MI2

II. Espace vectoriels normés.

<u>Rappels</u> : $(E, \|.\|)$ evn ; $(x_n)_n$ de Cauchy si

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists N\in\mathbb{N})(\forall p,q\geq N) : \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon \, ;$$

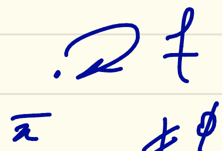
On a $(x_n)_n$ CV $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n$ de Cauchy

Si la réciproque est vraie (pour toute suite), on dit que $(E, \|.\|)$ est complet ("espace de Banach").

$\longrightarrow$ Dans ce cas : critère de Cauchy = critère de vérification qu'une suite CV sans connaissance a priori de la limite.

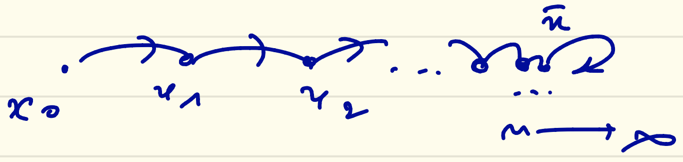
<u>Th.</u> (du pt fixe) : soit $f : A\subset E \longrightarrow A$, A partie fermée non-vide de $(E, \|.\|)$ Banach, f contractante. Alors, f possède un unique pt fixe dans A :

$$(\exists!\, \bar{x}\in A) : f(\bar{x}) = \bar{x}.$$



<u>Idée dém.</u> : i) existence : soit $x_0 \in A$ ($\neq \emptyset$) (quelconque) et on construit $(x_n)_n$ selon

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (\text{"approximations successives"})$$



Soit $n\in\mathbb{N}$, soit $p\in\mathbb{N}$, estimons $\|x_{n+p} - x_n\|$:

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \underline{\|x_{n+p} - x_{n+p-1}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\|}$$

Or, si $l \in \mathbb{N}$, $\|x_{l+1} - x_l\|$

$$= \|f(x_l) - f(x_{l-1})\|$$

$$\leq k \|x_l - x_{l-1}\|$$

$$\vdots$$

$$\leq k^l \|x_1 - x_0\|$$

Donc,

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \underbrace{(k^{n+p-1} + \dots + k^n)}_{k^n \cdot \sum_{i=0}^{p-1} k^i \,\leq\, k^n \cdot \sum_{i=0}^{\infty} k^i} \|x_1 - x_0\|$$

$|k| < 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} k^i \leq \frac{1}{1-k}$

$$\Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \quad (*)$$

$\|x_{n+p} - x_n\| \to \|\bar{x} - x_n\|$, $p \to \infty$

$\frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \longrightarrow 0, \; n \to \infty$

La suite est de Cauchy, donc CV dans A, partie fermée du Banach $\Rightarrow$! la limite est un pt fixe de f. $\square$

$\longrightarrow$ cf. TD2 : théorème de Cauchy-Lipschitz (EDO).

<u>Remarque</u> : info. supplémentaire = vitesse de CV
(cf. $p \longrightarrow \infty$) :

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

<u>Déf.</u> : soit $A \subset E$, $(E, \|.\|)$ evn ; on dit que A est compacte si de toute suite de A on peut extraire une sous-suite cv <u>dans A</u> (la limite $\in A$).

<u>Rappel</u> : soit $(x_n)_n$ une suite ; on appelle suite extraite de $(x_n)_n$ (ou "sous-suite") une suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st. $\nearrow$.

<u>Ex.</u> : • $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$

$$(x_{\varphi(n)})_n = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$
$$= (\cancel{x_0}, x_1, \dots)$$

• $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{array}$, $(x_{\varphi(n)})_n = (x_0, x_2, x_4, \dots)$

$$= (x_0, \cancel{x_1}, x_2, \cancel{x_3}, \dots)$$

• $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $((-1)^n)_{n = 0, 2, \dots} = ((-1)^{2p})_{p \in \mathbb{N}}$:

suite extraite et cv $(\to 1)$; de même $((-1)^{2p+1})_p$ cv $(\to -1)$; $((-1)^n)_n \in [-1, 1]^{\mathbb{N}}$, $A = [-1, 1]$ fermé borné de $\mathbb{R}$, est compacte.

<u>Th.</u> : dans $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.
(Th. de Bolzano-Weierstraß)

<u>Prop.</u> : soit $f : E \to F$, E, F evn ; si f continue et si $A \subset E$ est un compact, $f(A)$ est une partie compacte de F.

<u>dém.</u> : soit $(y_n)_n \in (f(A))^{\mathbb{N}}$; mq, quitte à extraire, $(y_n)_n$ cv ; quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $(\exists x_n \in A) : y_n = f(x_n)$; on construit ainsi $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$; A étant compacte, la suite $(x_n)_n$ cv (quitte à extraire une sous-suite) : $\exists \bar{x} \in A$ tq $(x_n)_n \longrightarrow \bar{x}$; or, f continue $\Longrightarrow$ $(f(x_n))_n$ cv vers $f(\bar{x})$; mais $\bar{x} \in A \Rightarrow f(\bar{x}) =: \bar{y} \in f(A)$, donc $\underbrace{(f(x_n))_n}_{= y_n}$ cv dans $f(A)$. $\square$

<u>Remarque</u> : i) fondamental pour l'existence de solution au problème d'optimisation (cf. MA0r4) :

$$\begin{cases} f(x) \longrightarrow \min \\ x \in C \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

si $f : C \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur C compacte, $f(C)$ compact $\subset \mathbb{R}$, ie $f(C)$ est fermé borné !

$m := \inf f(C) \in f(C) \Longrightarrow (\exists \bar{x} \in C) : f(\bar{x}) = m$.

ii) f continue sur $C \overset{\neq \emptyset}{\subset} \mathbb{R}^n$, C compacte,

$$\sup_C |f| = \max_C |f| < \infty.$$

$\longrightarrow$ espace de hilbert : $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$, <u>III</u>.