



Pemodelan Matematika Penyakit Malaria dengan Model SEIR

Akrom Fuadi

Program Studi S-1 Matematika, FST UNAIR
akromf.21@gmail.com

Abstrak

Malaria adalah penyakit yang disebabkan oleh nyamuk *anopheles* betina. Penularan penyakit malaria ini terjadi melalui kontak langsung maupun tidak langsung. Penelitian ini akan membahas tentang pemodelan matematis pada penyakit malaria dengan vaksinasi menggunakan model SEIR. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui dampak vaksinasi malaria. Dari model SEIR akan diperoleh 4 kompartemen yaitu S sebagai kelas *Susceptible*, E sebagai kelas *Exposed*, I sebagai kelas *Infected*, dan R sebagai kelas *Recovered*. Selain itu terdapat 5 parameter yaitu μ , β , δ , ε , dan ρ . Berdasarkan simulasi model, didapatkan kesimpulan bahwa semakin tinggi tingkat vaksin yang diberikan maka kelas *Infected* akan menurun menuju nol. Sehingga program vaksinasi dapat digunakan untuk mengendalikan penyebaran penyakit malaria.

Kata kunci: *Pemodelan Matematika, Model SEIR, Malaria, Vaksinasi.*

Abstract

Malaria is a disease caused by the female *Anopheles* mosquito. Transmission of malaria occurs through direct or indirect contact. This study will discuss the mathematical modeling of malaria by vaccination using the SEIR model. The purpose of this study was to determine the impact of malaria vaccination. From the SEIR model, 4 compartments will be obtained, namely S as the *Susceptible* class, E as the *Exposed* class, I as the *Infected* class, and R as the *Recovered* class. There are 5 parameters namely μ , β , δ , ε , and ρ . Based on the model simulation, it can be concluded that the higher the level of vaccine given, the *Infected* class will decrease to zero. So that the vaccination program can be used to control the spread of malaria.

Keywords: *Mathematical Modeling, SEIR Model, Malaria, Vaccination.*

1 Pendahuluan

Menurut para pakar, nyamuk bukan lagi serangga yang asing dan nyamuk betina lebih berbahaya daripada nyamuk jantan. Nyamuk betina yang sering menghisap darah manusia ataupun mamalia, sedangkan nyamuk jantan memakan nektar dan cairan tumbuhan. Selain menghisap darah, nyamuk-nyamuk betina tersebut juga berperan sebagai perantara beberapa jenis bibit penyakit diantaranya adalah penyakit malaria (Putra, 1994).

Malaria merupakan penyakit infeksi yang disebabkan oleh *plasmodium* atau makhluk hidup parasit bersel satu dan termasuk ke dalam kelompok *protozoa* yang kemudian hidup dan berkembang biak di dalam sel darah manusia. Penyakit ini secara alami ditularkan melalui gigitan nyamuk *anopheles* betina.

Jenis-jenis *plasmodium* yang dibawa oleh nyamuk ini adalah *plasmodium falciparum* (penyebab malaria tropika), *plasmodium vivax* (penyebab malaria tertiana), *plasmodium malariae* (penyebab malaria quartana) dan *plasmodium ovale* (penyebab malaria ovale) (Arnida, 2012).

Pada kasus malaria, gejala-gejala umum yang akan terjadi biasanya dibedakan menjadi 3 (tiga) stadium. Pada ketiga stadium yang telah dijelaskan di atas, sebelum menunjukkan gejala awal pada stadium dingin (*cold stage*) individu akan melalui masa inkubasi sekitar 12 hari setelah gigitan nyamuk. Masa inkubasi yaitu masa dimana virus sudah masuk ke dalam tubuh sampai saat timbulnya gejala untuk yang pertama kali. Masa inkubasi dalam epidemi disebut sebagai periode laten. Periode laten ini terdapat pada kelas *Exposed* (E). Pada umumnya selama masa laten ini individu tidak bisa menularkan penyakit. Adanya periode laten ini yang menjadi alasan pembentukan model epidemi *SEIR*.

2 Model Matematika

Model epidemi *SEIR* dalam penyebaran penyakit malaria pada waktu memiliki 4 kelas yaitu kelas *Susceptible* (rentan) menyatakan kelas individu yang rentan terhadap penyakit malaria, kelas *Exposed* (laten) menyatakan kelas individu yang telah terinfeksi penyakit malaria namun belum menunjukkan gejala-gejala penyakit, kelas *Infected* (terinfeksi) menyatakan kelas individu terinfeksi yang telah menunjukkan gejala penyakit malaria dan dapat menularkan penyakit ke kelas individu rentan, yang terakhir adalah kelas *Recovered* (sembuh) yaitu kelas individu yang telah sembuh dari penyakit malaria dan kebal terhadap penyakit tersebut.

2.1 Asumsi

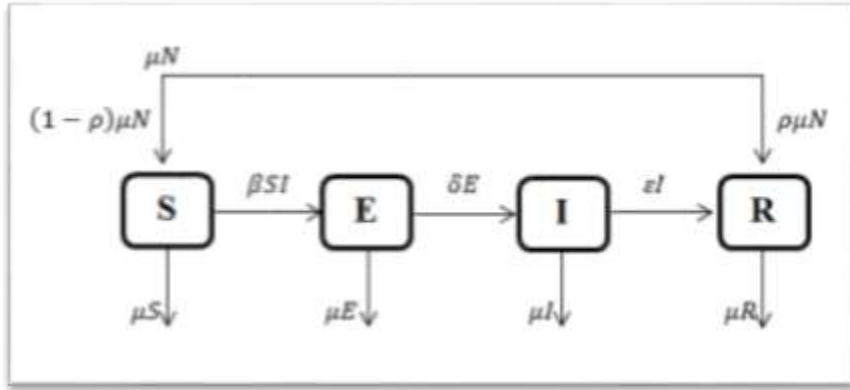
Selanjutnya asumsi pembentukan model matematika *SEIR* pada penyebaran penyakit malaria menurut Shah (2013) yang ditambahkan vaksinasi dibatasi oleh:

- a) Populasi penduduk bersifat tertutup dengan artian bahwa penambahan ataupun pengurangan jumlah penduduk melalui emigrasi dan imigrasi tidak diperhatikan.
- b) Populasi bersifat homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang yang sama untuk tertular suatu virus karena adanya kontak langsung dengan individu terinfeksi.
- c) Hanya terdapat satu penyakit yang menyebar dalam populasi.
- d) Laju kelahiran dan laju kematian alami diasumsikan sama. Setiap individu yang lahir masuk kedalam kelas individu *Susceptible* dan setiap individu yang mati dari setiap kelas mempunyai laju proporsional dengan jumlah individu masing-masing kelas.
- e) Penyakit malaria menular melalui kontak langsung dengan penderita.

- f) Terdapat masa inkubasi (periode laten) pada proses penularan penyakit malaria.
- g) Individu yang berada pada masa inkubasi (periode laten) tidak dapat menularkan penyakit malaria.
- h) Individu yang terinfeksi penyakit malaria akan sembuh.
- i) Vaksinasi diberikan pada populasi rentan (*Susceptible*).
- j) Kekuatan dari vaksinasi diasumsikan 100% yang berarti individu akan kebal terhadap penyakit malaria jika diberikan vaksinasi.
- k) Seorang sudah sembuh dari penyakit malaria tidak akan terserang lagi oleh penyakit yang sama karena tubuh orang tersebut akan membentuk sistem kekebalan tubuh seumur hidup terhadap plasmodium.

2.2 Skema Model Matematika

Berdasarkan asumsi 2.1 didapatkan skema model matematika yang dapat dilihat pada Gambar 1 sebagai berikut:



Gambar 1 : Skema Model SEIR dengan kontrol

2.3 Model Matematika

Berdasarkan asumsi 2.1 dan skema pada Gambar 1 maka didapatkan persamaan model matematika sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (1 - \rho)\mu N - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \epsilon I - \mu I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \epsilon I + \rho\mu N - \mu R \quad (4)$$

Persamaan 1 : Model SEIR dengan kontrol

Karena terdapat kompartemen atau variabel N yang mana N ini merepresentasikan laju pertumbuhan populasi manusia, selanjutnya untuk menyederhanakan Persamaan 1 maka dilakukan proses nondimensialisasi dengan menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}; e(t) = \frac{E(t)}{N}; i(t) = \frac{I(t)}{N}; r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Sehingga dari Persamaan 1 diperoleh:

$$\frac{ds}{dt} = (1 - \rho)\mu - \beta si - \mu s \quad (5)$$

$$\frac{de}{dt} = \beta si - \delta e - \mu e \quad (6)$$

$$\frac{di}{dt} = \delta e - \varepsilon i - \mu i \quad (7)$$

$$\frac{dr}{dt} = \varepsilon i + \rho\mu - \mu r \quad (8)$$

Dengan kondisi,

$$N = s(t) + e(t) + i(t) + r(t); s \geq 0, e \geq 0, i \geq 0, r \geq 0$$

Persamaan 2 : Model SEIR tanpa kontrol

Didefinisikan variabel-variabel yang digunakan di dalam model *SEIR* ini dengan penyebaran penyakit malaria yang disajikan pada Tabel 1 berikut dengan nilai awal yang didapatkan dari permasalahan nyata yang terjadi di Provinsi Papua:

No	Simbol	Deskripsi	Nilai
1	s	Kelas individu yang rentan terhadap penyakit malaria	51.088 Jiwa
2	e	Kelas individu yang telah terinfeksi malaria tetapi belum menunjukkan gejala penyakit tersebut	19.158 Jiwa
3	i	Kelas individu yang terinfeksi yang telah menunjukkan gejala malaria dan dapat menularkan penyakit tersebut ke kelas individu yang rentan	31.930 Jiwa
4	r	Kelas individu yang terinfeksi yang telah sembuh dari malaria dan kebal terhadap penyakit tersebut	25.544 Jiwa

Tabel 1 : Variabel yang digunakan

Selanjutnya, didefinisikan parameter yang digunakan di dalam model *SEIR* ini dengan penyebaran penyakit malaria dengan melakukan vaksinasi dengan laju infeksi yang berbeda dan beberapa rasio jumlah penduduk yang menerima vaksin, sehingga terdapat 4 kali simulasi sebagai berikut:

No	Simbol	Deskripsi	Nilai
1	$\mu_{1,2,3,4}$	Laju kelahiran dan kematian	0,004
2	β_1	Laju infeksi	0,014
3	$\beta_{2,3,4}$		0,083
4	$\delta_{1,2,3,4}$	Laju individu terinfeksi	0,027
5	$\varepsilon_{1,2,3,4}$	Laju pemulihan	0,011
6	$\rho_{1,2}$	Rasio jumlah individu yang menerima vaksin	0
7	ρ_3		0,21
8	ρ_4		0,8

Tabel 2 : Parameter yang digunakan

2.4 Analisis Model Matematika

Titik (S,E,I,R) untuk titik kuilibrium model menggunakan vaksinasi memenuhi teorema berikut:

- 1) Jika $i = 0$, maka sistem persamaan menggunakan vaksinasi memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1 - \rho, 0, 0, \rho)$
- 2) Jika $i \neq 0$, maka sistem persamaan menggunakan vaksinasi memiliki titik ekuilibrium endemic:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= (s, e, i, r) \\
 &= \frac{(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu)}{\beta\delta}, \frac{(1-\rho)\mu\beta\delta - \pi(\varepsilon+\mu)(\delta+\mu)}{\beta\delta(\delta+\mu)}, \\
 &\quad \frac{(1-\rho)\mu\beta\delta - \mu(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu)}{\beta(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu)}, \frac{(1-\rho)\varepsilon\beta\delta + (\rho\beta - \varepsilon)(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu)}{\beta(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu)}
 \end{aligned}$$

Kemudian untuk bilangan reproduksi dasar diperoleh nilai berikut:

$$R_0 = \frac{(1-\rho)\beta\delta}{(\delta+\mu)(\varepsilon+\mu)}$$

Selanjutnya untuk analisis kestabilan diperoleh sesuai teorema berikut:

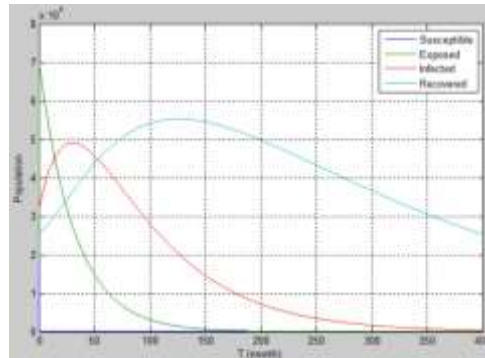
- 1) Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1 - \rho, 0, 0, \rho)$ stabil asimtotik lokal.
- 2) Jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (s, e, i, r) = (1 - \rho, 0, 0, \rho)$ tidak stabil.

3. Simulasi Model

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi dengan menggunakan nilai-nilai parameter dan variabel yang sudah tersedia. Tujuan yang ingin dicapai adalah untuk mengetahui apakah dengan dilakukannya vaksinasi dapat mempengaruhi penyebaran penyakit malaria. Simulasi dilakukan sebanyak 4 kali dengan laju infeksi yang berbeda dan beberapa rasio jumlah penduduk yang menerima vaksin.

3.1 Simulasi Pertama

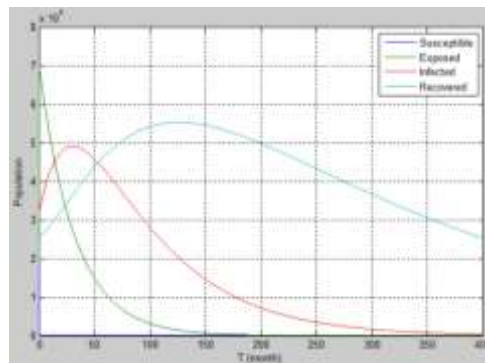
Parameter yang digunakan adalah $\mu_1 = 0,004$; $\beta_1 = 0,014$; $\delta_1 = 0,027$; dan $\rho_1 = 0$. Dengan nilai awal untuk $s(0) = 51.088$; $e(0) = 19.158$; $i(0) = 31.930$; dan $r(0) = 25.544$ sehingga didapatkan grafik sebagai berikut dengan garis biru tua sebagai *Susceptible*, garis hijau sebagai *Exposed*, garis merah sebagai *Infected*, dan garis biru muda sebagai *Recovered*.



Gambar 2 : Simulasi Pertama

3.2 Simulasi Kedua

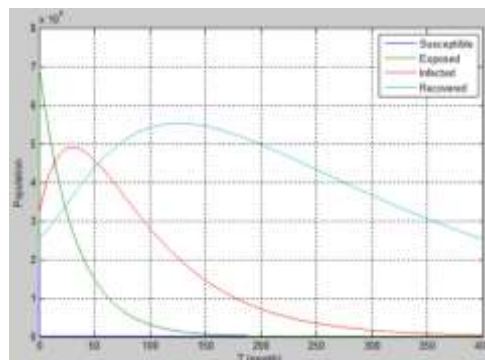
Parameter yang digunakan adalah $\mu_2 = 0,004$; $\beta_2 = 0,083$; $\delta_2 = 0,027$; dan $\rho_2 = 0$. Dengan nilai awal untuk $s(0) = 51.088$; $e(0) = 19.158$; $i(0) = 31.930$; dan $r(0) = 25.544$ sehingga didapatkan grafik sebagai berikut dengan garis biru tua sebagai *Susceptible*, garis hijau sebagai *Exposed*, garis merah sebagai *Infected*, dan garis biru muda sebagai *Recovered*.



Gambar 3 : Simulasi Kedua

3.3 Simulasi Ketiga

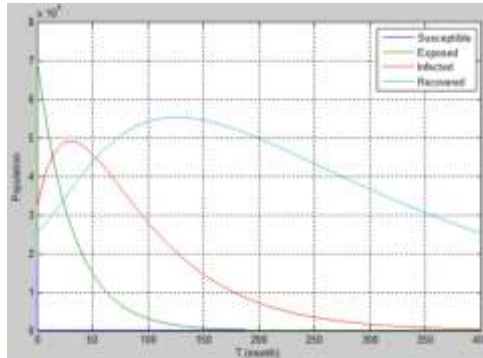
Parameter yang digunakan adalah $\mu_3 = 0,004$; $\beta_3 = 0,083$; $\delta_3 = 0,027$; dan $\rho_3 = 0,21$. Dengan nilai awal untuk $s(0) = 51.088$; $e(0) = 19.158$; $i(0) = 31.930$; dan $r(0) = 25.544$ sehingga didapatkan grafik sebagai berikut dengan garis biru tua sebagai *Susceptible*, garis hijau sebagai *Exposed*, garis merah sebagai *Infected*, dan garis biru muda sebagai *Recovered*.



Gambar 4 : Simulasi Ketiga

3.4 Simulasi Keempat

Parameter yang digunakan adalah $\mu_4 = 0,004$; $\beta_4 = 0,083$; $\delta_4 = 0,027$; dan $\rho_4 = 0,8$. Dengan nilai awal untuk $s(0) = 51.088$; $e(0) = 19.158$; $i(0) = 31.930$; dan $r(0) = 25.544$ sehingga didapatkan grafik sebagai berikut dengan garis biru tua sebagai *Susceptible*, garis hijau sebagai *Exposed*, garis merah sebagai *Infected*, dan garis biru muda sebagai *Recovered*.



Gambar 5 : Simulasi Keempat

4. Kesimpulan

Jadi, dari dilakukannya simulasi ini akan didapatkan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- 1) Terbentuk model matematika SEIR penyebaran penyakit malaria dengan pemberian vaksinasi yang berupa sistem persamaan diferensial nonlinear bebas penyakit ataupun yang endemik.
- 2) Berdasarkan keempat simulasi model matematika SEIR terlihat bahwa laju infeksi sangat berpengaruh dalam menentukan kestabilan titik ekuilibrium, semakin tinggi laju infeksi maka penyakit akan semakin menyebar dalam populasi dan semakin tinggi pemberian vaksinasi pada individu rentan maka kelas *Infected* akan menurun menuju nol. Jadi, program pemberian vaksinasi pada penyebaran penyakit malaria dapat digunakan untuk mengendalikan penyakit tersebut.

5. Referensi

- [1] Dwi, L. & Eko, S. (2018). Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Malaria Dengan Model Seir. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- [2] Oktavia, E. (2016). Analisis Kestabilan dari Sistem Dinamik Model SEIR pada Penyebaran Penyakit Cacar Air (Varicella) dengan Pengaruh Vaksinasi. Yogyakarta: Jurusan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.
- [3] Parera, M. & Tiala, M. E. (2012). Potensi Vaksin Plasmodium Falciparum Fase Pra-Eritrositer RTS,S Sebagai Imunoprofilaksis Pada Pelancong. Institute for Supply Management, V(1):31
- [4] Putra, N.S. (1994). Serangga di Sekitar Kita. Edisi Pertama. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.
- [5] Sari, A. (2012). Karakteristik Penderita Malaria Terhadap Kejadian Malaria di Kecamatan Suka Makmur Kabupaten Aceh Besar Tahun 2012. Jurnal Kesehatan Masyarakat, V (1): 1-2.
- [6] Shah, N. H & Gupta, J. (2013). SEIR Model and Simulation for Vector Borne Diseases. Applied Mathematics. 4: 13-17.