ex $$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+5u(x,y)=0$$

為二階PDE.

2. 次数(degree)

要先將所有項有理化

def: 一個DE中每項均為有理項，最高階導數項的冪次，即稱為此DE之次数

3. 線性微分方程式

def: 不具下列任何一項

a. 因變數的自乘項. ex. $y^2(x)$, $y^3(x)$.

b. 因變數導數的自乘項 ex. $(y'(x))^2$, $(y''(x))^5$.

c. 因變數及其導數的互乘項 ex. $y(x)\cdot y'(x)$, $y(x)\cdot y''(x)$.

則稱為線性微分方程式

反之，若一微分方程式具上述任一項

即稱為非線性微分方程式

ex. $y'(x)+5y^2(x)=e^x$ 為非線性、一階1次 O.D.E

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+u(x,y)\cdot\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+3u(x,y)=0$$

為非線性，一階1次 P.D.E.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ 為線性、二階1次 P.D.E.

($\because x$ 為自變數而非因變數).

$$y'''(x)+5y''(x)+2y(x)=x^2$$

為線性、三階1次 O.D.E.

◎ 一線性微分方程式会滿足重疊定理

$$\begin{matrix} \xrightarrow{v_{i1}} \\ \xrightarrow{v_{i2}} \end{matrix} \boxed{RLC} \xrightarrow{V_c}$$

1. 若令 $v_{i2} = 0 \Rightarrow v_{i1} = V_{c1}$
2. 若令 $v_{i1} = 0 \Rightarrow v_{i2} = V_{c2}$

$\Rightarrow$ 若 input 為 $v_{i1} + v_{i2} \Rightarrow V_c = V_{c1} + V_{c2}$、

可 extend: $V_c(t) = k_1 V_{c1} + k_2 V_{c2}$.

◎ 欲分析微分方程式的解，首先要了解其從何而來.

ex. $y(x) = c$, $c \in$ const 如何消去 $c$?

$\Rightarrow$ 應用微分的概念.

$\Rightarrow \dfrac{dy(x)}{dx} = 0$. 我們就会說此微分方程式的解為 $y(x) = c$.

同样. $y(x) = C_1 x + C_2$, $C_1, C_2 \in$ const

欲消去 $C_1$. $C_2$

$\Rightarrow \dfrac{dy(x)}{dx} = C_1 \Rightarrow \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = 0$ 一样，此式的解即為 $y(x) = C_1 x + C_2$

再看3个例子.

$y(x) = cx + c^2$, $c \in$ const.

$\Rightarrow \dfrac{dy(x)}{dx} = c \Rightarrow \boxed{\dfrac{d^2y(x)}{dx^2} = 0}$ 該式与上例相同 但所得解卻不一样.

$\Rightarrow$ 原則上一个 const 只能微分一次 ($\because$ 每次不定積分只会產生一个常數).

$\therefore$ 正確做法應將 $\dfrac{dy(x)}{dx} = c$ 此式代回原式

$\Rightarrow y(x) = \dfrac{dy(x)}{dx} x + \left(\dfrac{dy(x)}{dx}\right)^2$ 此式的解才叫 $y(x) = cx + c^2$.

└ 非線性，一階2次 O.D.E.

ex. $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}$, $c_1, c_2 \in \text{const}$ $\longrightarrow$ ① $\times 2$

$$\Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} \longrightarrow ② \times (-3)$$

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} \longrightarrow ③ \times 1$$

+)

$$\Rightarrow y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

ex. $y(x) = c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x$ $\rightarrow$ ① $\times 9$  $c_1, c_2 \in \text{const}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3c_1 \sin 3x + 3c_2 \cos 3x \rightarrow ② \times 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -9c_1 \cos 3x - 9c_2 \sin 3x \rightarrow ③ \times 1$$

+)

$$\Rightarrow y''(x) + 9y(x) = 0.$$

簡單來說，

$\boxed{\text{function}}$ (包含某些未知的const) $\xrightarrow{\text{利用微分技巧\&}}$ $\boxed{\text{微分方程式}}$.
簡易運算，消去所有未知數.

我們稱function為D.E的通解(general solution) or 原函數.
(只適用於O.D.E)

◎ 一階常微分方程式(First order ordinary differiential equation)

一般可表示成

1. $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$
2. $y'(x) = f(x,y).$

由1推至2：

$$M(x,y) + N(x,y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

由2推至1：

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

$\Rightarrow N(x,y)\cdot\frac{dy}{dx} = -M(x,y).$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$

$\Rightarrow y' = f(x,y)$ #.

$\Rightarrow f(x,y)\cdot dx = dy.$

$\Rightarrow f(x,y)\cdot dx - dy = 0.$ #.

◎ 定理 in P.17 § 1-2

对 $y'(x) = f(x,y)$ 之 O.E. 有一个 I.C (initial condition) s.t $y(x_0) = y_0$。若 $f(x,y)$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 於 $(x_0, y_0)$ 点之鄰域 (neighborhood) 為連續，則存在 $\varepsilon > 0$ s.t $y(x)$ 於 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ 間有唯一解.

ex. 下列何者有唯一解？

(1) $y' = e^{xy^2}$, $y(0)=1$

(2) $y' = \sqrt{y}$, $y(0)=0$.

(3). $y' = \sqrt{y}$, $y(0)=1$.

(4). $y' = -\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=0$.

(5). $y' = -\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=1$.

$\Rightarrow$ (1). $f(x,y) = e^{xy^2}$ 在 $(0,1)$ 有連續.

且 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{xy^2}\cdot 2xy$ 在 $(0,1)$ 有連續. $\Rightarrow$ 有唯一解.

(2). $f(x,y) = \sqrt{y}$，在 $(0,0)$ 有 〃.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ 在 $(0,0)$ 无 〃 $\Rightarrow$ X

(3). $f(x,y) = \sqrt{y}$ 在 $(0,1)$ 有 〃.

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ 在 $(0,1)$ 有 〃 $\Rightarrow$ ✓

(4). $f(x,y) = -\sqrt{1-y^2}$ 在 $(0,0)$ 有連續 $\Rightarrow$ ✓

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 在 $(0,0)$ 有 〃

(5). $f(x,y) = -\sqrt{1-y^2}$ 在 $(0,1)$ 有 〃. $\Rightarrow$ ✗.

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 在 $(0,1)$ 无 〃

◎ 如何解 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. ($M(x,y)$ & $N(x,y)$ 为已知)

$\Rightarrow$ 該式為一階的方程式 $\Rightarrow$ 應有一个未知數.

$\Rightarrow$ 令 $u(x,y) = c$ 為其解 ($c \in$ const).

$\Delta u(x,y) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$.

$= \left(u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)\right) + \left(u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\right)$

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot(x+\Delta x - x) + \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot(y+\Delta y - y) = 0$

套用*mean-value-theorm.

* mean-value-theorm.

於 $f(x)$, $a \le x \le b$ $\exists c$, $a \le c \le b$

s.t $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$.

$\Rightarrow \Delta u(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y = 0$.

当 $\Delta \to 0$ 時.

$\Rightarrow du(x,y) = \underbrace{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}_{\text{即}M(x,y)}\cdot dx + \underbrace{\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\text{即}N(x,y)}\cdot dy = 0$.

☆ 整个过程只有用到微分,並无其它任何運算.☆

從上式我們得知:

$M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$

$\Rightarrow \partial u = M(x,y)\cdot\partial x$

$\Rightarrow \int \partial u = \int M(x,y)\cdot \partial x + f_1(y)$

$\Rightarrow u = \int M(x,y)\, dx + f_1(y)$

$N(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$

$\Rightarrow \partial u = N(x,y)\cdot \partial y$

$\Rightarrow \int \partial u = \int N(x,y)\cdot \partial y + f_2(x).$

相当是const的角色

$\Rightarrow u = \int N(x,y)\cdot dy + f_2(x).$

$=$

由於2個相等，我們可得知 $f_1(y)$ 和 $f_2(x)$；当然也就能知道 $u(x,y)=C$ 了.

該等式成立的條件即為前頁打星号那句話.

所以，如何知道從 $u(x,y)=C$ 到 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

只有微分而已？

$\Rightarrow$ 從上例，把 $M$，$N$ 拿來

$\Rightarrow M(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ $\qquad$ $N(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$

$\Rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}$ $\qquad$ $\Rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y\partial x}$

只要二者相等即可（当然前提是 $u(x,y)$ 要能偏微2次，才有用）.

L 二階偏導数

則我們特称此微分方程式為「正合」(exact).

ex. $u(x,y)=x^2y^3=C$

$\Rightarrow du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$

$=(y^3\cdot 2x)dx+(x^2\cdot 3y^2)\cdot dy=0.$

上述式子整个过程只有微分，我們来檢查此式是否exact.

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x\cdot 3y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial N}{\partial x}=3y^2\cdot 2x$ $\qquad \Rightarrow$ ✓

ex. $u(x,y) = xy^2 + 3x + 5y = C$.

$\Rightarrow du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy = 0$.

$\Rightarrow (y^2+3)dx + (2xy+5)dy = 0$. ⇒ 給定題目為此式.

如何解?

Sol: 令 $M(x,y) = y^2+3$, $N(x,y) = 2xy+5$.

先判斷是否正合. $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$.

又 $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$. $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy+5$.

$\Rightarrow \partial u = (y^2+3)\,\partial x$ $\Rightarrow \partial u = (2xy+5)\,\partial y$.

$\Rightarrow \int \partial u = \int (y^2+3)dx + f_1(y)$. $\Rightarrow \int \partial u = \int (2xy+5)dy + f_2(x)$.

$\Rightarrow u = xy^2 + 3x + f_1(y)$. $\Rightarrow u = xy^2 + 5y + f_2(x)$.

此2式必相等 (∵正合).

$\Rightarrow f_1(y) = 5y$, $f_2(x) = 3x$

$\Rightarrow u(x,y) = xy^2 + 3x + 5y = C$.