TD_4

ex1 $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})^{rev}$: matrices carrées d'ordre n (coef réels)

1) $\mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \times \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(A|B) \longmapsto tr({}^tAB).$$

• **Bilinéarité** : clairement bilinéaire par linéarité de la transposition de la trace et bilinéarité du produit des matrices.

$$(\lambda A + B|C) = tr\left({}^t(\lambda A+B).C\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linéarité de transp.}}}{=} tr\left((\lambda {}^tA + {}^tB).C\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bilinéarité du prod}}}{=} tr(\lambda {}^tA.C + {}^tB.C) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lin de tr.}}}{=} tr(\lambda {}^tA.C) + tr({}^tB.C)$$

(et symétriquement)

• **Symétrie** : $(B|A) = tr({}^tB.A) \underset{\substack{\uparrow \\ tr({}^tA) = tr(A)}}{=} tr\left({}^t({}^tB.A)\right) = tr({}^tA.B) = (A|B)$.

• **Définie Positive** : • $(A|A) = tr({}^tAA) = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} A = 0$?

or $tr({}^tAA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 = 0 \Rightarrow (\forall i,j = 1,n) : a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$

• $(A|A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$.

Rq① (autre démo pr def pos)

${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$: sym réelle $\Rightarrow$ se diagonalise sur $\mathbb{R}$.

${}^tAA \geq 0 \Rightarrow$ semi-def pos.

$a \geq 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\ ax^2 \geq 0$

$[a] = 1\times 1$ $\quad ax.x$

$A_{n\times n}$ (sym) $\geq 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} (Ax|x)_{\mathbb{R}^n} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. en effet, $({}^tAAx|x)_{\mathbb{R}^n} = (Ax|Ax)$

où $(x|y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tx\,y$. $\qquad = \|Ax\|^2 \geq 0 \Rightarrow {}^tAA \geq 0$.

$\Leftrightarrow$ ttes les val propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

$tr\,{}^tAA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0$

$\Downarrow$

$= 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow {}^tAA = 0 \Rightarrow A = 0$.

Rq② $(A|B)_{\substack{\mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \\ F(\text{frobénius})}} = tr({}^tA.B)$ $\qquad$ ($\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) = n^2$)

base canonique $E_{ij} = i\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$ $\quad i,j = 1,n$.

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ik}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \\ \vdots \\ b_{1n} \\ b_{nn} \end{bmatrix} \right)_{\mathbb{R}^{n^2}}$$

"vectorise" A

2) Soient X, Y et A dans $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$. Mq ce produit scalaire possède les propriétés suivantes.

(i) $({}^tX \mid {}^tY) = tr\left({}^t({}^tX)\,{}^tY\right)$

$= tr(X\,{}^tY)$

$= tr({}^tY\,X)$

$= (Y \mid X)$

$= (X \mid Y)$

$tr(AB) = tr(BA)$

$\Uparrow$

$BA = A^{-1}(AB)A$

$\uparrow$

si A inv

(ii) $(AX \mid Y) = tr\left({}^t(AX)Y\right) = tr\left({}^tX({}^tAY)\right) = (X \mid {}^tAY)$.

par analogie avec $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ et $A_{n\times n}$, x et $y \subset \mathbb{R}^n$:

$$(Ax \mid y)_{\mathbb{R}^n} = {}^t(Ax).y = {}^tx\,{}^t(Ay) = (x \mid {}^tAy)_{\mathbb{R}^n}$$

3) $O \in \mathcal{O}(n,\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tO.O = O.{}^tO = I_n$

$\hat{}$ $GL(n,\mathbb{R})$ $\Leftrightarrow O \in \underbrace{GL(n,\mathbb{R})}_{\text{mat inv}}$ et $O^{-1} = {}^tO$.

$\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de O forment une B.O.N. de $\mathbb{R}^n$ (Base orthonormée)

. Si $O \in \mathcal{O}(n,\mathbb{R})$, $\forall X \in M(n,\mathbb{R})$

$\|OX\|^2 = (OX \mid OX) = (X \mid \underbrace{{}^tOO}_{I}X) = (X \mid X) = \|X\|^2$ isométrie.

$A = (a_{ij})_{i,j=1,n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$.

ex 2

$L^2([0,2\pi]) = L^2([0,2\pi], \mathbb{R}_{[0,2\pi]}, \mu_L) = \left\{ x : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt < \infty \right\}$

μ_L : $\uparrow dt$; x : $\uparrow$ "classes de fcts"

. $(x|y)_{L^2} = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt$

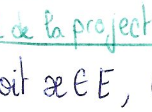
. $\|x\|_{L^2} = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt}$.

$(L^2, (\cdot|\cdot))$ $\underbrace{\text{evn complet}}_{\text{Banach}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Hilbert}}$.

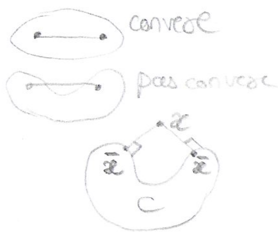
cours

Th de la project° Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert.

- soit $x \in E$, C convexe, fermé, $\neq \emptyset$ alors $(\exists!\, \bar{x} \in C)$: $\|x - \bar{x}\| = \operatorname{Inf}_{y \in C} \|x - y\|$.



ce pt s'appelle le projeté orthogonal de x sur C.



- $C \subset E$ ev, C convexe $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,y) \in C^2)$ $[x,y] \subset C$ $\quad \{(1-\lambda)x + \lambda y,\ \lambda \in [0,1]\}$

- De plus, ce projeté orthogonal est caractérisé par l'inéquation variationnelle suivante

$$(\forall y \in C) : (x - \bar{x} \mid y - \bar{x}) \leqslant 0 .$$

- $F = \mathrm{Vect}(\{\sin, \cos\})$

$$\cos \in L^2([0,2\pi]) \iff \underbrace{\int_0^{2\pi} \underbrace{|\cos(t)|^2}_{\leqslant 1} dt}_{\leqslant 2\pi < \infty} < \infty$$

continue sur compact $[0,2\pi]$

(idem pr sin, exp)

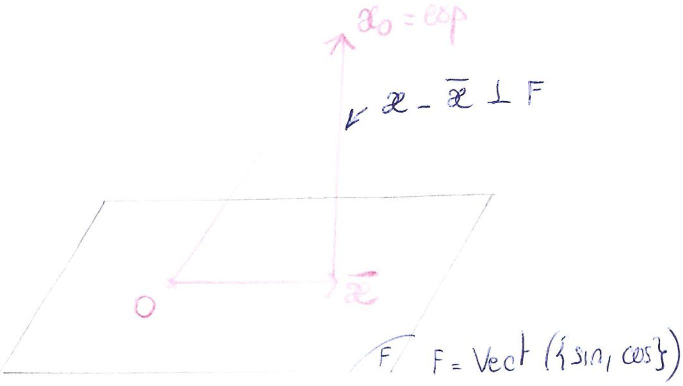
$\dim_{\mathbb{R}} F \leqslant 2 \; (=2)$, $2 < \infty$

sev de dim $< \infty$ de $L^2([0,2\pi])$.

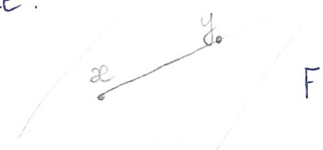
- $F \neq \emptyset$: F sev $\Rightarrow F \neq \emptyset \; (0 \in F)$

$F \simeq \mathbb{R}^2 \; (\dim F = 2)$

- F fermée : F sev de dim $< \infty \Rightarrow F$ partie complète
$\Rightarrow F$ partie fermée



- F convexe.



F sev $\Rightarrow F$ convexe

$$(\forall y \in F) : (x - \bar{x} \mid y - \bar{x}) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow (x - \bar{x} \mid \underbrace{(\underset{\in F}{y} + \underset{\in F}{\bar{x}})}_{\in F \text{ sev}} - \bar{x}) .$$

$\Rightarrow (x - \bar{x} \mid y) \leqslant 0$

$\Rightarrow (x - \bar{x} \mid -y) \leqslant 0$

$y \in F \Rightarrow -y \in F$ (F sev)

$\Rightarrow (\forall y \in F) : (x - \bar{x} \mid y) = 0$ soit $x - \bar{x} \perp F$.

- $\bar{x} \in F \Rightarrow (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2)$ $\bar{x} = a \cos + b \sin$

2 inconnues

- $x - \bar{x} \perp F \Rightarrow \begin{cases} (x_0 - \bar{x} \mid \cos) = 0 \\ (x_0 - \bar{x} \mid \sin) = 0 \end{cases}$ 2 équat° linéaires

$\Rightarrow (\bar{x} | \cos) = (x_0 | \cos) = (\exp | \cos) = \int_0^{2\pi} e^t \cos(t)\, dt$

$\| $

$(a\cos + b\sin | \cos)$

$=$

$a(\cos|\cos) + b(\sin|\sin)$

système 2×2
(nécessairement inversible)

De même, $a(\cos|\sin) + b(\sin|\sin) = (\exp|\sin)$

$$\Rightarrow A . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (\exp|\cos) \\ (\exp|\sin) \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} (\cos|\cos) & (\cos|\sin) \\ (\cos|\sin) & (\sin|\sin) \end{bmatrix}$$ mat de Gram

Rq : on est en train de résoudre le pb du meilleur approximant (au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$) de exp par une combinaison linéaire en cos, sin.

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \left| e^t - \overbrace{(a.\cos t + b\sin t)}^{y \in F} \right|^2 \longrightarrow \min \\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

- $(\exp|\cos) = \int_0^{2\pi} e^t \cos(t)\, dt = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} e^t e^{it}\, dt = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} e^{(i+1)t}\, dt.$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(1+i)t}}{(1+i)}\right]_0^{2\pi} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+i)2\pi} - 1}{1+i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2\pi} - 1}{1+i}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left((1-i)\frac{e^{2\pi} - 1}{2}\right) = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}.$$

- $(\exp|\sin) = \mathrm{Im}\left(\int -\right) = -\frac{e^{2\pi} - 1}{2} = \frac{1 - e^{2\pi}}{2}.$

- $(\cos|\cos) = \int_0^{2\pi} (\cos(t))^2\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$

- $(\sin|\sin) = \pi$ (same)

- $\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(t)\cos(t)}_{\frac{\sin(2t)}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ so $a = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$, $b = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi}$

$$\Rightarrow \underbrace{\Pi_F \exp}_{\bar{x} = a\cos + b\sin} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} (\cos - \sin)$$

ex 3 . $\ell^2 = \{X = (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n^\infty |x_n|^2 < \infty\}$

. $\underset{(x_n)_n}{(X} \mid \underset{(y_n)_n}{Y)} = \sum_{n=0}^\infty x_n \cdot y_n \left(= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^N x_n y_n\right)$.

Vérifions que cette application

$(\cdot|\cdot) : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(X, Y) \longmapsto \sum_{n=0}^\infty x_n y_n$ est bien déf.

→ Soient X et $Y \in \ell^2$.

$$\sum_{n=0}^\infty \underbrace{|x_n y_n|}_{\geq 0} \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{|x_n|^2 + |y_n|^2}{2} < \infty$$

$(a-b)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq |ab|$

$\Rightarrow \sum_n x_n y_n$ converge normalement $\left(\sum_{n=0}^\infty x_n y_n < \infty\right)$

et $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ étant complet, CV normale $\Rightarrow$ CV pour les séries donc $\sum_n x_n y_n$ CV.

. Bilinéarité : $(\lambda X + Y \mid Z) = \sum_n (\lambda x_n + y_n \mid z_n) = \sum_{n=0}^\infty (\lambda x_n \cdot z_n + y_n z_n)$

continuité du produit scalaire et de la somme. → $= \lambda \sum_n x_n z_n + \sum_n y_n \cdot z_n = \lambda (x \mid z) + (y \mid z)$

. Symétrie : $(Y \mid X) = \sum_n y_n x_n = \sum_n x_n y_n = (X \mid Y)$.

. Déf. Positivité :

* positivité : $(X \mid X) = \sum_n x_n^2 = \sum_n |x_n|^2 \geq 0$

* définie : $(X \mid X) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{n=0}^\infty \underbrace{|x_n|^2}_{\geq 0}$

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) : |x_n|^2 = 0$ ie $x_n = 0$ $\Rightarrow X = (0)_{\ell^2}$.

$(\ell^2, (\cdot|\cdot))$ pré-hilbertien.

TD3 $\Rightarrow (\ell^2, (\cdot|\cdot))$ e.h.

2) $G_k = \{\underset{(x_n)_n}{X} \in \ell^2 \mid \underbrace{\sum_{n=0}^{k-1} x_n}_{=(X \mid X_k)} = 0\}$. $k \geq 1$

avec $X_k = (1, \dots, 1, 0, \dots) \in \ell^2$.

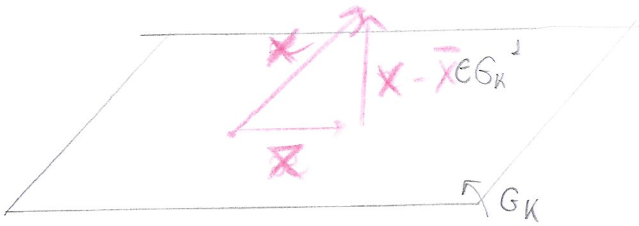
cf $(X \mid X_k) = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot 1 + \dots + x_{k-1} \cdot 1 + \underbrace{x_k \cdot 0 + x_{k+1} \cdot 0 + \dots}_{0} = \sum_{n=0}^{k-1} x_n$.

$\Rightarrow G_k = \{X_k\}^\perp \Rightarrow G_k$ sev fermé. $\left(\Rightarrow \underbrace{\text{Vect}\{X\}}_{\text{dim } 1} \oplus \{X_k\}^\perp = \underbrace{\ell^2}_{\text{dim } \infty}\right)$

3) $X = \{1, 0, \dots\dots, 0, \dots\} \in \ell^2$.

$$\underbrace{d(X, G_K)}_{\text{distance point à une partie}} = \inf_{Y \in G_K} \|X - Y\| \underset{\text{th de la projecto}}{=} \|X - \bar{X}\| \quad \text{où} \quad \bar{X} = \Pi_{G_K} X.$$

puisque $\begin{cases} G_K \text{ sev} \\ G_K \text{ fermé} \end{cases} \Rightarrow G_K$ convexe et $\neq \emptyset$ il suffit de calculer $\bar{X}$. or $\bar{X}$ caractérisé par :



$$\Rightarrow X - \bar{X} \in \left(\{X_K\}^{\perp}\right)^{\perp} = \{X_K\}^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\{X_K\}} \xleftarrow{\text{dim } 1 < \infty \Rightarrow \text{fermé}} = \mathrm{Vect}\{X_K\} = \{\lambda x_K \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\Rightarrow (\exists \underset{\text{1 inconnue}}{\lambda} \in \mathbb{R}) : X - \bar{X} = \lambda X_K.$$

De plus, $\bar{X} \in G_K = \{x_K\}^{\perp} \Rightarrow (\bar{X} \mid X_K) = 0$

$$\Rightarrow (X - \lambda X_K \mid X_K) = 0$$

$$\Rightarrow (X \mid X_K) - \lambda (X_K \mid X_K) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(X \mid X_K)}{(X_K \mid X_K)}.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (X, X_K) = 1 \\ (X_K, X_K) = K \end{array} \quad \text{so } \lambda = \frac{1}{K}}$$

$$\begin{aligned} d(X, G_K) &= \|X - \bar{X}\| \\ &= \|\lambda X_K\| \\ &= |\lambda| \, \|X_K\| \\ &= \frac{1}{K} \sqrt{K} \end{aligned}$$

$$\boxed{d(X, G_K) = \frac{1}{\sqrt{K}} > 0}$$

ex 4 $\begin{cases} \min \int_{[-1,1]} |x^5 - a_4x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0|^2 \, dx \\ a = (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \min \int_{-1}^{1} |x^5 - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)|^2 \, dx \\ a = (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-1}^{1} |f(x) - P(x)|^2 \, dx \\ P(x) \in \mathbb{R}_4[x] = \{P \in \underset{\uparrow \text{polynôme}}{\mathbb{R}[x]} \mid \deg P \leq 4\} \end{cases} \qquad \text{où } f : \begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^5. \end{array}$$

$\Leftrightarrow \min \|f - P\|^2_{L^2([-1,1])}$ $P \in \mathbb{R}_4[x]$ où $L^2([-1,1], \mathcal{B}[-1,1], \mu_L = dx)$ muni du prod scalaire.

$(f|g)_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x) \, dx$ est un e.h $\left(\Rightarrow \|f\|_{L^2} = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_{-1}^{1} |f|^2 dx} \right)$

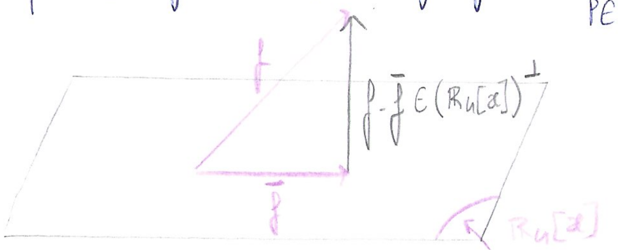
Or, $\mathbb{R}_4[x] \subset C^0([-1,1]) \subset L^2([-1,1])$ et $\mathbb{R}_4(X)$ est un sev de $L^2([-1,1])$, de dim $4+1 = 5 < \infty$

$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$: Base.

$\Rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ sev fermé

$\Rightarrow \mathbb{R}_4[x]$ convexe, fermé, $\neq \emptyset$.

Le th de la projection implique que $(\exists! \bar{f} \in \mathbb{R}_4[X]) : \|f - \bar{f}\|_{L^2} = \operatorname{Inf}_{P \in \mathbb{R}^4[X]} \|f - P\|_{L^2}$ et cet $\bar{f}$ est caractérisé par :



• $f - \bar{f} \in \mathbb{R}_4[x]^{\perp} \Rightarrow \forall i \in \{0, \dots, 4\} : \underbrace{(f - \bar{f} \mid x^i)_{L^2} = 0}_{5 \text{ équations}}$

• $\bar{f} \in \mathbb{R}_4[X] \Rightarrow (\exists (a_0, \dots, a_5) \in \mathbb{R}^5) : \bar{f} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \Big\}$ 5 inconnues

$\Rightarrow A.a = b$, $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$ avec $\begin{cases} A^{5\times 5} = ? \\ \underset{\in \mathbb{R}^5}{b} = ? \end{cases}$

$(a_0 + a_1x + \dots + a_4x^4 \mid x^i) = (x^5 \mid x^i)$ $i \in [|0,4|]$

$a_0(1|x^i) + a_1(x|x^i) + \dots + a_4(x^4|x^i) = (x^5|x^i)$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} (1|1) & (x|1) & \cdots & (x^4|1) \\ (1|x) & (x|x) & \cdots & (x^4|x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (1|x^4) & & & (x^4|x^4) \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & (x^i|x^j) & \\ & & \end{bmatrix} \end{array} 5\times 5 \quad i,j = 0, \dots, 4 \qquad b = \begin{bmatrix} (x^5|1) \\ \vdots \\ (x^5|x^4) \end{bmatrix} 5$$

$i,j \geq 0 \Rightarrow (x^i | x^j) = \int_{-1}^{1} \underbrace{x^i x^j}_{x^{i+j}} \, dx = 0$ si $i+j$ impair

$= \dfrac{2}{i+j+1}$ si $i+j$ pair

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 & 0 \\ 2/5 & 0 & 2/7 & 0 & 2/9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/7 \\ 0 \\ 2/9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si on réordonne les variables et les équations dans l'ordre $0,2,4,1,3$; on a le sys sous la forme :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2/3 & 2/5 & & \\ 2/3 & 2/5 & 2/7 & & 0 \\ 2/5 & 2/7 & 2/9 & & \\ \hline & 0 & & 2/3 & 2/5 \\ & & & 2/3 & 2/7 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 2/7 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

Par bloc,

- le sys 3×3 en $[a_0, a_2, a_4]$ est inversible so $(a_0, a_2, a_4) = (0,0,0)$

- le sous-sys 2×2 en $[a_1, a_3]$:

$$a_1 = \frac{\begin{bmatrix} 2/7 & 2/5 \\ 2/9 & 2/7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2/3 & 2/5 \\ 2/5 & 2/7 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{4}{49} - \frac{4}{45}}{\frac{4}{21} - \frac{4}{25}} = \frac{\frac{-4}{49\cdot 45}}{\frac{4}{21\cdot 25}} = \frac{-21\cdot 25}{49\cdot 45} = -\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9} = -\frac{5}{21}$$

$$a_3 = \frac{\begin{bmatrix} 2/3 & 2/7 \\ 2/5 & 2/9 \end{bmatrix}}{\left[4\cdot\frac{4}{21\cdot 25}\right]} = \frac{\frac{4}{27} - \frac{4}{35}}{4\cdot\frac{4}{21\cdot 25}} = \frac{\frac{8}{27\cdot 35}}{\frac{4}{21\cdot 25}} = 2\cdot\frac{21\cdot 25}{27\cdot 35} = 2\,\frac{3\cdot 25}{27\cdot 5} = 2\cdot\frac{5}{9} = \frac{10}{9}$$

La solution est $(a_0 - a_4) = \left(0, -\frac{5}{21}, 0, \frac{10}{9}, 0\right)$.

cad que : la meilleure approximation (au sens de la norme $L2$ sur $[-1,1]$ de $f(x) = x^T$ de degré au plus 4 est : $\bar{f}(x) = -\frac{5}{21}x + \frac{10}{9}x^3$).