TD 2 – Théorème de Cauchy-Lipschitz

Définition 1.1. *Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, Ω ouvert, f continue, et soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Une solution du problème de Cauchy de second membre f et de condition initiale (t_0, x_0) est un couple (I, x) où I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $x : I \to \mathbf{R}^n$ une fonction dérivable telle que*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \ t \in I \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

La définition précédente implique en particulier qu'une solution (I, x) est telle que $t_0 \in I$ (l'intervalle ouvert est donc non-vide), que $(t, x(t)) \in \Omega$ quel que soit $t \in I$, et que $x \in \mathscr{C}^1(I, \mathbf{R}^n)$. On aura besoin de la généralisation suivante du théorème du point fixe :

▷ **Exercice 1.** Soit F une partie fermée (et non-vide) d'un espace de Banach E, et soit $g : F \to F$ telle que g^p soit contractante pour un certain naturel p. Montrer que g possède un unique point fixe.

▷ **Exercice 2.** (Théorème de Cauchy-Lipschitz) Comme à la définition 1.1, on suppose f continue sur l'ouvert Ω.

2.1. Montrer que l'ensemble des solutions ordonné par

$$(I, x) \leq (J, y) \iff I \subset J \text{ et } x = y_{|I}$$

et dont on admet qu'il est non-vide[1] possède un élément maximal (on parle de *solution maximale* du problème de Cauchy).

On suppose désormais que f est *localement Lipschitzienne en x*, *i.e.* que tout point de Ω possède un voisinage V sur lequel f est Lipschitzienne en x : il existe $k \geq 0$ tel que pour tous t, x, y tels que (t, x) et (t, y) soient dans V,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|. \tag{1}$$

Dans (1), $|.|$ désigne l'une quelconque des normes équivalentes sur $\mathbf{R}^n$.

[1] Théorème de Peano : la seule continuité de f garantit l'existence de solution.

2.2. Montrer qu'il existe un voisinage $C = B_f(t_0, \eta) \times B_f(x_0, \varepsilon)$ (ou *cylindre de sécurité*) sur lequel f est Lipschitzienne en x et tel que $\eta \sup_C |f| \leq \varepsilon$.

2.3. Soit $E = \mathscr{C}^0(B_f(t_0, \eta), \mathbf{R}^n)$ muni de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{B_f(t_0,\eta)} |x|$, soit $F \subset E$ l'ensemble des fonctions de E à valeurs dans $B_f(x_0, \varepsilon)$, et soit $\phi : F \to F$ définie par

$$\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s.$$

Montrer que ϕ possède un unique point fixe. En déduire l'existence d'une solution pour le problème de Cauchy.

2.4. Montrer que le problème possède une et une seule solution maximale (au sens de la question 2.1). Montrer que les courbes intégrales maximales forment une partition de Ω.

2.5. Discuter les trois exemples suivants : $\dot{x} = x$, $\dot{x} = x^2$, et $\dot{x} = \sqrt{|x|}$.

▷ **Exercice 3.** Soit $f : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, I ouvert, f continue ; on suppose que f est Lipschitzienne en x sur tout $I \times \mathbf{R}$.

3.1. Montrer que le problème possède une *solution globale* (*i.e.* définie sur I tout entier).

3.2. Appliquer la question précédente au problème de Cauchy linéaire

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)$$

avec A et b continues de I dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ et $\mathbf{R}^n$, respectivement.