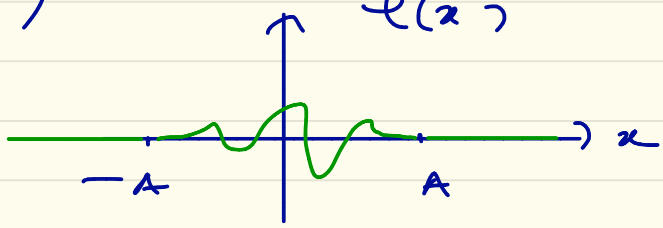
TD 6 - Distributions

Exo 1. Calculer $x.\delta^{(p)}$, $p \geq 1$

. $p=0$: $x.\delta = ?$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ie φ $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact — $(\exists A \geq 0)$: $\varphi \equiv 0$ en dehors de $[-A, A]$)



$$
\begin{aligned}
(x.\delta)(\varphi) &= (x.\delta).\varphi \\
&= \langle x\delta, \varphi \rangle \\
&= \langle f.T, \varphi \rangle \quad \text{avec } T = \delta \\
&= \langle T, f.\varphi \rangle \qquad f : x \longmapsto x \ (\mathcal{C}^\infty)
\end{aligned}
$$

par déf. $\longrightarrow$ $= \langle \delta, f.\varphi \rangle$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} (f.\varphi)(x).\,d\delta(x) \\
&= (f.\varphi)(0) \\
&= \underbrace{f(0)}_{0}.\varphi(0) \\
&= 0 \quad : \quad x.\delta = 0.
\end{aligned}
$$

. $p=1$: $x\delta^{(1)} = x.\delta' = ?$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
&\langle x.\delta', \varphi \rangle \\
&= \langle \delta', x\varphi \rangle \qquad\qquad \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \\
&= -\langle \delta, \underbrace{(x\varphi)'}_{\varphi + x.\varphi'} \rangle
\end{aligned}
$$

$= -(\varphi + x\varphi')(0)$

$= -\varphi(0) - 0\cdot\cancel{\varphi'(0)}$

$= - \langle \delta, \varphi \rangle$

$\Longrightarrow (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$: $\langle x\delta', \varphi \rangle = \langle -\delta, \varphi \rangle$

$\Longrightarrow x\delta' = -\delta$

• $p=2$: $x\cdot\delta'' = ?$ Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$\langle x\cdot\delta'', \varphi \rangle$

$= \langle \delta'', x\cdot\varphi \rangle$

$= \langle (\delta')', x\cdot\varphi \rangle$

$= - \langle \delta', (x\cdot\varphi)' \rangle$

$= -(- \langle \delta, (x\cdot\varphi)'' \rangle)$

$= \langle \delta, (x\cdot\varphi)'' \rangle$

NB. $T^{(k)} = ?$ $\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle$

$= \langle \delta, (\varphi + x\cdot\varphi')' \rangle$

$= \langle \delta, \varphi' + \varphi' + x\cdot\varphi'' \rangle$

$= \langle \delta, 2\varphi' + x\cdot\varphi'' \rangle$

$= 2\varphi'(0) + 0\cdot\varphi''(0)$

$= 2\varphi'(0)$

$= -2\langle \delta', \varphi \rangle$, cf. $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0)$

$\Longrightarrow x\cdot\delta'' = -2\delta'$

Mq $x\cdot\delta^{(p)} = -p\cdot\delta^{(p-1)}$ $(p \geq 1)$

Vrai si $p=1$; par récurrence, supposons que c'est vrai au rang p et montrons le au rang $p+1$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, mq

$$\langle x.\delta^{(p+1)}, \varphi \rangle = \langle -(p+1).\delta^{(p)}, \varphi \rangle$$
$$= -(p+1).(-1)^p.\varphi^{(p)}(0) ;$$

or, $\langle x.\delta^{(p+1)}, \varphi \rangle$

$$= \langle \delta^{(p+1)}, x.\varphi \rangle$$
$$= \langle (\delta^{(p)})', x.\varphi \rangle$$

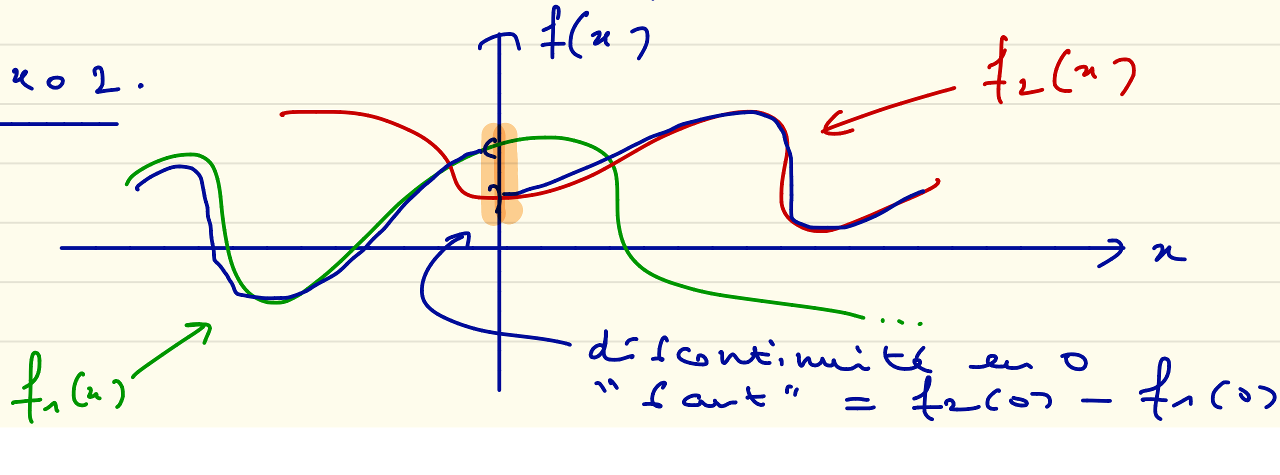
$$= - \langle \delta^{(p)}, (x.\varphi)' \rangle$$
$$= - \langle \delta^{(p)}, \varphi + x.\varphi' \rangle$$
$$= - \langle \delta^{(p)}, \varphi \rangle - \underbrace{\langle \delta^{(p)}, x.\varphi' \rangle}_{\langle \underbrace{x.\delta^{(p)}}_{= -p\,\delta^{(p-1)} \text{ par réc.}}, \varphi' \rangle}$$

$$= - \langle \delta^{(p)}, \varphi \rangle + p \underbrace{\langle \delta^{(p-1)}, \varphi' \rangle}_{- \langle \delta^{(p)}, \varphi \rangle}$$

$$= -(p+1) \langle \delta^{(p)}, \varphi \rangle$$

$$\Longrightarrow \quad x.\delta^{(p+1)} = -(p+1).\delta^{(p)}$$

Exo 2.



2.1. La (classe de) fonction(s) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ puisque, soit K compact (= fermé borné) de $\mathbb{R}$,

$$\int_K |f|\,dx = \int_{\underbrace{K\cap\mathbb{R}_-}_{\text{compact}}} \overbrace{|f|}^{|f_1|}\,dx + \int_{K\cap\mathbb{R}_+} \overbrace{|f|}^{|f_2|}\,dx$$

$$\begin{cases} |f| \overset{(p.p.)}{=} |f_1| \text{ sur } \mathbb{R}_-, \text{ continue (car } \mathcal{C}^1) \\ \text{donc bornée sur } K\cap\mathbb{R}_- \\ |f| \overset{(p.p.)}{=} |f_2| \text{ sur } \mathbb{R}_+, \text{ continue (car } \mathcal{C}^1) \\ \text{donc bornée sur } K\cap\mathbb{R}_+ \end{cases}$$

$\Rightarrow \int_K |f|\,dx < \infty$: cette fonction définit donc la db "régulière"

$$T_f : \varphi \longmapsto \langle T_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f\cdot\varphi\,dx$$

2.2. $\left.\begin{array}{l} f_{|\mathbb{R}^*_-} = f_1 \ \mathcal{C}^1 \\ f_{|\mathbb{R}^*_+} = f_2 \ \mathcal{C}^1 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ dérivable sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$ et

$\left.\begin{array}{l} f' = f_1' \text{ sur } \mathbb{R}^*_- \\ = f_2' \text{ sur } \mathbb{R}^*_+ \end{array}\right\}$ définit la (classe de) fonction(s) f', continue par morceaux

qui définit donc une db régulière (idem 2.1) notée $T_{f'}$ ($\neq (T_f)'$ ...) :

$$T_{f'} : \varphi \longmapsto \langle T_{f'}, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} f'\cdot\varphi\,dx$$

2.3. Calculons $(T_f)'$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$< (T_f)', \varphi >$$

$$= - < T_f, \varphi' >$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} f . \varphi' \, dx$$: f pas C^1 sur $\mathbb{R}$, donc i.p.p. sur $\mathbb{R}$ illicite !

$$= - \int_{\mathbb{R}_-} f . \varphi' \, dx - \int_{\mathbb{R}_+} f . \varphi' \, dx$$

Comme φ est à support compact, $\exists A \geq 0$ tq $\varphi = 0$ en dehors de $[-A, A]$, donc :

$$< (T_f)', \varphi > = \underbrace{- \int_{-A}^{0} f_1 . \varphi' \, dx - \int_0^A f_2 . \varphi' \, dx}_{\text{2 intégrales de Riemann : i.p.p. ok}}$$

$$= - [f_1 . \varphi]_{-A}^{0} + \int_{-A}^{0} f_1' . \varphi \, dx - [f_2 . \varphi]_0^A + \int_0^A f_2' . \varphi \, dx$$

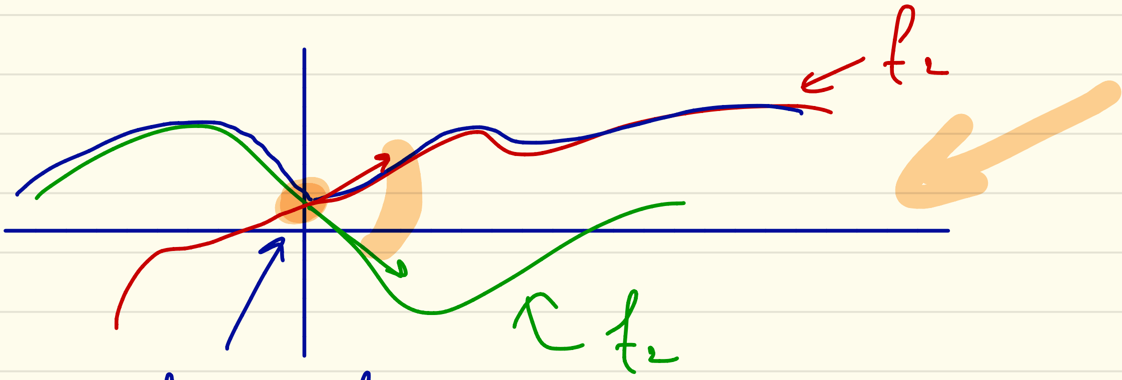
$$= - f_1(0) . \varphi(0) + \cancel{f_1(-A) . \underbrace{\varphi(-A)}_{0}} + \underbrace{\int_{-A}^{0} f_1' . \varphi \, dx}_{\int_{\mathbb{R}_-} f_1' . \varphi \, dx}$$

$$- \cancel{f_2(A) . \underbrace{\varphi(A)}_{0}} + f_2(0) . \varphi(0) + \int_0^A f_2' . \varphi \, dx$$

$$= (f_2(0) - f_1(0)) . \varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} f' . \varphi \, dx$$

$$= (f_2(0) - f_1(0)) \cdot \langle \delta, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

$$\Longrightarrow \boxed{(T_f)' = T_{f'} + (f_2(0) - f_1(0)) . \delta}$$



$f_1(0) = f_2(0)$: saut nul

Dans ce cas, $(T_f)' = T_{f'}$ (f' = la dérivée p.p. de f)

Exo 3. 3.1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose

$$\left(vp \frac{1}{x}\right)(\varphi) := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, dx \; :$$

bien défini ? (cf. existence de lim et $\int$)

Soit $\varepsilon > 0$, mq $\displaystyle\int_{|x| \geq \varepsilon} \left| \frac{\varphi(x)}{x} \right| dx < \infty$;

or, φ à support compact et $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ est

$\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, -\varepsilon[\cup]\varepsilon, \infty[$, donc bornée

et :

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| dx = \underbrace{\int_{-A}^{-\varepsilon} \left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| dx}_{<\infty} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^{A} \left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| dx}_{<\infty}$$

(où A tq $\varphi \equiv 0$ en dehors de $[-A,A]$)

$\Rightarrow \displaystyle\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ bien définie ; on pose

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Clairement ψ est continue en 0, donc sur tout $\mathbb{R}$

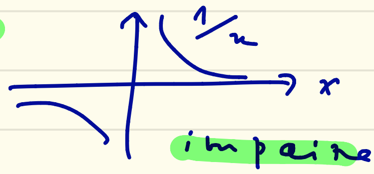
On a :

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\overbrace{\varphi(x)-\varphi(0)}^{\psi(x)\,\cdot\,x}+\varphi(0)}{x}\,dx$$

$$= \int_{-A}^{-\varepsilon} \left(\psi(x) + \frac{\varphi(0)}{x}\right) dx + \int_{\varepsilon}^{A} \left(\psi(x) + \frac{\varphi(0)}{x}\right) dx$$

$$= \underbrace{\int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{A} \psi(x)\,dx}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{-A}^{0}\psi(x)\,dx + \int_{0}^{A}\psi(x)\,dx} + \boxed{\left[\varphi(0).\ln|x|\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\varphi(0).\ln|x|\right]_{\varepsilon}^{A}} = 0$$

$$= \int_{-A}^{A} \psi(x)\,dx.$$



Remarque : la limite existe donc MAIS n'est pas égale à la valeur

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \;\ldots$$ qui en général n'existe pas!

(prendre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\varphi(0) \neq 0 \ldots$)

En effet, $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (de sorte qu'on peut avoir

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\varphi(x)}{x}\right| = +\infty \implies \frac{\varphi}{x} \notin L^1(\mathbb{R})\ !)$$

Soit K un compact contenant 0, par exemple $K = [0,1]$

$$\int_{[0,1]} \left|\frac{1}{x}\right| dx = \infty .$$

Clairement, $\varphi \longmapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$ est linéaire en φ ;

mq cette application est également continue au sens suivant : soit K compact $\subset \mathbb{R}$, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, mq $\exists C > 0$ et $\exists p \in \mathbb{N}$ tq :

$$\left| vp\frac{1}{x}(\varphi) \right| \leq C \cdot \max_{i=0,\ldots,p} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$$

Or, $|vp\frac{1}{x}(\varphi)| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right|$

On a vu que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_K \psi(x)dx$$

(cf. $\operatorname{supp}\varphi\subset K$)

De plus, $|\varphi(x)-\varphi(0)| \underset{AF}{\leq} \sup_{y\in]0,x[}|\varphi'(y)|\cdot|x|$

$\leq \|\varphi'\|_\infty\cdot|x|$

$$\Rightarrow |vp\tfrac{1}{x}(\varphi)| = \left|\int_K\psi(x)dx\right|$$

$$\leq \int_K\underbrace{\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\right|}_{\|\varphi'\|_\infty}dx$$

$$= \underbrace{\mu_L(K)}_{C}\cdot\|\varphi'\|_\infty$$

$p=1$: convient,

de sorte que $vp\frac{1}{x}$ est donc une d-b (d'ordre 1, cf. $p=1$ est le plus petit entier qui convient).

3.2. $\ln|\cdot| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: si K compact,
soit $0 \notin K$ et $\ln|\cdot|$ C^0 sur K, donc intégrable,
soit $0 \in K$ et

$$\int_K |\ln|x||\, dx < \infty \quad \text{car}$$

$$\sqrt{|x|}\cdot \ln|x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tq}$$

$|x| \leq \varepsilon \Rightarrow |\ln|x|| \leq \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$: comme $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ est
$(x \neq 0)$

intégrable sur K, $\ln|\cdot|$ aussi.

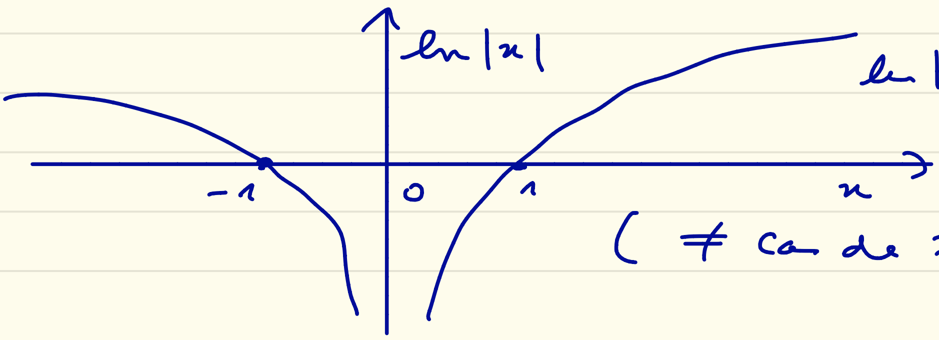
$\ln|\cdot|$ définit donc la db régulière

$$T_{\ln|\cdot|} : \varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \ln|x| \cdot \varphi(x)\, dx .$$

Calculons sa dérivée :

$$\langle (T_{\ln|\cdot|})', \varphi \rangle = - \langle T_{\ln|\cdot|}, \varphi' \rangle$$

(NB : $\ln|\cdot| \notin C^1(\mathbb{R})$!)



$\ln|\cdot|$ pas non plus C^1 par morceaux...

($\neq$ cas de figure de l'exo 2)

$$\Rightarrow \langle (T_{\ln|.|})', \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| . \varphi'(x)\, dx$$

i.p.p. sur $\mathbb{R}$ interdite

$$= -\int_{-A}^{A} \ln|x| . \varphi'(x)\, dx$$

avec A tq $\varphi \equiv 0$ en dehors de $[-A, A]$

$$= - \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{A} \right) (\ln|x| . \varphi'(x))$$

par CV dominée puisque $\ln|x| . \varphi' \in L^1([-A, A])$

Or, $\int_{\varepsilon}^{A} \ln|x| . \varphi'(x)\, dx$

$$= \underbrace{[\ln x . \varphi(x)]_{\varepsilon}^{A}}_{\ln A . \cancel{\varphi(A)} - \ln \varepsilon . \varphi(\varepsilon)} - \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

(avec $\varphi(A) = 0$)

De même $\int_{-A}^{-\varepsilon} \ln|x| . \varphi'(x)\, dx$

$$= \underbrace{[\ln|x| . \varphi]_{-A}^{-\varepsilon}}_{\ln \varepsilon . \varphi(-\varepsilon) - \ln A . \cancel{\varphi(-A)}} - \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

(avec $\varphi(-A) = 0$)

$$\Rightarrow \langle (T_{\ln|.|})', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \ln \varepsilon . (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) \right]$$

Comme φ est dérivable en 0,

$$\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) + (\varphi(0) - \varphi(-\varepsilon))$$

$$= 2\cdot\varepsilon\varphi'(0) + \underbrace{\varepsilon\cdot\underbrace{\alpha(\varepsilon)}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0}}_{o(\varepsilon)}$$

on a :

$$\ln\varepsilon\cdot(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))$$

$$= \ln\varepsilon\,(2\varepsilon\varphi'(0) + \varepsilon\cdot\alpha(\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\Longrightarrow \langle (T_{\ln|.|})', \varphi\rangle = \underbrace{\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx}_{\langle vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle}.$$

3.3. Calculons $x.vp\frac{1}{x}$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle x.vp\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \langle vp\frac{1}{x}, x.\varphi\rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \cancel{x}.\frac{\varphi(x)}{\cancel{x}}\,dx$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$ par cv dominée puisque $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$

$$= \int 1.\varphi(x)\,dx = \langle T_1, \varphi\rangle$$

$$\Rightarrow x.vp\frac{1}{x} = T_1 \quad (= \text{"}1\text{"}).$$

PNS (http://caillau.perso.math.cnrs.fr/logo-pns.png)

MAM3 - MI2

Correction TD6 (groupe 1)

Exercice 1

Soit p un entier naturel, $p \geq 1$. Déterminer $x\delta^{(p)}$.

Corrigé

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
Pour $p = 1$:
$\langle x\delta', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \delta', x\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ car $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Par définition de la dérivée au sens des distributions,

$$\begin{aligned}\langle x\delta', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\langle \delta, (x\varphi)'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle \delta, x\varphi' + \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -0 \times \varphi'(0) - \varphi(0) = -\varphi(0)\\ &= -\langle \delta, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\end{aligned}$$

et ce, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Donc on a $x\delta' = -\delta$.
Pour p=2:

$$\begin{aligned}\langle x\delta'', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle \delta'', x\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle \delta', x\varphi' + \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle x\delta'', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \delta'', x\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= \langle \delta, x\varphi'' + 2\varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 2\varphi'(0) = \langle 2\delta, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle -2\delta', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\end{aligned}$$

Finalement, $x\delta'' = -2\delta'$.
On va montrer par récurrence que pour $p \geq 1$, $x\delta^{(p)} = -p\delta^{(p-1)}$. L'intitialisation a déjà été faite. On suppose donc que la propriété est vraie pour p et on va le montrer pour $p+1$.

$$\begin{aligned}\langle x\delta^{(p+1)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle \delta^{(p+1)}, x\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle \delta^{(p)}, x\varphi' + \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle \delta^{(p)}, x\varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= -\langle x\delta^{(p)}, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle p\delta^{(p-1)}, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= -\langle p\delta^{(p)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle (p+1)\delta^{(p)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\end{aligned}$$

Et finalement $x\delta^{(p+1)} = -(p+1)\delta^{(p)}$, d'où la récurrence.

Autre possibilité : faire une récurrence pour trouver que $(x\varphi)^{(p)} = x\varphi^{(p)} + p\varphi^{(p-1)}$ et faire attention aux signes dans les passages de dérivées de droite à gauche et de gauche à droite.

Exercice 2

Soient f_1 et f_2 des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soit f la fonction définie par $f(x) = f_1(x)$ si $x < 0$, $f(x) = f_2(x)$ si $x > 0$ (la valeur $f(0)$ étant arbitraire).

Question 2.1

Montrer que f appartient à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ et définit une distribution régulière notée $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Correction

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc elle est intégrable sur tout compact (c'est-à-dire, dans $\mathbf{R}$, sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}$).
$\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ est l'ensemble des fonctions qui sont intégrables sur tout compact de $\mathbf{R}$. Donc $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$.
Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, il existe une distribution naturellement associée (qu'on dit être régulière) $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$,
$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^0 f_1(x)\varphi(x)dx + \int_0^\infty f_2(x)\varphi(x)dx.$
Attention : on n'a le droit d'écrire une distribution testée contre une fonction-test sous forme intégrale QUE si on a montré avant qu'elle était associée à une fonction $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$!!!

Question 2.2

Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et montrer que sa dérivée définit également une distribution régulière notée $T_{f'} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Correction

f est égale à $f_1 \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*_-$, et égale à $f_2 \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^*_+$. Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et sa dérivée est $f'(x) = f_1'(x)$ si $x < 0$ et $f'(x) = f_2'(x)$ si $x > 0$.
Montrons que f' est dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$: f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc f_1' et f_2' sont continues, et donc f' est continue par morceaux (possible discontinuité en 0). Donc $f' \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$.
Par conséquent, il existe une distribution régulière $T_{f'}$ associée.
$\langle T_{f'}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^0 f_1'(x)\varphi(x)dx + \int_0^\infty f_2'(x)\varphi(x)dx.$

Question 2.3

Montrer la "formule de saut"

$$(T_f)' = T_{f'} + (f_2(0) - f_1(0))\delta.$$

Correction

On teste contre une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$:

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle T_f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^0 f_1(x)\varphi'(x)dx - \int_0^\infty f_2(x)\varphi'(x)dx$$

Maintenant, sur chaque intervalle $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$, les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc on peut faire une intégration par parties:

$$\begin{aligned}\langle (T_f)', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} =& \int_{-\infty}^0 f_1'(x)\varphi(x)dx - [f_1(x)\varphi(x)]_{-\infty}^0 \\ &+ \int_0^\infty f_2'(x)\varphi(x)dx - [f_2(x)\varphi(x)]_0^\infty \\ =&\langle T_{f'}, \varphi\rangle + (f_2(0) - f_1(0))\varphi(0) = \langle T_{f'} + (f_2(0) - f_1(0))\delta, \varphi\rangle\end{aligned}$$

car φ est à support compact, donc $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$. Cela est vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.
Finalement, on a $(T_f)' = T_{f'} + (f_2(0) - f_1(0))\delta$.

Exercice 3

On pose, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$\mathrm{vp}_{1/x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Question 3.1

Montrer qu'on définit ainsi une distribution sur $\mathbf{R}$, appelée "valeur principale de $1/x$".

Correction

Remarque préliminaire: $x \mapsto 1/x$ n'est pas $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R})$ (problème d'intégration en 0). Par contre, elle est $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^*)$. On ne peut pas définir de distribution régulière associée à $1/x$.

Montrons que $\mathrm{vp}_{1/x}$ est bien une distribution: il faut montrer que c'est une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, et la propriété de continuité.

Pour la linéarité, c'est clair par linéarité de l'intégrale.

La propriété de continuité est la suivante: pour tout compact K de $\mathbf{R}$, il existe $C_K > 0$ et $p \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbf{R})$,

$$|\mathrm{vp}_{1/x}(\varphi)| \leq C_K \sup_{x\in K,\, k\leq p} |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, elle est en particulier dérivable en 0, et donc pour tout $x \in [-1,1]$, il existe $\theta(x) \in [-1,1]$ tel que
$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(\theta(x))x$.
Pour $\varepsilon < 1$,

$$|\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx| \leq \int_{|x|\geq 1} |\varphi(x)| dx + \left| \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(\theta(x)) \right) dx \right|$$

$\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{\varphi(0)}{x} dx = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(0)}{x} dx = 0$ par imparité de $x \mapsto 1/x$.

$$\left| \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| \leq \int_{|x|\geq 1} |\varphi(x)| dx + \left| \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \varphi'(\theta(x)) dx \right| \leq |K| \|\varphi\|_{L^\infty} + 2\|\varphi'\|_{L^\infty}.$$

Donc on a bien montré la propriété de continuité.

Question 3.2

Montrer que la fonction $\ln|x|$ définit une distribution régulière sur $\mathbf{R}$, et vérifier que $T'_{\ln|x|} = \mathrm{vp}_{1/x}$.

Correction

La fonction $x \mapsto \ln|x|$ est L^1_{loc} car elle est continue sur $\mathbf{R}^*$ et intégrable en 0 (car une primitive est $x(\ln|x| - 1)$ qui a comme limite 0 en 0).
Donc on peut définir la distribution régulière associée.

Question 3.3

Déterminer $x \cdot \mathrm{vp}_{1/x}$.