TD_2

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et soit $(t_0, x_0) \in \Omega$ une condition initiale.
On appelle solution un couple (I, x) où : . I intervalle ouvert $\ni t_0$
. $x : I \to \mathbb{R}$ dérivable

tq $\begin{cases} \dot{x}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = x'(t) = f(t, x(t)) & t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

ex 1 $(E, \|\cdot\|)$ complet.

th du pt fixe : $f : E \to E$ contractante (f Lipshitzienne de cste de Lipshitz < 1)
$(\exists k < 1)(\forall (x,y) \in E^2) : \|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|$
alors, $(\exists! \bar{x} \in E)$ tq $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Soit $g : E \to E$, $(E, \|\cdot\|)$ evn complet. $g^p = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{p \text{ fois}}$ contractante.

Unicité si $\bar{x}$ pt fixe de g alors $\bar{x}$ pt fixe de g^p.
En effet, $g(\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow g(g(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x} \ldots\ldots g^p(x) = (g \circ \cdots g)(\bar{x}) = \bar{x}$
So si g a 2 pts fixes différents, g^p aussi. Ça contradirait le th du pt fixe qui s'applique à g^p (contractе).

existence : g^p contractante $\overset{\text{th du pt fixe}}{\Rightarrow} (\exists! \bar{x} \in E)$ tq $g^p(\bar{x}) = \bar{x}$.
Alors $g(g^p(\bar{x})) = g(\bar{x})$.
$= g^{p+1}(\bar{x}) = g^p(g(\bar{x}))$.

$\Rightarrow g(\bar{x})$ point fixe de g^p.
$\Rightarrow g(\bar{x}) = \bar{x}$ par unicité du point fixe de $g^p \Rightarrow \bar{x}$ pt fixe de g.

ex 2

1) $(I, x) \leqslant (J, y)$.
$\Leftrightarrow I \subset J$ et $y_{|I} = x$ (y "prolonge" x)
Axiome au choix (lemme de Zorn, admis)
↳ $\exists$ sol (I, x) maximale (une sol qu'on ne peut pas prolonger).

2) $\exists k \geq 0$ et $\exists \eta > 0$, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(\forall (t, x, y) \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$,

$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x - y|$.

$\eta \cdot \sup |f| \leq \infty$

$\underbrace{C \cdot [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \times B_f(x_0, \varepsilon)}_{\leq \infty}$

3) idée $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$

$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$

$\Rightarrow x = \varphi(x)$ avec $\varphi : x \mapsto \varphi(x)$

$t \mapsto \varphi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$.

On def $\varphi : E := C^0([t_0 - \eta, t_0 + \eta], B_f(x_0, \varepsilon)) \longrightarrow E$

Soit $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, soit $x \in E$,

$\underbrace{|\varphi(x)(t) - x_0|}_{\leq \varepsilon ?} \underset{(t \geq t_0)}{\leq} \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, x(s))|}_{\leq \sup_C f} ds \leq \eta \sup_C |f| \leq \varepsilon$

On note $\underset{x \in E}{\|x\|_\infty} = \max_{t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]} |x(t)|$

$\Rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ complet.

Il suffit de mq $\varphi : E \to E$ est une contraction

. Soient $x, y \in E$, $t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$

$|\varphi(x)(t) - \varphi(y)(t)| \underset{(t \geq t_0)}{\leq} \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s, x(s)) - f(s, y(s))|}_{\leq k|x(s) - y(s)|} ds$

$\leq \int_{t_0}^{t} k\|x - y\|_\infty ds \leq k\eta \|x - y\|_\infty \Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_\infty \leq k\eta \|x - y\|_\infty$

< 1, quitte à $\searrow \eta$

th du pt fixe $\Rightarrow \exists ! \bar{x} \in E$ de φ $\Rightarrow (I :=]t_0 - \eta, t_0 + \eta[, \bar{x}_{|I})$ est une sol

4) (I, x) maximale signifie que $(\delta, y) \geq (I, x) \Rightarrow (\delta, y) = (I, x)$

Supposons que (I, x) et (δ, y) soient 2 sol maximales.

$$A := \{ t \in I \cap J \mid x(t) = y(t) \}$$

. $t_0 \in A$ (cf $x(t_0) = x_0 = y(t_0)$) $\Rightarrow A \neq \emptyset$.

. $A = \underbrace{(x - y)^{-1}}_{C^0} \underbrace{(\{0\})}_{\text{fermé}}$ fermé

. Soit $t_1 \in A$. on prend comme nouvelle condition initiale (t_1, x_1) $(x_1 = x(t_1) = y(t_1))$ le mm raisonnement qu'au 3) mq il $\exists$ $\eta' > 0$ et une solution (unique) $(]t_1 - \eta', t_1 + \eta'[, z)$.

Par unicité, $x = y = z$ sur $]t_1 - \eta', t_1 + \eta'[$.

$\Rightarrow$ A ouvert et fermé dans $I \cap J \subset \underbrace{I \cap J}_{\text{intervalle ouvert}}$ et soit φ, soit $I \cap J$

$\Rightarrow A = I \cap J$. On peut so definir $w : I \cup J \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \begin{cases} x(t) \text{ si } t \in I \\ y(t) \text{ si } t \in J \end{cases}$$

(Bien def car $x = y$ sur $I \cap J$)

$$(I \cup J, w) \geq (I, x) \overset{\text{maximalité}}{\Longrightarrow} (I \cup J, w) = (I, x)$$

$$(\text{———}) \geq (J, y) \Rightarrow (I \cup J, w) = (J, y).$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(I, x) = (J, y)}$$

5) $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\quad f(t, x) = x$ (Lipshitz)

$\begin{cases} I = \mathbb{R} \\ x(t) = x_0 e^{t - t_0} \end{cases}$ (sol max)

. si $x \neq 0$, $\dfrac{\dot{x}}{x} = 1$ $\left(\dfrac{dx/dt}{x} = 1 \right)$ $\Rightarrow \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}}{x} = t - t_0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt.$

$\Rightarrow \Big[\ln x(s) \Big]_{t_0}^{t} = t - t_0 \Rightarrow \ln(t) = \ln(t_0) + t - t_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{t - t_0}.$

par unicité, il passe par chaque point $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ une solution maximale et une suite, on a donc une partition de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(\Omega..)$ par les graphes des sol maximales.

$$* \begin{cases} \dot{x}(t) = x^2(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad f(t,x) = x^2 \quad (\text{AF} \Rightarrow \text{loi Lipshitz}).$$

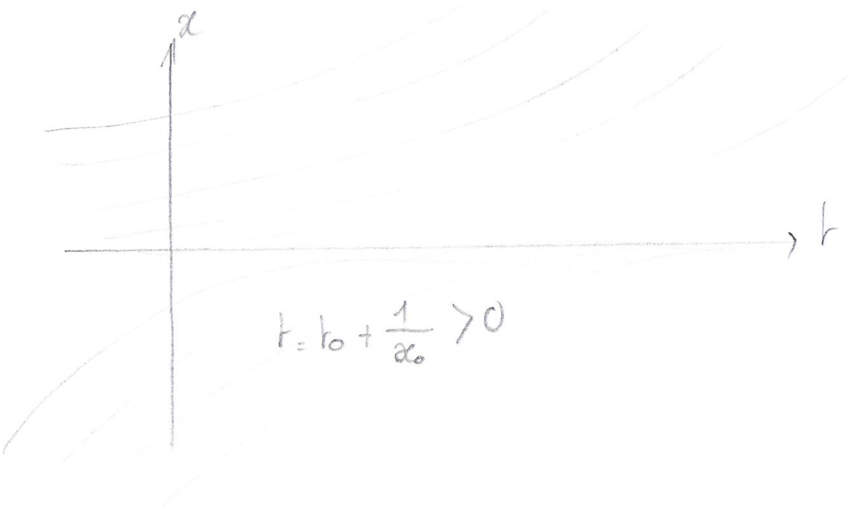
. si $x_0 = 0$, $x(t) = 0$, $t \in I = \mathbb{R}$ la sol maximale.

. si $x_0 \neq 0$, $x(t) \neq 0$ (so de signe cst par continuité)

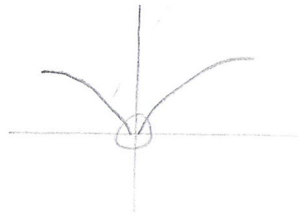
$$\Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x^2(t)} = 1 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{x^2(s)}\, ds = t - t_0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{x(s)} \right]_{t_0}^{t} = t - t_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x(t)} = t - t_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - (t - t_0)} = \frac{x_0}{\underbrace{(1 - (t - t_0)x_0)}_{=0 \text{ pour } \boxed{t = t_0 + \frac{1}{x_0}}}}$$



$$* \begin{cases} \dot{x}(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad : \quad f(t,x) = \sqrt{|x|}$$



$x_1(t) = 0$, $t \in I_1 = \mathbb{R}$.

$$\left(x > 0, \ \frac{\dot{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \left[\sqrt{x} \right]_{t_0 = 0}^{t} = \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow X = \frac{t^2}{4}.$$

$x_2(t) = \frac{1}{4} t|t|$ (C^1) $\quad t \in I_2 = \mathbb{R} \Rightarrow f$ n'est pas loc Lipshitz