

## DISCRETE MATHEMATICS – CH8 Homework8

### 8.1

6. (10 pts) Determine how many integer solutions there are to  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ , if  
(c)  $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 3 \leq x_3 \leq 7, 3 \leq x_4 \leq 8$

The number of solutions equals the number of solutions for  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$   
with  $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 4, 0 \leq x_4 \leq 5$

$$N = \binom{4+12-1}{12} = \binom{15}{12}$$

$$x_1 \geq 6 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 : \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}$$

$$x_4 \geq 6 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 : \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6}$$

$$x_2 \geq 7 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 : \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5}$$

$$x_3 \geq 5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 : \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$$

$$x_1 \geq 6 \text{ and } x_2 \geq 7 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 : \text{不存在}$$

$$x_1 \geq 6 \text{ and } x_3 \geq 5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 : \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1}$$

$$x_1 \geq 6 \text{ and } x_4 \geq 6 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 : \binom{4+0-1}{0} = \binom{3}{0}$$

$$x_2 \geq 7 \text{ and } x_3 \geq 5 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 : \binom{4+0-1}{0} = \binom{3}{0}$$

$$x_2 \geq 7 \text{ and } x_4 \geq 6 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 : \text{不存在}$$

$$x_3 \geq 5 \text{ and } x_4 \geq 6 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 : \binom{4+1-1}{1} = \binom{4}{1}$$

$$\text{Ans: } \binom{15}{12} - [2\binom{9}{6} + \binom{8}{5} + \binom{10}{7}] + 2[\binom{4}{1} + \binom{3}{0}]$$

$$= 455 - (2*84 + 56 + 120) + 2*(4 + 1) = 121$$

### 8.4 & 8.5

12. (10 pts)  $f(4) \neq x$  only, 學號奇數 add  $f(5) \neq x$ , 學號偶數 add  $f(5) \neq w$

12. For  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  and  $B = \{u, v, w, x, y, z\}$ , determine the number of one-to-one functions  $f: A \rightarrow B$  where  $f(1) \neq v, w; f(2) \neq u, w; f(3) \neq x$ ; and  $f(4) \neq v, x, y$ .

奇數

	u	v	w	x	y	z
1						
2						
3						
4						
5						

$$(1+4x+3x^2)(1+3x)=1+7x+15x^2+9x^3$$

$$6! - 7*5! + 15*4! - 9*3! = 186$$

偶數

	u	v	w	x	y	z
1						
2						
3						
4						
5						

	u	v	w	x	y	z
1						
2						
5						
3						
4						

$$(1+5x+5x^2+x^3)(1+2x)=1+7x+15x^2+11x^3+2x^4$$

$$6!-7*5!+15*4!-11*3!+2*2!=178$$

### Advanced assignment

1. (10 pts) explain why the principle of inclusion and exclusion and rook polynomials suit for solving the problems 8.16, and 8.17 respectively (參考答案)

Arrangement with forbidden positions 問題通常是以全部的情況減去不合的情況 (inclusion and exclusion principle)，當限制變多，由排容原理知道，必須加上兩個不合的情況，然後減掉三個不合的情形 (以此類推) ...，而這樣的作法在計算上雖然比較麻煩，還是可以用排容原理解，此外可以利用 rook polynomial 來驗證這類問題的正確性。

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Example 8.16 可將問題想成是

，row 是紅骰子、column 是

綠骰子，棋盤中的每一格表示投擲兩個骰子的狀況，藍色格子表示不能出現的狀況  $[(1, 2), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (4, 5), (6, 6)]$ ，這個题目的目的是要找出每個 row 選出一個 column，不能重複 column 並避開藍色的 forbidden

	1	5	3	4	2	6
1						
2						
4						
3						
5						
6						

zone ( )。這個題目的設定符合 arrangement with forbidden positions 的題型。

	u	v	w	x	y	z
1						
2						
3						
4						

Example 8.17 這個問題可想成是，row 是 input{ 1, 2, 3, 4}，column 是 output{ u, v, w, x, y, z}，棋盤每一格表示 function 有某 input，所對應的 output，藍色格子表示不能出現的情況，這個題目的目的是要找出每個 row 選出一個 column 而不能重複且避開藍色的 forbidden zone，這個題目的設定也與 arrangement with forbidden positions 的題型相符合。

因為 Example 8.16、8.17 都是屬於這種 Arrangement with forbidden positions 的題型，可以將問題轉換成：每個 row 選一個 column，不能重複且需要避開 forbidden zone 的問題，因此可以用上述的方法解。

2. (10 pts) in (1), how about change “rook” to queen”?