Ecole Supérieure d'Informatique
Sidi Bel Abbes

ANALYSE 4

TD : Fonctions réelles de plusieurs variables

Première partie : Généralités sur les fonctions

Exercice 1

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad ; \quad f_2(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$
$$f_3(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad f_4(x,y) = \sqrt{x\sin y}$$
$$f_5(x,y) = xy\ln(xy) \quad ; \quad f_6(x) = y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)$$
$$f_7(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{x-y} \quad ; \quad f_8(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{xy}$$

Exercice 2

Trouver la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *si elle vérifie :*

$$f(x+y, x-y) = xy + y^2$$

Exercice 3

Donner les lignes (ou surface) de niveau (i.e $f(x) = cte$*) des applications suivantes :*

$$f_1(x,y) = x+y \; ; \quad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$f_3(x,y,z) = x+y+z \; ; \quad f_4(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

Deuxième partie : Limites et continuité

Exercice 4

Soit la fonction $f(x,y,z) = 1 + x + y^2 + z^3$.

1. *En utilisant la définition montrer que :* $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \ell = 1$
2. *Mêmes questions pour la fonction* $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   et $\ell = 0$

Exercice 5

Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$; $(x,y) \neq (0,0)$.

1. *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{y\to 0} f(x,y); \quad \lim_{x\to 0} f(x,y)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right); \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Votre conclusion.

2. *Mêmes questions pour la fonction* $g(x,y) = \dfrac{x^3+y^3+x^2-y^2}{x^2+y^2}$

3. *Mêmes questions pour la fonction* $h(x,y) = \dfrac{xy^2+\sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}$

√**Exercice 6**

Calculer les limites (si elles existent) des fonctions suivantes quand $(x,y) \to (0,0)$:

$$√f_1(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2} \;;\quad f_2(x,y) = \frac{|x-y|}{x^2+y^2} \;;\quad √f_3(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \;;\quad f_4(x,y) = \frac{1+x+y}{x^2-y^2}$$

$$√f_5(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \;;\quad √f_6(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \;;\quad f_7(x,y) = \frac{x\sin(\frac{1}{x})+y}{x+y} \;;\quad f_8(x,y) = \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$$

Exercice 7

Soient les fonctions $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ *et* $g(x,y) = e^{x-y}$

Dire si ces fonctions ont une limite quand le point $M = (x,y)$ *tend vers l'infini.*

Exercice 8

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} \;;\quad \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{(xy)^2} \;;\quad \lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin(xy)}{x} \;;\quad a\in\mathbb{R}$$

√**Exercice 9**

√*Discuter suivant les valeurs de* $n\in\mathbb{N}^*$ *la limite* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^4)^n}$

√*Mêmes questions pour la fonction* $g(x,y) = xy\dfrac{x^3-y^3}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

√**Exercice 10**

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$√f_1(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^3-y^3}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}; (\alpha\in\mathbb{R}) & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$√f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^2)}; & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$√f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3y-xy^3)}{(x^2+y^2)}; & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin x}{x}-1\right)e^{-y}; & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x=0 \end{cases}$$

$$√f_5(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x,y)\neq((0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Exercice 11

Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

1. *Etudier la continuité de f sur les droites passant par* $(0,0)$.
2. *Etudier la continuité de f sur les paraboles* $y = ax^2$; $a \neq 0$
   Votre conclusion.

Exercice 12

Etudier suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la continuité de la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Mêmes questions pour les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^a}{x^2+y^2} \ ; \ (a \in \mathbb{R}) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^a}{(x^2+y^2-xy)^b} \ ; \ (a,b \in \mathbb{R}) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 13

1. *Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x = \sin y\}$.
2. *Soit la fonction* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y \sin x - x \sin y}{\sin x - \sin y} & si \quad (x,y) \notin D \\ 0 & sinon \end{cases}$

   a) *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

   b) *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\pi)} f(x,y)$

   f est-elle continue au point $a = (0,0)$, au point $m = (a,a)$?

Exercice 14

Déterminer le domaine de définition ensuite étudier la continuité des fonctions suivantes :

$f_1(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$

$f_2(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy}{xy})$

$f_3(x,y) = xy \ln y$

$f_4(x,y) = y \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right)$

Exercice 15

Soit la fonction $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2y)}{x^2+y^2}$.

1. *Déterminer le domaine de définition D_f de f*
2. *Etudier la continuité de f dans D_f Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
3. *Peut-on prolonger f par continuité ?*

Devoir sur double feuilles.

Mêmes questions pour la fonction $g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Troisième partie : Différentiabilité

Exercice 16

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes et étudier leur différentiabilité sur leur domaine de définition :

a) $f(x,y) = e^x \sin y$; b) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$; c) $f(x,y) = \dfrac{x}{xr+y^2}$

Exercice 17

Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Etudier la continuité de* f
2. *Calculer* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
3. *Etudier la différentiabilité de* f *au point* $(x,y) \neq (0,0)$ *puis en* $(0,0)$.
4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *sont-elles continues en* $(0,0)$

Exercice 18

Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Préciser le domaine de définition de* f *et étudier la continuité de* f
2. *Montrer que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *existent.*
3. *Etudier la continuité des dérivées partielles premières en* $(0,0)$
4. *Etudier la différentiabilité de* f.

Exercice 19

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2-xy+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Montrer que* f *est continue en* $(0,0)$
2. *Montrer que* f *admet des dérivées partielles premières en* $(0,0)$
3. f *est elle différentiable ?*

Exercice 20

Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Calculer les dérivées partielles premières au point* (x,y)
2. *Montrer que* f *est différentiable dans* $\mathbb{R}^2$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *sont-elles continues en* $(0,0)$

Exercice 21

Soit $f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Calculer* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *au point* $(x,y) \neq (0,0)$.
2. *Etudier la continuité de ces dérivées partielles en* $(0,0)$
3. f *est-elle différentiable en* $(0,0)$ *?*

Exercice 22

Soit la fonction Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$

1. *Etudier la continuité de* f

2. *Déterminer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *en* (x,y).
   f admet-elle des dérivées partielles premières en (0,0) ? Sont-elles continues ?
3. *f est-elle différentiable en (0,0) ?*

Exercice 23

Soit la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^n}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1. *Etudier la différentiabilité de f en* $(x,y) \neq (0,0)$
2. *Discuter suivant les valeurs de n la différentiabilité de f en (0,0) Trouver* df_a *pour* $a = (1,1)$

Quatiène partie : **Différentiabilité bis**

Exercice 24

Déterminer les différentielles des fonctions suivantes en un point $m = (x,y)$

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$; b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; c) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

d) $f(x,y) = \sin^2 x + \cos^2 y$; e) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$; f) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 25

Calculer les différentielles des fonctions suivantes au point $m = (x,y)$

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $m = (2,3)$ b) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$; $m = (1,1)$

c) $f(x,y) = xy^2 + x^2z^2$; $m = (0,1,0)$ d) $f(x,y) = \frac{xy + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $m = (1,2,3)$

Exercice 26

Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *deux fonctions définies par* $u(x,y) = x^2 - y^2$ *et* $v(x,y) = e^{xy}$. *Soit* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable. On pose* $F(x,y) = g(u,v)$.

Exprimer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ *en fonction de g et de ses déivées partielles.*

Exercice 27

Si $G(u,v) = h(x,y)$ *avec G une fonction donnée et* $x = u\sin v$, $y = u\cos v$, *donner les expressions de* $\frac{\partial G}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial G}{\partial v}$

Exercice 28

Soit $u = xy + \frac{y}{x}$ *et soit* $Z = f(u)$ *où f est une fonction dérivable. Calculer*

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(u) \quad et \quad \frac{\partial Z}{\partial y}(u)$$

Exercice 29

Calculer la dérivée des fonctions composées suivantes :

a) $Z = e^{u^2-v^2}$ *avec* $u = \cos(xy)$ *et* $v = 2x + y^2$

b) $Z = u^2v + \cos(uv)$ *avec* $u = xy$ *et* $v = x - y^2$

Exercice 30

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ *et soit* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $g(x,y) = (x+y, x-y)$

1. *Calculer les dérivées partielles de* $f \circ g$ *et sa différentielle*

2. *Calculer les matrices jacobiennes de f et de g en un point (x, y)*
3. *En appliquant théorème de la composition des fonctions déterminer la matrice jacobienne de $f \circ g$*

Exercice 31

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie par $f(x, y, z) = (x + y, xyz)$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(u, v) = (u, uv, v)$

1. *Montrer que f et g sont partout différentiables puis déterminer leurs matrices de leur différentielle par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer la matrice jacobienne de $f \circ g$ de deux manières différentes.*

Exercice 32

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, xy, x - y)$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(u, v, w) = (u, uv)$

1. *Calculer la différentielle de f au point (x,y) et la différentielle de g au point (u,v,w)*
2. *Soit $h = g \circ f$. Calculer la différentielle de h et sa matrice jacobienne en (x,y).*
3. *Montrer qu'il existe un point $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $jac(h)(a, b) = 0$*

Exercice 33

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pose $F(x, y) = f(ax + y) + g(y - ax)$. Montrer que l'on a :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) - a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Exercice 34

Calculer les dérivées partielles suivantes :

1. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)$ *et* $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$ *avec* $u = x^2 + y^2$ *et* $v = xy$
2. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y)$ *et* $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y)$ *avec* $u = xy$ *et* $v = \sin x$

Exercice: Devoir

Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(r,\theta) \longmapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto g(x,y)$

$F(r,\theta) = (g\circ f)(r,\theta)$

1/ calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$?

Sixième partie : **Développements limités**

Exercice 35

Donner les développements limités à l'ordre 2 au voisinage de $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

a) $f(x, y) = x^3 + xy - 2y^2$; *b)* $f(x, y) = e^{2x+3y}$; *c)* $f(x, y) = e^{xy} + (x + y)^2$
d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ *e)* $f(x, y) = (x + 2)^y$ *f)* $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

Exercice 36

1) Donner le développement de Taylor au voisinage de $b = (1, 1)$ de la fonction $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$ considérée comme fonction de classe C^3 sur son domaine .
En déduire les dérivées partielles premières et deuxièmes de f au point b.
2) Donner le développement de Taylor au voisinage de $a = (\pi, \pi)$ de la fonction $f(x, y) = \dfrac{\sin x + \sin y}{x + y}$ considérée comme fonction de classe C^3 sur son domaine

Septième partie : **Extrema libres**

Exercice 37

Donner les points critiques (s'ils existent) des fonctions suivantes puis étudier leur nature :

a) $f(x, y)\sqrt{1 + x^2 - y^2}$; *b)* $f(x, y) = \sin x + \sin y$
c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$; *d)* $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y$
e) $f(x, y)x^3 + y^3 - 3xy$; *f)* $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
g) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$; *h)* $f(x, y) = \dfrac{xy}{(1 + x)(1 + y)(x + y)}$

ANALYSE 4 | TD N°1 : F R à P.V | 14-02-2017

Fonction Vectorielles à plusieurs Variables

Goumeida Ahmed Seyf Eddine G3

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

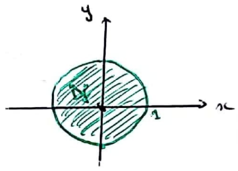
Exercice 1

1] $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

f est définie $\Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 \leqslant 1}$

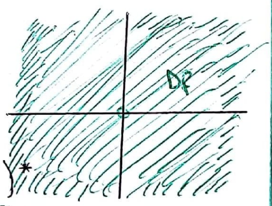


$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2 + y^2 \leq 1 \}$ = le disque Unité fermé

2] $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

f est définie $\Leftrightarrow x^2 + y^2 > 0$

$\Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$

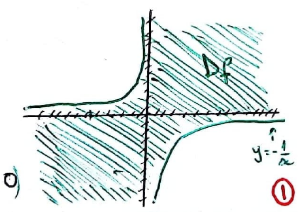


$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (x,y) \neq (0,0) \} = (\mathbb{R}^2)^*$

3] $f(x,y) = \dfrac{\ln(1+xy)}{xy}$

f est définie $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + xy > 0 \\ \wedge \\ xy \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy > -1 \\ (x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \end{cases}$



Etudiant la courbe $\boxed{xy = -1} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$ hyperbole

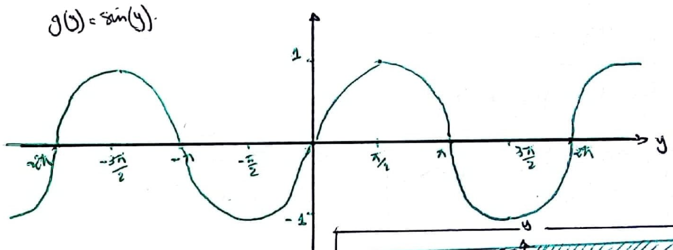
$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus xy > -1, x \neq 0, y \neq 0 \}$

4] $f(x,y) = \sqrt{x \sin y}$

f est définie $\Leftrightarrow x \cdot \sin y \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 , & \forall y \in \mathbb{R} \\ x > 0 , & \sin y \geqslant 0 \\ x < 0 , & \sin y \leqslant 0 \end{cases}$

$g(y) = \sin(y)$

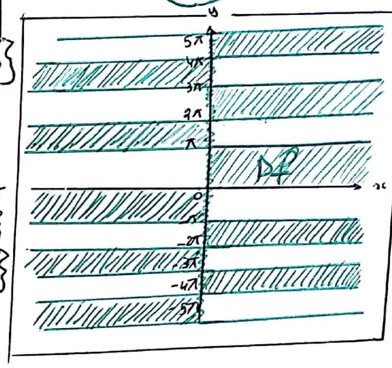


$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x \geqslant 0 \text{ et } \sin y \geqslant 0 \}$

$\cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x \leqslant 0 \text{ et } \sin y \leqslant 0 \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ et } 2k\pi < y < (2k+1)\pi \;,\; k \in \mathbb{Z} \}$

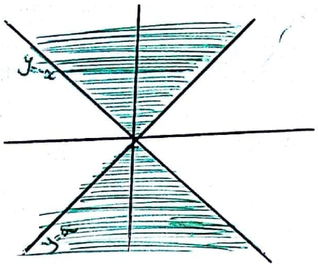
$\cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0 \text{ et } (2k+1)\pi < y < 2k\pi \}$



8] $y^2 - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow (y-x)(y+x) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \text{ et } y+x>0 \\ \text{ou} \\ y-x<0 \text{ et } y+x<0 \end{cases}$



Exercice 2

1] Trouve $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x+y, x-y) = xy + y^2$$

$f(U,V) = ?$

$f(x+y; x-y) = xy + y^2$

$$\begin{cases} U = x+y \\ V = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{U+V}{2} \\ y = \frac{U-V}{2} \end{cases}$$

$$f(U,V) = \frac{U+V}{2} \cdot \frac{U-V}{2} + \left(\frac{U-V}{2}\right)^2$$

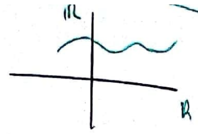
$$= \frac{U^2-V^2}{4} + \frac{U^2+V^2-2UV}{4} = \frac{2U^2-2UV}{4}$$

$$f(U,V) = \frac{U^2-UV}{2}$$

Exercice

\# $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

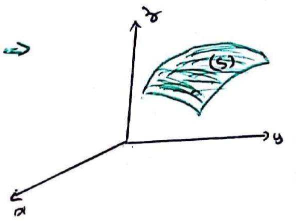
$x \longmapsto y = f(x)$



\# $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$

$\Rightarrow$

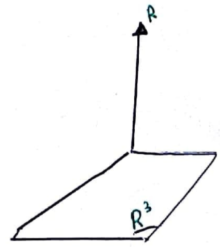


$\boxed{z = f(x,y)}$ courbe (dim 1)

$\boxed{z = C}$ plan (dim 2)

\# $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto t = f(x,y,z)$



le graph de f est une hypersurface : $t = f(x,y,z)$ tracer dans $\mathbb{R}^4$

$\boxed{t = f(x,y,z)}$ surface (dim 2)

$\boxed{t = c}$ hyperplan (dim 3)

2] $f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

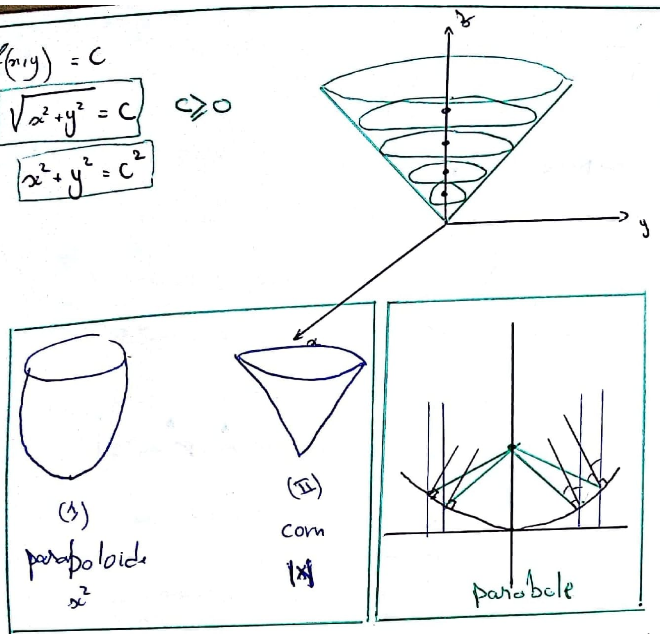
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Ligne : $\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases}$ On fait l'intersection

$\Leftrightarrow f(x,y) = C$

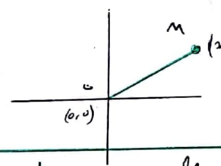
$\Leftrightarrow \boxed{\sqrt{x^2+y^2} = C}$ $\quad C \geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2 = C^2}$



Exercice 6

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



$r = d(O,M)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

distance Euclidienne

$\boxed{\text{la limite } \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ existe} \iff \text{elle est independante du chemin suivi}}$

① $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

si la droite $\boxed{y=0}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} f(x,0) = \dfrac{1}{x} = \mp\infty$ selon $x>0$ ou $x<0$

$\Rightarrow$ la lim $\nexists$

⑤ : $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

- si la droite $\boxed{y=0}$: $\lim f(x,0) = \boxed{1}$
- si la droite $\boxed{x=0}$: $\lim f(0,y) = \boxed{-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \; \nexists$

③ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

si la droite $x=0 \Rightarrow \lim = 0$

si la droite $y=0 \Rightarrow \lim = 1$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \boxed{\nexists}$.

⑥ $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

pour $x=0$, $y=0$, $x=y$ ..., $\lim = 0$

il reste à verifier tout les chemins

on pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2}$

$= \lim\limits_{r\to 0} r\left[\cos^3\theta - \sin^3\theta\right]$ ($\cos^3 - \sin^3$ est Borné) $\forall\theta$

$= 0$

$\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0}$

⑧. $f(x,y) = \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$

- $x=0,\ y=0,\ x=y \ \ldots \Rightarrow \lim = +\infty$

il reste à vérifier les autres chemins

posons : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r|\cos\theta| + r|\sin\theta|}{r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{r}$$

- supposons que $x>0$ et $y>0$ $\Rightarrow \begin{cases} r\cos\theta > 0 \\ r\sin\theta > 0 \end{cases}$

- posons : $g(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$

$[g(\theta)]^2 = 1 + 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

$= 1 + \sin(2\theta) \geqslant 1$

$\Rightarrow g(\theta) \geqslant 1$

$$\lim_{r\to 0} \frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{r} \geqslant \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x,y) = +\infty}$$

Exercice ⑨ :

1) $f(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^4)^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$

On pose : $\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{(r^2\cos^2\theta + r^4\sin^4\theta)^n}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^{2n}[\cos^2\theta + \cancel{r^2}\sin^4\theta]^n}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^{2n}(\cos\theta)^{2n}}$$

$$= \lim_{r\to 0} r^{3-2n}\cos\theta^{1-2n}\sin^2\theta$$

pour $n=1$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim r\frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ $\nexists$ car $\frac{\sin^2(\theta)}{\cos}$ n'est pas bornée

si $n>1$

$\lim \frac{1}{r^{2n-3}} \frac{\sin^2\theta}{(\cos\theta)^{2n-1}}$ $\nexists$ car sous la forme $\frac{0}{0}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ limite n'existe pas

$$g(x,y) = xy\,\frac{x^3-y^3}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}$$

Noté

$$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x^n-x^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots+y^{n-1})$$

$$g(x,y) = xy\,\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}$$

$$= xy\,\frac{(x-y)}{(x^2+xy+y^2)^{\alpha-1}}$$

$x^2+xy+y^2=0 \iff (x,y)=(0,0) \iff r=0$

$Q(x,y) = x^2+xy+y^2$ est une forme quadratique

Sa matrice : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q(x,y)$ est définie positive

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^3[\cos\theta\sin\theta\,\frac{(\cos\theta-\sin\theta)}{[r^2(1+\cos\theta\sin\theta)]^{\alpha-1}}$$

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^{5-2\alpha}\,\frac{\cos\theta.\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)}_{\frac{1}{2}<}^{\alpha-1}}$$

Remarque :

la fraction $\dfrac{\cos\theta.\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta)^{\alpha-1}}$ est bornée.

$\Rightarrow$ pour $\alpha = \frac{5}{2}$:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta\sin(\cos\theta-\sin\theta)}{(1+\frac{1}{2}\sin\theta)^{\frac{3}{2}}}$$ $\nexists$ elle dépend de θ.

$\Rightarrow$ pour $\alpha > \frac{5}{2}$ $\quad 5-2\alpha<0$

$$\lim_{r\to 0} \underbrace{\frac{1}{r^{2\alpha-5}}}_{\to+\infty} \frac{\cos\theta\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}{(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta)^{\alpha-1}}$$ $\nexists$ elle dépend de θ

$\Rightarrow$ pour $\alpha < \frac{5}{2}$: $\quad \Rightarrow 5-2\alpha>0$

$$\lim_{r\to 0} r^{5-2\alpha}\,[\text{bornée}] = 0$$

Exercice 10

- $f(x) = \sqrt{-x^2} \Rightarrow D_f = \{0\} \Rightarrow$ discontinue
- f est continue au pt (x_0,y_0)

ssi : $\begin{cases} \text{1. } f \text{ définie au point } (x_0,y_0) \text{ et sur tout un voisinage de } (x_0,y_0). \\ \text{2. } \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x) = f(x_0,y_0) \end{cases}$

$\boxed{1}$

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^3-y^3}{(x^2+xy+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1) domaine de définition

$D_f = \mathbb{R}^2$

2) la continuité

a) en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

a) en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$:

f est continue en pt $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ car c'est un rapport de 2 fonction continue avec dénominateur $r \neq 0$.

b) au point $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \text{n'existe pas} & \alpha \geq \frac{5}{2} \\ 0 = f(0,0) & \alpha < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$f(x,y)$ est continue au point $(0,0)$ ssi $\alpha < \frac{5}{2}$

Conclusion :

si $\alpha < \frac{5}{2} \Rightarrow f(x,y)$ est continue dans tous les pts $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

si $\alpha \geq \frac{5}{2} \Rightarrow f(x,y)$ est continue en tous les points de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\boxed{2}$ 1) Domaine de définition :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$Df = \mathbb{R}^2$

2) Continuité :

a) en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

f est continue car c'est un rapport de 2 fonctions continues avec dénominateur $r \neq 0$

b) au point $(0,0)$.

pour $x=0$ $\quad \lim = 1$

pour $-x=y$ $\quad \lim = 0$

$\}$ lim dépend du chemin $\Rightarrow \nexists$

$\Rightarrow f$ n'est pas continue.

$\boxed{5}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Domaine de définition :

$Df = \mathbb{R}^2$

2) Continuité :

a) en un point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$:

f est continue car c'est le produit de de fonctions continues

b) au point $(0,0)$: $\quad \sqrt{x^2+y^2} = r$

$$\lim_{r\to 0} \underbrace{r(\cos\theta + \sin\theta)}_{\text{bornée}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{r}\right)}_{\text{bornée}} = \boxed{0}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

$\boxed{3}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y - xy^3)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Domaine de définition :

$Df = \mathbb{R}^2$

2) Continuité :

a) en un point $(x,y) \neq (0,0)$:

f est continue car c'est une rapport ______

b) au point $(x,y) = (0,0)$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\sin\left[r^4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right]}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \underbrace{\frac{\sin\left[r^4\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right]}{r^4\cos\theta\sin\theta(\ )}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\left[r^4\cos\theta\sin\theta(\ )\right]}{r^2}}_{\to 0}$$

$$= \boxed{0}$$

Note

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

f est continue en $(0,0)$.

Exercice 12

1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

1) Domaine de définition

$D_f = \mathbb{R}^2$

2) Continuité

a) $(x,y) \neq (0,0)$: f est continue

b) $(x,y) = (0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^n}{x^2+y^4} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & n=0 \\ \nexists & n=1 \\ \nexists & n=2 \\ 0 & n=3 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & n\geq 3 \end{cases}$$

$n=1$: $x=0 \Rightarrow 0$, $y=0 \Rightarrow \infty$

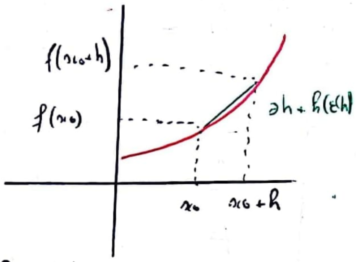
$n=2$: $x=0 \Rightarrow 1$, $y=0 \Rightarrow \infty$

$n=3$: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

pour $\begin{cases} n=0 \Rightarrow \text{~~}f\text{ est discontinue} \\ n=1,2 \Rightarrow f \text{ est discontinue} \\ n\geq 3 \Rightarrow f \text{ est continue} \end{cases}$

Differentiabilité :

Rappel :



① f est différentiable au point x_0 si :

$$f(x_0+h) - f(x_0) = a.h + h.\underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)}$$

② $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto f(x, y)$

f est différentiable au point $(x_0, y_0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) = a h_1 + b h_2 + \|h\| \underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) - a h_1 - b h_2}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} \quad \boxed{b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

③ $\boxed{f \text{ est diff au point } (x_0, y_0) \Rightarrow f \text{ est continue au point } (x_0, y_0)}$

$\boxed{f \text{ est diff en pt } (x_0, y_0)}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ est continue en } (x_0, y_0)}$

$\boxed{\text{Les nombres dérivés partiels } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ existent}}$

$\boxed{f \text{ possède des fonctions dérivées partielles } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ et elles sont continues en } (x_0, y_0)}$

Exercice 18

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① $D_f = \mathbb{R}^2$

② Continuité

a) en un point $(x_0, y_0) \neq (0,0)$

f est continue car elle est un rapport de de f. c

b) $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

f est continue en $(x_0, y_0) = (0,0)$.

③. Les fonctions dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4 + 3x^2y^2 + xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2y^4 + 3x^2y^2 + yx^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{|x|} - 0}{x} = 0$$

② $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$

③. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Alors : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continue en $(0,0)$

Donc : f est deffirentiable

Exercice 23

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x y^n}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

①. La differentiabilité de f en $(x,y) \neq (0,0)$.

) en $(x,y) \neq (0,0)$.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^n(x^2+y^2) - 2x^2 y^n}{(x^2+y^2)^2}$

$= \frac{-x^2 y^n + y^{n+2}}{(x^2+y^2)^2}$ continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{n x y^{n-1}(x^2+y^2) - 2x y^{n+1}}{(x^2+y^2)^2}$

$= \frac{n x^3 y^{n-1} + (n-2) x y^{n+1}}{(x^2+y^2)^2}$ continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$

=> Alors f est deff en tout point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$

b) en $(x_0,y_0) = (0,0)$

n	1	2	$n \geq 3$
$(x,y) \neq (0,0)$	diff	diff	diff
$(x,y) = (0,0)$	non diff car non continue	elle est continue mais non diffe	diff

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(y,0) - f(0,0)}{y-0} = 0$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) h_2}{\|h\|}$$

$$= \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\frac{h_1 h_2^n}{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \qquad \|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$= \lim_{\|h\| \to 0} \frac{h_1 h_2^n}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{cases} h_1 = r\cos\theta \\ h_2 = r\sin\theta \end{cases} \qquad \|h\| = r$$

$$\Rightarrow \lim_{r \to 0} r^{n-2} \cos\theta \sin\theta^n$$

$$\begin{cases} n = 2 & \lim \text{ n'existe pas} \\ n \geq 3 & \lim = 0 \end{cases}$$

Exercice 21

1. continue
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$: Les fonctions dérivées partielles existent et ils sont continue en $(x_0, y_0) = (0,0)$. $\begin{cases} \lim \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \\ \lim \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$

Alors : $\boxed{f \text{ est différentiable en } (0,0)}$

Exercice 19 :

1. $D_f = \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 - xy + y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. f est continue dans $\mathbb{R}^2$ $\qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\lim \frac{r^2}{r} \underbrace{\frac{\cos\theta \sin}{\sqrt{1 - \cos\theta \sin\theta}}}_{\text{bornée}} = 0$$

$\frac{\partial x}{\partial x}$

$f(0$

$\lim_{\|h\| \to 0}$

$f($

$\lim_{\|h\| \to 0}$

$\lim_{r \to 0}$

$\lim$

Donc

Calc

$f.$ $\mathbb{R}$

df e
(x,y)

$d_{(x,y)}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|h\|}$$

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \to 0} \frac{\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2 \cdot \sqrt{1-\cos\theta\sin\theta}} = \frac{\cos\theta \sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta\sin\theta}}$$

$\lim \nexists$ car elle dépend de θ.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas diff en } (0,0)}$

Calcul de la différentielle en un point (x_0, y_0)

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$$

$df_{(x,y)}$ est une forme linéaire

$$d_{(x,y)} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(h_1,h_2) \longrightarrow d_{(x,y)} f(h_1,h_2)$$

$$\boxed{df_{(x,y)}[h_1,h_2] = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot h_2}$$

Notation $\quad d_{(x,y)} f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy$

$$\begin{cases} dx(h_1,h_2) \longrightarrow h_1 \\ dy(h_1,h_2) \longrightarrow h_2 \end{cases}$$ projection.

Exercice 24

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy \qquad m = (x,y)$

$d_m f = (2x - 3y)\,dx + (2y - 3x)\,dy$

Exemple $m = (3,-1)$

$d_{(3,-1)} f[h_1,h_2] = 9\,h_1 - 11\,h_2$

2. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

$$df_{(x,y)} = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot dx + \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$$

$$df : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(h_1,h_2) \longrightarrow df[h_1,h_2]$$

$$J_{ac_{(x,y)}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, , \, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

Exercice 32

- $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y) \longmapsto (x+y,\ xy,\ x-y)$

- $d_{(x,y)} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(h_1, h_2) \longmapsto d_{(x,y)} f\,[h_1, h_2]$ Application linéaire

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ y & , & x \\ 1 & , & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 3 \text{ lignes} \\ 2 \text{ colonnes} \end{cases}$$

$$d_{(x,y)} f\,[h_1, h_2] = \mathrm{Jac}_{(x,y)} f \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 , 1 \\ y , x \\ 1 , -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d_{(x,y)} f\,[h_1, h_2] = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ y h_1 + x h_2 \\ h_1 - h_2 \end{pmatrix}}$$

- $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u, v, w) \longmapsto (u,\ uv,\ w)$

$d_{(u,v,w)} g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(h_1, h_2, h_3) \longmapsto d_{(u,v,w)} g\,[h_1, h_2, h_3]$

$$\mathrm{Jac}_{(u,v,w)}\, g = \begin{pmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 \\ v & , & u & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_{(u,v,w)} g\,[h_1, h_2, h_3] = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ v, u, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} h_1 \\ v h_1 + u h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3, \quad g \circ f$$

$$\mathrm{Jac}_{(x,y)} (g \circ f) = \mathrm{Jac}_{f(x,y)}\, g \cdot \mathrm{Jac}_{(x,y)} f$$

$$= \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ xy, x+y, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ y & , & x \\ 1 & , & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{Jac}_{(x,y)} (g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & , & 1 \\ xy + (y(x+y)) & , & xy + x(x+y) \\ 1 & , & -1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 31:

- $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
  $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x+y, xyz)$
- $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $(u,v) \longmapsto f(u,v) = (u, uv, v)$

① Montrer que f et g sont différentiables:

① $f(x,y,z) = (\underbrace{f_1(x,y,z)}_{x+y}, \underbrace{f_2(x,y,z)}_{xyz})$

f est différentiable ssi $\begin{cases} f_1 \text{ est différentiable} \\ f_2 \text{ "} \end{cases}$

$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f_1(x,y,z) = x+y$

$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f_2(x,y,z) = xyz$

$\boxed{f_1}$ 1er méthode

$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1 & \text{continue} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 & \text{continue} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 & \text{continue} \end{cases} \Rightarrow f_1$ est différentiable

2ème méthode
du moment que f_1 est un polynome Donc f_1 est diff on $\mathbb{R}^3$

$\boxed{f_2}$ 1er méthode
du moment que f_2 est un polynome Donc f_2 est diff sur $\mathbb{R}^3$

2ème méthode

$\begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial x} = yz & \text{continue} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = xz & \text{continue} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = xy & \text{continue} \end{cases} \Rightarrow f_2$ est différentiable

f_2, f_1 sont différentiables $\Rightarrow$ f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$

② $g(u,v) = (u, uv, v)$
On refait le même travail de la même façon
$\Rightarrow$ g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$

② les matrices Jacobiennes

$$Jac_{(x,y,z)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$Jac_{(x,y,z)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$df_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \longmapsto df_{(x,y,z)}[h] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

$dg_{(x,y,z)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \longmapsto dg_{(x,y,z)}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

③ g∘f :

① 1er méthode $Jac_{(u,v)}(f \circ g) = ?$

$(f \circ g)(u,v) = f(g(u,v))$
$= f(u, uv, v) = (u+uv, u^2 v^2)$

$(f \circ g)(u,v) = (u+uv, u^2; v^2)$

Note.

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$Jac(f\circ g) = \begin{pmatrix} 1+\theta , & U \\ 2U\theta^2 , & 2\theta U^2 \end{pmatrix}$$

② $2^{ème}$ méthodes

$$Jac(f\circ g)_{(U,\theta)} =$$

$$Jac(f\circ g)_{(U,\theta)} = Jac(f)_{g(U,\theta)} \cdot Jac(g)_{(U,\theta)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 , & 1 , & 0 \\ U\theta^2 , & U\theta , & U^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 , & 0 \\ \theta , & U \\ 0 , & 1 \end{pmatrix}$$

$$Jac(f\circ g)_{(U,\theta)} = \begin{pmatrix} 1+\theta , & U \\ 2U\theta^2 , & 2U^2\theta \end{pmatrix}$$

$(2\times 2)\equiv(2-3)(3-2)$

A Retenir

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (U(x,y), \theta(x,y))$

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(U,\theta) \longmapsto g(U,\theta)$

$$Jac(g\circ f)_{(x,y)} = \left(\frac{\partial g}{\partial U}(f(x,y)) \;\; \frac{\partial g}{\partial \theta} f(x,y)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} , & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} , & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

posons : $F(x,y) = (g\circ f)(x,y)$ → $L\,2^{ème}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases}$$

Exercice 33

$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$F(x,y) = f(2x+y) + g(y-2x)$$

① Mq $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) - 2^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0$?

Note :

$(x,y) \xrightarrow{h_1} y+2x \xrightarrow{f} f(y+2x)$

$(x,y) \xrightarrow{h_2} y-2x \xrightarrow{g} g(y-2x)$

$(g\circ f)'_x = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2f'(y+2x) - 2g'(y-2x)$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)$

$= 2^2 f''(y+2x) + 2^2 g''(y-2x)$ .... ①

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(y+2x) + g'(y-2x)$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''(y+2x) + g''(y-2x)$ .... ②

de ① et ② on trouve :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Exercice 34

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = (\overset{f_1}{U}, \overset{f_2}{V})$ de class C^2

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(U,V) \longmapsto g(U,V)$

posons : $F(x,y) = (g\circ f)_{(x,y)}$

Note

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (U,V) & \longmapsto & F(x,y) = (g\circ f)_{(x,y)} \end{array}$$

$F = g\circ f$

1) $\begin{cases} U = x^2+y^2 \\ V = xy \end{cases}$

a)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial U}\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial U}\, 2x + \dfrac{\partial g}{\partial V}\, y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial U}\, 2y + \dfrac{\partial g}{\partial V}\, x \end{cases}$$

b)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\cdot\frac{\partial g}{\partial U} + 2x\left[\frac{\partial^2 g}{\partial U^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial U\partial V}\,\frac{\partial V}{\partial x}\right] + y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial U\partial V}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial V^2}\,\frac{\partial V}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\frac{\partial g}{\partial U} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 g}{\partial U\partial V} + 2xy\frac{\partial^2 g}{\partial U\partial V} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial V^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial V^2} + 4xy\frac{\partial^2 g}{\partial U\partial V} + 2\frac{\partial g}{\partial U}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4y\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + x^2\frac{\partial^2 g}{\partial V^2} + 4xy\frac{\partial^2 g}{\partial U\partial V} + 2\frac{\partial g}{\partial U}}$$

Devoir sur la fiche TD3

Exercice 35 (Développements limités)

$f(x,y)$ de classe C^2

On dévelope au voisinage de $(0,0)$

Note

$$\boxed{f(x,y) = f(0,0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).y\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\,x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\,y^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\,xy\right] + o\left(\|(x,y)\|^2\right)}$$

a) $f(x,y) = x^3 + xy - 2y^2$

\# $f(0,0) = 0$

\# $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$

\# $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x,y) = \dfrac{1}{2!}\left[2xy - 4y^2\right] + o\left(\|(x,y)\|^2\right)$

$$\boxed{\Rightarrow f(x,y) = xy - 2y^2 + o\left(\|(x,y)\|^2\right)}$$

b) $f(x,y) = e^{2x+3y}$

posons : $2x + 3y = U$

$f(x,y) =$

- 1^{er} méthode : par la formule
- $2^{ème}$ méthode : e^U : dévelopement usuelle

$$e^U = 1 + U + \frac{U^2}{2} + o(U^2)$$

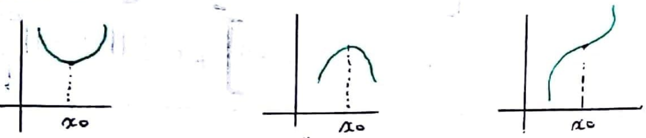
$$\boxed{f(x,y) = e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2 + o(\|x,y\|^2)}$$

Exercice 37 (Extrema libres)

Noté

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$

$f'(x_0) = 0$:



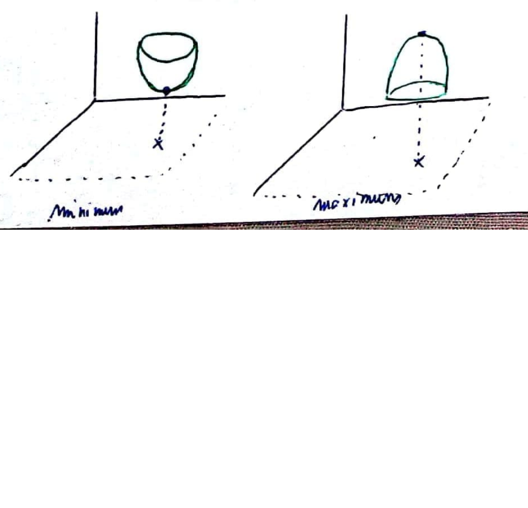
$f''(x_0) > 0$ — minimum

$f''(x_0) < 0$ — maximum

$f''(x_0) = 0$ — point de reflexion

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto f(x,y)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$



31

$$\text{Hess}_{(x_0,y_0)} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}$$

1/ définie positive $(2,0)$ => minimum local

2/ Positive $(1,0)$ => minimum dans une direction

3/ définie négative $(0,2)$ => maximum local

4/ negative $(0,1)$ => maximum dans une direction

5/ change de signe $(1,1)$ => max dans une direction, min dans une direction

- $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

$(-4/3, 1/3)$ point critique

$$\text{Hess}_{(-4/3,1/3)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$2 > 0$
$3 > 0$ => définie positif

$\boxed{\Rightarrow \text{minimum local}}$

32