$\Rightarrow z'(x) - \lambda_1 z(x) = 0$

$\Rightarrow z(x) = e^{\lambda_1 x}$

$\Rightarrow (D-\lambda_2)y = z(x) = k_1 e^{\lambda_1 x}$

$y' - \lambda_2 y = k_1 e^{\lambda_1 x}$

$\Rightarrow y = cI^{-1} + I^{-1}\int I r\, dx.$

$\Rightarrow I = e^{-\int \lambda_2 dx} = e^{-\lambda_2 x}$

$= ce^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x}\int k_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)x} dx$

$= c e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_2 x} \cdot \frac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2} e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$

$= k_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{k_1}{\lambda_1-\lambda_2} e^{\lambda_1 x}$

起先是用猜的去求解，但在遇到重根時會發現有些矛盾 ⇒ 才用微分運算子的觀念

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ (重根)

$\therefore (\lambda-\alpha)(\lambda-\alpha) = 0$ (特性方程式)

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\alpha + \alpha^2 = 0$

$\Rightarrow y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$ (原 D.E)

$\Rightarrow D^2 y - 2\alpha D y + \alpha^2 y = 0$

$\Rightarrow (D-\alpha)(D-\alpha)y = 0$

令 $(D-\alpha)y = z$.

$\Rightarrow z' - \alpha z = 0$

$\Rightarrow z = c_1 e^{\alpha x}$ 代回去.

$\Rightarrow (D-\alpha)y = c_1 e^{\alpha x}$

$\Rightarrow y' - \alpha y = c_1 e^{\alpha x}$

$\Rightarrow I = e^{-\alpha x}$

$\Rightarrow y = c_1 e^{\alpha x} + e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x} c_1 e^{\alpha x} dx$

$= c_2 e^{\alpha x} + c_1 x e^{\alpha x}$

ex. $y''-2y'+y=0$

$\Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \quad \Rightarrow \lambda=1, 1$

$\Rightarrow y=c_1e^x+c_2xe^x$

ex. $y''+4y'+13y=0$

$\Rightarrow \lambda^2+4\lambda+13=0 \quad \Rightarrow \lambda=-2\pm 3i$

$\Rightarrow y=e^{-2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

ex. $y''+6y'+8=0$

$\Rightarrow \lambda^2+6\lambda+8=0 \quad \Rightarrow \lambda=-4, -2$

$\Rightarrow y=c_1e^{-4x}+c_2e^{-2x}$

ex. $y''+10y'+25y=0$

$\Rightarrow \lambda^2+10\lambda+25=0 \quad \Rightarrow \lambda=-5, -5$

$\Rightarrow y=c_1e^{-5x}+c_2xe^{-5x}$

推廣 : n階常係數 O.D.E

def. $y^{(n)} \equiv \dfrac{d^ny}{dx^n}$

$\Rightarrow y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_ny=0$

$a_1, a_2 \dots a_n \in$ const.

case 1: $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\dots\neq\lambda_n \in R$.

$\Rightarrow y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}+\dots+c_ne^{\lambda_nx}$

case 2: $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\alpha\in R$.

$\Rightarrow y=c_1e^{\alpha x}+c_2xe^{\alpha x}+\dots+c_nx^{(n-1)}e^{\alpha x}$

case 3. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{2k}$, $n = 2k$

$\alpha_j \pm \beta_j i$ . $j = 1, 2, \cdots k$

$\Rightarrow y = e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos\beta_1 x + c_2 \sin\beta_1 x)$

$+ e^{\alpha_2 x}(c_3 \cos\beta_2 x + c_4 \sin\beta_2 x)$

$\vdots$

$+ e^{\alpha_k x}(c_{2k-1} \cos\beta_k x + c_{2k} \sin\beta_k x)$

case 4. $(\alpha \pm \beta i)^k$, k个重根

$\Rightarrow y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

$+ x e^{\alpha x}(c_3 \cos\beta x + c_4 \sin\beta x)$

$\vdots$

$+ x^{k-1} e^{\alpha x}(c_{2k-1} \cos\beta x + c_{2k} \sin\beta x)$

ex. 設一微分方程式的特性方程式的根分別為
$\lambda_1 \sim \lambda_{16} = 1, 2, 3, 4, 4, 4, -2 \pm 3i, -3 \pm 2i, -1 \pm 5i,$
$-1 \pm 5i, -1 \pm 5i$ 其微分方程式的解？

$\Rightarrow y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{4x} + c_5 x e^{4x} + c_6 x^2 e^{4x}$
$+ e^{-2x}(c_7 \cos 3x + c_8 \sin 3x) + e^{-3x}(c_9 \cos 2x + c_{10} \sin 2x)$
$+ e^{-x}(c_{11} \cos 5x + c_{12} \sin 5x) + x e^{-x}(c_{13} \cos 5x + c_{14} \sin 5x)$
$+ x^2 e^{-x}(c_{15} \cos 5x + c_{16} \sin 5x)$

若現在 $y'' + a y' + b y = r \neq 0$
如何定义 $y_p(x)$？
$\Rightarrow$ Method 1: Untermined coefficient 未定係數法
(依照 $r(x)$ 函數的型式決定 $y_p(x)$)

如 $y'' + 3y' + 2y = e^{x}$

$\Rightarrow y_h'' + 3y_h' + 2y_h = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -1, -2$

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

how about $y_p$ .? — 猜 $y_p = ke^x$

$\Rightarrow y_p'' + 3y_p' + 2y_p = e^x$

$\Rightarrow ke^x + 3ke^x + 2ke^x = e^x \quad \Rightarrow k = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow y_p = \frac{1}{6} e^x$

$\Rightarrow y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x$ 由.

其它猜法如下:

| $r(x)$ | $y_p$. |
|---|---|
| 1. $e^{\alpha x}$ | $ke^{\alpha x}$ |
| 2. $\begin{cases}\cos\beta x \\ \sin\beta x\end{cases}$ | $k_1\cos\beta x + k_2\sin\beta x$ |
| 3. $x^k$ | $k_0 x^k + k_1 x^{k-1} + \dots + k_k \cdot 1$ |
| 4. $k$ | $k$ |
| 5. $\begin{cases}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x\end{cases}$ | $e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x + k_2\sin\beta x)$ |
| 6. $e^{\alpha x}\cdot x^k$ | $e^{\alpha x}(k_0 x^k + k_1 x^{k-1} + \dots + k_k \cdot 1)$ |
| 7. $\begin{cases}(\cos\beta x)\, x^k \\ (\sin\beta x)\, x^k\end{cases}$ | $\cos\beta x\,(k_0 x^k + k_1 x^{k-1} + \dots + k_k \cdot 1)$ $+ \sin\beta x\,(L_0 x^k + L_1 x^{k-1} + \dots + L_k \cdot 1)$ |

但是 $y' + ay = e^{-ax}$

$\Rightarrow y_h = ce^{-ax}$

$y_p = ke^{-ax}$ > 相同（未定係数法不適用）.

$\Rightarrow$ 引進 "D" 的方法

$\Rightarrow I = e^{\int a\,dx} = e^{ax}$

$\Rightarrow y = ce^{-ax} + e^{-ax}\int e^{ax}\cdot e^{-ax}dx$

$= ce^{-ax} + x\cdot e^{-ax}$

$\hookrightarrow y_p = k\cdot xe^{-ax}$, $k=1$.

當我們依 $r(x)$ 的函数型式決定 $y_p$ 後，將 $y_p$ 和 $y_h$ 比較是否有相同項，若有，必須將相同的部分乘上 $x$ 的最低冪次，使其不再相同為止，之後再將修正後的 $y_p$ 代入決定未定的係数

ex. $y'' + 3y' + 2y = e^{-2x}$

$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$ → 相同.

$y_p = k\cancel{e^{-2x}}$

$= ke^{-2x}\cdot x$

$\Rightarrow y_p' = ke^{-2x} - 2kxe^{-2x}$

$\Rightarrow y_p'' = -2ke^{-2x} - 2ke^{-2x} + 4kxe^{-2x}$

將 $y_p$, $y_p'$, $y_p''$ 代回式子.

$\Rightarrow k = -1$

$\Rightarrow y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} - xe^{-2x}$ #.

ex. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$

$y_h = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$

$y_p = k\cancel{e^{-2x}}$ → 相同

$$= ke^{-2x}\cdot x^2$$

$$y_p' = 2xke^{-2x} - 2ke^{-2x}\cdot x^2$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{3}{2} e^{-2x}\cdot x^2 \quad \#$$

ex. $y'' + 4y = \cos 2x$.

$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ → 相同

$y_p = \cancel{k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x}$

$= (k_1 \cos 2x + k_2 \sin 2x)\cdot x$.

$$\vdots$$

上述方法需花較多時間.

⇒ Method 2: Order reduction. 降階法.

例. $y'' + 3y' + 2y = e^x$

$\Rightarrow (D^2 + 3D + 2)y = e^x$

$\Rightarrow (D+1)\underbrace{(D+2)y}_{\text{令為 } z_p} = e^x$

$\Rightarrow z_p' + z_p = e^x$ — 把該式視為新的一階式.

$\Rightarrow I_1 = e^x$

$\Rightarrow z_p = \underbrace{cI_1^{-1}}_{\text{忽略不視，}\because \text{它会算在 } y_h \text{ 裡}} + I_1^{-1}\int I_1 \cdot e^x dx$.

$\Rightarrow (D+2)y_p = I_1^{-1}\int I_1 e^x dx$

$\Rightarrow y_p' + 2y_p = I_1^{-1}\int I_1 e^x dx$ — 此式又是新的式

$\Rightarrow I_2 = e^{2x}$

$\Rightarrow y_p = \underbrace{cI_2^{-1}}_{\text{还是忽略.}} + I_2^{-1}\int I_2 \left(I_1^{-1}\int I_1 e^x dx\right) dx$

$= e^{-2x}\int e^{2x}\left(e^{-x}\int e^x e^x dx\right) dx$.

$= \frac{1}{6}e^x \quad \#$

ex. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

sol ①. $y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

$y_p = k e^{-2x} \cdot x^2$

⋮

sol ② $\underbrace{(D+2)\underbrace{(D+2)\,y}_{I_1 = e^{2x}}}_{I_2 = e^{2x}} = e^{-2x}$

$\Rightarrow y_p = I_2^{-1} \int I_2 \cdot I_1^{-1} \int I_1 \cdot e^{-2x}\,dx\;dx$.

$= \frac{1}{2} e^{-2x} \cdot x^2$ #.

*. 設某个微分方程式の特性方程式的根為 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

$\Rightarrow (D-\lambda_1)(D-\lambda_2) \cdots (D-\lambda_n)\, y_p = r(x)$

$\Rightarrow y_p = \cdots e^{\lambda_3 x} \int e^{-\lambda_3 x} \left[ e^{\lambda_2 x} \int e^{-\lambda_2 x} \left( e^{\lambda x} \int e^{-\lambda_1 x} \cdot r(x) \cdot dx \right) dx \right] dx \cdots$

ex. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^x$

$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x}$

$y_p = k e^x$

用降階法 即可得 $k = \frac{1}{24}$