(iii). $f(t)=\underbrace{\int_0^t f(t-\tau)e^{-\tau}d\tau}_{f(t)*e^{-t}}+3t^5$

$\Rightarrow F(s)=F(s)\frac{1}{s+1}+3\cdot\frac{5!}{s^{5+1}}$

$\Rightarrow F(s)=\frac{3\cdot 5!\,(s+1)}{s^7}=\frac{3\cdot 5!}{s^6}+\frac{3\cdot 5!\cdot\frac{6!}{6!}}{s^7}$

$\Rightarrow f(t)=3t^5+\frac{1}{2}t^6$ #.

§ 微分方程式的級數解.

$p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$

在 $x=a$ 處的級數解為何?

定义: 若在 $x=a$, $y(x)$ 的任意階導數均存在, 則在 $x=a$ 處, $y(x)$ 存在一 Taylor 級數解.

$\Rightarrow$ 可表示成

$$y(x)=y(a)+y'(a)(x-a)+\frac{y''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

把這些係數另外表示成

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$, 其中 $a_n=\frac{y^{(n)}(a)}{n!}$

把原本決定 $y(x)$ 在 $x=a$ 的任意階導數 $\frac{y^{(n)}(a)}{n!}$

改為決定 $(x-a)^n$ 的係數 $a_n$ #.

ex. $y'+2y=0$

$x=0$ 的級數解

$\Rightarrow y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

代入原式: $y' + 2y = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

想法: 令 $k = n-1 \Rightarrow n = k+1$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

再令 $k = n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

另外可以想成 令 $n = n+1$ 即可

$$\Rightarrow \text{原式}: \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[(n+1) a_{n+1} + 2a_n\right]}_{\text{這項為 0 即可}} x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_n \quad (n \geq 0)$$

$\Rightarrow$ $n=0$ $\quad a_1 = \frac{-2}{1} a_0$

$n=1$ $\quad a_2 = \frac{-2}{2} a_1 = \frac{(-2)^2}{2!} a_0$

$n=2$ $\quad a_3 = \frac{-2}{3} a_2 = \frac{(-2)^3}{3!} a_0$

$\vdots$

$$a_n = \frac{(-2)^n}{n!} a_0$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + \frac{-2}{1} a_0 x + \frac{(-2)^2}{2!} a_0 x^2 + \cdots + \frac{(-2)^n}{n!} a_0 x^n + \cdots$$

$$= a_0\left(1+\frac{-2}{1}x+\frac{(-2)^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-2)^n}{n!}x^n+\cdots\right)$$

$$= a_0\cdot e^{-2x}$$

* 常見的 Taylor

$$\begin{cases} e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \\ \cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots \\ \sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots \end{cases}$$

$p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0$ ———— (1)

若在 $x=a$，$y$ 存在 Taylor 級數解 (i.e 找得到任意階導數)

則 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$

則稱 $x=a$ 為方程式 (1) 的常點 (Ordinary Point).

否則稱 $x=a$ 為 〃 (1) 的奇異點 (Singular Point)

ex. $(x-1)y'+2y=0$

請問 $x=1$ 是常點 or 異點？

⇒ 設 $y(1)=C$.

若 $y(1)$, $y'(1)$ … $y^{(n)}(1)$ 找得到就是常點.

⇒ $y'(x)=-\frac{2}{x-1}y(x)$ , $y'(1)=\infty$

⇒ $x=1$ 是異點. #.

ex. $(x-1)^2y''+2xy'+3y=0$

$y(1)=a$, $y'(1)=b$ , $x=1$ 是什麼點.

⇒ $y''(1)=\infty$

⇒ $x=1$ 是異點 #.

$\Rightarrow$ 歸納.

$$y'' + \frac{q(x)}{p(x)} y'(x) + \frac{r(x)}{p(x)} y(x) = 0$$

$\Rightarrow p(a) = 0 \Rightarrow x = a$ 是異點.

(令 $p(x) = 0$ 的點皆為異點)

ex. $(x+1)(x-2)y'' + 3xy' + 4y = 0$

異點在 $x = -1$, $x = 2$ 處.

ex. $(x+1)(x-2)y'' + 3(x-2)y' + 4(x-2)y = 0$

異點在 $x = -1$ 處.

( $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ 沒公因式才行).

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

讓上述 $y(x)$ 級數解存在的收斂區間為

$|x-a| < L$ ( $L$: 收斂半徑)

$L$: 由 $x = a$ 處到最近異點的距離

ex. $(x-1)y' + 2y = 1$

$x = 1$ 異點

$x = 0$ 常點.

$\Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x-0| < L = 1$

ex. $y'' + y = 0$

$x = 0$ 常點.

$\Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x-0| < L = \infty$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$\Rightarrow$ 原式: $\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

令 $n = n+2$

$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\Rightarrow \left( a_{n+2} = \dfrac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n \quad , n \geq 0 \right)$

↳ 循环/遞迴公式 (recurrence formula)

$\Rightarrow$ $n=0 \quad a_2 = \dfrac{-1}{2\cdot 1} a_0 = \dfrac{-1}{2!} a_0$

$n=1 \quad a_3 = \dfrac{-1}{3\cdot 2} a_1 = \dfrac{-1}{3!} a_1$

$n=2 \quad a_4 = \dfrac{-1}{4\cdot 3} a_2 = \dfrac{(-1)^2}{4!} a_0$

$n=3 \quad a_5 = \dfrac{-1}{5\cdot 4} a_3 = \dfrac{(-1)^2}{5!} a_1$

$\vdots$

$a_n$ ?

$\because$ 2階微分方程式，本來就有 2 个未知係數

$\Rightarrow a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} a_0$

$a_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1$

$\therefore y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 \cdot x^{2n+1}$$

$$= a_0 \cos x + a_1 \sin x.$$

ex. $y' + 2y = 1$，求 $x=0$ 的級解.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < \infty$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

令 $n = n+1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) a_{n+1} + 2a_n\right] x^n = 1$$

$$\begin{cases} n = 0 & a_1 + 2a_0 = 1 \\ n \geq 1 & (n+1) a_{n+1} + 2a_n = 0 \end{cases}$$

非齊性時會發生 =w=

$\Rightarrow$ ( $a_0 = \frac{1}{2}(1-a_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1$ )

↳方便 recurrence formula.

$$a_{n+1} = \frac{-2}{n+1} a_n$$

$n=1 \quad a_2 = \frac{-2}{2} a_1$

$n=2 \quad a_3 = \frac{-2}{3} a_2 = \frac{(-2)^2}{3!} a_1$

$n=3 \quad a_4 = \frac{-2}{4} a_3 = \frac{(-2)^3}{4!} a_1$

$\vdots$

$$a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{n!} a_1$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1 + a_1 x + \frac{-2}{2} a_1 x^2 + \cdots + \frac{(-2)^{n-1}}{n!} a_1 x^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_1 \left( 1 - 2x + \frac{(-2)^2}{2} x^2 + \cdots + \frac{(-2)^n}{n!} x^n + \cdots \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} a_1 \cdot e^{-2x}$$

ex. $y' + 2y = x + 1$ , $x = 1$ 的級數解.

$\because x = 1$ 是常點.

$\therefore$ 存在 Taylor 級數解.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \quad , \quad |x-1| < L = \infty$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (n+1) a_{n+1} + 2a_n \right] (x-1)^n = 1 \cdot (x-1) + 2 .$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0 , & a_1 + 2a_0 = 2 \\ n = 1 , & 2a_2 + 2a_1 = 1 \\ n \geq 2 , & (n+1) a_{n+1} + 2a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} - a_2$$

$$a_0 = 1 - \frac{1}{2} a_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} a_2$$

保留$a_2$很重要 =w=

$$n = 2 \quad a_3 = \frac{-2}{3} a_2$$

$$n = 3 \quad a_4 = \frac{-2}{4} a_3 = \frac{(-2)^2}{4 \cdot 3} a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-2)(-2)\cdots(-2) \times 2}{n(n-1)\cdots 3 \times 2} a_2 = \frac{2 \cdot (-2)^{n-2}}{n!} a_2$$

$$\Rightarrow y(x) = a_0 + a_1 (x-1) + a_2 (x-1)^2 + \cdots + a_n (x-1)^n + \cdots$$

$$= \boxed{\frac{3}{4}} + \frac{a_2}{2} + \left( \boxed{\frac{1}{2}} - a_2 \right) \boxed{(x-1)} + a_2 (x-1)^2 + \cdots \frac{2 \cdot (-2)^{n-2}}{n!} a_2 (x-1)^n + \cdots$$

$$= \boxed{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x-1)} + \frac{a_2}{2} \left[ 1 - 2(x-1) + 2(x-1)^2 + \frac{(-2)^3}{3!}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-2)^n}{n!}(x-1)^n + \cdots \right.$$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{a_2}{2} e^{-2(x-1)}$ #

Verify: $y' + 2y = x+1 = (x-1)+2$

令 $t = x-1 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot 1$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} + 2y = t+2 \Rightarrow y_c = c_1 e^{-2t}$

$y_p = \frac{1}{D+2}(t+2)$

$\Rightarrow y = \frac{x-1}{2} + \frac{3}{4} + ce^{-2(x-1)}$ #

特別換成 $x-1$ 的形式. 純粹只要対 $x=1$ 附近の $y$值有興趣