NO.

Review

DATE

◎ 極限

def: 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$

s.t $0 < \underbrace{|x - x_0|}_{\text{距離}} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - L|}_{\text{誤差}} < \underbrace{\varepsilon}_{\text{精確度}}$

則稱 $f(x)$ 於 x_0 的極限為 L, 記為 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

◎ 連續

def: 極限 = 函數值

若 (1) $f(x_0)$ 有定义

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

(3) $L = f(x_0)$

則稱 $f(x)$ 於 x_0 為連續

ex: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 為連續 $\because \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

◎ 有界

def: 若 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 為連續

則稱 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 為有界.

若為開区間 (a, b), 則不一定有界.

ex: $y = \frac{1}{x}$ 於 $(0, \infty)$ 沒有界

◎ 分段連續 (piecewise continuous)

def: 若 $\exists\ a < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < b$

s.t (1) $f(x)$ 於 $(a, x_1), (x_1, x_2) \ldots (x_n, b)$ 為連續

(2) $f(a^+), f(x_1^-), f(x_1^+) \cdots f(x_n^+), f(b^-)$ 均存在

則稱 $f(x)$ 於 (a, b) 分段連續

◎ 定义域，对应域

def: $f: \underset{\sim}{V} \rightarrow \underset{\sim}{W}$ （V, W 皆為集合）

↳定义域 domain ↳对应域 codomain

* $C_p(V) \triangleq \{f \mid f$ 於 V 為分段連續$\}$

$C(V) = \{f \mid f$ 於 V 為連續$\}$

$C^3(V)$ 表示 f''', f'', f', f 皆 $\in C(V)$

◎ 導數

def: $f(x_0) \triangleq \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\longrightarrow df$ $\longrightarrow dx$

若 $f(x_0)$ 存在，則稱 $f(x)$ 於 x_0 為可微

且 $df(x_0, \Delta x) \triangleq f'(x_0)\cdot \Delta x \doteq df$

$\Rightarrow df = f'(x_0)\cdot dx$ （即 $f(x) = \frac{df}{dx}$）

◎ 对数微分法

1. $\frac{df(x)}{dx} = f(x)\cdot \frac{d}{dx} \ln f(x)$

ex. $f(x) = \frac{(x-3)^2}{(x-2)^3(x+1)}$

$$\Rightarrow \frac{df(x)}{dx} = f(x)\cdot \frac{d}{dx}\left[2\ln(x-3) - 3\ln(x-2) - \ln(x+1)\right]$$

$$= \frac{(x-3)^2}{(x-2)^3(x+1)} \cdot \left(\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right)$$

2. $f(x) = \frac{v_1(x)\cdot v_2(x)}{u_1(x)\cdot u_2(x)}$，又 $\ln f(x) = \ln v_1 + \ln v_2 - \ln u_1 - \ln u_2$

$$\Rightarrow \frac{d\ln f(x)}{dx} = \left(\frac{v_1'}{v_1} + \frac{v_2'}{v_2} - \frac{u_1'}{u_1} - \frac{u_2'}{u_2} \right)\cdot f(x)$$

ex. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+13}{(x^2+3x+3)(x+1)^4}$

$\Rightarrow \dfrac{df(x)}{dx} = f(x)\cdot\left(\dfrac{2x+4}{x^2+4x+13} - \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3} - \dfrac{4}{x+1}\right)$

* Formula.

$f \cdot g \in C^n([a,b])$

$\Rightarrow \dfrac{d^n}{dx^n}(f\cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} g^{(k)}$

◎ 不定積分（=反導數）

def：若存在 $F(x)$ s.t $F'(x) = f(x)$.

則 $\int f(x)dx \triangleq F(x) + C$

ex. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

* 微分運算子 D

def: $D(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x)$

$\Rightarrow \frac{1}{D} f(x) = D^{-1} f(x) = \int f(x)\,dx$.

◎ 分部積分法（以下 u, v 即 $u(x)$, $v(x)$）

$d(uv) = v\,du + u\,dv$.

↓ 同時積分.

$\int d(uv) = \int (v\,du + u\,dv)$

$\Rightarrow uv = \int v\,du + \int u\,dv$ （即 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$）

* 現將上述式子改寫

$\Rightarrow \int u v' dx = uv - \int u' v \, dx$

若定义 · $f^{(1)} = \frac{d}{dx}f(x)$ $f^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$ $\cdots$

$f_{(1)} = \int f(x)dx$ $f_{(2)} = \iint f(x)dx\,dx$ $\cdots$

則上式又可改~~寫~~為 $(u=f,\ v'=g)$

$$\int f\cdot g\,dx = f\cdot g_{(1)} - \int f^{(1)}\cdot g_{(1)}\,dx.$$

$$\begin{array}{ccc} f & & g \\ & \oplus & \\ f^{(1)} & \ominus & g_{(1)} \end{array}$$

若欲知 $\int f^{(1)} g_{(1)}\,dx = ?$

$$\begin{array}{ccc} f^{(1)} & & g_{(1)} \\ & \oplus & \\ f^{(2)} & \ominus & g_{(2)} \end{array}$$

$$= f^{(1)}\cdot g_{(2)} - \int f^{(2)}\cdot g_{(2)}\,dx.$$

$\vdots$

得規律.

$$\begin{array}{ccc} f & \oplus & g \\ f^{(1)} & \ominus & g_{(1)} \\ f^{(2)} & \oplus & g_{(2)} \\ \downarrow & \vdots & \downarrow \\ 0 & — & g_{(n)} \end{array}$$

⟶ 於最後加/減一常数.

ex. $\int (x^2+3x+3)\cos x\,dx$.

$$\begin{array}{ccc} f & & g \\ x^2+3x+3 & \oplus & \cos x \\ 2x+3 & \ominus & \sin x \\ 2 & \oplus & -\cos x \\ 0 & \ominus & -\sin x \end{array}$$

$$= (x^2+3x+3)\cdot\sin x - (2x+3)\cdot(-\cos x) + 2\cdot(-\sin x) + C.$$

◎ Euler 公式：

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

ex. $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = ?$ → ①(實部)

$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = ?$ → ②(虛部)

將其表示成 ①+②i

$\Rightarrow ① + ② i = \int e^{ax} \cdot e^{ibx}\,dx = \dfrac{1}{a+bi} e^{(a+bi)x}$

$= \left(\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{bi}{a^2+b^2}\right) \cdot e^{ax} \cdot (\cos bx + i\sin bx)$

$\Rightarrow$ 實部 $= \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

虛部 $= \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

◎ 定積分.

def: $\int_a^b f(x)\,dx \triangleq \lim\limits_{(\Delta x)_{max}\to 0} \sum_k f(x_k^*) \cdot \Delta x_k$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

x_k^* 為任一個在 $[x_k, x_{k-1}]$ 的点.

◎ 微積分第一基本定理

def: 若 $f(x)$ 於 $[a, b]$ 連續

則存在 $F(x) \in C'([a,b])$

s.t $F'(x) = f(x)$ $(a \le x \le b)$

所以 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

因此 $\int_a^x f(\mu)\,d\mu = F(x) - F(a)$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(\mu)\,dx = F'(x) = f(x).$

ex. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} e^{-\mu^2}\,d\mu = ?$

令 $x^3 = \xi$, $J(x) = \int_0^{\xi} e^{-\mu^2}\,d\mu$

$\frac{dJ(x)}{dx} = \frac{dJ(x)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = e^{-\xi^2}\cdot 3x^2 = e^{-x^6}\cdot 3x^2.$

Ch 1

◎ $f(x)$，其中 x 為自變数. $f(x)$ 為因变数

◎ 微分方程式 (differantial equation)

def：一个方程式包含因变数与因变数的導数

例子. 1. $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 5y = 3e^{t}$

2. $RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_i(t)$

像 $y(t)$, $V_c(t)$ 這樣 只有單一自变数 t，此种微分方程式又称為「常微分方程式」(ODE)

若含2个自变数以上，則称為「偏微分方程式」(PDE)

Ch 2

◎. Terminology 術語.

1. 階数 (order)

def：一个 D.E 中最高階導数項的微分次数即称此 DE 的階数

ex $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + 5u(x,y) = 0$

為二階 PDE.

2. 次數 (degree)

要先將所有項有理化

def: 一个DE中每項均為有理項，最高階導數項的冪次，即稱為此DE之次數