NCKU CSIE Discrete Mathematics (2017 Spring) Midterm I Solution

1\.

(1) F

解法 1

1\.

∴ False, $(p\vee q)\to(q\to(p\wedge q)) \Leftrightarrow (p\vee q)\to(\neg q\vee(p\wedge q)) \Leftrightarrow (p\vee q)\to((\neg q\vee p)\wedge(\neg q\vee q)) \Leftrightarrow (p\vee q)\to(\neg q\vee p)$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\to(\neg q\vee p) \Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee(\neg q\vee p) \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg q\vee p) \Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee\neg q)\vee p$

$\Leftrightarrow \neg q\vee p$ #

解法 2

1\. (1) $(p\vee q)\to[-q\vee(p\wedge q)] \Leftrightarrow (p\vee q)\to[(-q\vee p)\wedge T_0]$

$\Leftrightarrow (p\vee q)\to(-q\vee p)$

p	q	$p\vee q$	$-q\vee p$	$(p\vee q)\to(-q\vee p)$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

∴ it's not a tautology

∴ False #

(2)

(2) T

If 17|(3a+5b)

=>17|9a+15b, 又 17|17a+17b

=>17|17a+17b-9a-15b

=>17|8a+2b

=>17|4a+b

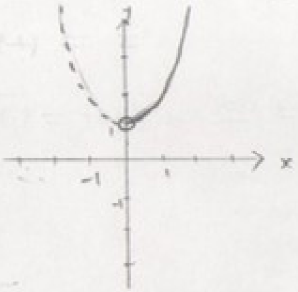
(3) T

(3)

true, A to B function : 6^4 種

A to B and one to one function $6\times5\times4\times3$ 種

$\Rightarrow$ Probability : $\frac{6\times5\times4\times3}{6^4} = \frac{5}{18} < \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

	(4) F	(4) 實際上為 $\frac{20}{2}=10$ 之 number of compositions $\therefore$ the number of composition $=2^{10-1}=2^9$ $\therefore$ False #
	(5) T	(5) for $x>0$, $f(x)$ 為一遞增函數 +35  由圖可知，在 $\mathbb{Z}^+$ 的 domain 中圖形不會有對稱性， $\therefore$ 它會是 one to one function $\therefore$ True #
	(6) T	(6) true, 因 $A=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$, 任一 先選了n, 其subset 為 $P(A)$, 因此 $1\sim n-1$ 為可選可不選 其個數則為 2^{n-1} #
	(7) T	By induction: (7) true, $n=1$, $6^3+7^3=559$ 是 43之倍數 assume $n=k$ 也為43之倍數, 即 $43 \mid 6^{k+2}+7^{2k+1}$ when $n=k+1$ $6^{k+3}+7^{2k+3}=6\cdot6^{k+2}+49\cdot7^{2k+1}=6(6^{k+2}+7^{2k+1})+43\cdot7^{2k+1}$ +15 $\Rightarrow$ 也為43之倍數因 $43 \mid 6^{k+2}+7^{2k+1}$ 且 $43 \mid 43$ $\Rightarrow$ 根據數學歸納法, $43 \mid 6^{n+2}+7^{2n+1}$ #

2.	2.(a) +15 $\frac{5!}{\cancel{1!1!2!1!}}(2)(-1)(3)^2(4) = 5\times4\times3\times2\times(-1)\times(3)^2(4) = -4320$ # (b) $H^4_5 = C^8_5 = C^8_3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} = 56$ # (c) $x=1, y=1, z=1$ 代入 $\Rightarrow (2-1+3+4)^5 = 8^5 = 2^{15}$ # (d) 原式: $(2x^2 - x + 3z^{-1} + 4)^5$ x^4z^{-1}係数? (i) $\frac{5!}{\cancel{2!1!2!}}(2)(3)^1(4)^2 = 5760$ (ii) $\frac{5!}{\cancel{1!2!1!1!}}(2)(-1)^2(3)^1(4)^1 = 1440$ (iii) $\frac{5!}{4!1!}(-1)^4(3)^1 = 15$ (i)+(ii)+(iii) = 7215 # (e) 不会一樣 ∵當y換x, 有些項数的係数可以合併 ∴替換過後的項数會比原本的少 #
3.	3 (a) $p \wedge q$ $\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$ $\Leftrightarrow \neg[\neg p \vee \neg q]$ $\Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$ $\Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q)$ # (b) $p \to q$ $\Leftrightarrow \neg p \vee q$ $\Leftrightarrow \neg(\neg p \downarrow q)$ $\Leftrightarrow \neg((p\downarrow p)\downarrow q)$ $\Leftrightarrow ((p\downarrow p)\downarrow q)\downarrow((p\downarrow p)\downarrow q)$ # $p \vee q$ $\Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$ $\Leftrightarrow \neg(p \downarrow q)$ $\Leftrightarrow (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$
4.	(a) $\{\emptyset\}$ (b) $\{a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ (c) $\{a, \{\emptyset\}\}$ (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, a\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{a, \{a\}\}, \{\emptyset, a, \{a\}\}\}$

<table>
<tr><td>5.</td><td colspan="2">5.
(a) $x_1+x_2+x_3=8$
10
$\because x_1,x_2,x_3$ at least $=1$
$\therefore$ let $x_1+x_2+x_3=5$ $(x_1,x_2,x_3\geq 0)$
$\binom{3+5-1}{5}=21$ #

(b) $x_1+x_2+x_3<8$
$\Rightarrow x_1+x_2+x_3\leq 7$
$\because x_1,x_2$ at least $=1$, x_3 at least $=3$
$\therefore$ let $x_1+x_2+x_3\leq 2$
$\Rightarrow x_1+x_2+x_3+n=2$
$\binom{4+2-1}{2}=10$ #</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>解
法
1</td><td>6. +10
(a) 可看成1到100；排2群10個數
讓第一群的最大數小於第二群的最小數
$\Rightarrow$ 排法：1~100中，直接先排20個數
前10小的數放在第一群，剩下的放第二群
$\Rightarrow C^{100}_{20}$ 種

(b)
$\binom{3n}{2}=3\binom{n}{2}+3n^2$
$\Rightarrow$ $\boxed{n}\boxed{n}\boxed{n}$ 三組東西中，排出2個的方法數
可以先排一個n，再從n中排2個 $C^3_1\binom{n}{2}=3\binom{n}{2}$
$\Rightarrow$ 也可以從nnn中排2個n，再各別從n中排一個出來
$C^3_2\binom{n}{1}\binom{n}{1}=3n^2$
$\Rightarrow \binom{3n}{2}=3\binom{n}{2}+3n^2$</td></tr>
</table>

	解法2	6. +10 (a) 100 students $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots s_{100}$ 先將學生按身高排好 $C^{10}_{10}C^{90}_{10} + C^{11}_{10}C^{89}_{10} + \cdots C^{k}_{10}C^{100-k}_{10} + \cdots + C^{90}_{10}C^{10}_{10}$ $= \sum_{k=10}^{90}\binom{k}{10}\binom{100-k}{10}$ # (b) $\binom{3n}{2} = 3\binom{n}{2} + 3n^2$ n n n 選2個 $C^3_1\binom{n}{2}$ 有3個n選其中1個n 在此n內選2個 $C^3_2\binom{n}{1}\binom{n}{1}$ 有3個n選其中2個n 在n內選1個

7.

7 rock-n-roll CDs + 9 classic CDs

7. +10

$29x + 33y = 500.$

$33 = 29(1) + 4 \qquad 29 = 4(7) + 1.$

$4 = 33(1) - 29(1)$

$4 \times 125 = 33 \times 125 + 29 \times (-125)$

$500 = 33 \times (125 - 29k) + 29 \times (-125 + 33k)$

$125 - 29k \geq 0 \qquad -125 + 33k \geq 0$

$\frac{125}{29} \geq k \qquad k \geq \frac{125}{33}$

$4.\ldots \geq k \qquad k \geq 3.\ldots$

$k = 4$

$(125 - 29 \times 4,\ -125 + 33 \times 4)$

$(9, 7)$ #