Examen

Durée 2H00. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

▷ **Exercice 1** (4 points)**.** Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{bmatrix} (x_1 + x_2)\exp(x_2 - x_3) \\ x_3 \sin(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}$$

est dérivable et donner l'expression de sa dérivée. (Le symbole exp désigne l'exponentielle.)

► Les dérivées partielles de chaque composante de l'application existent et sont continues, la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1$ (et en particulier dérivable). On a

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \exp(x_2 - x_3) & (1 + x_1 + x_2)\exp(x_2 - x_3) & -(x_1 + x_2)\exp(x_2 - x_3) \\ 2x_1 x_3 \cos(x_1^2 + x_2^2) & 2x_2 x_3 \cos(x_1^2 + x_2^2) & \sin(x_1^2 + x_2^2) \end{bmatrix}.$$

▷ **Exercice 2** (5 points)**.** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, définie par $f(t) = \pi/2 - |t|$ sur $[-\pi, \pi[$, et prolongée par 2π-périodicité à tout $\mathbf{R}$.

2.1. Donner l'expression de la série de Fourier de f sur la base hilbertienne des polynômes trigonométriques.

► La fonction est paire donc tous les b_n sont nuls et

$$a_{2p} = 0, \quad a_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)^2\sqrt{\pi}}, \quad p \geq 0.$$

2.2. En appliquant Dirichlet en un instant t bien choisi, déterminer la somme de la série

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

► En appliquant Dirichlet (la fonction est $\mathscr{C}^1$ par morceaux) en $t = 0$ ou en $t = \pm\pi$ (points en lesquels la fonction est continue),

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2.3. En appliquant Parseval, déterminer la somme de la série

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

► On trouve $\|f\|^2 = \pi^3/6$, d'où

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

▷ **Exercice 3** (5 points)**.** On cherche les distributions S dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ qui vérifient

$$xS' = T_x \tag{1}$$

où T_x désigne la distribution régulière telle que $\langle T_x, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

3.1. Calculer xT_1 (où T_1 désigne la distribution régulière associée à la fonction constante égale à 1).

►

$$xT_1 = T_x$$

3.2. En déduire que $S \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ est solution de (1) si et seulement si

$$x(S - T_x)' = 0.$$

► On a S solution si et seulement si $xS' = xT_1$, c'est-à-dire si et seulement si (utiliser $(T_x)' = T_1$)

$$x(S - T_x)' = 0.$$

3.3. En déduire que $S \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ est solution de (1) si et seulement si

$$(S - T_x - cT_H)' = 0$$

où $H = 1_{\mathbf{R}_+}$ désigne la fonction de Heaviside, et où $c \in \mathbf{R}$ est une constante.

► On sait que $x(S-T_x)'=0$ si et seulement s'il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que $(S-T_x)'=c\delta$; comme $\delta=(T_H)'$, cette équation se réécrit

$$(S-T_x-cT_H)'=0.$$

3.4. En déduire l'ensemble des solutions de (1) dans $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$.

► Les solutions sont donc les distributions $S=T_x+cT_H+d$, avec c et d deux constantes arbitraires dans $\mathbf{R}$.

▷ **Exercice 4** (6 points)**.** On considère le problème avec conditions aux limites *périodiques* suivant : trouver $u\in\mathscr{C}^2([0,1])$ telle que

$$-u''(t)+u(t)=f(t),\quad t\in]0,1[,$$

$$u(0)=u(1),\quad u'(0)=u'(1),$$

où f est une fonction donnée de $\mathscr{C}^0([0,1])$.

4.1. On définit

$$H:=\{u\in\mathrm{H}^1(]0,1[)\mid u(0)=u(1)\}.$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ comme noyau d'une forme linéaire continue que l'on précisera.

► On $H=\ker\psi$ avec $\psi:\mathrm{H}^1(]0,1[)\to\mathbf{R}$, $\psi(u):=u(0)-u(1)$, linéaire (évident) et continue puisque

$$|\psi(u)|=|u(0)-u(1)|\le 2\|u\|_\infty\le 2\|u\|_{\mathrm{H}^1}.$$

4.2. On déduit de la question précédente que H, muni du produit scalaire de $\mathrm{H}^1(]0,1[)$, est également un espace de Hilbert. Montrer que toute solution ("forte") u de ce problème est également solution ("faible") de l'équation suivante : quel que soit $v\in H$,

$$(u|v)_{H^1}=\int_0^1 fv\,\mathrm{d}t.$$

► Si u est solution forte, en multipliant par $v\in H$ et en intégrant par parties,

$$[-u'v]_0^1+(u|v)_{\mathrm{H}^1}=\int_0^1 fv\,\mathrm{d}t,$$

et le terme entre crochets est nul parce-que $u'(0)=u'(1)$ et $v(0)=v(1)$.

4.3. Montrer qu'on a existence et unicité de solution faible dans H.

► Il suffit d'appliquer le théorème de Riesz à la forme linéaire continue $\varphi : H \to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(v) := \int_0^1 f v \, \mathrm{d}t.$$

La linéarité est évidente, et la continuité vient de Cauchy-Schwarz,

$$|\varphi(v)| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2} \|v\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2} \|v\|_{\mathrm{H}^1}.$$

4.4. Montrer que la solution faible vérifie, au sens des distributions, l'équation suivante dans $\mathscr{D}'(]0,1[)$:

$$-(T_u)'' + T_u = T_f.$$

► Pour tout $v \in \mathscr{D}(]0,1[) \subset H$, on a

$$\int_0^1 u'v' \, \mathrm{d}t + \int_0^1 uv \, \mathrm{d}t = \int_0^1 f v \, \mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire (noter que $T_{u'} = (T_u)'$ puisque u appartient à $\mathrm{H}^1(]0,1[)$)

$$\langle (T_u)', v' \rangle + \langle T_u, v \rangle = \langle T_f, v \rangle,$$

d'où l'on tire que $-(T_u)'' + T_u = T_f$ dans $\mathscr{D}'(]0,1[)$.

4.5. On déduit de la question précédente que la solution est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ et qu'elle vérifie, pour tout $t \in]0,1[$, l'équation

$$-u''(t) + u(t) = f(t).$$

Montrer finalement que cette solution faible est aussi solution forte.

► En intégrant par parties (licite car la solution faible est de classe $\mathscr{C}^2$), pour tout $v \in H$ on a

$$0 = [u'v]_0^1 + \int_0^1 (\underbrace{-u'' + u - f}_{=0}) v \, \mathrm{d}t = u'(1)v(1) - u'(0)v(0),$$

d'où l'on tire $u'(0) = u'(1)$ (prendre $v = 1$). Comme u appartient à H, elle vérifie aussi $u(0) = u(1)$.