

MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO - 2018

MEEC - IST, TESTE N0.1 TIPO - V02

Problema No.1 [5v] Análise de Sistemas Não Lineares

Consider o sistema dinâmico descrito pela equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(x-1) + u \quad (1)$$

onde u é um “parâmetro de controlo” real e constante, mas arbitrário.

P1.1 [1v] Seja $u=0$. Calcule os pontos de equilíbrio do sistema definido por (1).

P1.2 [2v] Ainda com $u=0$ trace, *de modo aproximado* a evolução das trajectórias de $x(t)$, para as seguintes condições iniciais de $x(0)$: -2 , 0.5 , e $+2$. Para isso, calcule explicitamente os sinais de $dx(t)/dt$ e $d^2x(t)/dt^2$, $t \geq 0$. Com base nesta informação, estabeleça uma conjectura acerca da estabilidade local de cada um dos pontos de equilíbrio.

P1.3. [1v] Confirme a conjectura acerca das propriedades de estabilidade local dos pontos de equilíbrio feita em P1.2 por análise das linearizações do sistema (1) em torno de cada um desses pontos.

P1.4. [1v] Suponha agora que o parâmetro de controlo u é **diferente de 0**. Calcule o intervalo de valores de u para os quais os novos pontos de equilíbrio são reais e distintos e calcule os pontos de equilíbrio correspondentes em função de u . Discuta as propriedades de estabilidade local dos pontos de equilíbrio resultantes.

Problema No. 2 [4v] Modelação em Espaço de Estados

A figura 1 representa um sistema para medir a aceleração de uma plataforma em movimento, que está na base de todos os sistemas sofisticados de navegação inercial para aeronaves, naves espaciais, e veículos robóticos aéreos, terrestres, e marinhos. O sistema consiste num corpo com massa m , livre de se deslocar mas ligado à “caixa” do acelerómetro por um conjunto mola+amortecedor, caracterizado respectivamente pelos coeficientes k e β . A variável x representa o desvio da posição da massa m em relação à posição que ocupa na “caixa” quando esta tem aceleração 0. O sistema tem um sensor de deslocamento, que mede este desvio.

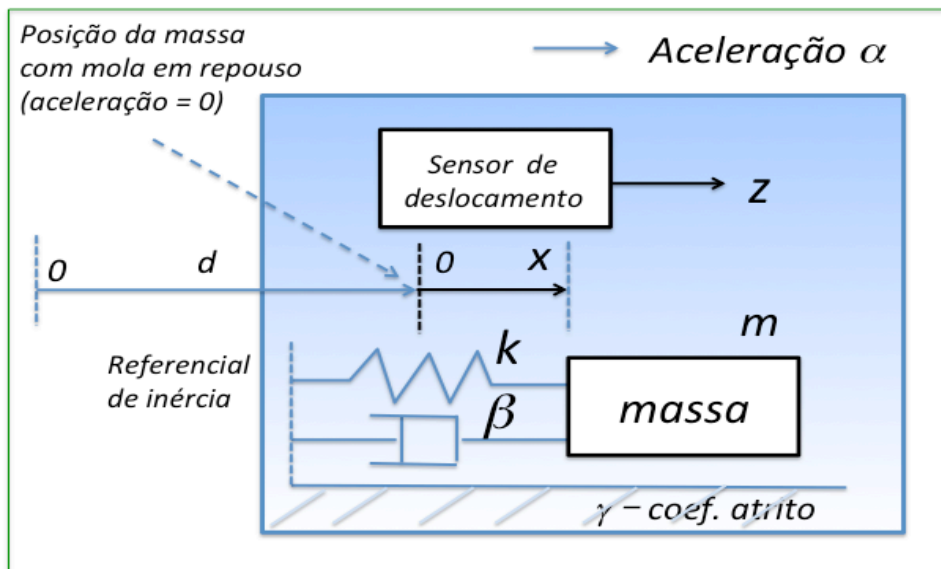


Fig. 1 Acelerómetro. Na figura, o símbolo 0 denota quer a origem do referencial de inércia (fora da caixa) quer o ponto (dentro da caixa) a partir do qual se mede o desvio x da massa m em relação ao repouso (aceleração 0).

P2.1 [1v] Seja d a posição do ponto de referência da “caixa” em relação a um referencial inercial, deslocando-se este ponto com aceleração $\alpha(t)$. Aplicando as leis de Newton na massa deduz a equação diferencial que relaciona a variável de deslocamento x com α . Como se alteraria a sua resposta se a massa se movesse com atrito no fundo da “caixa”, com coeficiente de atrito γ ?

P2.2 [2v] A dinâmica do sensor de deslocamento (com entrada x e saída z) é dada por

$$\frac{dz}{dt} = -10z(t) - 10x(t)$$

Com base no resultado obtido em P2.1 e a dinâmica do sensor, escreva na forma matricial as equações do modelo de estado do sistema em que a entrada é a aceleração da “caixa” e a saída é a medida z dada pelo sensor de deslocamento. Adopte a seguinte escolha de variáveis de estado:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T: x_1 = x, x_2 = dx/dt, x_3 = z.$$

Adopte como vector de saída $y = z = x_3$.

P2.3 [1v] Suponha que a “caixa” está animada de uma aceleração constante $\alpha(t) = \alpha^* ms^{-2}$, $t \geq 0$, com α^* fixo mas arbitrário. Com base no modelo de estado derivado em P2.2, mostre que o limite de $z(t)$ quando t tende para infinito é finito e proporcional a α^* . Calcule a constante de proporcionalidade em função dos parâmetros m , k , e β . Comente a utilidade do sistema como instrumento para medir a aceleração de um corpo sem recurso a ajudas externas.

Problema No. 3 [4v] Relação entre Descrições de Sistemas nos Domínios da Frequência e em Espaço de Estados.

Considere o sistema escalar com entrada u e saída y , com a função de transferência

$$G_1(s) = Y(s)/U(s) = 1/[s^3(s+1)] \quad (2)$$

P3.1 [2v] Escreva, na forma matricial, uma realização em espaço de estados do sistema com dimensão igual a 4.

P3.2 [1v] Idem, para o sistema com função de transferência

$$G_2(s) = Y(s)/U(s) = (s^2 + s + 1)/[s^3(s+1)] \quad (3)$$

Para a realização obtida, apresente um diagrama de blocos com quatro integradores que ilustre como se simula o sistema no ambiente Simulink.

P3.3 [1v] É sabido que dada uma função de transferência $G(s)$, existe um número infinito de realizações (em espaço de estados) possíveis. Dê um exemplo de uma realização de $G_1(s)$ diferente da que obteve em P3.1, com dimensão igual a 5.

Problema No.4 [7v] Linearização e Análise de Sistemas em Espaço de Estados

Considere um “veículo robótico submarino” (ver Fig. 2) que se move na horizontal, actuado pela força F gerada por um sistema de propulsão.

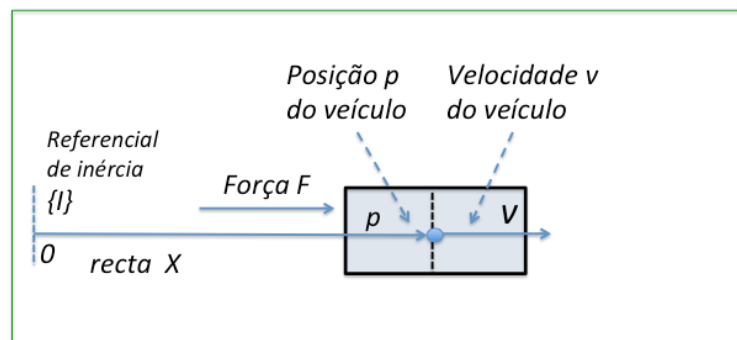


Fig. 2. Veículo submarino a movimentar-se ao longo da recta X.

O veículo desloca-se com **velocidade linear** v , e a sua **posição** p é medida em relação ao referencial de inércia $\{I\}$ representado na Fig. 2, com origem em 0. Pretende-se conduzir assintoticamente a variável p (distância do veículo à origem do referencial $\{I\}$) para 0, por acção da variável F .

No que se segue, consideram-se apenas pequenos desvios em relação ao **ponto de equilíbrio** correspondente à posição linear $p_0=0$, velocidade linear $v_0=0$, e entrada $F_0=0$.

P4.1 [2v] Derive a equação diferencial não linear de segunda ordem que descreve o sistema com entrada F e saída p e deduza uma realização

correspondente em espaço de estados. **Admita o modelo dinâmico simplificado do veículo (com atrito hidrodinâmico quadrático) dado por**

$$m \frac{dv}{dt} = -\beta v |v| - v + F$$

com $m=1\text{Kg}$, $\beta=1\text{N/m}^2$, juntamente com a **parte cinemática** dada por

$$\frac{dp}{dt} = v$$

Calcule a linearização do sistema total em torno do ponto de equilíbrio acima especificado e mostre que ela se pode escrever na forma

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2; \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u \quad (4)$$

onde x_1 , x_2 e u correspondem a pequenos desvios de p , v , e F respectivamente em torno de $p_0=0$, $v_0=0$, e $F_0=0$. **Atenção: tenha cuidado ao calcular a derivada de $\beta v |v|$ em ordem a v no ponto $v=v_0=0$; é conveniente fazer o traçado da função.**

P4.2 [1 v] Pretende-se regular o movimento do veículo robótico de modo a conduzir x_1 e x_2 assintoticamente para 0. Mostre que este objectivo não é atingível em malha aberta, ou seja, com $u=0$ em (4). Para isso, trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema (4) no plano de fase (x_1, x_2) e tire conclusões. **Atenção: não tente resolver esta alínea utilizando a técnica de diagonalização de sistemas!** Basta examinar com cuidado as expressões extremamente simples para dx_1/dt e dx_2/dt em (4).

P4.3 [1 v] A fim de ultrapassar a dificuldade enunciada em P4.2, propõe-se agora uma lei de controlo por retroacção

$$u = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t)$$

com $k_1=10$ e $k_2=10$. Mostre que com esta lei de retroacção a posição de equilíbrio $x_1=0$; $x_2=0$ é assintoticamente estável. Para isso, calcule os valores próprios do sistema de controlo em malha fechada.

P4.4 [2v] Para confirmar o resultado obtido em P4.3 trace de modo aproximado um conjunto representativo de trajectórias do sistema no plano de fase (x_1, x_2) . *Procedimento a adoptar:* i) calcule os valores e vectores próprios do sistema, ii) faça uma mudança de coordenadas nas quais a dinâmica do sistema fique em forma diagonal, iii) trace trajectórias representativas no novo espaço de fases, iv) “transfira” as trajectórias calculadas para o espaço de fase original.

P4.5 [1v] Modifica-se agora o sistema de controlo de modo a estabilizar o sistema em torno de pontos de equilíbrio genéricos $x_1=r$; $x_2=0$. Para isso, reformula-se a lei de retroacção de acordo com

$$u = k_1(r - x_1(t)) - k_2 x_2(t)$$

onde r denota uma referência arbitrária mas fixa de posição linear desejada. A partir do modelo em espaço de estados, calcule a função de transferência

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{R(s)}$$

Verifique que os polos em malha fechada são iguais aos valores próprios determinados em P4.3. Comente acerca da capacidade do sistema em regular a variável x_1 para um valor desejado arbitrário.