TD_6

ex 2

Soit p un entier naturel, $p \geq 1$. Déterminons $x\delta^{(p)}$.

• $x\delta = 0$ $\left(= T_0 : \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} 0.\varphi = 0\right)$, cf $\langle x.\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x\varphi\rangle = x\varphi(x)\Big|_{x=0} = 0.\varphi(0) = 0$.

• $x\delta'$:

$$\langle x\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', x\varphi\rangle = -\langle \delta, \overbrace{(x\varphi)'}^{\varphi + x\varphi'}\rangle = -\left(\varphi(x) + x\varphi'(x)\right)\Big|_{x=0} = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi\rangle.$$

$$\boxed{x\delta' = -\delta}$$

• $\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi'\rangle = -\varphi(0)$

• $\langle \delta^{k}, \varphi\rangle = (-1)^{k}\langle \delta, \varphi^{(k)}\rangle$
$= (-1)^{k}\varphi^{(k)}(0)$

• $x\delta''$: $\langle x\delta'', \varphi\rangle = \langle \delta'', x\varphi\rangle = -\langle \delta', (x\varphi)'\rangle = \langle \delta, (x\varphi)''\rangle$

$(x\varphi)''$
$= (\varphi + x\varphi')'$
$= \varphi' + \varphi' + x\varphi''$
$= 2\varphi' + x\varphi''$

$$= \langle \delta, 2\varphi' + x\varphi''\rangle$$
$$= \left(2\varphi'(x) + x\varphi''(x)\right)\Big|_{x=0}$$
$$= 2\varphi'(0) = \langle 2\delta, \varphi'\rangle = \langle -2\delta', \varphi\rangle$$
$$= -2\langle \delta', \varphi\rangle \quad \text{so} \quad \boxed{x\delta'' = -2\delta'}$$

Mq, par récurrence, $x\delta^{(p)} = -p\delta^{(p-1)}$.

* $p = 1$, $x\delta' = -\delta = (-1)\delta^{(0)}$.

* on suppose que $\forall p \geq 1$, $x\delta^{(p)} = -p\delta^{(p-1)}$. Mq cela est vrai pour $x\delta^{(p+1)} = -(p+1)\delta^{(p)}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\langle x\delta^{(p+1)}, \varphi\rangle = \langle \overbrace{\delta^{(p+1)}}^{(\delta^{(p)})'}, x\varphi\rangle = -\langle \delta^{(p)}, \overbrace{(x\varphi)'}^{\varphi + x\varphi'}\rangle \quad \text{(developpe)}$$

$$= -\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle - \langle \delta^{(p)}, x\varphi'\rangle = -\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle - \langle x\delta^{(p)}, \varphi'\rangle$$

$$= \text{(hyp recu)} -\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle - \langle -p\delta^{(p-1)}, \varphi'\rangle$$

$$= -\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle + p\langle \delta^{(p-1)}, \varphi'\rangle = -\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle - p\langle (\delta^{(p-1)})', \varphi\rangle$$

$$= -\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle - p\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle = -(p+1)\langle \delta^{(p)}, \varphi\rangle$$

Ainsi, $\boxed{x\delta^{(p+1)} = -(p+1)\delta^{(p)}}$

ex 3 $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\text{"}\frac{1}{x}\text{"} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\notin \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\left(\text{cf } \int_{[0,1]} \left|\frac{1}{x}\right| dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_\varepsilon^1 \frac{dX}{X} = [\ln|x|]_\varepsilon^1 = 0 - \ln\varepsilon = +\infty \right)$$

On pose "valeur principale" $vp_{1/x}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)\,dx$.

1) Vérifions que $vp_{1/x}$ est bien def (que la limite existe) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$

• $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad \psi \in C^\infty$ (Taylor)

$$\bullet \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0) + x\psi(x)}{x}\,dx + \int_\varepsilon^A \frac{\varphi(0)+x\psi(x)}{x}\,dx.$$

$\varphi = 0$ hors de $[-A,A]$

$$= \underbrace{[\varphi(0)\ln(|x|)]_{-A}^{\varepsilon} + [\varphi(0)\ln(|x|)]_\varepsilon^A}_{\substack{\varphi(0)\ln(\varepsilon) - \varphi(0)\ln(A) \\ + \varphi(0)\ln(A) - \varphi(0)\ln(\varepsilon) = 0}} + \underbrace{\int_{-A}^{-\varepsilon} \psi(x)\,dx + \int_\varepsilon^A \psi(x)\,dx}_{\downarrow\, 0}.$$

$\left(\int_{-A}^A \psi(x)\,dx \in \mathbb{R}\right.$ cuz ψ intégrable sur $\left.[-A,A] \right)$

On a donc mq $vp_{1/x} : \begin{array}{l} \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \longmapsto \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi}{x}\,dx \end{array}$ est bien définie (clairement linéaire).

Soit K compact $\subset \mathbb{R}$, mq $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})), (\operatorname{supp}\varphi \subset K), (\exists c \geq 0), (\exists m \in \mathbb{N})$:

$$|vp_{1/x}(\varphi)| \leq c.\max_{0 \leq k \leq m} \|\varphi^{(k)}\|_\infty.$$

Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

$|vp_{1/x}(\varphi)| = \left|\int_{-A}^A \psi(x)\,dx\right|$ où $\operatorname{supp}\varphi \in [-A,A] \subset K$ où φ tq $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.

on sait que $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists \theta \in]0,1[)$: $\varphi(x) = \varphi(0) + x\underbrace{\varphi'(\theta x)}_{\psi(x)}$ (Rolle)

$$\Rightarrow |vp_{1/x}(\varphi)| \leq \int_{-A}^A \underbrace{|\psi(x)|}_{\leq \|\varphi'\|_\infty} dx$$

$$\leq \underbrace{\mu_L(K)}_{c} . \underbrace{\|\varphi'\|_\infty}_{m=1} \qquad \therefore \quad vp_{1/x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

2) "$\ln|x|$" : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\underset{L^1_{loc}(\mathbb{R})}{\nearrow} \quad x \longmapsto \begin{cases} \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

En effet, $\sqrt{|x|}.\ln|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

so $\left(\ln|x|\right) \leqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}_{L^1_{loc}(\mathbb{R})}$ si $|x|$ assez petit. $\left(\frac{1}{|x|^\alpha},\ \alpha \in]0,1[\right)$

$\Rightarrow$ si K compact $\subset \mathbb{R}$

. soit $0 \notin K$, $\int_K \overbrace{|\ln|x||}^{C^1 \text{ sur } K} dx < \infty$

. soit $0 \in K$, $$\int_K |\ln|x||\,dx = \underbrace{\underbrace{\int_{K\cap[-\varepsilon,\varepsilon]} \overbrace{|\ln|x||}^{\leqslant \frac{1}{\sqrt{|x|}}}dx}_{<\infty} + \underbrace{\int_{K\cap {}^c[-\varepsilon,\varepsilon]} \overbrace{|\ln|x||}^{C^0}dx}_{<\infty}}_{<\infty}$$

On peut donc definir la distribution régulière : $T_{\ln|x|} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \ln|x|.\varphi(x)\,dx.$$

$T_{\ln|x|}$ possède donc une dérivée (au sens des distributions) ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle (T_{\ln|x|})', \varphi\rangle = -\langle T_{\ln|x|}, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \overbrace{\ln|x|\varphi'(x)}^{\in L^1(\mathbb{R})}\,dx$$

$$= -\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \ln|x|.\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \left(\int_{-A}^{-\varepsilon} \ln|x|\,\varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{A} \ln|x|\varphi'(x)\,dx\right)$$

cf $\varphi = 0$ hors de $[-A,A]$, so $\varphi' = 0$ aussi

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\left(\left[\ln|x|\varphi(x)\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\ln|x|\varphi(x)\right]_{\varepsilon}^{A}\right)}_{\to 0} \underbrace{- \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx - \int_{\varepsilon}^{A} \frac{\varphi(x)}{x}dx}_{-\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx}$$

cuz $\ln(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \ln(A)\underset{0}{\varphi(-A)} + \ln(A)\underset{0}{\varphi(A)} - \ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)$

$= -\ln(\varepsilon)\left(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)\right)$ $(0.\infty$ indéter$)$

$$= -\underbrace{\left(\underbrace{(\varphi(\varepsilon)-\varphi(0))}_{\varepsilon\varphi'(0)+o(\varepsilon)} - \underbrace{(\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0))}_{(-\varepsilon)\varphi'(0)+o(\varepsilon)}\right)}_{2\varepsilon\varphi'(0) + \underbrace{o(\varepsilon)}_{\substack{\varepsilon\alpha(\varepsilon)\to 0\\ \varepsilon\to 0}}} . \ln(\varepsilon)$$

$= 2\varepsilon\ln(\varepsilon)\varphi'(0) + \varepsilon\ln(\varepsilon)\alpha(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

$$\Rightarrow \langle (T_{\ln|x|})', \varphi\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} = \langle VP_{1/x}, \varphi\rangle$$

Rq : redèmontre que $VP_{1/x}$ obtenue comme dérivée d'une distribut° est une distribut°.

3) $x\,VP_{1/x} = 1(T_1)$?

$$\langle x.VP_{1/x}, \varphi\rangle = \langle VP_{1/x}, x\varphi\rangle = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ >}} \int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{x\varphi(x)}{x}dx = \int_{\mathbb{R}} \overbrace{\varphi(x)}^{\in L^1(\mathbb{R})}dx$$

$$= \langle T_1, \varphi\rangle.$$

ex 4 Soit l'équa diff $xy'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

On cherche y, dérivable, tq $(\forall x \in \mathbb{R})$, $xy'(x) = 0$. (1)

1) Si y dérivable sur $\mathbb{R}$, est sol forte de (1) (y "sol forte")

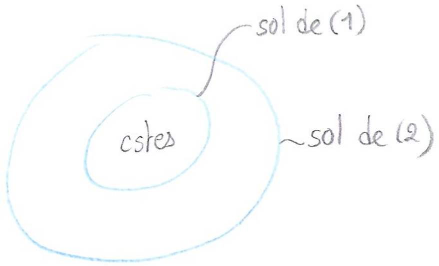
alors $(\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ $0 = \int_{\mathbb{R}} xy'(x)\varphi(x)\,dx$ $\quad \underbrace{y'(x)}_{u'}\underbrace{(x\varphi(x))}_{v}$

cf $\varphi = 0$ hors de $[-A,A]$ $= \int_{-A}^{A} y'(x)\, x\varphi(x)\,dx = \underbrace{\Big[y(x).x\varphi(x)\Big]_{-A}^{A}}_{0} - \int_{-A}^{A} y(x)(x\varphi(x))'\,dx.$

$y(A).A\underset{0}{\cancel{\varphi(A)}} - y(-A)(-A)\underset{0}{\cancel{\varphi(-A)}}$

cuz φ, $x\varphi$ et $(x\varphi)' = 0$ hors de $[-A,A]$.

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} y(x)(x\varphi(x))'\,dx = 0$ (2)



2) Si y dérivable sur $\mathbb{R}$, sol de (1),

- $(\forall x < 0)$: $xy'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$
  $\Rightarrow y(x) = \text{cste} = a$ sur $\mathbb{R}_-^*$ $(\exists a \text{ tq} \dots)$

- $(\forall x > 0)$: $xy'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$
  $\Rightarrow y(x) = b$ $(\exists b \text{ tq} \dots)$.

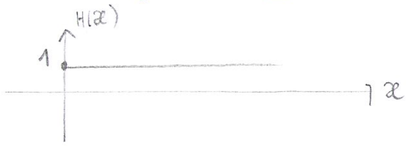
Comme y dérivable en $x = 0$, elle est continue en 0 donc $a = b \Rightarrow y = \text{cste}$ sur $\mathbb{R}$.

$\rightarrow$ toute sol ("forte") de (1) est une cste. Réciproquement, tte appli cste est sol de (1)

donc les sol de (1) $= \{\text{appli cstes}\}$

$= \{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\exists a \in \mathbb{R}), (\forall x \in \mathbb{R}), y(x) = a \}$.

3) Mq $H = 1_{\mathbb{R}_+}$ est sol de (2). soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.



$\int_{\mathbb{R}} H(x)(x\varphi(x))'\,dx = \int_0^{+\infty} 1.(x\varphi(x))'\,dx = \int_0^A (x\varphi(x))'\,dx$ cuz $\varphi(x) = 0$ hors $[-A,A]$ $= \Big[x\varphi(x)\Big]_0^A$

$= A\underset{0}{\varphi(A)} - 0.\varphi(0) = 0.$ $\Rightarrow$ sol de (2).

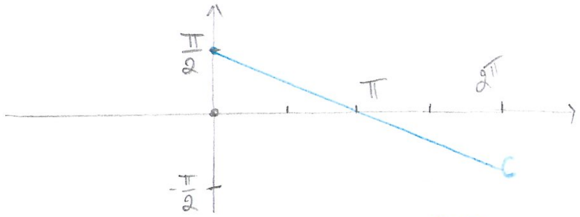
Clairement, $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2)$, $y = aH + b$ sol de (2).

4) Résolvons ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'eq $xT' = 0$ $(= T_0)$ (3). • Si $T = aT_H + b = T_{aH+b}$, $xT' = (a\underbrace{(T_H)'}_{\delta}) = x(a\delta) = ax\delta$

• Réciproquement, $xT' = 0 \Rightarrow (\exists a \in \mathbb{R})$: $T' = a\delta$ (cours) $\Rightarrow T' = a(T_H)' \Rightarrow (T - aT_H)' = 0$

$\Rightarrow (\exists b \in \mathbb{R}) : T - aT_H = T_b \}$ distribut° cste (cours) $\Rightarrow T = aT_H + T_b = T_{(aH+b)}$. l'ens des sol de (3) $=$ $\{T_{aH+b}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

ex 5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ sur $[0,2\pi[$. 2π périodique.



$f_{|[0,2\pi[}(t)=\frac{\pi-t}{2}$.

· $a_0=a_n=0$

· $b_n=\left(f \,\middle|\, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\right)$, $n\geq 1$.

· $b_n=\int_0^{2\pi} f(t)\cdot\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\,dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}=\cancel{2}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)}{\cancel{2}}\,\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\,dt$. (IPP)

$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[(\pi-t)\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}(+1)\,\frac{\cos(nt)}{n}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{n}$

so $f=\sum_{n\geq 1} b_n\,\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}$ CV ds L^2 $=\sum_{n\geq1}\frac{\sin(nt)}{n}$. Rq : la fct f est C^1 par morceaux dc th de Dirichlet : $(\forall t\in\mathbb{R})$,

$$\sum_{n\geq1}\frac{\sin(nt)}{n}=\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}=\begin{cases} f(t) & \text{si } t\neq 0\,[2\pi] \\ \dfrac{\frac{\pi}{2}+(-\frac{\pi}{2})}{2}=0 & \text{si } t=0\,[2\pi]. \end{cases}$$

2) $f\in L^2([0,2\pi])=L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. $\overset{?}{\Rightarrow} f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Soit K compact $\subset\mathbb{R}$. $\int_K|f|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{K\cap[2k\pi,2(k+1)\pi]}|f|\,dt$ $<\infty\ \forall k$ (*). Cette somme est finie (cf $K\cap[2k\pi,2(k+1)\pi]\neq 0$ si k assez petit / gd).

$\mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi,2(k+1)\pi]$

(*) $\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}|f|\,dt<\infty$ car $f\in L^2([2k\pi,2(k+1)\pi])$ $\Rightarrow f\in L^1([2k\pi,2(k+1)\pi])$ $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}}|f|\,dt<\infty$.

$\rightarrow f$ def la distribution régulière $T_f:\underset{\mathcal{D}(\mathbb{R})}{\varphi}\longmapsto\int_{\mathbb{R}}f\varphi\,dt$.

Mq également, $T_f=\sum_{n=1}^{\infty}T_{\frac{\sin(nt)}{n}}$ (CV ds $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

$T_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ssi $(\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}))$, $\langle T_n,\varphi\rangle\xrightarrow[n\to+\infty]{}\langle T,\varphi\rangle$

· Ici, soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Mq $\left\langle\sum_{n=1}^{N}T_{\frac{\sin(nt)}{n}},\varphi\right\rangle\xrightarrow[N\to+\infty]{}\langle T_f,\varphi\rangle$. Or, $\left\langle\sum_{n=1}^{N}T_{\frac{\sin(nt)}{n}},\varphi\right\rangle=\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nt)}{n}\varphi(t)\,dt$.

$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nt)}{n}\varphi(t)\,dt$

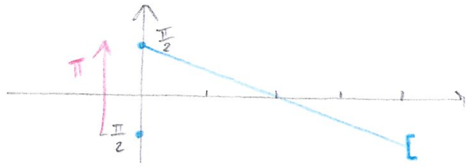
tous nuls sommes un nb fini, cf supp φ compact.

$\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(nt)}{n}}_{\downarrow L^2\ f}\,\middle|\,\varphi\right)_{L^2([2k\pi,2(k+1)\pi])}$

$\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}f\cdot\varphi\,dt=\int_{\mathbb{R}}f\cdot\varphi\,dt=\langle T_f,f\rangle$.

3) Calculons $(f)'$ de 2 manières différentes.

$$(T_f)' \underset{ex1}{=} T_{f'} + \left(\cdots + T_{\delta_{2\pi}} + T_{\delta_0} + T_{\delta_{2\pi}} + T_{\delta_{4\pi}} + \cdots \right)$$



f' existe pp et vaut $-\frac{1}{2}$. $\Rightarrow (T_f)' = T_{-\frac{1}{2}} + \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$. (1)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Lemme : si } (T_n)_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T \text{ ds } \mathcal{D}'(\Omega) \ \left(\text{ie si } (\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)) : \langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi\rangle\right) \\ \text{alors } (T_n')_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T'. \quad \text{La dérivation est linéaire et "continue" sur } \mathcal{D}'(\Omega).\end{array}}$$

dem : soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, mq $\langle T_n', \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T', \varphi\rangle$.

or $\langle T_n', \varphi\rangle = -\langle T_n, \varphi'\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\langle T, \varphi'\rangle = \langle T', \varphi\rangle$ ∎

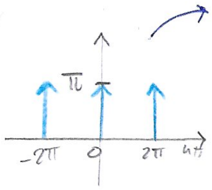
donc ici, $(T_f)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} T_{\frac{\sin(nt)}{n}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(T_{\frac{\sin(nt)}{n}}\right)'}_{T_{\cos(nt)}} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\cos(nt)}$ (2)

NB : $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt)$ ne CV pas ds $L^2([0,2\pi[)$!

$(1) = (2)$

$$\Rightarrow T_{-\frac{1}{2}} + \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \sum_{n\geqslant 1} T_{\cos(nt)} \approx T_{\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}}_{\text{peigne de Dirac}} = \underbrace{T_1 + \sum_{n\geqslant 1} \left(T_{e^{int}} + T_{e^{-int}}\right)}_{\sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{e^{int}}} \quad (**)$$



$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{int}$.

Rappel (trans de Fourier) si $f \in L(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\underset{\in\mathbb{R}}{\xi}) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\xi t}\, dt$.

. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\psi(t) = \varphi\left(\frac{t}{2\pi}\right)$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$(**) \Rightarrow \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}, \psi \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{e^{int}}, \psi \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\langle \delta_{2n\pi}, \psi\rangle}_{\psi(2n\pi) = \varphi(n)} = \frac{1}{2\pi} \left\langle \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{e^{-int}}, \psi \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\langle T_{e^{-int}}, \psi\rangle}_{} \to \int_{\mathbb{R}} e^{-int} \psi(t)\, dt$$

et $t = 2\pi s$
$dt = 2\pi ds$,

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2in\pi s} \underbrace{\psi(2\pi s)}_{\varphi(s)} 2\pi\, ds = 2\pi \hat{\varphi}(n).$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n)}$$