TD 1 – Calcul différentiel

▷ **Exercice 1.**

1.1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) := (x|y)$ est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.

1.2. Soient $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ deux applications dérivables. Montrer que l'application $k : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ définie par $k(x) := f(x)g(x)$ est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.

▷ **Exercice 2.**

2.1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{bmatrix} x_1 \cos(x_2 x_3) \\ -x_2 \sin(x_1 x_3) \end{bmatrix}$$

est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.

2.2. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ définie par

$$f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_1^2 \\ x_1 - x_2^3 \\ -x_2 + x_1^4 \end{bmatrix}$$

est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.

▷ **Exercice 3.** Soit $A \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^n$ et $c \in R$.

3.1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) := \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c$$

est dérivable et donner l'expression de son gradient.

3.2. Montrer que f est deux fois dérivable et donner son hessien.

▷ **Exercice 4.**

4.1. Soit $A \in \mathrm{M}(m, n, \mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^m$. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) := \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$$

est deux fois dérivable et donner l'expression de son gradient et de son hessien.

4.2. Soit $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ deux fois dérivable. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) := \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$$

est deux fois dérivable et donner l'expression de son gradient et de son hessien.

▷ **Exercice 5.** Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) := \|x\|$$

est deux fois dérivable et donner l'expression de son gradient et de son hessien.