Exam CC no. 1

Durée 1H30. Tous les exercices sont indépendants. Le barème prévisionnel est indiqué pour chaque exercice. Documents autorisés : une feuille de notes de cours recto-verso manuscrite.

▷ **Exercice 1** (3 points)**.** Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2) := \begin{bmatrix} x_1 x_2 \exp(x_1) - x_2^2 \\ x_2^2 \cos(x_1 - x_2^2) \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

est dérivable et donner l'expression de sa dérivée.

► Les dérivées partielles de chaque composante de l'application existent et sont continues, la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1$ (et en particulier dérivable). On a

$$f'(x) = \begin{bmatrix} (x_2 + x_1 x_2)\exp(x_1) & x_1 \exp(x_1) - 2x_2 \\ -x_2^2 \sin(x_1 - x_2^2) & 2x_2 \cos(x_1 - x_2^2) + 2x_2^3 \sin(x_1 - x_2^2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

▷ **Exercice 2** (4 points)**.**

2.1. Montrer que l'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) := \ln(1 + \|x\|^2)$$

est dérivable et donner l'expression de son gradient. La norme désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$,

$$\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}.$$

► L'application est dérivable comme composée d'applications dérivables, $x \mapsto \|x\|^2 \mapsto \ln(1 + \|x\|^2)$, d'où

$$\nabla f(x) = \frac{2x}{1 + \|x\|^2}.$$

2.2. Montrer que ∇f est également dérivable et donner l'expression du hessien de f.

▶ Le gradient est dérivable comme produit (vecteur × scalaire, bilinéaire) et composition d'applications dérivables, et

$$\nabla^2 f(x) = \frac{2(1+\|x\|^2)I - 4x\,{}^t x}{(1+\|x\|^2)^2}.$$

▷ **Exercice 3** (6 points).

3.1. Mettre l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = x(t) - 1$$

sous la forme $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ avec $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ que l'on précisera.

▶

$$f(t, x) = x - 1$$

3.2. Étant donné $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}^2$, justifier que l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = x(t) - 1, \quad x(t_0) = x_0,$$

possède une unique solution maximale.

▶ L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$, donc le théorème des accroissements finis permet d'affirmer qu'elle est localement lipschitzienne en x. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc et garantit l'existence et l'unicité de solution maximale pour toute condition initiale.

3.3. Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = x(t) - 1, \quad x(0) = 1.$$

▶ $x(t) = 1$, pour tout $t \in \mathbf{R}$

3.4. On considère l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = x(t) - 1, \quad x(0) = 2.$$

Justifier que sa solution maximale est toujours strictement supérieure à 1, et déterminer cette solution maximale.

▶ Si la solution prenait la valeur 1, elle serait identiquement égale à 1 (ce qui est interdit par la condition intiale). Donc $x(t) \neq 1$ pour tout t de l'intervalle de définition (en vertu de l'unicité de solution) et, par continuité, soit $x(t) > 1$, soit $x(t) < 1$. Vu la condition initiale, on a constamment $x(t) > 1$. On peut donc résoudre le problème posé en divisant pour "séparer les variables" :

$$\mathrm{d}x/(x-1) = \mathrm{d}t,$$

soit, en intégrant,

$$\ln\left|\frac{x(t)-1}{x(0)-1}\right| = \ln(x(t)-1) = t,$$

On obtient

$$x(t) = e^t + 1, \quad t \in \mathbf{R},$$

qui est nécessairement maximale puisque définie sur tout $\mathbf{R}$.

▷ **Exercice 4** (7 points)**.** On rappelle que ℓ^p, l'ensemble des suites réelles de puissance p-ième sommable, est défini comme suit :

$$\ell^p := \{(x_k)_k \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}, \quad p \geq 1.$$

4.1. Montrer qu'on définit une norme sur ℓ^1 en posant

$$\|(x_k)_k\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|.$$

► (i) La positivité est évidente, et $\sum_k |x_k| = 0$ implique $|x_k| = 0$ pour tout k (série à termes positifs), donc $(x_k)_k$ est bien la suite nulle ; (ii) soit $\lambda \in \mathbf{R}$, $\sum_k |\lambda x_k| = \lim_{K\to\infty} |\lambda| \sum_{k=0}^{K} |x_k| = |\lambda| \sum_k |x_k|$; (iii) $\sum_k |x_k + y_k| \leq \sum_k (|x_k| + |y_k|) = \sum_k |x_k| + \sum_k |y_k|$.

4.2. La suite $(x_k)_k$ de terme général $x_k = 1/(k+1)$, $k \in \mathbf{N}$, appartient-elle à ℓ^1 ? À ℓ^2 ? Qu'en déduit-on ?

► D'après le critère de Riemann, la suite est dans ℓ^2, pas dans ℓ^1. On sait d'après le TD que $\ell^1 \subset \ell^2$, l'inclusion est donc stricte.

4.3. On définit la suite $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbf{N}}$ en posant

$$X_n := (\underbrace{1,\dots,1}_{n \text{ fois}}, 0, 0, 0, \dots),$$

c'est à dire en posant

$$\begin{aligned} X_0 &:= (0,0,0,0,0,\dots), \\ X_1 &:= (1,0,0,0,0,\dots), \\ X_2 &:= (1,1,0,0,0,\dots), \\ X_3 &:= (1,1,1,0,0,\dots), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n appartient effectivement à ℓ^1.

► Chacune des suites est presque nulle (seul un nombre fini de termes sont non nuls), donc chacune d'elles appartient à ℓ^1.

4.4. Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer $\|X_{n+1} - X_n\|_1$. La suite $(X_n)_n$ est-elle de Cauchy dans ℓ^1 ? La suite $(X_n)_n$ converge-t-elle dans ℓ^1 ?

► On a $\|X_{n+1} - X_n\|_1 = 1$, la suite n'est donc pas de Cauchy. Elle n'est donc pas convergente.