TD 7 - Problèmes aux limites.

Exo 1.

1.1. $(u|v)_{H^1} = (u|v)_{L^2} + (u'|v')_{L^2}$

Par construction (et parce qu'on a réutilisé le $(\cdot|\cdot)$ de L^2), on a bien sûr une forme bilinéaire symétrique; la positivité est claire :

$$(u|u)_{H^1} = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 \geq 0$$

Enfin, soit $u \in H^1(]0,1[)$,

$$(u|u)_{H^1} = 0 \Rightarrow \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 = 0$$

$$\Rightarrow u = 0_{L^2}, \text{ ie } u = 0_{H^1} \ (H^1 < L^2).$$

1.2. Soit $(u_n)_n \in (H^1)^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geq N) : \|u_p - u_q\|_{H^1} \leq \varepsilon$$

① Construction (du candidat à être) limite :

$$\|u_p - u_q\|_{H^1}^2 = \|u_p - u_q\|_{L^2}^2 + \|u_p' - u_q'\|_{L^2}^2$$

$\Rightarrow \begin{cases} (u_n)_n \text{ de Cauchy dans } L^2, \text{ complet,} \\ (u_n')_n \quad \text{———————————} , \text{ ————} : \end{cases}$

il existe $u \in L^2$ et $v \in L^2$ tq $\begin{cases} (u_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|.\|_2} u, \\ (u'_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|.\|_2} v; \end{cases}$

② Appartenance du candidat à H^1 : soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$,

$\langle u', \varphi \rangle$ ($= \langle (T_u)', \varphi \rangle$, cf. $u \in L^2(]0,1[)$ $\Rightarrow$ $u \in L^1_{loc}(]0,1[)$ et définit $T_u : \varphi \longmapsto \langle T_u, \varphi \rangle := \int_0^1 u.\varphi \, dx$)

$||$

$- \langle u, \varphi' \rangle = - \int_0^1 u.\varphi' \, dx$

On, $(u_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|.\|_2} u \Rightarrow \int_0^1 u.\varphi' \, dx = (u|\varphi')_{L^2}$

$= \lim_{n\to\infty} (u_n|\varphi')_{L^2}$

(cf. continuité $(.|.)_{L^2}$)

De plus :

$(u_n|\varphi')_{L^2} = \int_0^1 u_n.\varphi' \, dx$

$= \langle u_n, \varphi' \rangle$

$= - \langle u'_n, \varphi \rangle$

$\uparrow$

$u_n \in H^1$

$= - (u'_n|\varphi)_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -(v|\varphi)_{L^2}$

$||$

Par unicité de la limite, $-\langle v, \varphi \rangle$

$\langle u, \varphi' \rangle = - \langle v, \varphi \rangle$
$= - \langle u', \varphi \rangle$
$\Rightarrow (\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,1[))$: $\langle u', \varphi \rangle = - \langle v, \varphi \rangle$
$\Rightarrow u' = v$:

$u' \in L^2(]0,1[) \Rightarrow u \in H^1(]0,1[)$

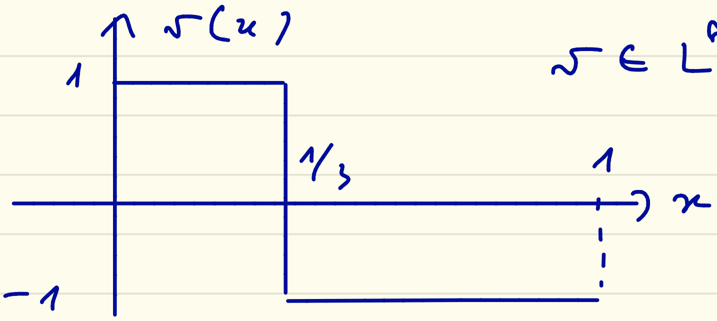
③ Convergence : d'après ce qui précède,

$$\begin{cases} (u_n)_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2 \\ (u'_n)_n \longrightarrow v = u' \text{ dans } L^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|u - u_n\|_{H^1}^2 = \underbrace{\|u - u_n\|_{L^2}^2}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \to \infty}} + \underbrace{\|u' - u'_n\|_{L^2}^2}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \to \infty}}$$

$$\Rightarrow (u_n)_n \xrightarrow[n \to \infty]{H^1} u.$$

Exemple :

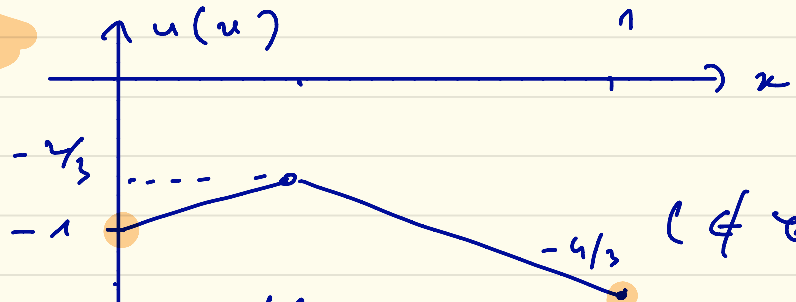


$v \in L^\infty(]0,1[) \subset L^2(]0,1[)$

$$u(x) = -1 + \int_0^x v(y)\,dy, \quad x \in [0,1]$$

= une primitive (celle qui vaut -1 en $x = 0$) de $v \in L^2(]0,1[)$

$\Rightarrow u \in H^1(]0,1[)$:



$(\notin \mathcal{C}^1([0,1]))$

$\exists\, u'(x) = v(x)$ p.p. $x \in]0,1[$

et $u(x) = u(0) + \int_0^x v(y)\,dy$.

1.3. $H^1_0(]0,1[) := \{ u \in H^1(]0,1[) \mid u(0) = u(1) = 0 \}$

$(u \in H^1(]0,1[) \subset \mathcal{C}^0([0,1]))$

$\Rightarrow H^1_0 = \ker \delta_0 \cap \ker \delta_1$ où

$\delta_0 : H^1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto u(0)$

$\delta_1 : H^1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto u(1)$

sont linéaires et continues (de sorte que $\ker \delta_0 = \delta_0^{-1}(\underbrace{\{0\}}_{\text{fermé}})$ fermé de H^1) :

soit $u \in H^1$,

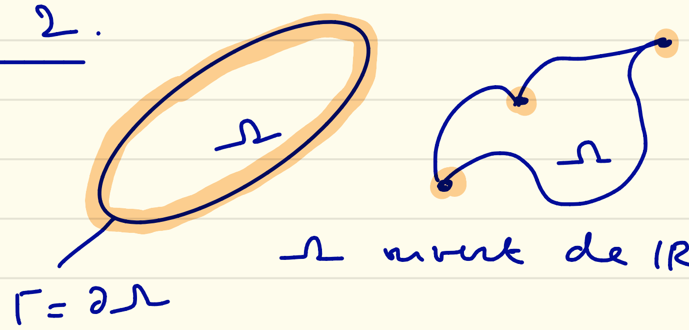
$$|\delta_0 . u| = |u(0)| \leq \|u\|_\infty \leq c . \|u\|_{H^1}$$

car (on l'admet) $H^1(]0,1[)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Idem, $|\delta_1 . u| = |u(1)| \leq \|u\|_\infty \leq c . \|u\|_{H^1}$.

Donc H^1_0 est fermé, donc une partie complète : $(H^1_0, (\cdot|\cdot)_{H^1})$ est un e.h. $(\subset H^1)$.

Exo 2.



Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$

Avantage de la dim 1 : pas de problème de régularité du bord $(\partial\Omega = \Gamma)$

Étant donné $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ $(= \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}),\ \Omega =]0,1[)$ on cherche $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tq :

$$(1)\ \begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x),\ x \in]0,1[\\ u(0) = 0,\ \ u(1) = 0\ \ (\text{Dirichlet}) \end{cases}$$

I. 1. On choisit de "tester" une solution forte sur un espace construit à partir de $H^1(]0,1[)$ en incluant les conditions de Dirichlet. Ici,

$$\{u \in H^1(]0,1[)\ |\ u(0) = 0,\ u(1) = 0\} =: H^1_0(]0,1[)$$

(cf. Exo 1)

Soit donc $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ sol. de (1) ; soit $v \in H^1_0(]0,1[)$:

$$\int_0^1 (-u'' + u)v\,dx = \int_0^1 f v\,dx$$

$$\Rightarrow \cancel{[-u'.v]_0^1} + \int_0^1 (u'.v' + u.v)\,dx = \int_0^1 f v\,dx$$

i.p.p. avec $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $v \in H^1(]0,1[)$

$$-u'(1).\cancel{v(1)}_{0} + u'(0).\cancel{v(0)}_{0}$$

$$\Rightarrow (\forall v \in H^1_0): (u|v)_{H^1} = \int_0^1 f v\,dx \quad (2)$$

(formulation "faible" qui a un sens dès que $u \in H^1_0 \supsetneq \mathcal{C}^2([0,1])$ ...)

(A. Toute sol. forte est sol. faible)

2.2. B. Existence et unicité d'une sol. faible :

(2) $\iff$ on cherche $u \in H^1_0(]0,1[)$ tq :

$\leftarrow u(0) = u(1) = 0$ (Dirichlet)

$(\forall v \in H^1_0) : (u|v)_{H^1}$

$= \int_0^1 f . v \, dx$; l'application $\varphi : H^1_0 \to \mathbb{R}$, $v \longmapsto \int_0^1 f v \, dx$ est

linéaire et continue :

$$|\varphi . v| = \left| \int_0^1 f . v \, dx \right|$$

$$= |(f|v)_{L^2}|$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2} . \|v\|_{L^2}$$

$$\leqslant \|f\|_{L^2} . \|v\|_{H^1}$$

cf. $\|v\|_{H^1} = \sqrt{\|v\|^2_{L^2} + \|v'\|^2_{L^2}} \geqslant \|v\|_{L^2}$

Th. Riesz $\Longrightarrow \exists ! \, u \in H^1_0(]0,1[)$ qui vérifie (2).

2.3. C. Régularité : on a supposé $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$;
soit $v \in \mathcal{D}(]0,1[) \subset H^1_0(]0,1[)$,

$$(u|v)_{H^1} = \int_0^1 f . v \, dx$$

$$\parallel$$

$\int_0^1 (u' . v' + u . v) \, dx$, ie dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$:

$$\langle u', v' \rangle + \langle u, v \rangle = \langle f, v \rangle$$

$$(\text{ie} : \langle T_{u'}, v' \rangle + \langle T_u, v \rangle = \langle T_f, v \rangle)$$

$\Rightarrow \quad -\langle u'', v\rangle + \langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle$

$\Rightarrow$ dans $\mathcal{D}'(]0,1[)$, $-u'' + u = f$

$\Rightarrow \quad u'' = \underbrace{u}_{\in H^1 \subset \mathcal{C}^0} - \underbrace{f}_{\in \mathcal{C}^0} \in \mathcal{C}^0([0,1])$

$\Rightarrow \quad u \in \mathcal{C}^2([0,1])$

$\Rightarrow \quad u \in H^1_0(]0,1[) \cap \mathcal{C}^2([0,1])$.

2.4. 1). Toute sol. faible est sol. forte :

$(\forall v \in H^1_0(]0,1[)) : (u|v)_{H^1} = \int_0^1 f v \, dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (u'.v' + u.v)\, dx = \int_0^1 f v\, dx$

$u \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow u' \in \mathcal{C}^1$: i.p.p.

$\Rightarrow \quad [u'.v]_0^1 + \int_0^1 (-u'' + u).v\, dx = \int_0^1 f v\, dx$

$[u'.v]_0^1 = u'(1).\underbrace{v(1)}_{0} - u'(0).\underbrace{v(0)}_{0}$

$\Rightarrow (\forall v \in H^1_0(]0,1[)) : \underbrace{\int_0^1 (-u'' + u - f).v\, dx}_{(-u''+u-f\,|\,v)_{L^2}} = 0$

$\overline{H^1_0}^{\|.\|_{L^2}} = L^2$

$\Longrightarrow \quad -u'' + u - f = 0$

$\Rightarrow \quad -u'' + u = f$ p.p.

et même : $(\forall x \in]0,1[) : -u''(x) + u(x) = f(x)$

puisque $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Comme $u \in H^1_0(]0,1[)$,

on a bien $u(0) = 0$, $u(1) = 0$.