Exam CC no. 2

Durée 1H30. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

▷ **Exercice 1** (4 points)**.** Sur l'espace

$$\ell^2 = \{X = (x_n)_n \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

muni de son produit scalaire

$$(X|Y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n,$$

on définit $G = \{X = (x_n)_n \in \ell^2 \mid 2x_0 - x_2 = 0\}$.

1.1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel fermé de ℓ^2.

► La partie est un sous-espace vectoriel fermé comme orthogonal de $\{X_0\}$ où

$$X_0 = (2, 0, -1, 0, 0, \dots)$$

appartient à ℓ^2 puisque c'est une suite presque nulle.

Soit $k \geq 3$ fixé, et soit $X_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, 0, \dots) \in \ell^2$.

1.2. Déterminer le projeté orthogonal de X_k sur G.

► Le projeté $\overline{X_k}$ est caractérisé par les deux relations $X_k - \overline{X_k} \in G^\perp = \overline{\text{Vect}(\{X_0\})} = \text{Vect}(\{X_0\})$ (double orthogonal, de dimension finie donc fermé) et $\overline{X} \perp X_0$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $X_k - \overline{X_k} = \lambda X_0$, que l'on détermine en écrivant $(\overline{X_k}|X_0) = 0$. D'où, en utilisant $(X_k|X_0) = 1$ et $\|X_0\|^2 = 5$, $\lambda = 1/5$ et

$$\overline{X}_k = (\underbrace{3/5, 1, 6/5, 1, \dots, 1}_{k \text{ termes}}, 0, \dots).$$

1.3. En déduire la distance de X_k à G.

► La distance vaut $\|X - \overline{X}\| = 1/\sqrt{5}$.

▷ **Exercice 2** (6 points)**.** Sur $\mathrm{L}^2([0,1])$ muni de son produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

on note D la droite vectorielle engendrée par $f_0 : t \mapsto \sqrt{t}$, $D = \mathrm{Vect}\{f_0\}$.

2.1. Montrer que D est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{L}^2([0,1])$.

► La partie est un sous-espace vectoriel de dimension finie, donc fermé.

2.2. Soit $f \in \mathrm{L}^2([0,1])$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = t$. Déterminer le projeté orthogonal de f sur D.

► La fonction f est continue donc bornée sur le compact $[0,1]$, et appartient à $\mathrm{L}^2([0,1])$. Le projeté $\overline{f}$ est caractérisé par les deux relations $f - \overline{f} \in D^{\perp}$ et $\overline{f} \in \mathrm{Vect}\{f_0\}$. On en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\overline{f} = \lambda f_0$, que l'on détermine en écrivant $(f - \overline{f}|f_0) = 0$. D'où, en utilisant $(f|f_0) = 2/5$ et $\|f_0\|^2 = 1/2$, $\lambda = 4/5$ et

$$\overline{f} = 4\sqrt{t}/5.$$

2.3. Déduire de la question précédente la distance de f à la droite D.

► La distance vaut $\|f - \overline{f}\| = \sqrt{3}/15$.

2.4. Orthonormaliser la famille $\{\sqrt{t}, t\}$.

► D'après les calculs précédents, une orthonormalisation possible (Gram-Schmidt) est

$$\{\sqrt{2t}, \sqrt{3}(5t - 4\sqrt{t})\}.$$

▷ **Exercice 3** (4 points)**.** Résoudre le problème d'optimisation

$$\begin{array}{l} \min \int_{-1}^{1} |1 - at - be^t|^2\,\mathrm{d}t \\ (a,b) \in \mathbf{R}^2 \end{array}$$

► On calcule le projeté orthogonal de 1 sur le sous-espace vectoriel fermé (car de dimension au plus 2) engendré par t et e^t dans $\mathrm{L}^2([-1,1])$ avec la matrice de Gram associée (*cf.* TD 4, Exo 4), ce qui conduit au système linéaire

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 2/e \\ 2/e & (e^2-1/e^2)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e-1/e \end{bmatrix}.$$

On en déduit

$$a = -6(e^2-1)/(e^4-13),\ b = 2e(e^2-1)/(e^4-13).$$

▷ **Exercice 4** (6 points)**.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, définie par $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi]$ et prolongée à tout $\mathbf{R}$ par 2π-périodicité.

4.1. Donner l'expression de la série de Fourier de f sur la base hilbertienne des polynômes trigonométriques.

► La fonction est paire, donc $b_n = 0$, $n \geq 1$, et

$$a_0 = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}}, \quad a_{2p-1} = -\frac{4}{(2p-1)^2\sqrt{\pi}}, \quad a_{2p} = 0, \quad p \geq 1.$$

4.2. En déduire la somme de la série

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

► On applique Dirichlet (la fonction est $\mathscr{C}^1$ par morceaux) en $t = 0$ en lequel la fonction est continue d'où

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4.3. En déduire également la somme de la série

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

► On applique Parseval, sachant que $\|f\|^2 = 2\pi^3/3$, d'où

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$