TD_3

- $\ell^p := \left\{ (x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|x_k|^p}_{\geqslant 0} < \infty \right\}$

  $p \in [1, +\infty[$

- $\ell^\infty = \left\{ (x_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sup_k |x_k| < \infty \right\}$ cad $(\exists M \geqslant 0)(\forall k \in \mathbb{N}) : x_k \leqslant M.$

ex 1

ℓ^p espace vectoriel comme sous espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ ds $\mathbb{R}$.

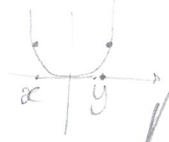
$\left(\text{cf } (x_k)_k \equiv x : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ k \longmapsto x(k) = x_k \end{array} \right)$

puisque

- $(x_k)_k \in \ell^p$. $\quad \sum_k |\lambda x_k|^p = \underbrace{|\lambda|^p \underbrace{\sum_k |x_k|^p}_{<\infty}}_{<\infty} \Rightarrow \lambda (x_k)_k \in \ell^p.$

- $(x_k)_k$ et $(y_k)_y \in \ell^p$ $\quad \left| \dfrac{x_k + y_k}{2} \right|^p \leqslant \dfrac{1}{2} \left(|x_k|^p + |y_k|^p \right)$

  $t \longmapsto |t|^p$ convexe $|t|^p$



1. multiplicat° scalaire
. stable par +
. non vide

$\Rightarrow |x_k + y_k|^p \leqslant 2^{p-1} \left(|x_k|^p + |y_k|^p \right)$

$\Rightarrow \sum_k |x_k + y_k|^p \leqslant 2^{p-1} \left(\underbrace{\sum_k |x_k|^p}_{<\infty} + \underbrace{\sum_k |y_k|^p}_{<\infty} \right) < \infty$

$\| (x_k)_k \|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

i) def positive $\left(\sum_k \underbrace{|x_k|^p}_{\geqslant 0} \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0 \Rightarrow$ positivité.

et $\sum_k \underbrace{|x_k|^p}_{\geqslant 0} = 0 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) : |x_k| = 0$

$\Rightarrow (x_k)_k = (0)_k = 0.$

ii) homogénéité positive :

$\| \lambda (x_k)_k \|_p = \left(\sum_k |\lambda x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \underbrace{\left(|\lambda|^p \right)^{1/p}}_{|\lambda|} \underbrace{\left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}}_{\|(x_k)_k\|_p}.$

iii) inegalité triangulaire

$\ell^p = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$, $\quad \mu_d(A) = \operatorname{card}(A)$ $\quad A \subset \mathbb{N}$

Nb d'éléments

$f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow \underbrace{\int_{\mathbb{N}} |f(k)|^p d\mu_d(k)}_{\sum_{k=0}^{\infty} |f(x)|^p} < \infty$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

. Soit $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ avec $\mathcal{B}$ tribu sur X. $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesure sur $\mathcal{B}$.

. Soient f & $g \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. mq Minkowski

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/p}$$

or $\int_X |f+g|^p d\mu = \int_X \underbrace{|f+g|}_{\leq |f|+|g|} |f+g|^{p-1} d\mu$ $\to p>1$, evident sinon

$$\leq \int_X \underbrace{|f|}_{\in L^p} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} d\mu + \int_X \overset{\in L^p}{|g|} \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{\in L^q} d\mu$$

Rappel : inégalité de Hölder

$f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow f \cdot g \in L^1$ et $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{1/q}$. ici, $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$ so

$$\underbrace{\int_X |f+g|^p d\mu}_{\|f+g\|_q^p} \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) + \underbrace{\|f+g\|_{q=\frac{p}{p-1}}^{p-1}}_{\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{p}{p-1}} = \|f+g\|_p^{p-1}}$$

$\Rightarrow \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ en divisant par $\|f+g\|_p^{p-1}$. si $\|f+g\|_p \neq 0$ (évident sinon)

. ℓ^∞ : e.v. comme s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ puisque

. $(x_k)_k \in \ell^\infty$, $\sup_k |\lambda x_k| = |\lambda| \underbrace{\sup_k |x_k|}_{<\infty} < \infty$

. $(x_k)_k$ et $(y_k)_k \in \ell^\infty$

Soit $k_0 \in \mathbb{N}$, $|x_{k_0} + y_{k_0}| \leq \left.\underbrace{|x_{k_0}|}_{\leq \sup_k |x_k|} + \underbrace{|y_{k_0}|}_{\leq \sup |y_k|}\right\} < \infty$ (iii)

$\Rightarrow (x_k + y_k)_k \in \ell^\infty$ et $\|(x_k+y_k)_k\|_\infty \leqslant \|(x_k)_k\|_\infty + \|(y_k)_k\|_\infty$

i) def. positive $\quad \sup_k \underbrace{|x_k|}_{\geqslant 0} \geqslant 0$ et $\sup_k |x_k| = 0 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})\ |x_k| = 0$

$$\Rightarrow (x_k)_k = (0)_k = 0_{\ell^\infty}.$$

ii) homogénéité positive : $\sup_k |\lambda x_k| = \lambda \sup_k |x_k|$.

iii) see iii)

ex 2

$1 \leqslant p < q < \infty$. Mq $\ell^p \subsetneq \ell^q$.

Soit $(x_k)_k \in \ell^p \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty \Leftrightarrow \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{K} |x_k|^p}_{S_K}\Big)_{K \in \mathbb{N}}$ CV ds $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (S_k)_k$ est de Cauchy.

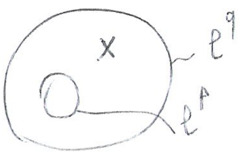
$\Rightarrow \underbrace{|S_{k+1} - S_k|}_{|x_{k+1}|^p} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad$ donc $|x_k| \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, ie

$(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant K) : |x_k| \leqslant 1$

$$\Rightarrow |x_k|^q \leqslant |x_k|^p \quad (q > p)$$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^q = \underbrace{\sum_{k=0}^{K-1} |x_k|^q}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} |x_k|^q}_{\leqslant \underbrace{\sum_{k=K}^{\infty} |x_k|^p}_{<\infty}} \Big) < \infty$ so $(x_k)_k \in \ell^q$.

Rq l'inclusion est stricte



$q > p \Rightarrow \dfrac{q}{p} > 1 \quad . \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^\alpha} < \infty$ si $\alpha > 1$

ie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^{1/p}} < \infty \quad$ ie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)^q < \infty : \left(\frac{1}{(k+1)^{1/p}}\right)_k \in \ell^q \notin \ell^p$

• $1 \leqslant p\ (q = \infty)$: mq $\ell^p \subsetneq \ell^\infty$ si $(x_k)_k \in \ell^p$.

$(|x_k|)_k \longrightarrow 0$ donc $(x_k)_k$ est bornée.

cf ci-avant

Rq : l'inclusion est stricte cf : $(x_k)_k = (1)_k \in \ell^\infty (!)$
$\notin \ell^p$ (cf $\sum_{k=0}^{\infty} |1|^p = \infty$)

Rq : $1 \leq p < q \leq \infty$ piège classique

$$L^p(x, B, \mu) \underset{+}{\supsetneq} L^q(X, B, \mu) \text{ si } \mu(X) < \infty \qquad (\mu_d(\mathbb{N}) = \infty !)$$

$$\downarrow$$

$$L^1(,) \supset L^2(,) \supset L^\infty(,) .$$

ex 3 Mq $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach, $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $(X_n)_n \in (\ell^1)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^1 (démo pr $p=1$, same pr $p \geq 1$)

$X_n = (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\sum_k |x_{n,k}| < \infty$.

ℓ^1 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)$: $\underbrace{\|X_p - X_q\|_1}$ $\leq \varepsilon$

$\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$. (0)

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N})$: $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$. (1)

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \in \mathbb{N})$: $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$

cela veut dire $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ds $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ complet. elle CV. on note sa lim $\overline{x}_k$.

① Construct° du candidat à être limite : on pose $\overline{X} := (\overline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$

② Appartenance de $\overline{X}$ à ℓ^1 : $\sum_{k=0}^{K} |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon \xrightarrow[q\to\infty]{} x_k$

~~(1)~~ (0) $\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p,q \geq N)(\forall K \in \mathbb{N})$: $\cancel{\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}|} \leq \varepsilon$

$q \to +\infty$, $x_{q,k} \to \overline{x}_k$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)(\forall K \in \mathbb{N})$: $\cancel{\sum_{k=0}^{K} |x_{p,k} - \overline{x}_k| \leq \varepsilon}$

$\sum_{k=0}^{K} |x_{p,k} - \overline{x}_k| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)$ $\sum_{k=0}^{\infty} |x_{p,k} - \overline{x}_k| \leq \varepsilon$ (2)

$\Rightarrow (\exists N_1 \in \mathbb{N})$: $\sum_{k=0}^{\infty} |x_{N_1,k} - \overline{x}_k| \leq 1 < \infty$.

$\varepsilon = 1$

$\Rightarrow X_{N_1} - \overline{X} \in \ell^1$ $\Rightarrow \overline{X} = -\underbrace{(X_{N_1} - \overline{X})}_{\in \ell^1} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^1} \} \in \ell^1$

③ CV de $(x_n)_n$ vers $\bar{X}$.

$(2) \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) : \|X_p - \bar{X}\|_{\cancel{q}} \leq \varepsilon$ ie $(X_p)_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} \bar{X}$ $\boxed{}$

Mq $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ Banach, soit $(X_n)_n \in (\ell^\infty)^{\mathbb{N}}$ de Cauchy, mq ça CV.

① construction limite.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) \quad \underbrace{\|X_p - X_q\|_\infty}_{\sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}|} \leq \varepsilon$$

$$\sup_k |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N)(\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon \quad (3)$$

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})\underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon}$$

$(x_{n,k})_n$ est de Cauchy sur $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet, donc CV.

$\exists \bar{X}_k$ tq $(X_{n,k}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{X}_k$.

On pose $\bar{X} := (\bar{x}_k)_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

② Appartenance de $\bar{X}$ à ℓ^∞.

$$\underset{q \to +\infty}{(3)} \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) \underbrace{(\forall k \in \mathbb{N}) : |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon}_{\sup_k |x_{p,k} - \bar{x}_k| \leq \varepsilon}. \quad (4)$$

$(\varepsilon = 1)$ $(\exists N_1 \in \mathbb{N})$ $\sup_k |x_{N_1,k} - \bar{x}_k| \leq 1 < \infty$

$\Rightarrow X_{N_1} - \bar{X} \in \ell^\infty$

$\Rightarrow \bar{X} = \underbrace{-(X_{N_1} - \bar{X})}_{\in \ell^\infty} + \underbrace{X_{N_1}}_{\in \ell^\infty} \Big\} \in \ell^\infty$ (e.v)

③ CV de $(X_n)_n$ vers $\bar{X}$.

$(4) : (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N) : \|X_p - \bar{X}\|_\infty \leq \varepsilon$

ie $(X_p)_p \xrightarrow[p \to +\infty]{\|\cdot\|_\infty} \bar{X}$ $\boxed{}$

Rq : la mm démo mq l'ensemble des applis bornées de E ds $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$ est un Banach.

(lié à la complétude de $\ell^\infty(B_f(t_0, \eta), B_f(X_0, \varepsilon))$ au TD 2)

fin ex2

$1 \leq p < q < \infty$

Soit $(x_k)_k \in \ell^p (\subset \ell^q)$.

$\|(x_k)_k\|_p \leq 1$;

$\Rightarrow \sum_k |x_k|^p \leq 1 \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \ |x_k|^p \leq 1$

$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \ |x_k|^q \leq |x_k|^p$

$\Rightarrow \sum_k |x_k|^q \leq \sum_k |x_k|^p \leq 1.$

Soit $(x_k)_k \in \ell^p$ (une suite quelconque) on a $\left\| \frac{(x_k)_k}{\|(x_k)_k\|_p} \right\|_q \leq 1$

$(x_k)_k \neq (0)_k$ (res évident sinon)

$\Rightarrow \|(x_k)_k\|_q \leq \|(x_k)_k\|_p.$