TD 6 – Distributions

▷ **Exercice 1.** Soient f_1 et f_2 des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et soit f la fonction définie par $f(x) = f_1(x)$ si $x < 0$, $f(x) = f_2(x)$ si $x > 0$ (la valeur $f(0)$ étant arbitraire).

1.1. Montrer que f appartient à $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ et définit une distribution régulière notée $T_f \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

1.2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et montrer que sa dérivée définit également une distribution régulière notée $T_{f'} \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

1.3. Montrer la "formule de saut"

$$(T_f)' = T_{f'} + (f_2(0) - f_1(0))\delta.$$

▷ **Exercice 2.** Soit p un entier naturel, $p \geq 1$. Déterminer $x\delta^{(p)}$.

▷ **Exercice 3.** On pose, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$,

$$\mathrm{vp}_{1/x}(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

3.1. Montrer qu'on définit ainsi une distribution sur $\mathbf{R}$, appelée "valeur principale de $1/x$".

3.2. Montrer que la fonction $\ln|x|$ définit une distribution régulière sur $\mathbf{R}$, et vérifier que $T'_{\ln|x|} = \mathrm{vp}_{1/x}$.

3.3. Déterminer $x \cdot \mathrm{vp}_{1/x}$.

▷ **Exercice 4.** On considère l'équation différentielle

$$xy'(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

4.1. Résoudre l'équation (1) dans $\mathscr{C}^1(\mathbf{R})$.

4.2. Montrer qu'une solution dans $\mathscr{C}^1(\mathbf{R})$ de cette équation vérifie également l'équation

$$\int_{\mathbf{R}} y(x)(x\varphi(x))' \, \mathrm{d}x = 0, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R}). \tag{2}$$

4.3. Montrer que la fonction de Heaviside, $H = 1_{\mathbf{R}_+}$, vérifie (2).

4.4. Résoudre l'équation $xT' = 0$ dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

▷ **Exercice 5.** On définit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par $f(x) = (\pi - x)/2$ sur $[0, 2\pi[$, et en prolongeant la fonction sur tout $\mathbf{R}$ par 2π-périodicité.

5.1. Montrer que f appartient à $\mathrm{L}^2_{2\pi}(\mathbf{R})$ et calculer sa série de Fourier.

5.2. Montrer que f définit une distribution régulière, notée T_f, et déduire de la question précédente que

$$T_f = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$$

dans $\mathscr{D}'(R)$.

5.3. En déduire la formule de Poisson dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} = 2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta_{2n\pi}.$$

5.4. En déduire, pour $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$, la formule

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \varphi(n).$$

NB. On rappelle que, pour $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$, on définit la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ par

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbf{R}} \varphi(t) e^{-2i\pi\xi t}\, \mathrm{d}t.$$