

Review

◎ 極限

def: 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$\text{s.t. } 0 < \underbrace{|x - x_0|}_{\text{距離}} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L|}_{\text{誤差}} < \underbrace{\varepsilon}_{\text{精確度}}$$

則稱 $f(x)$ 於 x_0 的極限為 L , 記為 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

◎ 連續

def: 極限 = 函數值

若 (1) $f(x_0)$ 有定義

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$(3) L = f(x_0)$$

則稱 $f(x)$ 於 x_0 為連續

$$\text{ex: } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{為連續} \quad \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

◎ 有界

def: 若 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 為連續

則稱 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 為有界.

若為開區間 (a, b) , 則不一定有界.

ex: $y = \frac{1}{x}$ 於 $(0, \infty)$ 沒有界

◎ 分段連續 (piecewise continuous)

def: 若 $\exists a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$

s.t. (1) $f(x)$ 於 $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$ 為連續

(2) $f(x_1^-), f(x_1^+), f(x_2^-), f(x_2^+), \dots, f(x_n^-), f(x_n^+)$ 均存在

則稱 $f(x)$ 於 (a, b) 分段連續

◎ 定义域 对应域

def: $f: V \rightarrow W$ (V, W 皆为集合)

↳ 定义域 domain ↳ 对应域 codomain

* $C_p(V) \triangleq \{f \mid f \text{ 於 } V \text{ 為分段連續}\}$

$C(V) = \{f \mid f \text{ 於 } V \text{ 為連續}\}$

$C^3(V)$ 表示 f''', f'', f', f 皆 $\in C(V)$

◎ 導數

def: $f'(x_0) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow{\text{df}} \xrightarrow{dx}$

若 $f'(x_0)$ 存在, 則稱 $f(x)$ 於 x_0 為可微

且 $df(x_0, \Delta x) \triangleq f'(x_0) \cdot \Delta x \triangleq df$

$\Rightarrow df = f'(x_0) \cdot dx$ (即 $f'(x) = \frac{df}{dx}$)

◎ 對數微分法

$$1. \frac{df(x)}{dx} = f(x) \cdot \frac{d}{dx} \ln f(x)$$

$$\text{ex. } f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-2)^3(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f(x) \cdot \frac{d}{dx} [2 \ln(x-3) - 3 \ln(x-2) - \ln(x+1)]$$

$$= \frac{(x-3)^2}{(x-2)^3(x+1)} \cdot \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$2. f(x) = \frac{v_1(x) \cdot v_2(x)}{u_1(x) \cdot u_2(x)}, \text{ 又 } \ln f(x) = \ln v_1 + \ln v_2 - \ln u_1 - \ln u_2$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln f(x)}{dx} = \left(\frac{v_1'}{v_1} + \frac{v_2'}{v_2} - \frac{u_1'}{u_1} - \frac{u_2'}{u_2} \right) \cdot f(x)$$

ex. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 13}{(x^2 + 3x + 3)(x+1)^4}$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f(x) \cdot \left(\frac{2x+4}{x^2+3x+3} - \frac{2x+3}{x^2+3x+3} - \frac{4}{x+1} \right)$$

* Formula.

$$f, g \in C^n([a, b])$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

◎ 不定積分 (= 反導數)

def: 若存在 $F(x)$ s.t. $F'(x) = f(x)$.

則 $\int f(x) dx \triangleq F(x) + C$

ex. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

* 微分運算子 D

def: $D(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{D} f(x) = D^{-1} f(x) = \int f(x) dx.$$

◎ 分部積分法 (以下 u, v 即 $u(x), v(x)$)

$$d(uv) = vdu + u dv.$$

↓ 同時積分.

$$\int d(uv) = \int (vdu + u dv)$$

$$\Rightarrow uv = \int vdu + \int u dv \quad (\text{即 } \int u dv = uv - \int vdu)$$

* 現將上述式子改寫

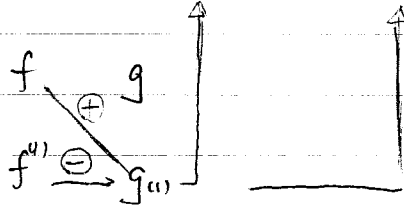
$$\Rightarrow \int u v' dx = uv - \int u' v dx$$

若定義 $f^{(1)} = \frac{d}{dx} f(x)$ $f^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$...

$$f_{(1)} = \int f(x) dx \quad f_{(2)} = \int \int f(x) dx dx \quad \dots$$

則上式又可改寫為 $(u=f, v'=g)$

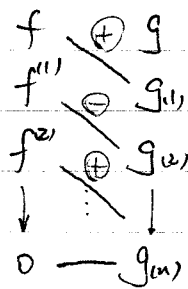
$$\int f \cdot g dx = f \cdot g_{(1)} - \int f^{(1)} \cdot g_{(1)} dx$$



若欲知 $\int f^{(1)} g_{(1)} dx = ?$

$$= \int f^{(1)} g_{(1)} dx = f^{(1)} g_{(2)} - \int f^{(2)} g_{(2)} dx$$

得規律



→ 於最後加/減一常數

ex. $\int (x^2 + 3x + 3) \cos x dx$

$$\begin{array}{rcl} f & g & \\ x^2 + 3x + 3 & \oplus & \cos x \\ 2x + 3 & \ominus & \sin x \\ 2 & \oplus & -\cos x \\ 0 & \ominus & -\sin x \end{array}$$

$$= (x^2 + 3x + 3) \cdot \sin x - (2x + 3) \cdot (-\cos x) + 2 \cdot (-\sin x) + C$$

◎ Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

ex. $\int e^{ax} \cos(bx) dx = ? \rightarrow \textcircled{1} \text{ (實部)}$

$\int e^{ax} \sin(bx) dx = ? \rightarrow \textcircled{2} \text{ (虛部)}$

將其表示成 $\textcircled{1} + \textcircled{2}i$

$$\Rightarrow \textcircled{1} + \textcircled{2}i = \int e^{ax} \cdot e^{ibx} dx = \frac{1}{a+bi} e^{(a+bi)x}$$

$$= \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2} \right) \cdot e^{ax} \cdot (\cos bx + i \sin bx)$$

$$\Rightarrow \text{實部} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\text{虛部} = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

◎ 定積分

$$\text{def: } \int_a^b f(x) dx \triangleq \lim_{\Delta x_{\max} \rightarrow 0} \sum_k f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

x_k^* 為任一個在 $[x_k, x_{k-1}]$ 的點。

◎ 微積分第一基本定理

def: 若 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 連續

則存在 $F(x) \in C^1([a, b])$

s.t. $F'(x) = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$

所以 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

$$\text{因此 } \int_a^x f(u) du = F(x) - F(a)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^x f(u) dx = F'(x) = f(x).$$

$$\text{ex. } \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} e^{-u^2} du = ?$$

$$\text{令 } x^3 = \xi, J(x) = \int_0^{\xi} e^{-u^2} du$$

$$\frac{dJ(x)}{dx} = \frac{dJ(x)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = e^{-\xi^2} \cdot 3x^2 = e^{-x^6} \cdot 3x^2.$$

Ch 1

◎ $f(x)$, 其中 x 為自變數, $f(x)$ 為因變數

◎ 微分方程式 (differential equation)

def: 一個方程式包含因變數與因變數的導數

$$\text{例子: } 1. \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 5y = 3e^x.$$

$$2. RC \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_i(t)$$

像 $y(t)$, $V_c(t)$ 這樣, 只有單一自變數 t , 此種微分方程式又稱為「常微分方程式」(ODE)

若含 2 個自變數以上, 則稱為「偏微分方程式」(PDE)

Ch 2

◎ Terminology 術語.

1. 階數 (order)

def: 一個 D.E 中最高階導數項的微分次數即稱此 D.E 的階數

ex $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + 5u(x, y) = 0$

為二階 PDE.

2. 次數 (degree)

要先將所有項有理化

def: 一個 DE 中每項均為有理項, 最高階導數項的冪次, 即稱為此 DE 之次數