

Midterm I Solution

1. (每題正確答案 2分, 描述 3分,共六題,總分 30分)

- (1) False
- (2) True
- (3) False
- (4) True
- (5) True
- (6) True

2. (最後一題錯只扣3分)

- (a) 送分
- (b) $H(6, 4)$ or $C(6, 9) = 84$ 公式正確即滿分
- (c) 公式正確即滿分 , 沒有相加出最終答案 , 公式正確答案錯誤都不給分

(a). 0. #

(b). $\frac{9!}{3!6!} = C_3^9 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ #

(c). $(2x^2 - x + 3x^{-1} + 4)^6$, 求 x^4 係數

① $\frac{6!}{2!1!3!} \times 4 \times 3 \times 4^3 = 256 \times 3 \times 60 = 46080$

② $\frac{6!}{1!2!1!2!} \times 2 \times 1 \times 3 \times 16 = 180 \times 96 = 17280$

③ $\frac{6!}{4!1!1!} \times 1 \times 3 \times 4 = 30 \times 12 = 360$

$\therefore 46080 + 17280 + 360 = 63720$ #

3. (a) 2 pts, n 為質數時

(b) 3 pts, n 為質數(1pt)的完全平方數(2pts)

(c) 3 pts, n 為兩個不同質數的乘積或某質數的三次方 (寫對1條件給2分)

4. 每小題4分, 共12分

(a) $2 = 1(n+2) + (-1)n$. Since $\gcd(n, n+2)$ is the smallest positive integer that can be expressed as a linear combination of n and $n+2$, it follows that $\gcd(n, n+2) \leq 2$. Furthermore, $\gcd(n, n+2) | 2$. Hence $\gcd(n, n+2) = 1$ or 2 . In fact, $\gcd(n, n+2) = 1$, for n odd, and $\gcd(n, n+2) = 2$, for n even.

(b) In general, for $n, k \in \mathbb{Z}^+$, $\gcd(n, n+k)$ is a divisor of k . Consequently, if k is a prime, then $\gcd(n, n+k) = k$, for n a multiple of k , and $\gcd(n, n+k) = 1$, for n not a multiple of k .

(c) $17 \mid (2a+3b)$ and $17 \mid 17(a+b)$

$$\rightarrow 17 \mid -4(2a+3b) + 17(a+b) = 17 \mid 9a + 5b \quad \text{if } a, b \in \mathbb{N}$$

- \Rightarrow a. 推導出 $\gcd(n, n+2) \mid 2$ 或 根據奇偶數列舉 即得4分，過程遺漏扣1分
 b. 寫出 divisor of k 即得4分，只討論 k is prime 或 範圍寫 $1 \sim k$ 扣2分，過程遺漏扣1分
 c. 由條件組合出 $9a + 5b$ 即得4分

5. $n=64, 64=17 \cdot 2 + 5 \cdot 6$

$$n=65, 65=5 \cdot 13$$

$$n=66, 66=17 + 5 \cdot 12$$

$$n=67, 67=17 + 5 \cdot 12$$

$$n=68, 68=17 \cdot 4$$

(3分)

假設 $64, 65, 66, 67, 68, \dots, (n-2), (n-1), n \quad n \geq 64$ 成立

$$k=n, n=69, k=(n-5)+5$$

$$k=n+1, n=69, k=(n-4)+5$$

由數學歸納法

當 n 屬於 \mathbb{Z}^+ ， $n \geq 64$ 可被5和17組成

(10分)

6. 1題5分，寫錯一部份全扣

(A) $(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$ (5分)

(B) $((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$ (5分)

7.

- a. $H(3, 6) = C(8, 6) = 28$

- b. $H(4, 3) = C(6, 3) = 20$

Sol:

$$(a+1) + (b+1) + (c+3) < 9$$

$$(a+1) + (b+1) + (c+3) + (d+1) = 9$$

$$a + b + c + d = 3 \rightarrow H(4, 3)$$

- 每小題 5 分，計算錯誤每處扣一分

8. 在 n 個物品中取一個，再從剩下的 $n-1$ 個物品中取 r 個 = 在 n 個物品中取 $r+1$ 個，再從 $r+1$ 個物品中取1個。

or

一個班級中要選 $r+1$ 位幹部，其中一位是班長，

從 n 人中選一位班長，在從剩下的 $n-1$ 位選 r 位幹部 = 在 n 位中選 $r+1$ 位幹部，再從 $r+1$ 位幹部中選一位當班長。

or

其他，邏輯對即可