TD 5 – Séries de Fourier

▷ **Exercice 1** (Fonction ζ de Riemann)**.** Soit

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad s \in]1, +\infty[.$$

Calculer $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

▷ **Exercice 2.** Soit $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, paire et 2π-périodique définie par $f(x) = \pi - 2x$ sur $[0, \pi[$.

2.1. Donner l'expression de la série de Fourier de f sur la base hilbertienne des polynômes trigonométriques.

2.2. Indiquer la nature de la convergence de la série de Fourier de f.

2.3. En déduire

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

▷ **Exercice 3.** Soit $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 2π-périodique définie par $f(x) = e^{ax}$ sur $[0, 2\pi[$ $(a \neq 0)$.

3.1. Donner l'expression de la série de Fourier de f sur la base hilbertienne des polynômes trigonométriques.

3.2. Indiquer la nature de la convergence de la série de Fourier de f.

3.3. En déduire

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2+n^2} \cos nx \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n}{a^2+n^2} \sin nx.$$

3.4. En déduire également

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(a^2+n^2)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(a^2+n^2)^2}.$$

(Rappel : $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ et $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.)

▷ **Exercice 4.** Soit E l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables $x : [0,1] \to \mathbf{R}$ telles que

$$\int_{[0,1]} \frac{|x(t)|^2}{t} dt < \infty.$$

4.1. Montrer que E est un espace vectoriel contenant les fonctions nulles et dérivables à l'origine.

4.2. Montrer que

$$(x|y) = \int_{[0,1]} \frac{x(t)y(t)}{t} dt$$

définit un produit scalaire sur E.

4.3. On note $(P_n)_{n\geq 1}$ le SON obtenu par orthonormalisation de $\mathbf{R}[X]\backslash\mathbf{R}$. Calculer P_i, $i = 1, \ldots, 3$.