Engineering Mathematics   Homework 5 Solution

1. $Find\ y_p:\ y''-5y'+4y=8e^x$

Sol:

$$y''-5y'+4y=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+4=0 \qquad (\lambda-4)(\lambda-1)=0$$

$$\Rightarrow y_h=C_1e^{4x}+C_2e^x$$

$$\text{猜}y_p=kxe^x$$

$$y_p'=kxe^x+ke^x$$

$$y_p''=kxe^x+2ke^x$$

$$y_p''-5y_p'+4y_p$$

$$=(kxe^x+2ke^x)-5(kxe^x+ke^x)+4kxe^x=8e^x$$

$$-3ke^x=8e^x$$

$$k=-\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow y_p=-\frac{8}{3}xe^x$$

2. $Find\ y_p:\ y''+4y=x\cos x$

Sol:

$$Assume\ y_p=(Ax+B)\cos x+(Cx+E)\sin x$$

$$y_p'=A\cos x-(Ax+B)\sin x+C\sin x+(Cx+E)\cos x$$

$$y_p''=-A\sin x-A\sin x-(Ax+B)\cos x+C\cos x$$
$$+C\cos x-(Cx+E)\sin x$$

$$y_p''+4y_p=-2A\sin x-(Ax+B)\cos x+2C\cos x-(Cx+E)\sin x$$

+4(Ax+B)cosx+4(Cx+E)sinx

=(-(Ax+B)+2C+4(Ax+B))cosx

+(-2A-(Cx+E)+4(Cx+E))sinx

=(3Ax+3B+2C)cosx+(-2A+3Cx+3E)sinx

=xcosx

$$A=\frac{1}{3},B=0,C=0,E=\frac{2}{9}$$

$$y_p=\frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x$$

3. $Solve$: $y''+4y'+4y=3e^{-2x}$

Sol:

$$y''+4y'+4y=0$$

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

$$\lambda=-2(\text{重根})$$

$$y_h=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$$

$$\text{猜}y_p=k_1x^2e^{-2x}$$

$$y_p'=2k_1xe^{-2x}-2k_1x^2e^{-2x}$$

$$y_p''=2k_1e^{-2x}-4k_1xe^{-2x}-4k_1xe^{-2x}+4k_1x^2e^{-2x}$$

$$(2k_1e^{-2x}-4k_1xe^{-2x}-4k_1xe^{-2x}+4k_1x^2e^{-2x})+$$
$$4(2k_1xe^{-2x}-2k_1x^2e^{-2x})+4(k_1x^2e^{-2x})=3e^{-2x}$$

$$2k_1e^{-2x}=3e^{-2x}\ \Rightarrow\ k_1=\frac{3}{2}$$

$$\therefore y_p=\frac{3}{2}x^2e^{-2x}$$

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{3}{2}x^2e^{-2x}$$