TD_7

ex 1

1) $(u|v)_{H^1} = (u|v)_{L^2} + (u'|v')_{L^2} = \int_0^1 uv\,dt + \int_0^1 u'v'\,dt$

clairement bilinéaire, symétrique et positive et $(u|u)_{L^2} + (u'|u')_{L^2} = 0 \Rightarrow \|u\|_{L^2} = 0 \Rightarrow u = 0$.

2) cours

3) $H_0^1(]0,1[) := \{u \in H^1(]0,1[) \mid u(0)=0,\ u(1)=0\}$. cf $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds$, $t \in [0,1]$

représentant de u qui est ds $C^0([0,1])$.

Il suffit de mq H_0^1 est une partie fermée (un sev de H^1).

Or, $H_0^1 = \operatorname{Ker} \delta_0 \cap \operatorname{Ker} \delta_1$ où $\delta_0 : \begin{array}{l} H^1 \to \mathbb{R} \\ u \mapsto u(0) \end{array}$ $\delta_1 : \begin{array}{l} H^1 \to \mathbb{R} \\ u \mapsto u(1) \end{array}$ qui sont linéaires et continues.

. $|\delta_0(u)| = |\delta_0 \cdot u| = |\underbrace{\langle \delta_0, u \rangle_{(H^1)', H^1}}_{(*)}| = |u(0)| \leq \|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1}$

$(*)\ \langle \varphi, x \rangle_{E',E} = \varphi(x) = \varphi \cdot x$.

. $|\delta_1(u)| = |u(1)| \leq \|u\|_\infty \leq \|u\|_{H^1}$

$\Rightarrow H_0^1$ sev fermé $\subset H^1$ hilbert $\Rightarrow (H_0^1, (\cdot|\cdot)_{H^1})$ e.h.

ex 2 Trouver $u \in C^2([0,1])$ tq ($f \in C^0([0,1])$ fixée) $(1) \begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t), & t \in]0,1[\\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases}$

1) Ⓐ Mq toute sol "forte" de ce pb est également sol "faible" de l'eq suivante : qlq soit $v \in H_0^1(]0,1[)$: $(u|v)_{H^1} = \int_0^1 fv\,dt$.

. Soit $u \in C^2$ sol de (1)
Soit $v \in H_0^1(]0,1[)$. $\int_0^1 (-u''+u)v\,dt = \int_0^1 fv\,dt$. $= \int_0^1 -u''v\,dt + \int_0^1 uv\,dt$

$[-u'v] + \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv\,dt$

$\overset{IPP}{\underset{H^1 \supset H_0^1}{\Rightarrow}}$ $\underbrace{\left[-u'v\right]_0^1}_{-u'(1)\underset{0}{v(1)} + u'(0)\underset{0}{v(0)}} + \int_0^1 (u'v' + uv)\,dt = \int_0^1 fv\,dt$ $(\forall v \in H_0^1)$

$\Rightarrow (u|v)_{H^1} = \varphi(v)$ (2).

2) Ⓑ Mq on a existence et unicité de sol faible ds $H_0^1(]0,1[)$

$\varphi : \begin{array}{l} H_0^1 \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \int_0^1 fv\,dt \end{array}$ linéaire et continue car $(\forall v \in H_0^1)$: $|\varphi(v)| = \left|\int_0^1 fv\,dt\right| = |(f|v)_{L^2}|$

$\leq \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2}$

Th de Riezs : $\exists! u \in H_0^1$ tq $(\forall v \in H_0^1)$: $(u|v)_{H^1} = \varphi(v)$

MAM4 – modél. des éléments finis

3) (C) Mq si $f \in C^0([0,1])$ so la sol faible appartient à $C^2([0,1])$. (Régularité)

Si $f \in C^0([0,1])$ on a $(\forall v \in \mathcal{D}(]0,1[) \subset H_0^1)$:

$$\underbrace{\int_0^1 u'v'\,dt + \int_0^1 uv\,dt}_{\langle u',v'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle u,v\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}} = \int_0^1 fv\,dt = \langle f,v\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

$-\langle (u')',v\rangle$

so $\langle T_{u'}, v'\rangle + \langle T_u, v\rangle = \langle T_f, v\rangle$

$\Rightarrow (\forall v \in \mathcal{D}(]0,1[))$: $\langle -u'', v\rangle + \langle u,v\rangle = \langle f,v\rangle$

$\Rightarrow -u'' + u = f$ dans $\mathcal{D}(]0,1[)$

$\Rightarrow u'' = \underbrace{u}_{\in H_0^1 \subset C^0} - \underbrace{f}_{\in C^0} \in C^0$

$\Rightarrow u'' \in C^0([0,1])$

$\Rightarrow u' \in C^1([0,1])$

$\Rightarrow u \in C^2([0,1])$.

4) (D) En déduire que si $f \in C^0([0,1])$, the sol faible est aussi sol forte.

u sol faible (et $u \in C^2([0,1])$) car $f \in C^0([0,1])$.

$\Rightarrow (\forall v \in H_0^1)$: $\int_0^1 u'v'\,dt + \int_0^1 uv\,dt = \int_0^1 fv\,dt$

$u' \in C^1$ so IPP possible

$\overset{IPP}{\underset{H_1}{\Rightarrow}} \ [u'v]_0^1 - \int_0^1 u''v\,dt + \int_0^1 uv\,dt = \int_0^1 fv\,dt$

$u'(1)\cancel{v(1)} - u'(0)\cancel{v(0)}$ 0 0 pcq $v \in H_0^1$

$\Rightarrow (\forall v \in \mathcal{D}(]0,1[))$ $\underbrace{\int_0^1 (-u''+u-f)v\,dt}_{(-u''+u-f \mid v)_{L^2}} = 0$

$\overline{\mathcal{D}(]0,1[)} = L^2 \Rightarrow -u''+u-f = 0$ ds L^2

$\Rightarrow -u''+u = f$ pp $t \in]0,1[$

$\Rightarrow -u''(t)+u(t) = f(t)$ $\forall t \in]0,1[$ puisque $u \in C^2$.

De plus, $u \in H_0^1 \Rightarrow u(0) = 0$

$u(1) = 0$