к. $0 \le m \le n$, следует основное свойство вероятностей $0 \le P(A) \le 1$ для любого события, и в частности, для невозможного события $P(V) = 0$ и для достоверного события $P(U) = 1$.

Примеры:

1. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на 5 карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки, и вынутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

Решение:

1 способ. Эксперимент заключается в выборе трех карточек из 5 и расположения их в порядке выбора для получения числа. Поэтому под элементарным исходом можно принять упорядоченную выборку 3 элементов из 5 без возвращения, т. е. размещение.

Число всех исходов тогда равно $n = A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Благоприятствующими исходами являются такие, у которых на конце стоит число 2 или 4. Но так как выбиралось 3 числа, то первые две цифры составляют упорядоченную выборку двух элементов из 4 (если на конце стоит 2, то среди первых двух могут быть любые из чисел 1, 3, 4, 5, а для числа 4 на конце — любые из чисел 1, 3, 2, 5). Число таких выборок, т. е. размещений равно $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$. И по теореме умножений всего благоприятствующих исходов будет

$m = 2 \cdot A_4^2 = 2 \cdot 12 = 24$. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.

2 способ. В задаче интересует, какое получается число — четное или нечетное. Четность числа характеризуется последней цифрой. Поэтому под элементарным исходом можно принять выбор одной карточки из 5, которая будет стоять в конце последовательности, определяемой число. Всего таких исходов $n = 5$. Благоприятствующих m из этих 5 всего два (2 и 4).Следовательно, $P(A) = \frac{2}{5}$.

2. Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шара, наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар белый.

Решение: Элементарным событием эксперимента является выборка одного шара из всей совокупности $7+3=10$ шаров. Всего раз-

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Классическое определение вероятности нельзя применять к опыту с бесконечным числом равновозможных исходов. Для преодоления этого недостатка вводят геометрическое определение вероятности — вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости и т.д.). Пусть, например, на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. В область G «наудачу бросается точка». Это означает, что брошенная точка может попасть в любую точку области G, вероятность попасть в какую-либо часть области G пропорциональна мере этой части (длине, площади, объему) и не зависит от ее расположения и формы.

Отсюда следует определение: ***геометрической вероятностью*** события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события, к мере всей области G. $P(A) = \frac{mesg}{mesG}$.

Примеры

1. Два лица A и B условились встретится в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность того, что встреча состоится, если приход каждого из них в течение часа может произойти в любой момент и моменты прихода независимы.

Решение. Обозначим моменты прихода лица A через x и лица B через y. Будем изображать x и y на плоскости в прямоугольной системе координат, причем единицу масштаба примем за 1 минуту и начало координат будет соответствовать 12 часам. Тогда из условия, что момент прихода каждого может произойти наудачу в любой момент в течение часа получим:

$$0 \le x \le 60\ ,\ 0 \le y \le 60,$$

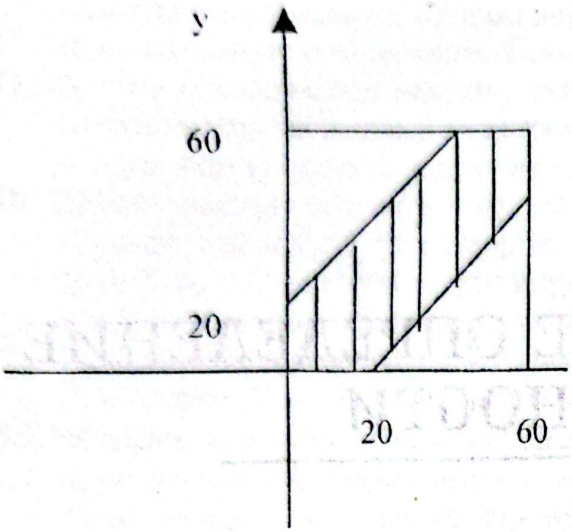

Рис.1

всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со сторонами 60 (область G). Площадь области G равна 60^2. Для того, чтобы встреча состоялась, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \le 20$.

Область g, благоприятствующая встрече, отмечена штриховкой на рисунке 1, площадь которой равна $60^2 - 40^2$.

Отсюда искомая вероятность встречи двух лиц A и B будет равна

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

2. На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии 2a. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r<a$. Какова вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых?

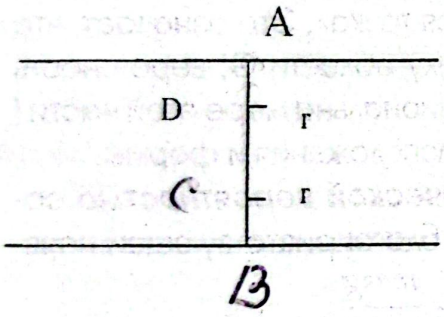

Рис.2

Решение: В задаче достаточно рассматривать не всю плоскость, а только отрезок между двумя соседними параллельными прямыми. Тогда множество всех точек расположения центра монеты представляет отрезок AB (см. рис.2) длиной 2a. Если центр монеты окажется на расстоянии не большем, чем r от любой из данных параллельных прямых, то монета пересечет прямую. Поэтому множество благоприятных исходов представляет отрезок CD, длиной 2a – 2r. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{2a - 2r}{2a} = \frac{a - r}{a}.$$

3. Стержень длины l сломали на три части, выбирая наудачу места разлома. Вероятность точки разлома попасть на какую-нибудь часть стержня зависит только от длины этой части и пропорциональна ей. Найти вероятность того, что из получившихся трех частей можно составить треугольник.

Решение: Обозначим длину первой части через x, длину второй части через y, тогда длина третьей части — $l - (x + y)$. Так как места разлома выбираются наудачу, то все комбинации длин частей удовлетворяют условиям:

$$0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le l - (x + y) \le l.$$

В декартовой системе координат множество точек, координаты которых удовлетворяют указанным неравенствам, образуют треугольник OAB.

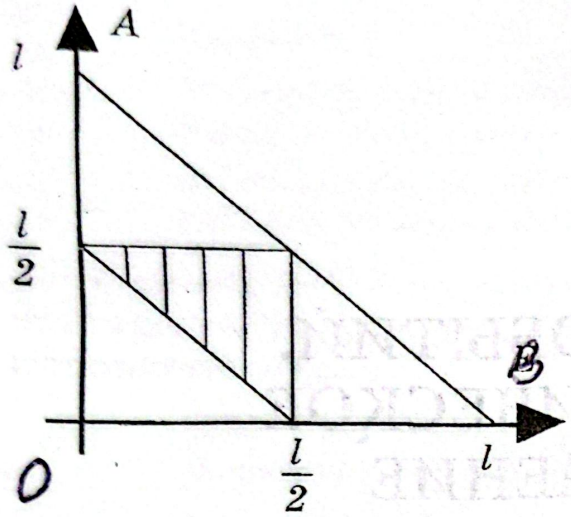

Рис.3

Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}l^2$. Для того, чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, каждый отрезок должен быть меньше суммы двух других. Сумма всех трех отрезков равна l.

Поэтому каждый из отрезков должен быть меньше величины $\frac{l}{2}$: $0 \le x \le \frac{l}{2}$,

$0 \le y \le$, $0 \le l-(x+y) \le \frac{l}{2}$ или $x+y > \frac{l}{2}$.

Множество точек, удовлетворяющих перечисленным свойствам, образует область благоприятствующую нашему событию. На рисунке 3 — это заштрихованный треугольник, площадь которого равна $\frac{1}{8}l^2$.

Искомая вероятность $P(A) = \frac{1}{8}l^2 : \frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{4}$.

Упражнения

1. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Найти вероятность того, что точка находится от центра на расстоянии меньшем r (r < R).
2. На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросается наудачу монета диаметра 2r < a. Найти вероятность того, что монета попадет целиком внутрь одного квадрата.
3. В круг вписан квадрат. Точка наудачу бросается в круг. Найти вероятность того, что она попадет в квадрат.
4. На окружности радиуса r наудачу выбираются две точки и соединяются хордой. Найти вероятность того, что длина хорды превосходит $\sqrt{3}$ r.
5. В единичный квадрат наудачу брошена точка. Чему равна вероятность того, что точка будет удалена от центра квадрата на расстояние меньше, чем $1/3$, если известно, что от каждой из сторон квадрата она удалена больше, чем на $1/6$?
6. Задумываются наугад две правильные дроби. Какова вероятность того, что их сумма не больше 1 и произведение не больше $3/16$?
7. На окружности наудачу выбраны три точки A, B, C. Найти вероятность того, что треугольник ABC будет остроугольным.

АЛГЕБРА СОБЫТИЙ. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

Пусть Ω — пространство элементарных событий. Рассмотрим некоторую систему подмножеств Ω, являющихся событиями. Между событиями системы могут существовать определённые соотношения.

1. События A и B называются ***несовместными***, если в результате испытания появление одного из них исключает появление другого.

Например:

А). Появление «решки» при подбрасывании монет исключает появление «герба», и наоборот. Эти события несовместны.

Б). Появление чётного числа очков при бросании игральной кости исключает появление числа очков равные 3, и наоборот. События несовместны.

2. События A и B называются ***совместными***, если в результате испытания появление одного из них не исключает появления другого.

Например:

А). Два стрелка выстрелили по мишени. Попадание в мишень первым стрелком не исключает попадание в мишень вторым. События совместны.

Б). События A — «наудачу выбранный студент данного факультета является девушкой», и B — «выбранный студент учится на 2 курсе» совместны.

3. Если в результате испытания с появлением события A обязательно появляется и событие B, то говорят, что ***событие A влечёт за собой событие*** B, и обозначается $A \subset B$.

Например:

А). Появление числа очков равное 4 при бросании игральной кости влечёт за собой появление чётного числа очков.

Б). Появление двух «гербов» при подбрасывании двух монет влечёт за собой появление хотя бы одного «герба».

4. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, т. е. оба события или наступают или оба не наступают в результате испытания, то говорят, что события A и B ***равносильны***, и обозначают $A = B$.

Например:

События A — «ровно одно попадание при трёх выстрелах»,

и B — «ровно два промаха при трёх выстрелах» равносильны.

5. Два события A и $\bar{A}$ называются ***противоположными***, если не появление одного из них в результате испытания влечёт появление другого.

Например:

А). A — появление «герба» при подбрасывании монеты, $\bar{A}$ — появление «решки» при подбрасывании монеты.

Б). A — все стрелки попали в цель при стрельбе по мишени,

$\bar{A}$ — хотя бы один стрелок не попал в цель.

События A и $\bar{A}$ всегда несовместимы.

Рассматривая события как подмножества множества Ω, введённые определения можно трактовать следующим образом:

A влечёт за собой B, если элементарные события, представляющие A, принадлежат подмножеству элементарных событий, представляющих событие B. A является частью множества B; $A \subset B$.

События A и B совместны, если среди элементарных событий, представляющих A и B существуют общие события, т. е. $A \cap B \neq \varnothing$.

События несовместны, если множества элементарных событий, представляющие их, не имеют общих элементов, т. е. $A \cap B = \varnothing$.

Событие A состоит из тех элементарных событий пространства Ω, которые не представляют событие A, т. е. $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Над событиями можно выполнять операции.

6. ***Произведением*** нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Если, к примеру, имеется три события A, B и C, то произведение их ABC означает, что произошло и событие A, и событие B, и событие C. Знак умножения заменяет союз «и».

Свойства.

1. $AV=V$

2. $AU=A$

3. Если A и B несовместны, то $AB=V$

4. $A\bar{A}=V$

5. Если $A\subset B$, то $AB=A$

Произведение событий представляют те элементарные события, которые являются общими для множеств, представляющих события A, B и C, т. е. $A\cap B\cap C$.

Например:

А). Для событий A — «первый стрелок попал в цель», и B — «второй стрелок попал в цель» произведение AB — является событие, означающее, что оба стрелка попали в цель.

Б). A — появление чётного числа очков при бросании игральной кости, B — появление числа очков больше 4. AB — число выпавших очков равно 6.

7. *Суммой* нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Если имеются два совместных события A и B, то сумма A+B означает, что наступило событие A или B, или оба события вместе. Если же события несовместны, то A+B означает наступление события A или B. Совместное наступление событий в этом случае невозможно.

Знак сложения заменяет союз «или».

Например:

А). В урне имеются шары красные, белые и чёрные. Событие A — вынут шар белый, событие B — вынут шар чёрный. A+B — вынут шар не красный.

Б). A — появление одного очка при бросании игральной кости, B — появление двух очков. A+B — появление не больше 2 очков при бросании игральной кости.

Сумму событий A и B представляет множество элементарных событий, которое является объединением множеств элементарных событий представляющих A и B, т. е. $A\cup B$.

Свойства:

1. $A+U=U$

2. $A+V=A$

3. $A+\bar{A}=U$

4. Если $A\subset B$, то $A+B=B$

8. События $B_1, B_2, .., B_n$ образуют ***полную группу*** событий, если в результате испытания хотя бы одно из них непременно должно произойти. т. е. $B_1+B_2+...+B_n=U$

Если добавить условие, что любые два из них несовместны, т. е. $B_iB_j = V$, $1 \le i, j \le n$, $i \ne j$, то такую группу называют ***полной группой попарно несовместных*** событий.

Например:

А). Все элементарные события пространства Ω образуют полную группу событий.

Б). События A и $\bar{A}$ так же образуют полную группу.

В). B_0 — ни одного попадания в цель при двух выстрелах. B_1 — одно попадание при двух выстрелах, B_2 — два попадания при двух выстрелах. B_0, B_1, B_2 — образуют полную группу событий.

9. Система S подмножеств Ω называется ***алгеброй событий***, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\Omega \in S$;

б) если $A \in S$ и $B \in S$, то $A+B \in S$, $AB \in S$;

в) если $A \in S$, то $\bar{A} \in S$.

10. Система $\mathfrak{T}$ подмножеств Ω называется ***σ-алгеброй***, если она является алгеброй и, кроме того, выполнено усиленное свойство б)* если $A_i \in \mathfrak{T}$, i=1,2,..., то $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{T}$ и $\prod_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{T}$.

11. Числовая функция P, определенная на σ-алгебре $\mathfrak{T}$, называется ***вероятностью***, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

а) $P(\Omega)=1$, то есть вероятность достоверного события равна единице;

б) $P(A) \ge 0$ для любого $A \in \mathfrak{T}$;

в) если события $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{T}$ попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$.

Совокупность $<\Omega, \mathfrak{T}, P>$ называется ***вероятностным пространством***.

Из введенных аксиом можно получить следующие следствия:

а) $P(V)=0$; б) $0 \le P(A) \le 1$ для любого $A \in \mathfrak{T}$; в) $P(\bar{A})=1-P(A)$.

При определении вероятностей часто приходится представлять сложные события в виде комбинаций более простых событий, применяя операции сложения и умножения.

Пример:

Пусть по мишени производится три выстрела, и рассматриваются следующие события:

A_j — попадание при j-ом выстреле (j=1,2,3)

$\bar{A}_j$ — промах при j-ом выстреле (j=1,2,3). Представить в виде комбинации этих событий следующие события: A — все три попада-