TD 7 – Problèmes aux limites

▷ **Exercice 1.** On considère le sous-espace vectoriel $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ de $\mathrm{L}^2(]0,1[)$ des classes de fonctions dont la dérivée au sens des distributions appartient encore à $\mathrm{L}^2(]0,1[)$: $u \in \mathrm{H}^1(]0,1[)$ si et seulement s'il existe $v \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(]0,1[)$,

$$\int_0^1 u\varphi' \,\mathrm{d}t = -\int_0^1 v\varphi \,\mathrm{d}t.$$

1.1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ en posant

$$(u|v)_{H^1} := (u|v)_{\mathrm{L}^2} + (u'|v')_{\mathrm{L}^2}.$$

1.2. Montrer que $\mathrm{H}^1(]0,1[)$, muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

1.3. En utilisant le fait que pour tout u dans $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ on a (existence d'un représentant continu tel que)

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(t)\,\mathrm{d}t, \quad t \in [0,1],$$

montrer que le sous-espace vectoriel $\mathrm{H}^1_0(]0,1[)$ de $\mathrm{H}^1(]0,1[)$ des (classes de) fonctions u telles que $u(0) = u(1) = 0$ est également un espace de Hilbert pour ce produit scalaire.

▷ **Exercice 2.** On considère le problème avec conditions aux limites *de Dirichlet* suivant : trouver $u \in \mathscr{C}^2([0,1])$ telle que

$$-u''(t) + u(t) = f(t), \quad t \in]0,1[,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

où f est une fonction donnée de $\mathscr{C}^0([0,1])$.

2.1. Montrer que toute solution ("forte") u de ce problème est également solution ("faible") de l'équation suivante : quel que soit $v \in \mathrm{H}^1_0(]0,1[)$,

$$(u|v)_{H^1} = \int_0^1 fv\,\mathrm{d}t.$$

2.2. Montrer qu'on a existence et unicité de solution faible dans $\mathrm{H}_0^1(]0,1[)$.

2.3. Montrer que, si $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$, la solution faible appartient à $\mathscr{C}^2([0,1])$.

2.4. En déduire que, si $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$, toute solution faible est aussi solution forte.

▷ **Exercice 3.** On considère le problème avec conditions aux limites *mixtes* suivant : trouver $u \in \mathscr{C}^2([0,1])$ telle que

$$-u''(t) + u(t) = f(t), \quad t \in]0,1[,$$

$$u(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

où f est une fonction donnée de $\mathscr{C}^0([0,1])$. Proposer une formulation variationnelle de ce problème, puis résoudre.