TD-3

- $\ell^p := \left\{ (x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|^p}_{\geq 0} < \infty \right\}$

$p \in [1, +\infty[$

- $\ell^\infty = \left\{ (x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_k |x_k| < \infty \right\}$ cad $(\exists M \geq 0)(\forall k \in \mathbb{N}) : x_k \leq M$.

ex 1

ℓ^p espace vectoriel comme sous espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ ds $\mathbb{R}$.

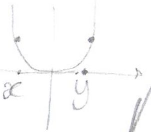
$$\left(\text{cf } (x_k)_k \equiv x : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ k \longmapsto x(k) = x_k \end{array} \right)$$

puisque

- $(x_k)_k \in \ell^p$. $\quad \sum_k |\lambda x_k|^p = \underbrace{|\lambda|^p \underbrace{\sum_k |x_k|^p}_{<\infty}}_{<\infty} \Rightarrow \lambda (x_k)_k \in \ell^p$.

- $(x_k)_k$ et $(y_k)_y \in \ell^p$ $\quad \left| \dfrac{x_k + y_k}{2} \right|^p \leq \dfrac{1}{2} \left(|x_k|^p + |y_k|^p \right)$

$t \longmapsto |t|^p$ convexe $|t|^p$



(. multiplicat° scalaire
. stable par +
. non vide

$\Rightarrow |x_k + y_k|^p \leq 2^{p-1} \left(|x_k|^p + |y_k|^p \right)$

$\Rightarrow \sum_k |x_k + y_k|^p \leq 2^{p-1} \left(\underbrace{\sum_k |x_k|^p}_{<\infty} + \underbrace{\sum_k |y_k|^p}_{<\infty} \right) < \infty$

$$\| (x_k)_k \|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

i) <u>def positive</u> $\left(\sum_k \underbrace{|x_k|^p}_{\geq 0} \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \Rightarrow$ positivité.

et $\sum_k \underbrace{|x_k|^p}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k| = 0$

$\Rightarrow (x_k)_k = (0)_k = 0$.

ii) <u>homogénéité positive</u> :

$$\| \lambda (x_k)_k \|_p = \left(\sum_k |\lambda x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \underbrace{\left(|\lambda|^p \right)^{1/p}}_{|\lambda|} \underbrace{\left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}}_{\| (x_k)_k \|_p}.$$

iii) <u>inegalité triangulaire</u>

$$\ell^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d) \quad , \quad \mu_d(\underset{A \subset \mathbb{N}}{A}) = \text{card}(A)$$

Nb d'éléments

$f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{N}} |f(k)|^p d\mu_d(k)}_{\sum_{k=0}^{\infty} |f(x)|^p} < \infty$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

. Soit $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ avec $\mathcal{B}$ tribu sur X. $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesure sur $\mathcal{B}$.

. Soient f & $g \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. mq Minkowski

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

or $\int_X |f+g|^p d\mu = \int_X \underbrace{|f+g|}_{\leq |f|+|g|} |f+g|^{p-1} d\mu$ → $p>1$, evident sinon

$$\leq \int_X \underbrace{|f|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} d\mu + \int_X \underbrace{|g|}_{\in L^p} \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} d\mu$$

Rappel : inégalité de Hölder

$f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow f \cdot g \in L^1$ et $\boxed{\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q}$

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/q}.$$

ici, $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$ so

$$\underbrace{\int_X |f+g|^p d\mu}_{\|f+g\|_q^p} \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) + \underbrace{\|f+g\|_{q=\frac{p}{p-1}}^{p-1}}_{\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p}{p-1}} = \|f+g\|_p^{p-1}}$$

$\Rightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ en divisant par $\|f+g\|_p^{p-1}$. si $\|f+g\|_p \neq 0$ (évident sinon)

. ℓ^∞ : e.v. comme s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ puisque

. $(x_k)_k \in \ell^\infty$, $\sup_k |\lambda x_k| = |\lambda| \underbrace{\sup_k |x_k|}_{<\infty} < \infty$

. $(x_k)_k$ et $(y_k)_k \in \ell^\infty$

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$, $|x_{k_0} + y_{k_0}| \leq \left.\underbrace{|x_{k_0}|}_{\leq \sup_k |x_k|} + \underbrace{|y_{k_0}|}_{\leq \sup |y_k|}\right\} < \infty$ (iii)

$\Rightarrow (x_k + y_k)_k \in \ell^\infty$ et $\|(x_k+y_k)_k\|_\infty \leqslant \|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty$

i) def. positive $\quad \sup_k \underbrace{|x_k|}_{\geqslant 0} \geqslant 0$ et $\sup_k |x_k| = 0 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})\ |x_k| = 0$

$$\Rightarrow (x_k)_k = (0)_k = 0_{\ell^\infty}.$$

ii) homogénéité positive : $\sup_k |\lambda x_k| = \lambda \sup_k |x_k|$.

iii) see ii)

ex 2

$1 \leqslant p < q < \infty$. Mq $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

Soit $(x_k)_k \in \ell^p \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Leftrightarrow \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{K} |x_k|^p}_{S_K}\Big)_{K\in\mathbb{N}}$ CV ds $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (S_k)_k$ est de Cauchy.

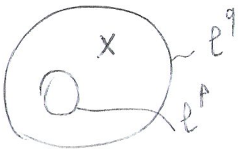
$\Rightarrow \underbrace{|S_{k+1} - S_k|}_{|x_{k+1}|^p} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $|x_k| \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, ie

$.(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant K) : |x_k| \leqslant 1$

$$\Rightarrow |x_k|^q \leqslant |x_k|^p \quad (q > p)$$

donc $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q = \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} |x_k|^q}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} |x_k|^q}_{\leqslant \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty}|x_k|^p}_{<\infty}} \Big) < \infty$ so $(x_k)_k \in \ell^q$.

Rq l'inclusion est stricte



$q > p \Rightarrow \dfrac{q}{p} > 1$. $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} < \infty$ si $\alpha > 1$

ie $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(1+k)^{1/p}} < \infty$ ie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)^q < \infty$: $\left(\dfrac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)_k \in \ell^q \notin \ell^p$

. $1 \leqslant p$ $(q = \infty)$: mq $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$ si $(x_k)_k \in \ell^p$.

$(|x_k|)_k \longrightarrow 0$ donc $(x_k)_k$ est bornée.

cf ci-avant

Rq : l'inclusion est stricte cf : $(x_k)_k = (1)_k \in \ell^\infty (!)$
$\notin \ell^p \left(\text{cf } \sum_{k=0}^{\infty} |1|^p = \infty\right)$

Rq : $1 \leq p < q \leq \infty$ piège classique

$$L^p(x, B, \mu) \underset{\neq}{\supset} L^q(X, B, \mu) \text{ si } \mu(X) < \infty \qquad (\mu_d(\mathbb{N}) = \infty !)$$

$\downarrow$

$$L^1(,) \supset L^2(,) \supset L^\infty(,) .$$

ex 3 Mq $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach, $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^1 (démo pr $p=1$, same pr $p \geq 1$)

$$X_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{N}} \quad , \quad \sum_k |x_{n,k}| < \infty .$$

ℓ^1

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \underbrace{\|X_p - X_q\|_1}_{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}|} \leq \varepsilon .$$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon . \quad (1)$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

cela veut dire $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy ds $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ complet. elle CV. on note sa lim $\bar{x}_k$.

① Construct° du candidat à être limite : on pose $\bar{X} := (\bar{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

② Appartenance de $\bar{X}$ à ℓ^1 :

(1) $\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \underset{\substack{\downarrow q \to +\infty \\ \bar{x}_k}}{x_{q,k}}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)(\forall k \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) \; \sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon \quad (2)$

$\Rightarrow (\exists N_1 \in \mathbb{N}) : \sum_{k=0}^{\infty} |x_{N_1,k} - \bar{x}_k| \leq 1 < \infty .$

$\varepsilon = 1$

$\Rightarrow X_{N_1} - \bar{X} \in \ell^1$

$\Rightarrow \bar{X} = -\underbrace{(X_{N_1} - \bar{X})}_{\in \ell^1} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^1} \Big\} \in \ell^1$

③ CV de $(x_n)_n$ vers $\bar{X}$.

$(2) \Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p\geq N) : \|X_p - \bar{X}\|_{\cancel{q}} \leq \varepsilon$ ie $(X_p)_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \bar{X}$ $\square$

Mq $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Banach, soit $(X_n)_n \in (\ell^\infty)^{\mathbb{N}}$ de Cauchy, mq ça CV.

① construction limite.

$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p,q\geq N)$ $\underbrace{\|X_p - X_q\|_\infty}_{\sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}|} \leq \varepsilon$

$\sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p,q\geq N)(\forall k\in\mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$ (3)

$\Rightarrow (\forall k\in\mathbb{N})\underbrace{(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p,q\geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$

$(x_{n,k})_n$ est de Cauchy sur $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet, donc CV.

$\exists \bar{X}_k$ tq $(X_{n,k}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{X}_k$.

On pose $\bar{X} := (\bar{x}_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

② Appartenance de $\bar{X}$ à ℓ^∞.

$\underset{q\to+\infty}{(3)} \Rightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p\geq N)\underbrace{(\forall k\in\mathbb{N}) : |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon}_{\sup_k |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon}$. (4)

$(\varepsilon=1)$ $(\exists N_1\in\mathbb{N})$ $\sup_k |x_{N_1,k} - \bar{x}_k| \leq 1 < \infty$

$\Rightarrow X_{N_1} - \bar{X} \in \ell^\infty$

$\Rightarrow \bar{X} = -\underbrace{(X_{N_1} - \bar{X})}_{\in \ell^\infty} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^\infty} \} \in \ell^\infty$ (e.v)

③ CV de $(X_n)_n$ vers $\bar{X}$.

$(4) : (\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p\geq N) : \|X_p - \bar{X}\|_\infty \leq \varepsilon$

ie $(X_p)_p \xrightarrow[p\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} \bar{X}$ $\square$

Rq : la mm démo mq l'ensemble des applis bornées de E ds $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ est un Banach.

(lié à la complétude de $\mathcal{C}^0(B_f(t_0,\eta), B_f(X_0,\varepsilon))$ au TD 2)

fin ex2

$X \leqslant p < q < \infty$

Soit $(x_k)_k \in \ell^p (\subset \ell^q)$.

$\|(x_k)_k\|_p \leqslant 1$;

$\Rightarrow \sum_k |x_k|^p \leqslant 1 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \ |x_k|^p \leqslant 1$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \ |x_k|^q \leqslant |x_k|^p$

$\Rightarrow \sum_k |x_k|^q \leqslant \sum_k |x_k|^p \leqslant 1$.

Soit $(x_k)_k \in \ell^p$ (une suite quelconque) on a $\left\| \frac{(x_k)_k}{\|(x_k)_k\|_p} \right\|_q \leqslant 1$

$(x_k)_k \neq (0)_k$ (res évident sinon)

$\Rightarrow \|(x_k)_k\|_q \leqslant \|(x_k)_k\|_p$.