TD 4 – Projection, orthogonalité

▷ **Exercice 1.** Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$, on rappelle que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1.1. Montrer que l'application $(.|.)$ de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R}) \times \mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$(X|Y) = \mathrm{tr}({}^tXY)$$

définit un produit scalaire qui fait de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$ un espace euclidien. La norme matricielle associée s'appelle la *norme de Frobenius*.

1.2. Soient X, Y et A dans $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$, montrer que ce produit scalaire possède les propriétés suivantes :

(i) $({}^tX|{}^tY) = (X|Y)$

(ii) $(AX|Y) = (X|{}^tAY)$.

1.3. Soit $O \in \mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ une matrice orthogonale, montrer que l'application $X \mapsto OX$ est une isométrie de $\mathrm{M}(n, \mathbf{R})$.

▷ **Exercice 2.** On rappelle que $\mathrm{L}^2([0, 2\pi], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$(x|y) = \int_{[0,2\pi]} xydt$$

est un espace de Hilbert. Soit $F = \mathrm{Vect}(\{\sin, \cos\})$, et soit x_0 défini par $x_0(t) = e^t$. Justifier que x_0 possède un unique projeté orthogonal sur F et le calculer.

▷ **Exercice 3.**

3.1. Montrer que l'espace

$$\ell^2 = \{X = (x_n)_n \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \sum_n |x_n|^2 < \infty\}$$

muni du produit scalaire $(X|Y) = \sum_n x_n y_n$ est un espace de Hilbert.

3.2. Soit $G_k = \{X \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{k-1} x_n = 0\}$ (où $k \geq 1$ est fixé). Justifier que G_k est un sev fermé de ℓ^2.

3.3. Soit $X = (1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell^2$, évaluer $d(X, G_k)$, la distance de X à G_k.

▷ **Exercice 4.** Résoudre le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min \int_{[-1,1]} |x^5 - a_4x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0|^2 dx \\ a = (a_0, \dots, a_4) \in \mathbf{R}^5. \end{cases}$$