Maths de l'ingénieur 2

I. Calcul différentiel

1. Dérivée

— dérivabilité locale et propriétés (unicité, continuité), dérivabilité globale
— exemples fondamentaux : applications linéaires, affines, bilinéaires, quadratiques
— dérivation des fonctions composées
— applications composantes

2. Dérivation partielle

— applications et dérivées partielles en un point, matrice jacobienne
— équivalence en classe $\mathscr{C}^1$ et contrexemple
— théorème de Schwarz
— gradient, hessien, laplacien
— exemple fondamental : forme quadratique

3. Accroissements finis

— théorème des accroissements finis (première et deuxième forme)
— théorème des fonctions implicites
— algorithme de Newton

II. Espaces vectoriels normés

— norme, boules ouvertes et fermées
— parties ouvertes, fermées, adhérence
— suites, caractérisation séquentielle des parties fermées
— continuité, caractérisation séquentielle, cas des applications linéaires
— suites de Cauchy, parties complètes, théorème du point fixe
— parties compactes, cas de la dimension finie, image continue d'un compact

III. Espaces de Hilbert

1. Produit scalaire

— produit scalaire, théorème de Cauchy-Schwarz, norme associée (Minkowski)
— espace préhilbertien, hilbertien, euclidien
— exemples : $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{M}(m, n, \mathbf{R})$, $\mathrm{L}^2(X, \mathscr{B}, \mu)$, $\ell^2(\mathbf{N})$

2. Théorème de la projection

— distance d'un point à une partie, projeté, partie convexe
— identité du parallélogramme, théorème de la projection
— caractère 1-lipschitzien de la projection

3. Orthogonalité

— orthogonal d'une partie, propriétés de base
— supplémentaire orthogonal d'un sev fermé
— double orthogonal
— base hilbertienne, Parseval

4. Séries de Fourier trigonométriques

— base hilbertienne trigonométrique sur $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbf{R})$ (et $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbf{C})$)
— résultats de convergence complémentaires, cas $\mathrm{H}^1_{2\pi}$ et $\mathscr{C}^1$ par morceaux (Dirichlet)
— transformée de Fourier discrète, FFT
— extension au cas multidimensionnel

IV. Formulation faible de pb aux limites

1. Distributions

— motivation : solutions généralisées de $xy'(x) = 0$
— ensemble $\mathscr{D}(\Omega)$ (dimension un), exemple canonique de fonction plate
— ensemble $\mathscr{D}'(\Omega)$, notion d'ordre d'une distribution
— exemples : (i) fonctions localement intégrable, (ii) valeur principale, (iii) mesures
— dérivation d'une distribution (motiver par le cas $\mathscr{C}^1$), exemples (Heaviside, Dirac)
— résolution de $T' = 0$
— produit par une fonction $\mathscr{C}^\infty$, règle de Leibniz associée
— résolution de $xT = 0$
— convergence (faible) dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, continuité de la dérivation

2. Formulation faible en dimension un

— motivation : notion de solution faible pour $-u'' + u = f$ sur $]0,1[$, conditions de Neumann
— définition de $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ et propriétés (caractère hilbertien, injection $\mathscr{C}^0([0,1])$, intégration par parties)
— théorème de Riesz (complément du III)
— démarche variationnelle :
  A. Toute solution forte est solution faible
  B. Existence et unicité de solution faible
  C. Régularité de la solution faible
  D. Retour à une solution forte

Organisation et intervenants

— 12 séances (1 séance = 1H CM + 2H TD)
— J.-B. Caillau (`jean-baptiste.caillau@univ-cotedazur.fr`)
— L. Monasse (`laurent.monasse@inria.fr`)

Évaluation

— 2 EX CC (coeff. 1 tous les deux)
— 1 EX terminal (coeff. 2)

Bibliographie

1. Brézis, H. *Analyse fonctionnelle, théorie & applications.* Dunod, 2005.
2. Exo7. *Cours de mathématiques de première année.* `exo7.emath.fr`
3. Gasquet, C. ; Witomski, P. *Analyse de Fourier et applications.* Dunod, 2000.
4. Liret, F. ; Martinais, D. *Analyse : cours de première année.* Dunod, 2003.
5. Monasse, D. *Cours de Mathématiques pour les classes MP et MP*.* Vuibert, 1997.
6. Schwartz, L. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann, 1966.
7. Zuily, C. *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.* Dunod, 2002.

En ligne sous `caillau.perso.math.cnrs.fr/mi2`