Hw1 評分標準

1. 10 分

   沒額外增加限制 無限多組解

   額外增加限制，有限多組解，計算過程和討論合理都給分，即使計算錯誤

2. 10 分

   同上

3. 5 分

   要"寫"限制，如果有寫在 1.2.題中亦給分

4. 5 分

   舉例或寫出程式皆給分

※※作業請以 A4 或相近大小的紙書寫，本次不予扣分，下次一律扣１０分※※

如有評分上的疑問，可與助教討論

以下附上 3 份答題範例僅供參考，並沒有標準答案

<Question 1>

多了 R-，且 R- 之後不能接 R

Case I：R- 的下一個不能是 R

Answer：無限多種可能。

我們可以向右走 $(n+5)$ 步，再向左走 n 步，向上 3 步到 $(7,4)$，取任意的整數 $n \geq 0$ 都會產生一種可行的走法，故有無窮多走法。

Case II：R- 的後面都不能有 R

Answer：無限多種可能。

上面提的走法在 Case II 也適用，故也有無窮多種。

<Question 2>

多了 R- 與 U-

Answer：上述的走法一樣適用，故也是無限種

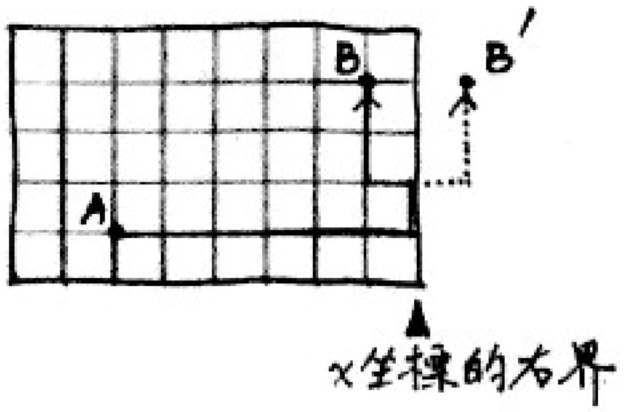
<Question 3>

Do we need some constrains？

Answer：我們可以對動點所在的平面 $(\mathbb{Z}^2)$ 加上邊界限制，或限制步數。以下將針對這兩種限制探討。

1、使用 R, U, R-，且 x 坐標的值最大只到 $(7+n)$ 為止，且 R- 的後面都不能有 R：

我們可以將 R- 出現後的路徑，沿邊界鏡射，如図：



因此，由A走到B的問題可視為由A到B'，且沒有R−的問題。若x的右界為(7+n)則B'的位置比B還要右邊2n格，走法數為$\binom{8+2n}{3}$。

如果只限制R^-的下一個不能為R，則尚需設定x的左界。不過這個算起來太複雜了，可能要用generating function才有辦法。

2. 使用R.U.R−，且只能走(8+2k)步，且R−之後都不能有R：

由上面的討論發現，選定右界為7+n時，步數只可能為8+2n，右界與步數間有bijection，故(8+2k)步的走法同右界為(7+k)的情況，為$\binom{8+2k}{3}$。

如果只限制R−的下一個不能為R，則走法變為

$(R\ldots R)\to(R^-\ldots R^-)\to U$

$\to(R\ldots R)\to(R^-\ldots R^-)\to U$

$\to(R\ldots R)\to(R^-\ldots R^-)\to U\to(R\ldots R)\to(R^-\ldots R^-)$。

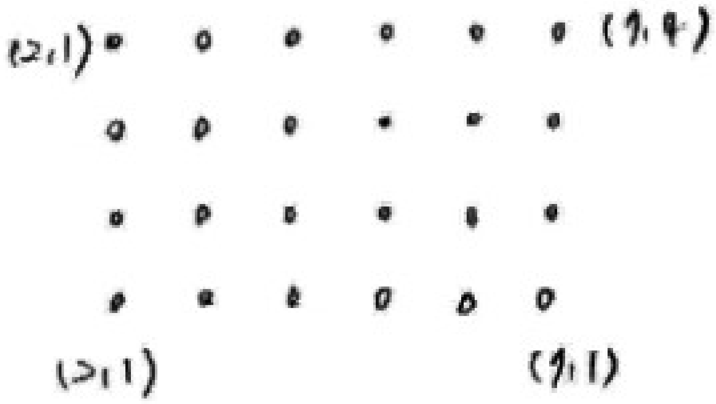
將(5+k)個R放進4個紅色括號，k個R^-放進黑色括號，有$\binom{5+k+4-1}{4}\times\binom{k+4-1}{4}$種方法。

<Question 4>

和電腦科學有關的應用

Answer：所有可能的走法可視為一種由R.U.R−.U−構成的formal language，雖然好像沒什麼closure property可言。我們容許的word長度增加時，可算出|L|增加的複雜度。不然也可用來協助程式模擬穿過塞車車陣的人潮，假設行人都不走斑馬線，他們總是往馬路對面走(U)，但要穿過兩台車之間的縫隙(R,R−)。跨年結束就會這樣。

1. 根據題意，可以有 RR⁻，而無 R⁻R⁻，~~為了讓題目為有限多組解~~，假設 x、y 只能在 (2,1)、(7,1)、(7,4)、(2,4) 這四個點間的範圍移動。則用動態規劃的方式解題，將該問題拆成數個子小題，由左下至右上慢慢計算出最終答案。



$N(x,y) \equiv$ (2,1) 至 (x,y) 的走法數

已知規則

1° 當終點 (x,y) 為 (7,4) 時，(2,1) 到 (7,4) 的總走法 $N(7,4) = \sum_{i=0}^{5} N(2+i,3) * 1$

$\because$ $(2+i,3)$, $i \in (0,5)$ 到 (7,4) 的走法皆為1種

2° 當終點 (x,y) 的 x 值 <7 且 y 值 = 4 時

$N(x,y) = \sum_{i=0}^{7-x} N(2+i,4-1) * $ (i,y) 到 (x,y) 的方法數

$$\text{number} = \begin{cases} (7-2)+1-x, & \text{if } i < x \\ (7-2)+1-i, & \text{if } i \geq x \end{cases}$$

3° 當終點 (x,y) 的 y 值比 4 小時，N(x,y) 等同於 (2,1) 至 (x,y) 在範圍 (2,1)、(7,1)、(7,y)、(2,y) 這範圍內的所有走法

4° $N(2+i,1)$, $i \in (0,5)$ $= (7-2)+1-i$

依照上述規則，可求得出總走法數為 5297 種

A=5297

【另解】題意為整條路徑只有一個 R⁻ 的出現（而非多一種 R⁻ 的走法選擇）

根據題意知無 R⁻R，故 R⁻ 若非最後一個則 R⁻ 後必接 U，分情況討論得

① R⁻ 非最後一個：6個R、2個U、1個R⁻U 的排列：$\frac{9!}{6!2!} = 252$

② R⁻ 為最後一個：6個R、2個U 的排列：$\frac{8!}{6!2!} = 28$

由①②，得總排列數 = 252+28 = 280

A: 280

題意為總共只有一個R-、一個U-

2、若多增加一個U-，則有以下幾種狀況

① R-、U-、R = 5個R、4個U、1個R-U-R：$\frac{10!}{5!4!} = 1260$

② U-R-U = 6個R、3個U、1個U-R-U：$\frac{10!}{6!3!} = 840$

③ R-U-為最後的 = 6個R、4個U：$\frac{10!}{6!4!} = 210$

④ U-R-為最後的 = 210

⑤ R-U 且 U-R = 5個R、3個U、一個R-U、一個U-R：$\frac{10!}{5!3!} = 252$

⑥ R-為最後且 U-R = 5個R、4個U、1個U-R：$\frac{10!}{5!4!} = 1260$

⑦ U-為最後且 R-U = 6個R、3個U、1個R-U：$\frac{10!}{6!3!} = 840$

由①~⑦得總排列數 = 1260+840+210+210+252+1260+840 = 4872

A=4872

[另解] 若題意為 R-、U- 皆可多個，

在該情況下，為了避免答案為無限多組解，須有 ① 可以走的點限制在 (2,1)、(7,1)、(7,4)、(2,4) 這個範圍之中 ② 所有的edge只能走一次（避免像是 R、U、R-、U- 這類會產生cycle的情況）

則所有的可能走法為使用backtracking 遍歷 (2,1) 至 (7,4) 的所有可行解共8560種

A=8560

3、若題意為只多一個R-、只多一個U-的情況，則不須要多加限制式才能找解

若題意為能有多個R-、多個U-的情況，則須加限制式，① 所有可走的點皆在範圍 (2,1)、(7,1)、(7,4)、(2,4) 之中 ② 一種走法中，同一條edge不可重覆走

4、對於像是有多個R-、多個U-類型的問題，其實可以想成是在一個graph中尋找單一起點至單一終點所有simple path的數量。

30

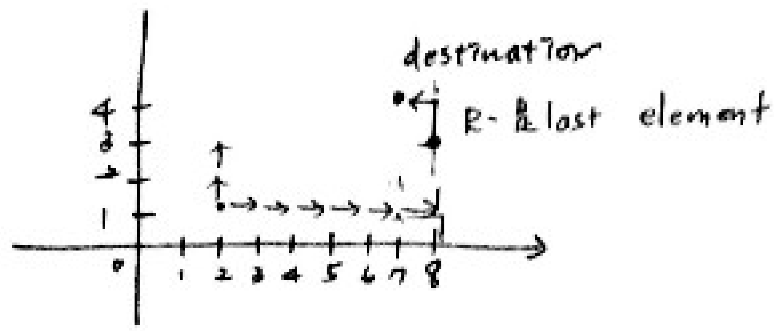
在 Ex14 中，R- 表左移 1 步， 左移後不能馬上右移

① (2,1) → (7,4)，有 R- 一步

② Also 若我們可以往下，有 U- R-

③ 我們需要一些限制條件嗎？ constraints

①



• 一定要有 1 步 R-

▲ 有 R- （從任意 (8,y) 到 (7,y+1)）

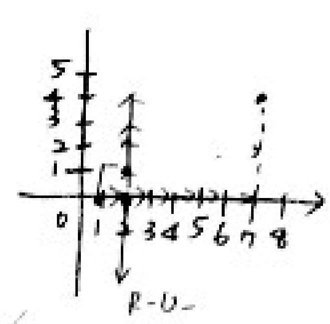
$(10-1)\ C^{8}_{2} = 252$

▲ ∵ $\boxed{R-}$ 是 last element

$C^{8}_{2} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

$28 + 252 = \underline{280}$ ※

②



R-U

$\frac{8!}{3!5!} = 56$

R-U-

$\frac{9!}{5!4!} = 126$

U-R-

$\frac{9!}{6!3!} = 84$

$56 + 126 + 84 = \underline{266}$ ※

③ constraint 限制條件

① R- 必須接 U

② U- 必須接 R, R-

R- 必須接 U, U-

④ 在 Programming 上的應用

full binary search tree