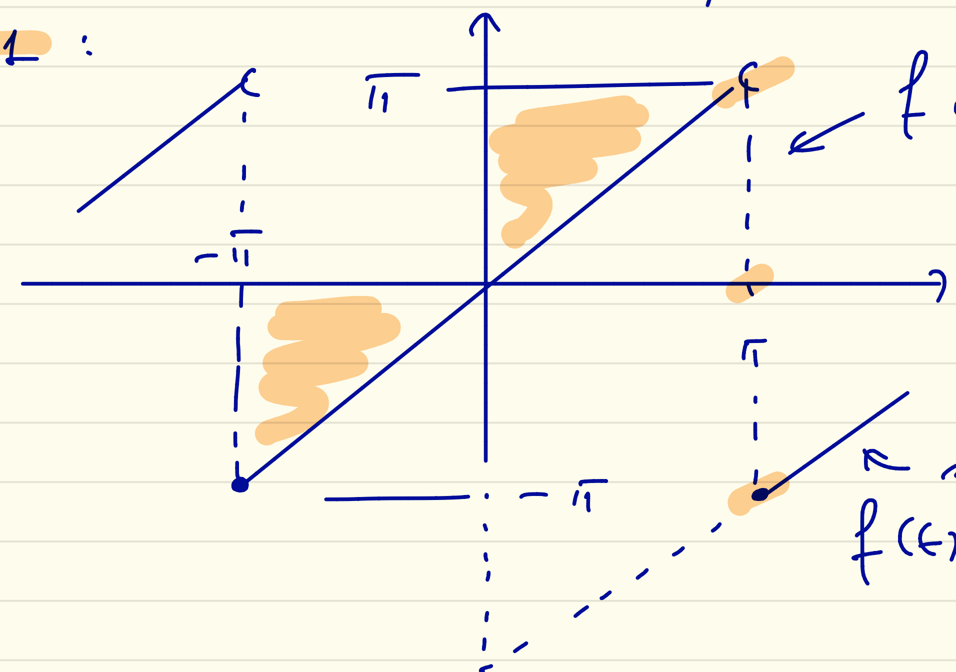
TD1 - Séries de Fourier

Exo 1. Fonction ζ de Riemann.

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$,
$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$, $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$ ...

1.1. $\zeta(2)$: pour calculer $\zeta(2p)$, on calcule la série de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique tq $f_{|[-\pi,\pi[}(t) = t^p$;

$p = 1$:



f impaire

si $t \in [\pi, 3\pi[$, $f(t) = t - 2\pi$

$f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, ie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(t)|^2}_{\leq \pi^2} dt < \infty$$

puisque f se prolonge continûment sur $[-\pi, \pi]$, elle est donc bornée sur ce compact, donc de carré intégrable.

On peut donc calculer sa série de Fourier en la décomposant sur la b. h.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, n \geq 1 \right\}$$

<u>Rappel</u> : $(f|g)_{L^2_{2\pi}(\mathbb{R})} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t)\, dt$

$$\Longrightarrow \quad f \underset{\text{CV } L^2_{2\pi}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (f|e_n) \cdot e_n \qquad (\text{cf. } \S$$

i.e : $\left\| f - \sum_{n=0}^{N} (f|e_n) \cdot e_n \right\|_2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$,

et Parseval :
$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(f|e_n)|^2 .$$

Ici,
$$f = \underbrace{\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}_{a_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\left(f \middle| \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right)}^{a_n} \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + \underbrace{\left(f \middle| \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right)}_{b_n} \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}$$

i.e :
$$\int \left| f(t) - \left(\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=0}^{N} \left(f \middle| \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + \left(f \middle| \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right) \right|^2 dt \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

f étant impaire, $a_0 = a_n = 0$, $\forall n \geqslant 1$, cf.

$$a_0 = \left(f \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)}_{\text{imp.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{p.}}}_{\text{impair}} dt = 0$$

(idem pour a_n, $n \geqslant 1$)

$$b_n = \left(f \,\middle|\, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t) \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}}_{\text{pair}} dt$$

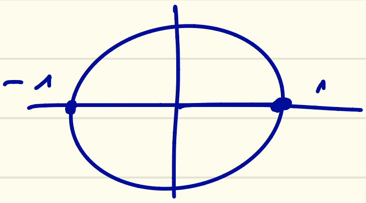
$$= 2 \int_0^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt$$

et $\begin{cases} f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{cv dans } L^2_{2\pi}) \\ \|f\|_2^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \end{cases}$

$$b_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} t \cdot \sin nt \, dt \quad \text{ipp}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[t \cdot \frac{-\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{n} dt$$

$$= \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \Big[-\pi \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} \Big] + \frac{2}{\sqrt{\pi}\, n^2} \underbrace{\cancel{[\sin nt]_0^{\pi}}}_{0}$$



$$\Longrightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2\sqrt{\pi}}{n}$$

Parseval : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\pi}{n^2}$

$$\| \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = 2 \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\Rightarrow \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

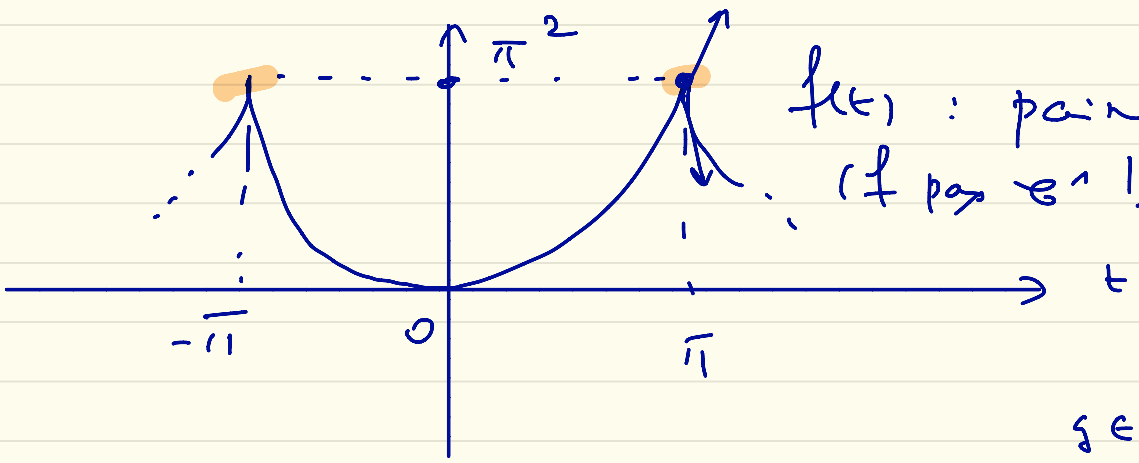
<u>Remarque :</u> f $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc

$$S_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Si $t \neq (2k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), f continue en t, donc $S_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(t)$;

Si $t = (2k+1)\pi$, $S_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

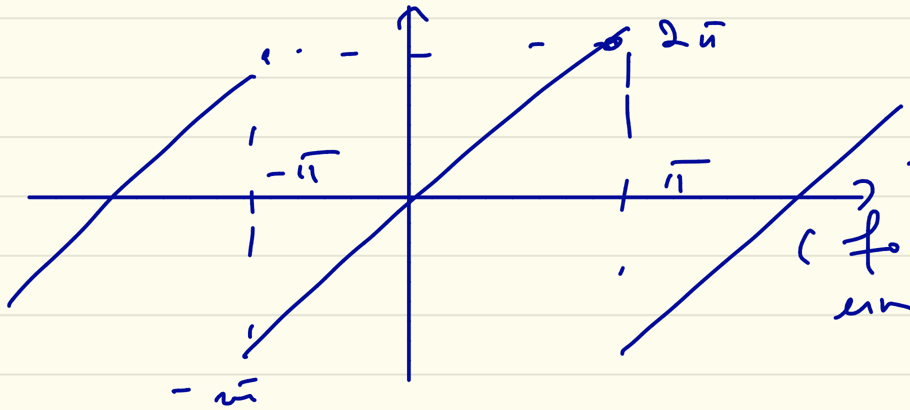
1.2. $\zeta(4)$: $p = 2$, $f(t) = t^2$ si $t \in [-\pi, \pi]$, prolongée par 2π — périodicité sur $\mathbb{R}$:



$f(t)$: paire (f pas $\mathcal{C}^1$!)

<u>Remarque :</u> $f \in H^1_{2\pi}$ car $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$, $g \in L^2_{2\pi}$

où g est la fonction tq $g(t) = 2t$ si $t \in [-\pi, \pi[$ (et prolongée à $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité) :



(fonction du 1.1 à un coeff. 2 près)

Ici, f paire $\Rightarrow b_n = 0$, $n \geq 1$;

$$a_0 = \left(f \,\Big|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} f(t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\sqrt{2\pi}}$$

$$a_n = \left(f \,\Big|\, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

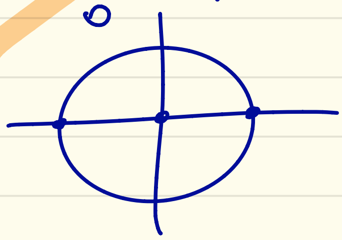
$$= 2 \int_0^{\pi} f(t) \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \underbrace{t^2 \cdot \cos nt}_{\text{i.p.p.}}\,dt$$

$$\int_0^{\pi} \underset{\leftarrow u}{t^2} \cdot \underset{\leftarrow v'}{\cos nt}\, dt$$

$$= \cancel{\left[t^2 \cdot \frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}}_{\,0} - \int_0^{\pi} 2t \cdot \frac{\sin nt}{n} = -\frac{2}{n} \underbrace{\int_0^{\pi} t \cdot \sin nt}_{\frac{-\pi(-1)^n}{n}}$$

(cf. 1.1)



$\sin n\pi = 0$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{\pi(-1)^n}{n}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{n^2} \cdot (-1)^n \quad \text{et } b_n = 0$$

<u>Parseval :</u> $\|f\|_2^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \left(= \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)$

$$\|$$

$$2\int_0^{\pi} (t^2)^2\, dt = \frac{2t^5}{5}\Big]_0^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^5}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16 \cdot \pi}{n^4}$$

$$\Rightarrow \zeta(4) = \frac{\pi^5}{16 \cdot \pi}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{4}{45}\right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

<u>Remarque</u> : $(S_N)_N$ cvu vers $f \Rightarrow$ cvs en tout t :

$(\forall t \in \mathbb{R})$: $S_N(t) \xrightarrow[N \to \infty]{} f(t)$;

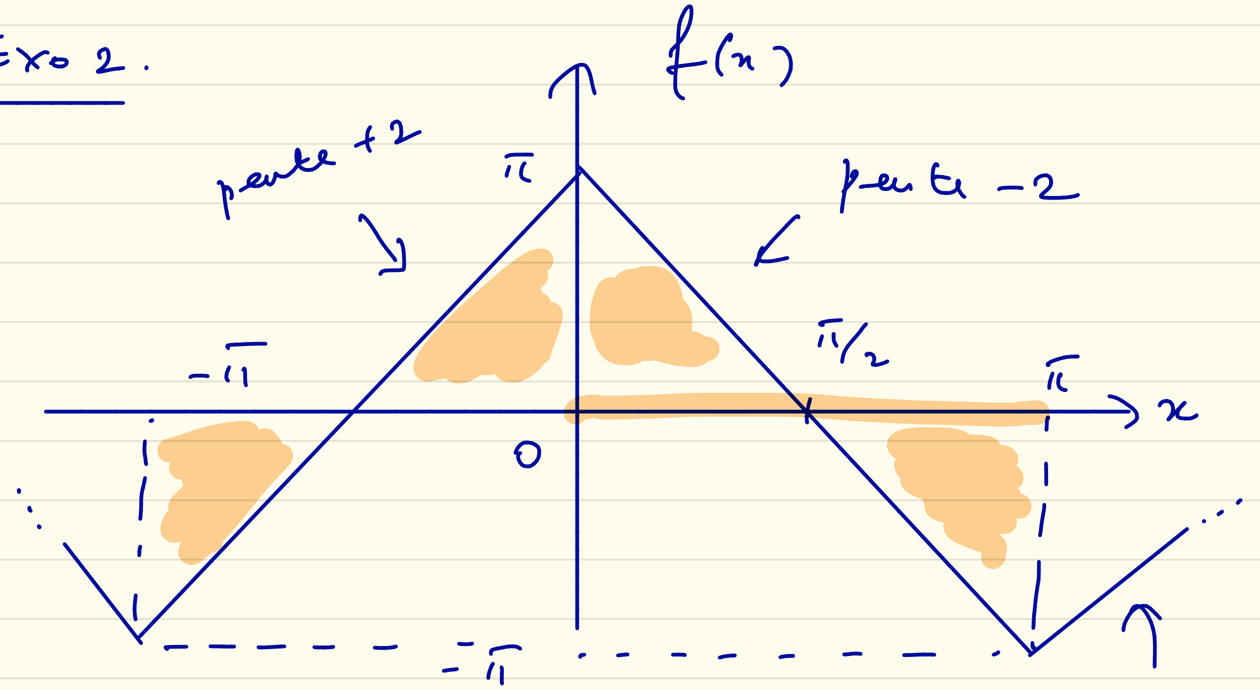
en particulier, $f(0) = 0 = a_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\overset{1}{\overline{\cos nt}}}{\sqrt{\pi}}\Big|_{t=0}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\pi}} = -a_0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 \cancel{\sqrt{\pi}}}{n^2} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{\pi}}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^3}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \left(|\cdot| \leq \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\right)$$

Exo 2.



$t \in [\pi, 2\pi[$,

$f(x) = 2x - 3\pi$

$f\ \mathcal{C}^0 \Rightarrow f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$

2.1. f paire $\Rightarrow b_n = 0$

et $f \underset{\uparrow}{=} a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$

CV $L^2_{2\pi}$

$$a_0 = \left(f \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

$$= 2 \int_0^{\pi} f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cdot 1\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\pi x - x^2\right]_0^{\pi}$$

$$= 0$$

$$a_n = \left(f \,\middle|\, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \underbrace{(\pi - 2x) \cos nx \cdot dx}_{ipp}$$

$$\int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cdot \cos nx\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \overset{u}{\overbrace{-2x}} \cdot \overset{v'}{\overbrace{\cos nx}}\, dx$$

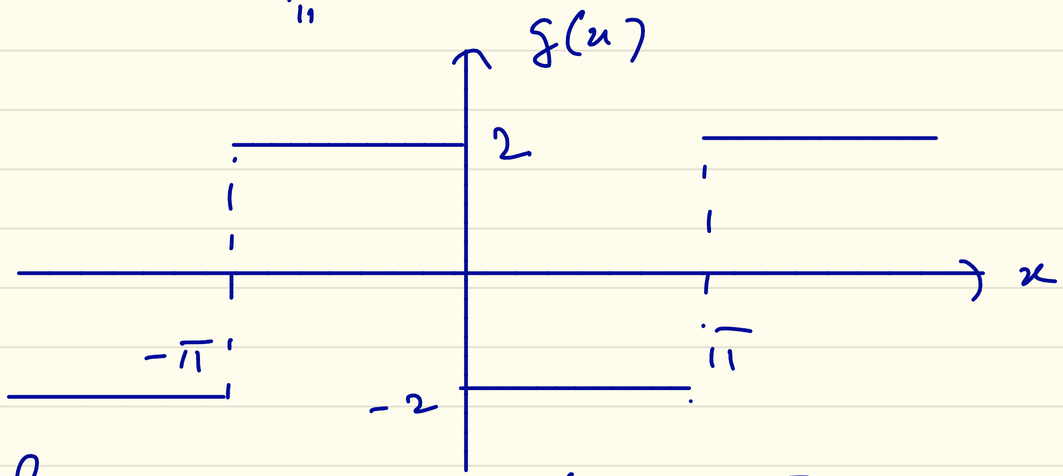
$$= \underbrace{\cancel{\left[-2x \cdot \frac{\sin nx}{x}\right]_0^{\pi}}}_{0} + \int_0^{\pi} 2\, \frac{\sin nx}{n}\, dx$$

$$= -\frac{2}{n^2} \cos nx \Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{n^2} \left((-1)^n - 1\right)$$

$$\begin{cases} = 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ = +\dfrac{4}{n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2p} = 0, \quad p \geq 0 \quad (\text{inclut } a_0 = 0) \\ a_{2p+1} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \left(+ \dfrac{4}{(2p+1)^2} \right) = + \dfrac{8}{(2p+1)^2 \cdot \sqrt{\pi}} \end{cases}$$

2.2. $f(t) = \underbrace{f(0)}_{\pi} + \int_0^t g(s)\,ds, \quad g \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$



$\Rightarrow f$ cont. et sa série de Fourier cvu vers f ; en particulier, cvu $\Rightarrow$ cvs :

$$(\forall t \in \mathbb{R}) : f(t) = a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}.$$

2.3. En $t = 0$, on a :

$$f(0) = \pi = \cancel{\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}}^{\,0} + \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{8}{(2p+1)^2 \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} < \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

__Remarque :__ $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$= \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)^2}}_{\frac{1}{4}\cdot\zeta(2)} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)}_{3/4} \underbrace{\zeta(2)}_{\pi^2/6} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

De même : $\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^4}\right)}_{15/16} \underbrace{\zeta(4)}_{\frac{\pi^4}{90}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

Ce que l'on trouve avec Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \underbrace{\cancel{a_0^2}}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}^2$$

$$= \frac{64}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

$$\|$$

$$2\int_0^{\pi} (\pi - 2x)^2\, dx = \left.\frac{(2x-\pi)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi}{64} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^4}{96}.$$

TD 5 - Séries de Fourier

Exo 4. $E = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt < \infty\}$

4.1. Clairement, $x : \begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t\end{array} \Big) \in E$,

cf. $\int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt$

$= \int_0^1 \frac{t^2}{t} dt$

$= 1/2 < \infty$. Plus généralement si x est continue ($x \in \mathcal{C}^0([0,1])$ — ce qui ne suffit pas pour que $x \in E$, cf. $x(t) = 1$ et $\int_0^1 \frac{|1|^2}{t} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t} = +\infty$), nulle et dérivable en $t=0$, alors $x \in E$.

En effet, si $t > 0$,

$$\frac{x^2(t)}{t} = \frac{x^2(t) - \overbrace{x^2(0)}^{=0, \text{ cf. } x(0)=0}}{t-0} \xrightarrow[t \to 0^+]{} (x^2)'(0)$$

puisque, x étant dérivable en $t=0$, x^2 aussi (par composition) et $(x^2)'(0) = 2x(0).x'(0)$
$= 0$ (cf. $x(0)=0$)

$\Rightarrow (\exists \eta > 0)(\forall t \in]0,\eta]) : \left|\frac{x^2(t)}{t}\right| \leq 1$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt = \int_0^\eta \frac{x^2(t)}{t} + \int_\eta^1 \frac{x^2(t)}{t}$ $\mathcal{C}^0$ donc bornée sur $[\eta,1]$ ($\leq C$)

$\leq \eta + C.(1-\eta) < \infty$: $x \in E$.

4.2. On a en fait $E = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ avec :

$$\begin{cases} X = [0,1] \\ \mathcal{B} = \mathcal{B}_{[0,1]} = \mathcal{B}(\mathcal{O}_{[0,1]}) \text{ (boréliens)} \\ \mu = \frac{1}{t} \cdot \mu_L \quad (\mu_L = \text{mesure de Lebesgue}) \\ \quad (= f_0 \cdot \mu_L \text{ où } f_0(t) = \underbrace{1/t}_{\geq 0} \text{ p.p. } t) \end{cases}$$

ouverts de $[0,1]$

N.B. $\mu(A) := \int_A \frac{dt}{t} \quad \left(= \int_{[0,1]} \chi_A(t) \cdot \frac{1}{t} \mu_L \right)$
$A \in \mathcal{B}_{[0,1]}$

densité $/\mu_L$
$(\mu = \frac{1}{t} \cdot \mu_L)$

Tout naturellement, on prend comme produit scalaire

$$(x|y)_E = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, d\mu(t)$$
$$= \int_0^1 \frac{x(t)\, y(t)}{t} \cdot dt$$

On sait que (Th. Riesz-Fischer) $L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ est complet, donc que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace de Hilbert.

4.3. Les fonctions $x_1 : t \mapsto t$, $x_2 : t \mapsto t^2$, et $x_3 : t \mapsto t^3$ vérifient la condition du 4.1, donc appartiennent à E. La famille $\{x_1, x_2, x_3\} = \{t, t^2, t^3\}$ est libre (cf. $\{1, t, t^2, t^3\}$ libre — car base ! — dans $\mathbb{R}_3[X]$ = polynômes de degré ≤ 3).

Orthonormalisons cette famille à l'aide du procédé de Gram-Schmidt.

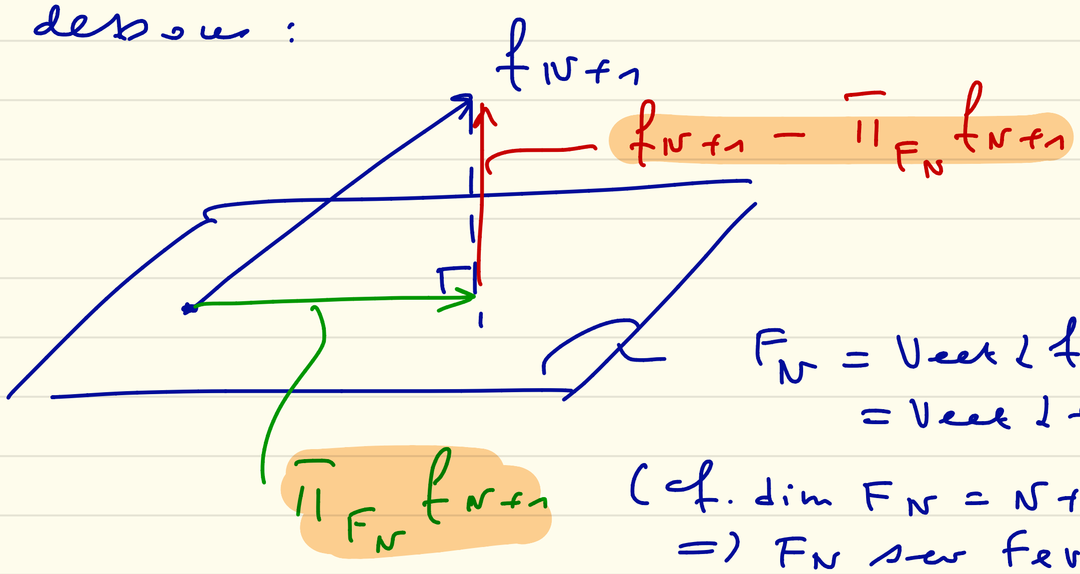
<u>Rappel</u> : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs qui définit une famille libre :

$\{f_n, n\in\mathbb{N}\}$ libre ie toute CL (= combinaison linéaire) des f_n qui est nulle est telle que tous les coeffs. de la CL sont nuls. Si on note $F_N = \mathrm{Vect}\{f_0,\dots,f_N\}$ ($\dim F_N = N+1$), et si on suppose qu'on a "redressé" $\{f_0,\dots,f_N\}$ en $\{e_0,\dots,e_N\}$ tq :

i) $\{e_0,\dots,e_N\}$ orthonormée
$(\iff (e_i\,|\,e_j) = \delta_{ij},\ i,j=0,\dots,N)$

ii) $\mathrm{Vect}\{e_0,\dots,e_N\} = \mathrm{Vect}\{f_0,\dots,f_N\} = F_N$

on construit e_{N+1} comme sur le schéma ci-dessous :



$F_N = \mathrm{Vect}\{f_0,\dots,f_N\}$
$= \mathrm{Vect}\{e_0,\dots,e_N\}$

(cf. $\dim F_N = N+1 < \infty$ $\Rightarrow$ F_N sev <u>fermé</u>)

$$e_{N+1} := \frac{f_{N+1} - \Pi_{F_N} f_{N+1}}{\| f_{N+1} - \Pi_{F_N} f_{N+1}\|}$$ (ou son opposé).

Sur notre exemple :

. $x_1(t) = t$: $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$

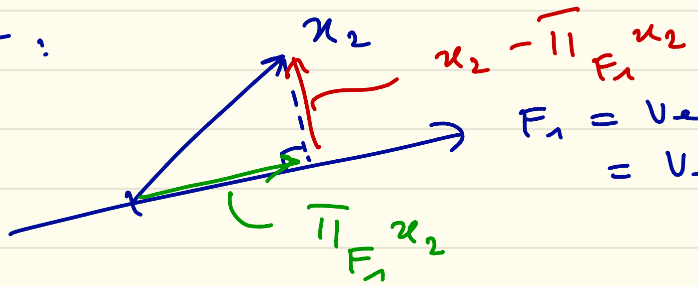
$$\|x_1\|^2 = (x_1 \mid x_1)$$

$$= \int_0^1 \frac{x_1^2(t)}{t}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2}{t}\cdot dt$$

$$= 1/2 \implies \|x_1\| = 1/\sqrt{2} \implies e_1 = t\sqrt{2}.$$

. $x_2(t) = t^2$:

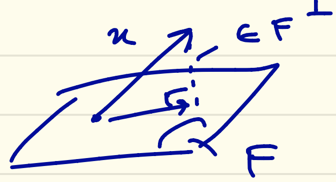


$F_1 = \mathrm{Vect}\{x_1\}$
$= \mathrm{Vect}\{e_1\}$

Calculons $\Pi_{F_1} x_2$: puisque $\{e_1\}$ est une famille orthonormée (S ON = "système OrthoNormé"), on a

$$\Pi_{F_1} x_2 = (x_2 \mid e_1).e_1$$

(cf. Si $F = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ avec $\{e_1, \dots, e_n\}$ orthonormée, si $x \in E$,



$$\Pi_F x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k).e_k$$

puisque : $\begin{cases} \Pi_F x \in F \implies (\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n) : \Pi_F x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . e_k \\ x - \Pi_F x \perp F \iff (x - \Pi_F x \mid e_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n \end{cases}$

$\implies \lambda_k = (x \mid e_k),\ k = 1, \dots, n.$)

Ici, on évalue donc

$$(x_2 | e_1) = (t^2 | t\sqrt{2})$$

$$= \int_0^1 \frac{t^2 \cdot \cancel{t}\sqrt{2}}{\cancel{t}}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\| x_2 - (x_2|e_1).e_1 \|^2 = \| t^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} . t\sqrt{2} \|^2$$

$$= \| t^2 - \frac{2t}{3} \|^2 = \int_0^1 \frac{(t^2 - 2t/3)^2}{t} . dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^3 - \frac{4}{3} t^2 + \frac{4}{9} t\right) dt$$

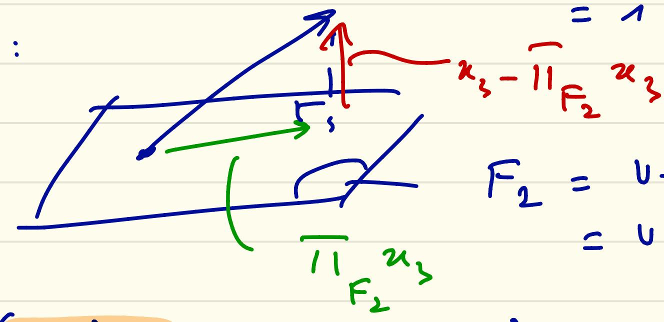
$$= \frac{1}{4} - \frac{4}{3} . \frac{1}{3} + \frac{4}{9} . \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{36}(9 - 16 + 8) = \frac{1}{36} \Rightarrow \| t^2 - \frac{2t}{3} \| = 1/6$$

$$\Rightarrow e_2 = \frac{t^2 - 2t/3}{\| t^2 - 2t/3 \|} = 6t^2 - 4t.$$

$$[\ \| e_2 \|^2 = \int_0^1 36 . t^3 - 48 . t^2 + 16t$$
$$= 36/4 - 48/3 + 16/2$$
$$= 1 .\ ]$$

. $x_3(t) = t^3$:



$F_2 = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$
$= \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$

$$\Pi_{F_2} x_3 = (x_3 | e_1).e_1 + (x_3 | e_2).e_2$$

$$(x_3 | e_1) = \int_0^1 \frac{t^3 . \cancel{t}\sqrt{2}}{\cancel{t}}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(x_3 | e_2) = \int_0^1 \frac{t^3 (6t^2 - 4t)}{t} = \int_0^1 6t^4 - 4t^3$$
$$= 6/5 - 1 = 1/5$$

$$\| x_3 - \overline{\Pi}_{F_2} x_3 \|^2 = \| t^3 - \frac{\sqrt{2}}{4} . t\sqrt{2} - \frac{1}{5}(6t^2 - 4t) \|^2$$

$$= \| t^3 \underbrace{- \frac{t}{2} + \frac{4}{5} t}_{\frac{3}{10} t} - \frac{6}{5} t^2 \|^2$$

$$= \int_0^1 \frac{(t^3 + \frac{3}{10} t - \frac{6}{5} t^2)^2}{t} . dt$$

$$= \int_0^1 (t^5 + \frac{9}{100} t + \frac{36}{25} t^3 + \frac{3}{5} t^3 - \frac{12}{5} t^4 - \frac{36}{50} t^2) dt$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{9}{200} + \frac{9}{25} + \frac{3}{20} - \frac{12}{25} - \frac{12}{50}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{200} \underbrace{(9 + 72 + 30 - 96 - 48)}_{-33}$$

$$= \frac{100 - 99}{600} = \frac{1}{600} \Longrightarrow \| t^3 + \frac{3}{10} t - \frac{6}{5} t^2 \| = \frac{1}{10\sqrt{6}}$$

$$\Longrightarrow e_3 = 10 . \sqrt{6} \left(t^3 + \frac{3}{10} t - \frac{6}{5} t^2 \right)$$

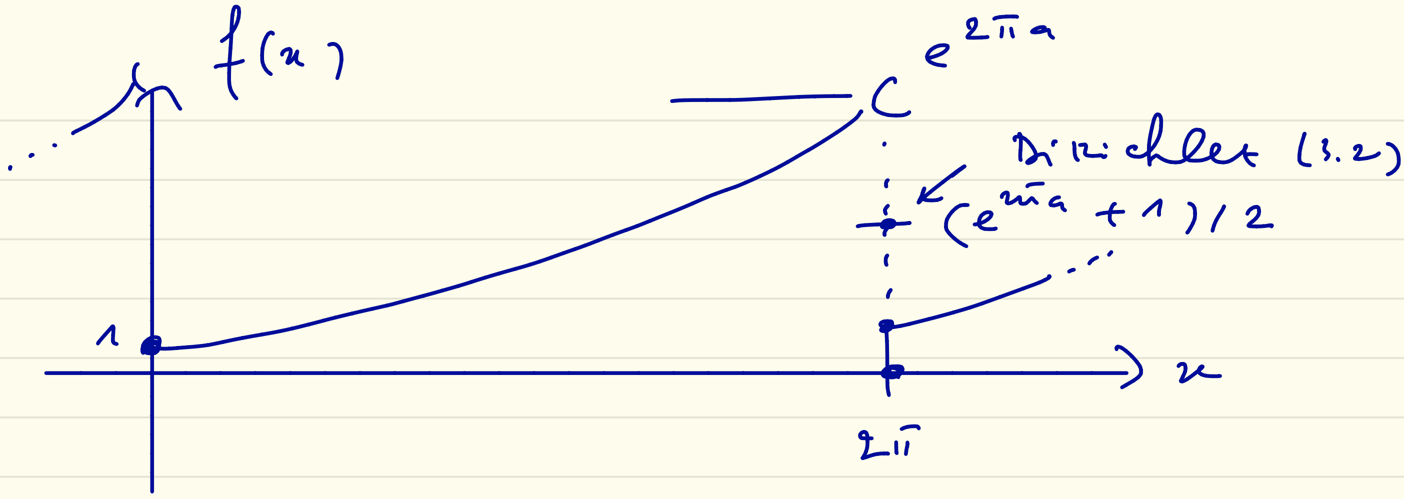
$$= \sqrt{6} . (10 t^3 + 3t - 12 t^2) .$$

<u>Exo 3.</u> Travailler avec la b.h. $\left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z}\right)$ de $L^2_{2\pi}(\mathbb{C})$:

$f(x) = e^{ax}$ si $x \in [0, 2\pi[$

selon : $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n . e^{inx} / \sqrt{2\pi}$

avec $c_n = (f \mid \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \overbrace{e^{ax} . e^{-inx}}^{e^{(a-in).x}} dx$

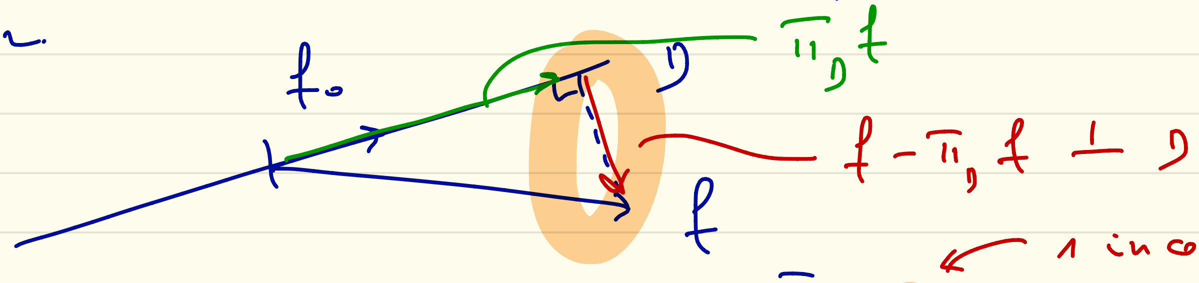


Appliquer Dirichlet (f C^1 par morceaux) et Parseval donne les séries voulues.

Exo 2 CC 2018-2019.

2.1. Évident ($\dim D = 1 < \infty$)

2.2.



1 inconnue

$$\begin{cases} \bar f = \pi_D f \in D \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) : \bar f = \lambda f_0 \\ (f - \bar f \mid f_0) = 0 \end{cases}$$

1 équation

$$\Rightarrow (f - \underbrace{\lambda f_0}_{\bar f} \mid f_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(f \mid f_0)}{\|f_0\|^2} \quad \left(\text{ie } \bar f = \left(f \,\middle|\, \frac{f_0}{\|f_0\|}\right) \cdot \frac{f_0}{\|f_0\|}\right)$$

$(f \mid f_0) = \int_0^1 t\sqrt{t}\, dt = \frac{2}{5}$

$(f_0 \mid f_0) = \int_0^1 t\, dt = 1/2$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \bar f = \frac{4}{5}\sqrt{t}$.

2.3. $d = d(f, D) = \| f - \bar{f} \|$

$$= \| t - \frac{4}{5}\sqrt{t} \|$$

$$\| t - \frac{4}{5}\sqrt{t} \|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{4}{5}\sqrt{t}\right)^2 dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 - \frac{8}{5} t^{3/2} + \frac{16}{25} t\right) dt$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{8}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{8}{25}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{8}{25}$$

$$= \frac{25 - 24}{75} = \frac{1}{75} \Rightarrow d = \frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{15}.$$

2.4. $e_0 = \frac{f_0}{\| f_0 \|} \Rightarrow e_0 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{t} = \sqrt{2t}$,

$$e_1 = \frac{f - \bar{f}}{\| f - \bar{f} \|} = \frac{t - 4/5 \cdot \sqrt{t}}{1/5\sqrt{3}}$$

$$= 5\sqrt{3}\left(t - \frac{4}{5}\sqrt{t}\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(5t - 4\sqrt{t}\right).$$

MAM3 - MI2

Correction TD5 (groupe 1)

Exercice 1 (Fonction ζ de Riemann)

Soit

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},\ s \in]1, +\infty[.$$

Calculer $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

Correction

Calcul de $\zeta(2)$

Soit f une fonction 2π-périodique telle que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $f(t) = t$.

Remarquons que $f \in L^2_{2\pi}$. Une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ est $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\}$. Une autre base hilbertienne (complexe) est $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}\}$.

Constantes :
$(1|1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$ donc $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est de norme 1 dans $L^2_{2\pi}$.
$(\cos(nt)|\cos(nt)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2nt)+1}{2} dt = \pi$.

Si on décompose f dans la base hilbertienne, alors au sens de $L^2_{2\pi}$,

$$f(t) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n \geq 1} a_n \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}},$$

au sens où on a la convergence de la série de Fourier

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| f(t) - \left(a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right) \right\|_{L^2([-\pi,\pi])} = 0.$$

On a l'expression des coefficients :
$a_0 = (f|\frac{1}{\sqrt{2\pi}})$
$a_n = (f|\frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}})$
$b_n = (f|\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}})$.

Calcul des coefficients :
f est impaire donc $a_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$.
$b_n = (f|\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{Im}(\int_{\pi}^{\pi} t e^{int} dt)$.
Intégration par parties:

$\int_{\pi}^{\pi} te^{int}dt = [\frac{1}{in}te^{int}]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = \frac{2}{in}\pi(-1)^n = \frac{-2i}{n}\pi(-1)^n$
Finalement,
$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}\sqrt{\pi}}{n}$.

Comment maintenant faire le lien avec $\zeta(2) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$?
On utilise l'égalité de Parseval:
$\|f\|^2 = a_0^2 + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2$.
Parseval, c'est un Pythagore sur la base hilbertienne !
$\|f\|^2 = (f|f) = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^3}{3}$.
et par Parseval,
$\|f\|^2 = \sum_{n\geq 1} b_n^2 = 4\pi\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = 4\pi\zeta(2)$.
Donc $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Calcul de $\zeta(4)$

Essayons avec f 2π-périodique telle que $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

Calcul des coefficients de Fourier:
$b_n = 0$ car $t \mapsto t^2$ est paire.

$$a_0 = (f|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{3}.$$

$a_n = (f|\frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Re}(\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{int}dt)$

Intégration par parties:
$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{int}dt = \underbrace{[\frac{1}{in}t^2e^{int}]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{in}\int_{-\pi}^{\pi} te^{int}dt = \frac{4}{n^2}\pi(-1)^n$.

$a_n = \frac{4}{n^2}\sqrt{\pi}(-1)^n$.
Utilisation de Parseval:
$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{2\pi^5}{5}$
$\|f\|^2 = a_0^2 + \sum_{n\geq 1} a_n^2 = \frac{2\pi^5}{9} + \sum_{n\geq 1}\frac{16\pi}{n^4} = \frac{2\pi^5}{9} + 16\pi\zeta(4)$.
Finalement,
$\zeta(4) = \frac{1}{8}(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}) = \frac{\pi^4}{90}$.

Calcul de $\zeta(6)$

On prend la fonction f 2π-périodique et qui vaut sur $[-\pi, \pi]$ $f(t) = t^3$.
Je vous laisse faire le calcul, et on doit trouver $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, paire et 2π-périodique définie par $f(x) = \pi - 2x$ sur $[0, \pi]$.

Question 2.1

Donner l'expression de la série de Fourier de f sur la base hilbertienne des polynômes trigonométriques.

Correction

On fait comme dans l'exercice 1:
Calcul des coefficients
f est paire donc les b_n sont nuls.

$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - 2t) dt = 0.$
D'après l'exercice 1,
$a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} (\pi - 2t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (\underbrace{\int_0^{\pi} \pi \cos(nt) dt}_{=0} - 2 \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \mathrm{Re}(\int_0^{\pi} te^{int} dt)$

$\int_0^{\pi} te^{int} dt = [\frac{1}{in} te^{int}]_0^{\pi} - \frac{1}{in} \int_0^{\pi} e^{int} dt = \frac{1}{in} \pi (-1)^n + \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1)$
$a_n = -\frac{4}{\sqrt{\pi} n^2} ((-1)^n - 1).$
Quand $n = 2p$ est pair,
$a_{2p} = 0,$
et quand $n = 2p + 1$ est impair,
$a_{2p+1} = \frac{8}{n^2 \sqrt{\pi}}.$
Finalement, dans $L^2_{2\pi}$
$f(t) = \sum_{p \geq 0} a_{2p+1} \frac{\cos((2p+1)t)}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)t).$

Question 2.2

Indiquer la nature de la convergence de la série de Fourier de f.

Correction

Convergence dans $L^2_{2\pi}$: OK
f est une fonction C^1 par morceaux, car sur chaque intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, elle est affine.
Théorème de Dirichlet: comme f est C^1 par morceaux et $L^2_{2\pi}$, alors on a
$\forall t \in \mathbf{R},\ a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$

La fonction f a des points de discontinuité éventuels aux points $k\pi$. Il suffit de regarder en 0 et en π.
En 0, $f(0^+) = \pi$ et $f(0^-) = f(0^+) = \pi$ par parité.
En π, $f(\pi^-) = -\pi$ et $f(\pi^+) = f((-\pi)^+) = f(\pi^-) = -\pi$ par périodicité et par parité.
Donc la fonction f est continue.
Donc elle est égale à la limite de sa série de Fourier.
On a la convergence ponctuelle de la série de Fourier vers f.

Question 2.3

En déduire

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \text{ et } \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

Correction

On reprend l'expression trouvée dans la question 2.1, on prend $t = 0$ et on utilise la question 2.2:
$f(0) = \frac{8}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}.$
Par ailleurs, on a vu que $f(0) = \pi$.
Donc

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On utilise Parseval:
$a_{2p+1} = \frac{8}{n^2 \sqrt{\pi}}$
$\|f\|^2 = \sum_{p \geq 0} a_{2p+1}^2 = \frac{64}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4}.$

Par ailleurs,
$\|f\|^2 = 2\int_0^{\pi}(\pi-2t)^2dt = \frac{2\pi^3}{3}$.
Finalement,

$$\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Autre façon de faire:
$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \sum_{p\geq 1}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2} + \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}$
Donc $\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$.
On peut faire la même chose avec $\zeta(4)$ pour trouver le second.

Exercice 3

Soit $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 2π-périodique définie par $f(x) = e^{ax}$ sur $[0, 2\pi]$ ($a \neq 0$).

Question 3.1

Donner l'expression de la série de Fourier de f sur la base hilbertienne des polynômes trigonométriques.

Question 3.2

Indiquer la nature de la convergence de la série de Fourier de f.

Question 3.3

En déduire

$$\sum_{n\geq 1}\frac{a}{a^2+n^2}\cos(nx) \text{ et } \sum_{n\geq 1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin(nx).$$

Question 3.4

En déduire également

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(a^2+n^2)^2} \text{ et } \sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}.$$

(Rappel : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$)

Exercice 4

Soit E l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que

$$\int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t}dt < \infty.$$

Question 4.1

Montrer que E est un espace vectoriel contenant les fonctions continues qui sont nulles et dérivables à l'origine.

Correction

Montrons que E est un espace vectoriel :
Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On va montrer que $\lambda x + \mu y \in E$, c'est à dire, montrer que

$$\int_0^1 \frac{|\lambda x(t) + \mu y(t)|^2}{t} dt < \infty.$$

Calculons, en utilisant Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{|\lambda x(t) + \mu y(t)|^2}{t} dt &= \lambda^2 \underbrace{\int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt}_{<\infty} + 2\lambda\mu \int_0^1 \frac{x(t)y(t)}{t} dt + \mu^2 \underbrace{\int_0^1 \frac{y(t)^2}{t} dt}_{<\infty} \\ &\leq \lambda^2 \underbrace{\int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt}_{<\infty} + 2\lambda\mu \sqrt{\int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt} \sqrt{\int_0^1 \frac{|y(t)|^2}{t} dt} + \mu^2 \underbrace{\int_0^1 \frac{y(t)^2}{t} dt}_{<\infty} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Donc $\lambda x + \mu y \in E$ et donc E est un espace vectoriel.

Remarque : Si x est une fonction continue non nulle à l'origine, alors on ne peut pas avoir $x \in E$, car $x(t) \approx x(0)$ pour t proche de 0, et on sait que $\frac{x(0)^2}{t}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0.

Par ailleurs si on suppose seulement x continue et nulle en 0, on peut construire des contre-exemples.

Soit x une fonction continue sur $[0,1]$ qui soit dérivable en 0 (c'est-à-dire sur un voisinage $[0,\varepsilon]$) et nulle en 0. On peut faire un développement limité en 0 : si on prend $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, alors pour tout $t \in [0,\varepsilon]$, il existe $\theta(t) \in [0,t]$ tel que
$x(t) = x(0) + x'(\theta(t))t = x'(\theta(t))t$ car $x(0) = 0$.
Donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt &= \int_0^\varepsilon \frac{|x(t)|^2}{t} dt + \int_\varepsilon^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt \\ &= \int_0^\varepsilon t|x'(\theta(t))|^2 dt + \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{|x(t)|^2}{t} dt}_{<\infty} < \infty.\end{aligned}$$

Le deuxième terme est borné, car x est continue et $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et bornée par $\frac{1}{\varepsilon}$ sur $[\varepsilon, 1]$.
Le premier terme est borné car x' est bornée sur $[0,\varepsilon]$ car x est dérivable et t est bornée par ε.
Donc $x \in E$. CQFD

Question 4.2

Montrer que

$$(x|y) = \int_0^1 \frac{x(t)y(t)}{t} dt$$

définit un produit scalaire sur E.

Correction

Il suffit de montrer que $(\cdot|\cdot)$ est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Symétrie

$(y|x) = \int_0^1 \frac{y(t)x(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{x(t)y(t)}{t} dt = (x|y).$

Bilinéarité

Par symétrie, il suffit de montrer la linéarité en l'un des deux. Par linéarité de l'intégrale, en développant,
$(\lambda x+\mu z|y) = \lambda \int_0^1 \frac{x(t)y(t)}{t} dt + \mu \int_0^1 \frac{z(t)y(t)}{t} dt = \lambda(x|y) + \mu(z|y)$.

Positivité

$(x|x) = \int_0^1 \frac{x(t)^2}{t} dt \geq 0$ car $t > 0$ sur $]0,1[$.

Définie

Si x vérifie $(x|x) = 0$, alors pour presque tout $t \in [0,1]$, $\frac{x(t)^2}{t} = 0$ car le terme dans l'intégrale est positif. Donc pour presque tout $t \in [0,1]$, $x(t) = 0$. Comme on raisonne au sens des fonctions mesurables, c'est-à-dire au sens "classe de fonctions définies à un ensemble négligeable près", cela signifie que x (au sens "la classe de fonctions mesurables valant $x(t)$ pour presque tout $t \in [0,1]$") est nulle, i.e. $x = 0$.

Question 4.3

On note $(P_n)_{n\geq 1}$ le SON obtenu par orthonormalisation de $\mathbf{R}[X] \setminus \mathbf{R}$. Calculer P_i, $i = 1, \ldots, 3$.

Correction

On fait une orthonormalisation de Gram-Schmidt sur la famille $\{X, X^2, X^3\}$.

Pour le premier: il suffit de normaliser
$(t|t) = \int_0^1 \frac{t^2}{t} dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$.
Donc le premier élément du SON est
$P_1(t) = \sqrt{2}t$.

Pour le deuxième: on pose $P_2(t) = at + bt^2$, et on détermine a, b tels que $(P_2|P_2) = 1$ et $(P_2|P_1) = 0$.
$(P_2|P_1) = \sqrt{2}a \int_0^1 t dt + \sqrt{2}b \int_0^1 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{3}b = 0$.
Donc $a = 2\lambda$, $b = -3\lambda$ et $P_2(t) = \lambda(2t - 3t^2)$.
$(P_2|P_2) = \lambda^2 \int_0^1 \frac{(2t-3t^2)^2}{t} dt = \lambda^2 \int_0^1 (4t - 12t^2 + 9t^3) dt = \lambda^2(2 - 4 + \frac{9}{4}) = \frac{\lambda^2}{4}$.
Donc $\lambda = 2$ et donc $P_2(t) = 4t - 6t^2$.

Pour le troisième : on pose $P_3(t) = at + bt^2 + ct^3$ et on détermine a, b, c tels que $(P_3|P_1) = 0$, $(P_3|P_2) = 0$ et $(P_3|P_3) = 1$.
$(P_3|P_1) = \sqrt{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}\right) = 0$.
Par ailleurs,
$(P_3|P_2) = a(t|P_2) + b(t^2|P_2) + c(t^3|P_2)$.
$(t|P_2) = 0$ car P_2 est orthogonal à $P_1(t) = \sqrt{2}t$.
$(t^2|P_2) = \int_0^1 (4t^2 - 6t^3) dt = \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$
$(t^3|P_2) = \int_0^1 (4t^3 - 6t^4) dt = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$.
Finalement, les deux équations sur l'orthogonalité sont

$$\begin{aligned} 6a + 4b + 3c &= 0 \\ 5b + 6c &= 0. \end{aligned}$$

En fonction de c, $b = -\frac{6}{5}c$ et $a = \frac{3}{10}c$. On pose $c = 10\lambda$, $a = 3\lambda$, $b = -12\lambda$, et donc $P_3(t) = \lambda(3t - 12t^2 + 10t^3)$.

$$\begin{aligned}(P_3|P_3) &= \lambda^2 \int_0^1 \frac{(3t-12t^2+10t^3)^2}{t} dt \\ &= \lambda^2 \int_0^1 (9t - 24t^2 + 204t^3 - 240t^4 + 100t^5) dt \\ &= \lambda^2 (\frac{9}{2} - 8 + 51 - 48 + \frac{50}{3}) \\ &= \frac{\lambda^2}{6}.\end{aligned}$$

Donc $\lambda = \sqrt{6}$ et
$P_3(t) = \sqrt{6}(3t - 12t^2 + 10t^3)$.