

CSCI-567: Assignment #1

Due on Tuesday, September 23, 2015

Saket Choudhary
2170058637

Contents

| | |
|-------------------------|----------|
| Exercise # 1 | 3 |
| (1a) | 3 |
| (1b) | 3 |
| Prob. II | 4 |
| Prob. II: (a) | 4 |
| Prob. II: (b) | 4 |
| Prob. III | 4 |

Exercise # 1

(1a)

Given: $X_i \sim \text{Beta}(\alpha, 1)$ MLE for α :

Consider $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ Likelihood function: $L(\alpha|X)$ $L(\alpha|X) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$ where

$$f(x_i) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)} x^{\alpha-1} \quad (1)$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1} \quad (2)$$

$$L(\alpha|X) = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)} \right)^n \prod_{i=1}^n (x_i)^{\alpha-1} \quad (3)$$

$$LL = \log(L(\alpha|X)) = n \log(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

$$\frac{dLL}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad (5)$$

$$\frac{dLL}{d\alpha} = 0 \implies \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1/x_i)} \quad (6)$$

Minima at $\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1/x_i)}$ is guaranteed due to log being a concave function.

(1b)

Given: $x_i \sim N(\theta, \theta)$ i.e $f(x_i) = (2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\theta}}$ MLE estimate for θ :

$$L(\theta|X) = (2\pi\theta)^{-\frac{N}{2}} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\theta)^2}{2\theta}} \quad (7)$$

$$LL = \log(L(\theta|X)) = -\frac{N}{2} \log((2\pi\theta)) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \theta)^2}{2\theta} \quad (8)$$

$$\frac{dLL}{d\theta} = -\frac{N}{2} \left(\frac{1}{\theta} \right) + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2} - \frac{N\theta}{2} \quad (9)$$

$$\frac{dLL}{d\theta} = 0 \implies N\theta^2 + N\theta - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \quad (10)$$

The above equation is a quadratic and will have two solutions, Since, $\theta \geq 0$ (a constraint that comes from θ being the variance), the

$$\theta = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 + 4N \sum_{i=1}^n x_i^2}}{2N}$$

$$\text{Since, } \hat{\theta} \geq 0, \hat{\theta} = \frac{-N + \sqrt{N^2 + 4N \sum_{i=1}^n x_i^2}}{2N}$$

Prob. II

Prob. II: (a)

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Prob. II: (b)

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetur at, consectetur sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Prob. III

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.