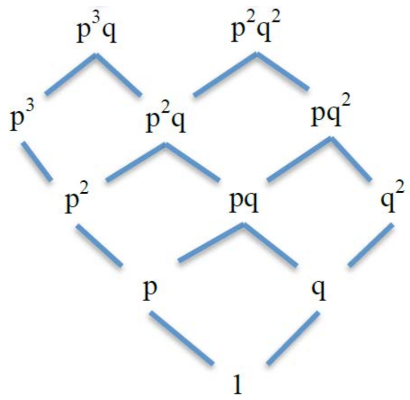
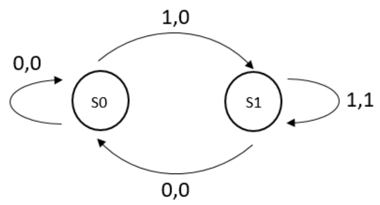
NCKU CSIE Discrete Mathematics (2017 Spring) Midterm II Solution

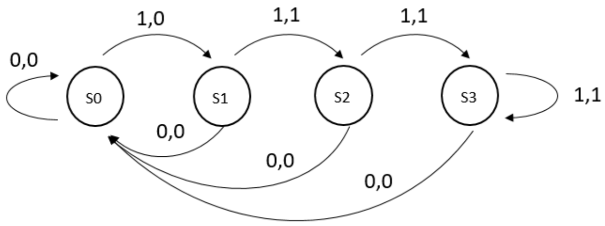
1.	(a) Ans : True a, b, c ∈ X if a(R∩S)b 且 b(R∩S)c → aRb, aSb, bRc, bSc → ∵R, S is transitive → aRc, aSc → a(R∩S)c (b) Ans : True $\{00\}^*\{01\}^+\{1\}^*$ => {01}{01}{1} $\{01\}^*\{0\}^*\{11\}^*\{1,0\}^+$ => {01}{0}{1}{1} or {01}{01}{1} or {0}{1}{0}{1}{1} (c) Ans : False S(5,1) + S(5,2) + S(5,3) = 1+15+25 = 41 ≠ 40 (d) Ans : False f 必為 one-to-one, g 不一定為 one-to-one (e) Ans : True Equivalence relation 須滿足 reflexive, symmetric and transitive: Reflexive : (x_1, y_1)R(x_1, y_1) => $x_1 + y_1 = x_1 + y_1$ Ex : 1+2 = 1+2 Symmetric : If (x_1, y_1)R(x_2, y_2) => $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ →(x_2, y_2)R(x_1, y_1) => $x_2 + y_2 = x_1 + y_1$ Ex: If 1+5 = 2+4 →2+4 = 1+5 Transitive : If (x_1, y_1)R(x_2, y_2) => $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ (x_2, y_2)R(x_3, y_3) => $x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ →(x_1, y_1)R(x_3, y_3) => $x_1 + y_1 = x_3 + y_3$ Ex: If 1+5 = 2+4 2+4 = 3+3 →1+5 = 3+3

	$\boxed{\text{扣分:}}$ 1. 沒有解釋說明 -3 分 2. False/True 正確但過程錯誤 -1~ -3 分
2.	(a) 對 S 的 nonempty subset A，A 中 element 的和表示為 S_A，符合： $1 \le S_A \le 18+19+20+21+22+23+24=147$，其中 nonempty subset 有 $2^7-1=127$ 以鴿籠原理來說，有太多 pigeonholes 假設 subset 最多有 6 個 element，pigeonholes=19+…+24=129，pigeons=127-1=126；假設 subset 最多有 5 個 element，pigeonholes=20+…+24=110，pigeons=126-7=119，可得 pigeons 太多，必定會出現重複。 (b) 共有 25 組，假設 3 個數字和最大 38，則 3 個數字一組全部總合最多為 38*25=950，但$S_n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{25*26}{2}=325$，可得全部的和為 325*3=975，950<975，故一定有≥39，得證 (c) 考卷共有四題，每題有四個選項，答題的可能性為 $4^4=256$ 種可能，也就是說，如果有 257 張考卷的話，其中兩張考卷的答案會一樣。因此，當有 $4^4*3=768$ 張考卷時，會有三張考卷有相同答案，所以加上一張考卷就會有四張考卷的答案是一樣的。 Ans: $4^4*3+1=769$
3.	(a) $2^{(6^2-6)/2}-\sum_{i=1}^{6}S(6,i) = 2^{15}-(1+31+90+65+15+1)=2^{15}-203$ (b) antisymmetric = $2^{6-1}*3^{(6^2-6)/2}$ 因 not reflexive 所以$3^{(6^2-6)/2}=3^{15}$
4.	(a)  (b)

	maximum element p^3q、p^2q^2 ；no greatest element。 (c) glb = p^2 lub = p^2q 扣分: (a) 1. 不是 Hass diagram (0 分) 2. 多畫 p^3q^2 (3 分) 3. 少畫 1 (4 分) (b) 1. 對一個 (1 分) 2. 對二個 (2 分) (c) 1. 對一個 (2 分) 2. 對二個 (3 分)
5.	(a) $f(a,b)$有 5 種選擇，剩下的$(6*6)-1$ =35 個對應各有 6 種選擇。 Ans : $5*6^{35}$ (b)有一個 identity 且 $f(a,b)=\text{c}$ 時：6^{25-1}，且因 a,b 無法成為 identity，剩 4 個選擇可當 identity。 Ans : $4*6^{24}$ (c) 4 選 1 當 identity。上三角 10 個減去 $f(a,b)$固定 1 個，再加對角線 5 個。 Ans : $4*6^{10+5-1}=4*6^{14}$
6.	範例解答： Problem : recognizes each occurrence of the sequence 11



State	Next State 0	Next State 1	Output 0	Output 1
S0	S0	S1	0	0
S1	S0	S2	0	1
S2	S0	S3	0	1
S3	S0	S3	0	1



P1 = {S0} {S1,S2,S3}
P2 = {S0} {S1,S2,S3} //無法再化簡
則設 S0 = S0， {S1,S2,S3} = S1
即可得 FSM1 與 FSM2 為等價

7. (a) Ans : False

設 X={0,1,2,3},R={(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,2)}，則 $\overline{R}$={(0,2)(2,0)(1,2),(2,1),(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0)}，$\overline{R}$不滿足 reflexive。

(b) Ans : True

∵|X|≥2, Let a,b ∈ X

If (a,b) ∈ R, then (b,a) ∈ R

If (a,b) ∉ R, then (b,a) ∉ R

=> (a,b) ∈ $\overline{R}$ and (b,a) ∈ $\overline{R}$

∵ a,b is arbitrary, ∴ $\overline{R}$ is symmetric

(c) Ans : True

(a,b) ∈ $\overline{R}$ → (a,b) ∉ R

If (b,a) ∉ $\overline{R}$ → (b,a) ∈ R 矛盾

故$\overline{R}$不滿足 anti-symmetric

(d) Ans : False

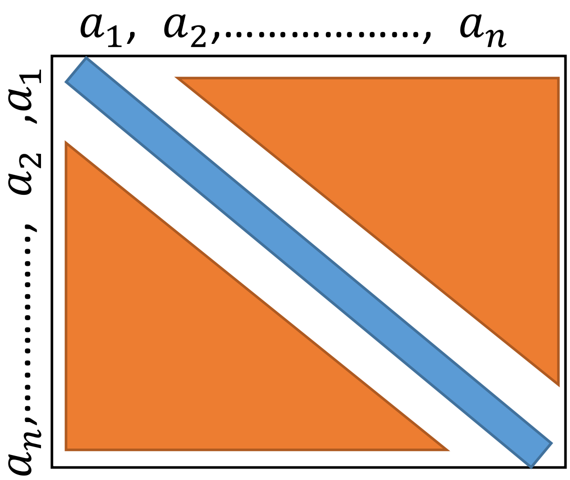
設 X={1,2},R={ (1,1)}，則$\overline{R}$={(1,2),(2,1),(2,2)}，不存在(1,1)，故$\overline{R}$不滿足 transitive。

(e) Ans : False

∵$\overline{R}$不滿足 reflexive、anti-symmetric 及 transitive，故不滿足 partial order

8 (a)

If A = $\{a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n\}$.



∵ R is antisymmetric ∴ maximum value of |R| 可取對角線以及上 or 下其中一個三角形的 pair，故總個數為:1+2+……+n = $\frac{n(1+n)}{2}$

Ans : $\frac{n(1+n)}{2}$

(b)

$|A_1|$=$|A_2|$=$|A_3|$=10

10^2+10^2+10^2 = 300

Ans : 300

(c)

先取 4 個分成一堆 ： C_4^8

再將剩餘的 4 個分成最少 1 個，最多 4 個 equivalence classes : $\sum_{i=2}^{4} S(4,i)$

⇨ $C_4^8 \ * \ \sum_{i=2}^{4} S(4,i)$ = 70 * 14 = 980

Ans : 980