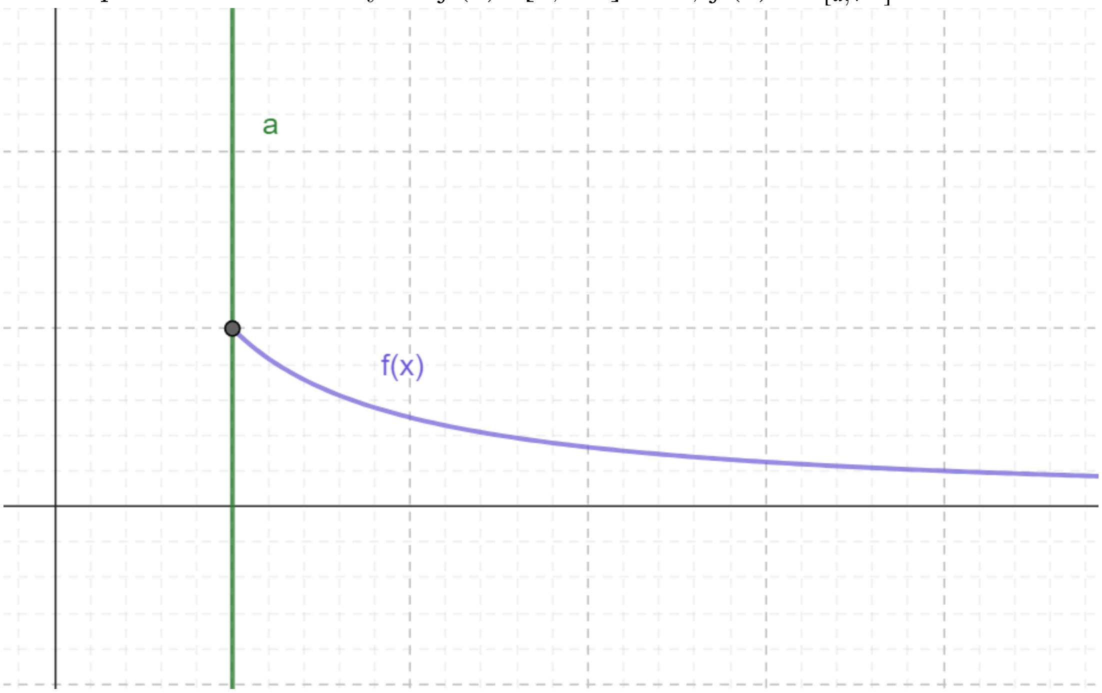
Содержание

2. Несобственные интегралы

2.1 Определения

1* Интегралы на неограниченном промежутке

Геометрический смысл: пусть $f(x) : [a; +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) \in C_{[a;+\infty]}$



Тогда определенный интеграл имеет смысл - это площадь под графиком функции:

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

Имеет ли смысл площадь неограниченной фигуры под графиком функции?

Предел функции $\Phi(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ может быть конечным или бесконечным

Def. 1. Определим несобственный интеграл первого рода (на неограниченном промежутке) ($f(x)$ любого знака):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. В противном случае расходится

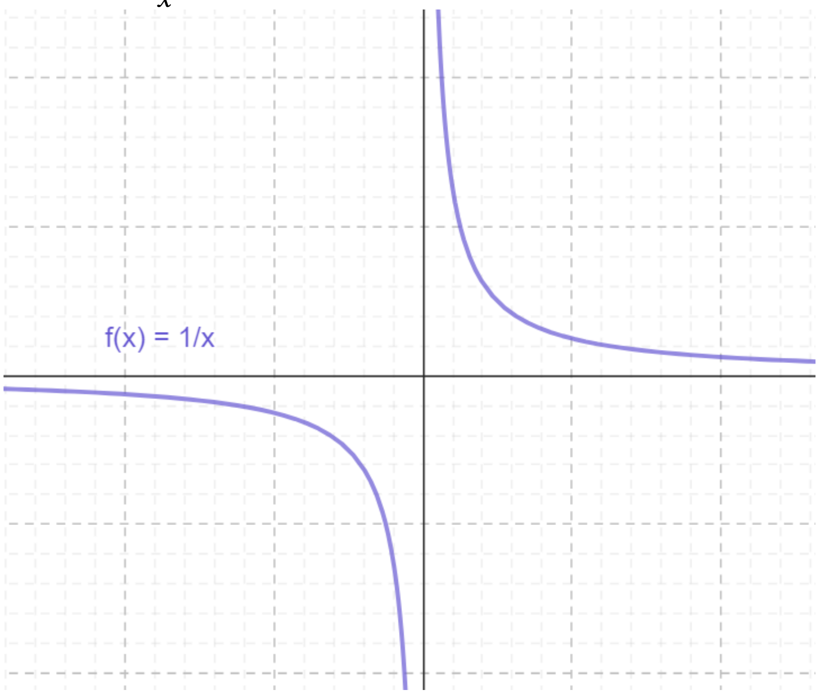
Def. 2. Функция определена на полуинтервале $[-\infty; b]$ и непрерывна. Тогда определен:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

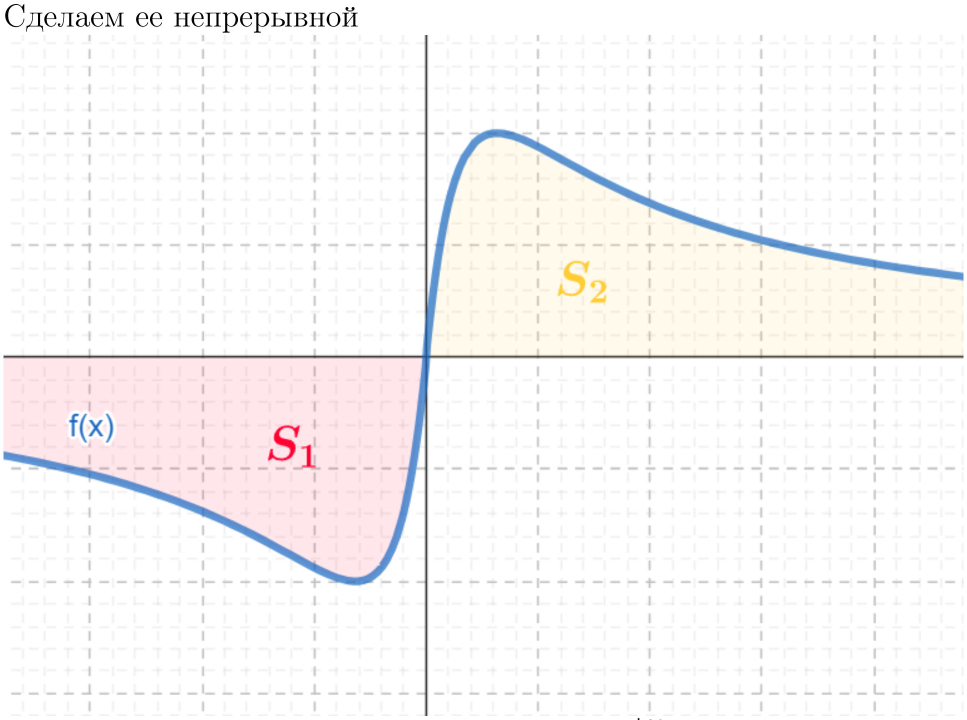
Def. 3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

Nota. Этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них (в том числе если возникает неопределенность $\infty - \infty$)

Ex. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Сделаем ее непрерывной



$S_1 = S_2$, но $I_1 = -I_2$. Суммарный интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ должен быть равен нулю.

Но по определению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится

Чтобы учесть обнуление интеграла в ситуации взаимного погашения площадей S_1 и S_2 (а это происходит тогда, когда левый и правый концы промежутка синхронно стремятся к $+\infty$) используют понятие интеграла в смысле главного значения ($v.p.$ - от французского *valeur principale*):

$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to-\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$

Разложение по формуле Ньютона-Лейбница

Ex. 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = arctgx\Big|_{-\infty}^{c=0} + arctgx\Big|_{c=0}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} arctgx - arctg(0) + arctg(0) - \lim_{x\to-\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ex. 2.

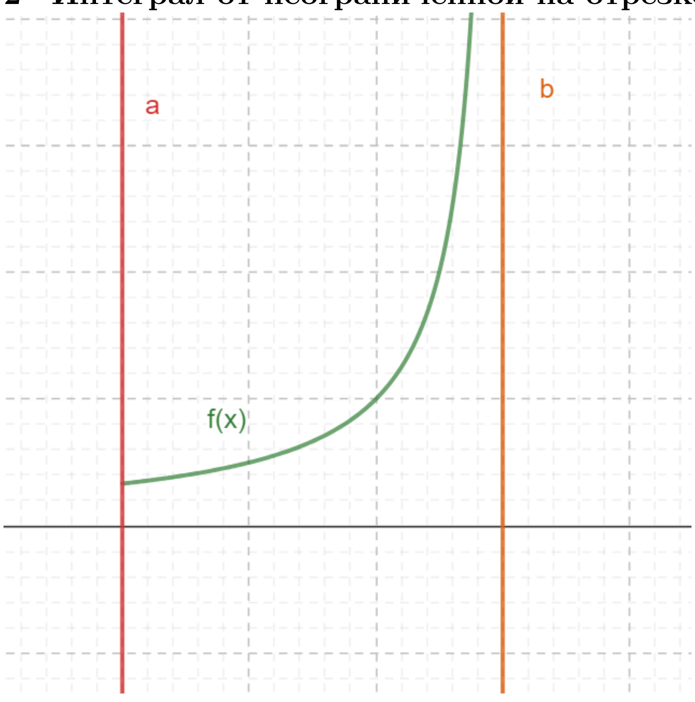
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{xlnx} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dlnx}{lnx} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t} = lnt\Big|_{0}^{+\infty} = lnlnx\Big|_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} lnlnx - \lim_{x\to1} lnlnx = \infty - \infty$$

- расходится

Заметим нарушение непрерывности функции $\frac{1}{xlnx}$ в $x = 1$, что привело к $lnlnx \to -\infty$ при $x \to 1$

Это не интеграл первого рода, а комбинация интегралов первого и второго рода

2* Интеграл от неограниченной на отрезке функции



$f(x) : [a; b) \to \mathbb{R}$, где b - точка разрыва второго рода, а именно бесконечного

Def. 1. Интеграл второго рода (несобственный)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b} \int_a^{\beta} f(x)dx$$

Этот интеграл сходится, если предел существует и конечен

Def. 2. Аналогично (a - точка бесконечного разрыва):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^b f(x)dx$$

Def. 3. $c \in [a;b]$ - точка бесконечного разрыва:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Сходится, если оба интеграла сходятся

Ex. 1.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = ln|x|\Big|_{-1}^0 + ln|x|\Big|_0^1$$

- интеграл расходится

Не заметили $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = ln|x|\Big|_{-1}^1 = 0$???

Ex. 2.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{dx}{x}\Big|_{-1}^1 = -2$$

- неверно

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{dx}{x}\Big|_{-1}^0 + -\frac{dx}{x}\Big|_0^1$$

- расходится

Nota. Если нет разбиения $[a;b]$ по аддитивности, то неопределенности раскрываются

Ex. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int_1^2 (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})dx = \frac{1}{2}(ln|x-1| - ln|x+1|)\Big|_1^2 =$
$= \frac{1}{2}(ln|1-1| - ln|x+1|)\Big|_1^2 = \infty$, т. к. разбивается отрезок
$= \frac{1}{2}(ln|\frac{x-1}{x+1})\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(ln\frac{1}{3} - ln(0)) = \infty$ - теперь точно ∞

2.2 Свойства

1) Линейность: $\int_a^{+\infty}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu\int_a^{+\infty} g(x)dx$ - если интегралы сходятся (иначе исследуем по определению через предел)

2) Аддитивность: $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$ - отсечение любого конечного интеграла $\int_a^c f(x)dx$ не влияет на сходимость

3) Знаки интегралов:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq \int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $f(x) \leq g(x)$ и интегралы сходятся

В частности $\int_a^{+\infty} f(x)dx \geq 0$ при $f(x) \leq 0$ на $[a; +\infty]$

Nota. Исследование интегралов двух функций используется для определения их сходимости

2.3 Сходимость несобственных интегралов

Задача: Часто нужно исследовать интеграл на сходимость без или до его вычисления (обычно приближенного для неберущихся интегралов)

Требуются признаки сходимости интегралов, часто использующие сравнение с эталонными интегралами (вычисляемые по формуле Ньютона-Лейбница)

2* Признак сравнения в неравенствах (далее только для интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, для остальных аналогично)

$f(x), g(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R}^+$, непрерывны на $[a; +\infty)$ и $\forall x \in [a; +\infty) f(x) \leq g(x)$

Тогда, если $\int_a^{+\infty} g(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, причем $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$

Прежде чем использовать свойство ОИ и предельный переход в неравенства, нужно доказать, что интеграл $J = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ сходится

Т. к. $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$ монотонно возрастающая функция

При этом:

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)dx = I \in \mathbb{R}$$

То $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена и по признаку Вейерштрасса сходится

Можно использовать предельный переход

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \Big| \lim_{b\to+\infty}$$

$$0 \leq J \leq I$$

Nota. Можно аналогично сравнить функции отрицательного знака

Если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $g(x) \leq f(x) \leq 0$, то сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Интегралы от функций разных знаков этим методов не сравниваются

$f(x) \le g(x) \forall x \in [a;+\infty)$, но функции разных знаков, и нижняя площадь, т. е. $\int_a^b |f(x)|dx$, больше верхней

1* $f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$**,** $0 \le f(x) \le g(x) \forall x \in [a;+\infty)$

$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится

□ Lab. (от противного)

Nota. Отметим, что если $f(x)$ не является убывающей к нулю, т. е. б. м. на $+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ разойдется

Таким образом, если сравнить б. м. $\frac{f(x)}{g(x)}$, то можно исследовать их интегралы на сходимость

2* Предельный признак сравнения

$f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $f(x), g(x) > 0$

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}\{0\}$. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

□ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 | \forall x > \delta | \frac{f(x)}{g(x)} - k| < \varepsilon$

$-\varepsilon + k < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + k \quad \Big| * g(x) > 0$

$(k-\varepsilon)g(x) < f(x) < (\varepsilon + k)g(x)$

Т. к. $k > 0$ ($\frac{f(x)}{g(x)} > 0$) и ε - сколь угодно мало, то $k \pm \varepsilon$ - положительное и не близкое к нулю число

ОИ: $\int_a^b (k-\varepsilon)g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b (k+\varepsilon)g(x)dx$

$\lim\limits_{b\to+\infty}$: $(k-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx < \int_a^{+\infty} f(x)dx < (k+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$

Если $I = \infty$ (но $k - \varepsilon \ne 0$), то по первому признаку (линейность) J расходится Если $I \in \mathbb{R}$ $(k + \varepsilon \ne \infty)$, то по первому признаку (линейность) J сходится

3* Абсолютная сходимость

$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = J \in \mathbb{R}$

Nota. Обратное неверно

□ ОИ и модуль:

$$\int_a^b f(x)dx \le |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Очевидно, что $0 \le |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b |f(x)|dx = I$

$$-I \le \int_a^b f(x)dx \le I$$

$$0 \le \lim_{b\to\infty} |\int_a^b f(x)dx| = |\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx = I$$

Nota. Если $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $|\int_a^{+\infty} f(x)dx|$ расходится, то I называют условно сходящимся

Ex. $I = \int_a^{+\infty} \frac{sinx}{8x^2+3}dx$
$\int_a^{+\infty} |\frac{sinx}{8x^2+3}|dx = \int_a^{+\infty} \frac{|sinx|}{8x^2+3}dx$синус ограничен $\le \int_a^{+\infty} \frac{dx}{8x^2+3}dx = \frac{1}{k}arctg\frac{x}{k}\Big|_1^{+\infty} \in \mathbb{R}$
В качестве эталонных интегралов удобно использовать:
I рода: $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$
II рода: $\int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^n}$
Lab. Исследовать на сходимость в зависимости от $n \in \mathbb{Z}(\mathbb{Q})$

3. Интегралы зависящие от параметра

Задача. Ex ($\alpha \neq 0$). $\int_0^1 cos\alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 cos\alpha x d\alpha x = \frac{1}{\alpha} sin\alpha x\Big|_0^1 = \frac{sin\alpha}{\alpha} = \phi(\alpha)$

$J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ - интеграл, зависящий от параметра

$f(x,\alpha)$ непрерывна в $a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$ и существует непрерывная производная f'_α

Тогда на $[c;d]$ определена $J'_\alpha(\alpha) = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha dx$

Если последний интеграл берется лучше, чем исходный, то теорема полезна

$\square J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}(\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx) == \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}(\int_a^b (f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha))dx)$

По теореме Лагранжа о среднем $\exists\xi \in [\alpha;\alpha+\Delta\alpha]$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f(x,\xi)dx$

Т. к. f'_α непрерывна, то $f'_\alpha(x,\xi) = \lim\limits_{\xi\to\alpha} f'_\alpha(x,\xi) + \varepsilon = f'_\alpha(x,\alpha) + \varepsilon$

Таким образом $J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx + \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b \varepsilon dx = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\xi)dx$

Теорема: $J'_\alpha = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx)$

Ex.

$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}dx$ $I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty}(e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x})'_\alpha dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1}{x}xcos\alpha x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}cos\alpha x dx = \frac{1}{a+\alpha^2}$

Из этого следует, что $I(\alpha) = \int_{+\infty} 0\frac{1}{a+\alpha^2}dx = arctg(\alpha) + C$

Так как $I(\alpha)$ - несобственный интеграл, это функция, а не семейство функций. Найдем C.

$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{sin0 * x}{x}dx = 0 \Longrightarrow C = 0$ Таким образом, $I(\alpha) = (\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}dx)'_\alpha = arctg(\alpha)$

Ex. Гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha > 0)$$

Исследуем на сходимость:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}$$

На отрезке $[0;1]$ $e^(-x) \in [0;1]$. Тогда $0 \le \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx \le \int_0^1 x^{\alpha-1}dx \Longrightarrow$ интеграл сходится

Пусть $n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}$, тогда:

$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \le \int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ - по частям, появятся $x^k e^{-x}\Big|_1^{+\infty} \to 0$ и $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится

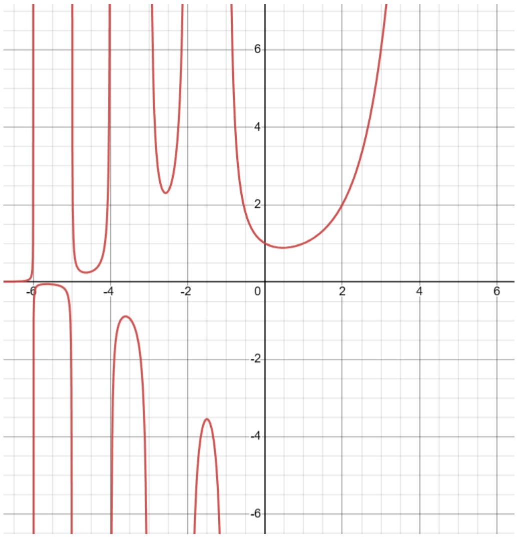
Найдем формулу для $\Gamma(\alpha)$:

$\alpha \in \mathbb{N} \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}de^{-x} = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_1^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}(\alpha-1)e^{-x}dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)!\Gamma(1) = (\alpha-1)!$

$\Gamma(n+1) = n!$

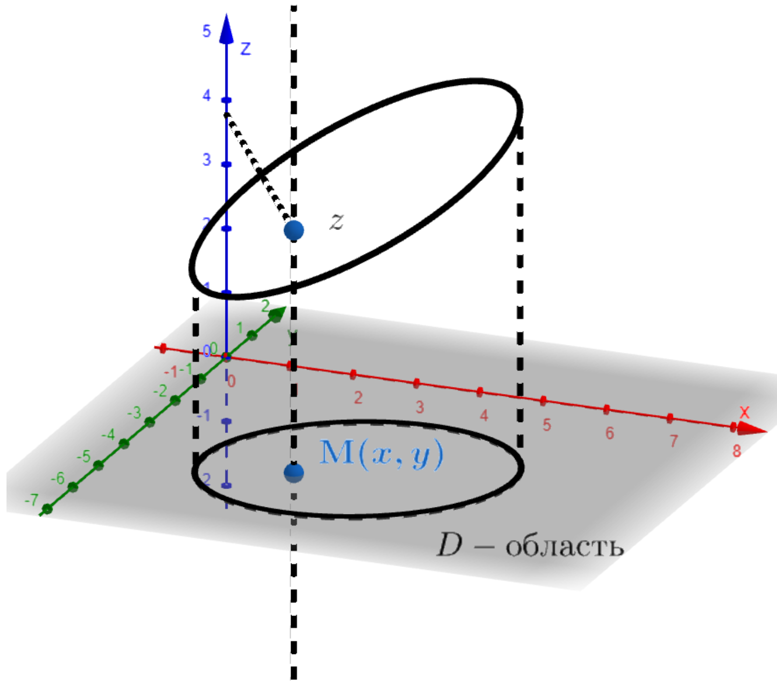
Lab. Посмотреть, как обобщается понятие факториала на вещественные числа:



4. Функция нескольких переменных (ФНП)

4.1. Определение

Nota. Дадим определение ФНП



$\forall M(x,y)\exists! z \in \mathbb{R} : z = f(x,y) \Longleftrightarrow z = f(x,y)$ - функция двух переменных

Def. Окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$
$U_\delta(M_0) = \{(x,y) \in Oxy : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0$ - радиус$\}$
$\overset{o}{U}_\delta (M_0)$ - выколотая

Nota. $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, одновременное стремление $\Delta x, \Delta y \to 0$ можно заменить $\Delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$

Def. $\lim\limits_{M\to M_0} z(x,y) = L \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 (\delta = \delta(\varepsilon)) | \forall M \in \overset{o}{U}_\delta (M_0)\ |z(x,y) - L| < \varepsilon$
M_0 - точка сгущения и $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (здесь)

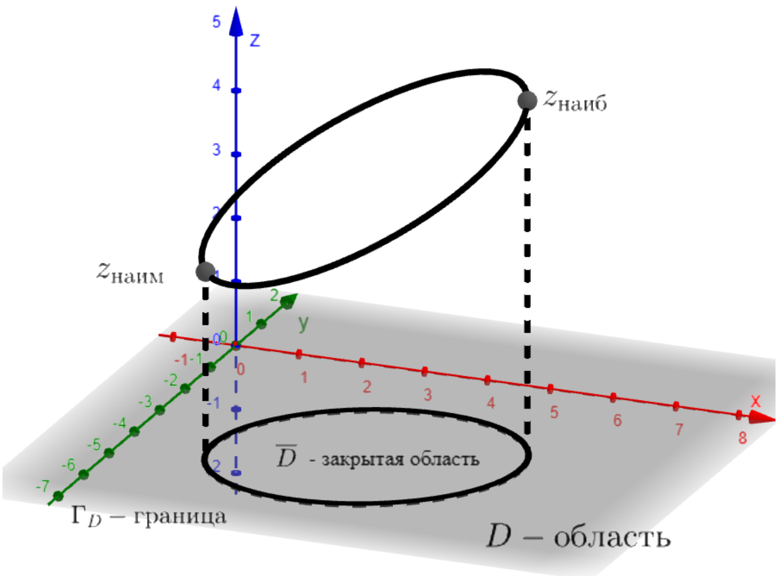
Nota. На плоскости Oxy возможно стремление $M \to M_0$ по разным путям $F(x,y) = 0$ (уравнение кривой)

При этом значение предела вдоль разных путей могут отличаться (аналог односторонних пределов)

Предел в определении - предел в общем смысле: его существование и значение не зависит от пути

Def. $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M(x_0, y_0)$, если $z = f(x_0, y_0) = \lim\limits_{M \to M_0} z(x, y)$

z непрерывна на D, если z непрерывна $\forall (x, y) \in D$



Nota. Справедливы теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши для функции, непрерывной в заданной области

$z = f(x, y)$ непрерывна на $\overline{D} = D \cup \Gamma_D$, где $\overline{D}$ - закрытая область, D - открытая область, Γ_D - граница

Th. W1. $z = f(x, y)$ ограничена на $\overline{D}$

Th. W2. $\exists$ наибольшее и наименьшее $z \in \overline{D}$

Th. B-C1. на границе Γ_D z принимает значения разных знаков $\Longrightarrow \exists M \in \overline{D} : z(M) = 0$

Th. B-C1. $z(x, y)$ принимает все значения от $z_{\text{наим}}$ до $z_{\text{наиб}}$

4.2. Производные функции двух переменных

Путям l_1, l_2 соответствуют кривые L_1, L_2 на поверхности $z = f(x, y)$.

Пользуясь геометрическим смыслом производной, заметим, что касательные к L_1, L_2 могут быть различными.

Поэтому для определения производной выберем координатные направления $x = const$ и $y = const$

$z = f(x = c, y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, где $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Определили частную производную z по y

Lab. Дать определение $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Nota. $\Delta_y z = z(x, y+\Delta y) - z(x,y)$ и $\Delta_y z$ называют частным приращением

Def. Полное приращение $\Delta z \overset{def}{=} z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y)$

Nota. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$!!!

Обозн.: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x = z_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y = z_y$

Как определить функцию, дифференцируемую в точке?

По аналогии $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta$ - б. м.

Дифференциал

Th. $z : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}^2,\ \exists$ непрерывные $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Тогда функция представима $\Delta z = Adx + Bdy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R},\ \ \alpha, \beta =$ б. м.

$\square \quad \Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y) = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y) + z(x+\Delta x, y) - z(x,y)$

По теореме Лагранжа:

$z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x+\Delta x, y) = z'_y(\eta)\Delta y$

$z(x+\Delta x, y) - z(x,y) = z'_x(\xi)\Delta x$

По теореме о представлении функции ее пределом:

$z'_x(\xi) = \lim\limits_{\xi\to x(\Delta x\to 0)} z'_x(\xi) + \alpha$

$z'_y(\eta) = \lim\limits_{\eta\to y} z'_y(\eta) + \beta$

Так как $z'_x(\xi), z'_y(\eta)$ непрерывны, то $\lim\limits_{\xi\to x} z'_x(\xi) = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \lim\limits_{\eta\to y} z'_y(\eta) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Тогда $\Delta z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y} + \beta\right)\Delta y = \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

Заметим, что $\alpha\Delta x$ и $\beta\Delta y$ - б. м. порядка выше, чем $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Longleftrightarrow$

$1 = \sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2} \quad |\dfrac{\Delta x}{\Delta\rho}| \leq 1, |\dfrac{\Delta y}{\Delta\rho}| \leq 1$

Сравним $\dfrac{\alpha\Delta x}{\Delta\rho} =$ б. м. огр. $\overset{\Delta\rho\to 0}{\to} 0,\ \dfrac{\beta\Delta y}{\Delta\rho} \overset{\Delta\rho\to 0}{\to} 0$

Функция, приращение которой представимо $\Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\Delta\rho)$, называется дифференцируемой в точке (x, y), линейная часть приращения называется полным дифференциалом

Обозначение: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Ex. $z = 3xy^2 + 4cosxy$

$\dfrac{\partial z}{\partial x} \overset{y=const}{=} 3y^2 - 4sinxy \cdot y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} \overset{x=const}{=} 6xy - 4sinxy \cdot x$

$dz = (3y^2 - 4ysinxy)dx + (6xy - 4xsinxy)dy$

4.3. Правила дифференцирования

Nota. При нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ (x_i - какая-либо переменная) дифференцирование проводится по правилам для функции одной переменной ($x_j \neq x_i$ считаются константами)

Выпишем более сложные правила

1* Сложная функция

Mem. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Def. Сложная функция двух переменных: $z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$

Формула: Найдем $frac\partial z(u,v)\partial x$ и $frac\partial z(u,v)\partial y$

Th. $z = z(u, v),\ u(x, y), v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x, y

Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}$

□ z дифференцируема $\Longleftrightarrow \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$

Зададим приращение Δx (представление Δz не должно измениться)

$\Delta_x z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x + v \quad \Big| \cdot \Delta x$

$\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} \quad \Big| \cdot \Delta x$

По теореме Лагранжа: $\dfrac{\partial u}{\partial x}(\xi) \overset{\Delta x \to 0}{\to} \dfrac{\partial u}{\partial x}$

В пределе: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

Аналогично для $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Nota. Интересен случай $z = z(x, u, v)$, где $u = u(x), v = v(x)$

Здесь z является функцией одной переменной x

Обобщая правило на случай трех переменных, можем записать формулу полной производной, которая имеет смысл

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{dv}{dx}$

Ex. Пусть $w = w(x, y, z)$ - функция координат $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ - функции времени w явно не зависит от времени, тогда $\dfrac{dw}{dt} = w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$, где v_x - проекция скорости

Если $w = w(x, y, z, t)$, то $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial t} w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$

2* Неявная функция одной переменной: пусть $F(x, y(x)) = 0$ - неявное задание $y = y(x)$

Найдем $dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx + \dfrac{\partial F}{\partial y}dy = 0$

Отсюда $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

4.4. Производная высших порядков

Nota. Пусть $z = z(x, y)$ дифференцируема и $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы, при этом в общем случае $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$

Тогда определены вторые частные производные

Def. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}$ - чистые производные

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$ - смешанные производные

Th. $z = z(x, y)$, функции $z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в $\overset{o}{U}(M(x, y))$

Тогда $z''_{xy} = z''_{yx}$

□ Введем вспомогательную величину

$\Phi = (z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y)) - (z(x, y + \Delta y) - z(x, y))$

Обозначим $\phi(x) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Тогда $\Phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$ - дифференцируема, непрерывна, как комбинация

По теореме Лагранжа $\phi(x+\Delta x) - \phi(x) = \phi'(\xi)\Delta x = (z'_x(\xi, y+\Delta y) - z'_x(\xi, y))\Delta x$, где $\xi \in (x; x+\Delta x)$

Здесь z'_x дифференцируема также на $[y, y + \Delta y]$

Тогда по теореме Лагранжа $\exists \eta \in (y, y + \Delta y) \mid z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y) = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y$

Таким образом $\Phi = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y$

Перегруппируем Φ, далее аналогично для z''_{yx}

Тогда $z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y = \Phi = z''_{yx}(\xi', \eta')\Delta x \Delta y$

4.5. Дифференциалы

Мет. 1. Полный дифференциал (1-ого порядка) функции $z = z(x, y)$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ - сумма частных дифференциалов

Мет. 2. Инвариантность формы первого дифференциала функции одной переменной

$dy(x) = y'(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} y'(t)dt$

Th. Инвариантность полного дифференциала первого порядка.

$z = z(u, v), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$ - дифференциалы

Тогда $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

□ $dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

Mem. $d^2y(x) \overset{def}{=} d(dy(x)) = y''(x)dx^2 \neq y''(t)dt^2$

Def: $z = z(x, y)$ - дифференцируема и $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ - дифференцируемая функция

Тогда второй полный дифференциал:

$d^2z \overset{def}{=} d(dz)$

Формула: $d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z'_x dx)'_x dx + (z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx)'_y dy + (z'_y dy)'_y dy = (z'_x)'_x (dx)^2 + (z'_y)'_x dxdy + (z'_x)'_y dydx + (z'_y)'_y (dy)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$

Nota: Заметим формальное сходство с биномом Ньютона: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Введем условное обозначение $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$

Тогда $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$, здесь $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ - оператор второго полного дифференцирования

$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$ - дифференциал n-ого порядка

Nota: Можно ли утверждать, что $d^2z(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \overset{x = x(u,v), y = y(u,v)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$???

Нет, нельзя (d^2z не инвариантен при замене)

Покажем, что не выполняется в простом случае: $z = z(x, y) = z(x(t), y(t))$ - параметризация. Геометрически, это выбор пути в области D от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x, y)$

Итак

$d(dz) \overset{z-\Phi_1\Pi}{=} (dz)'_t dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_t dt \overset{dx(t) = \frac{dx}{dt}dt, dy(t) = \frac{dy}{dt}dt}{=} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)'_t dt^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_t \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)'_t\right)dt^2 + \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_t \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)'_t\right)dt^2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}\right)dt^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right)dt^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$

$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ - линейная параметризация

<u>Lab.</u> Дать инвариантность при линейной параметризации

Причем, это свойство верно для $d^n z$, то есть если $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ (например), то $d^n z \overset{z=z(t)}{=} z^{(n)}(t)dt$

4.6. Формула Тейлора

Мет. $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \left[\begin{array}{l} o((x-x_0)^n) - \text{Пеано} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - \text{Лагранжа} \end{array}\right.$

В дифференциалах:

$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} +$ остаток

Формула Тейлора для $z = z(x, y)$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ (как раньше $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$)

$z(M = \overset{o}{U}(M_0)) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \cdots + \frac{d^n z(M_0)}{n!} + o((\Delta\rho)^n)$

Nota. Формула выше верна, если $z = z(x, y)$ - непрерывна со своими частными производными до $n + 1$ порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(M_0(x_0, y_0))$, где $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$

Для линейной параметризации форма дифференциала сохраняется

$d^2 z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z \overset{\text{инвариант}}{=} z_t^{(n)} dt^n$

Введем функцию: $z(x(t), y(t)) \overset{\text{обозн}}{=} \varphi(t)$ - $(n+1)$ раз дифференцируема (композиция $(n+1)$ дифференцируемых и линейных функций)

Заметим, что $x = x_0 + \Delta x t \overset{t_0=0}{=} x_0$, $y = y_0 + \Delta y t \overset{t_0=0}{=} y_0$

$$M \overset{t \to t_0 = 0}{\to} M_0$$

То есть $z(M_0) = z(x_0, y_0) = z(x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) = \varphi(0)$

Таким образом $\varphi(t)$ как функция одной переменной может быть разложена в окрестности $t_0 = 0$ по формуле Маклорена

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{d\varphi(0)}{1!}\Delta t + \cdots + \frac{d^n\varphi(0)}{n!}\Delta t^n + o((\Delta t)^n)$$

Вернемся к $z(x, y)$ $(\Delta t = t - t_0 = 1)$:

$$z(x, y) = z(M) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \frac{d^2 z(M_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n z(M_0)}{n!} + r_n(x, y)$$

где $r_n(x, y) = r_n(t) \overset{\text{Лагр.}}{=} \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}\Delta t = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}$

$r_n(x, y)$ должен быть б. м. по отношению к $(\Delta\rho)^n$, то есть $r_n(x, y) = o((\Delta\rho)^n)$

$(r_n(t) \overset{n\to\infty}{\to}$, если $\varphi(t)$ нужное число раз дифференцируема $Rightarrow$ ограничена, $r_n(t)$ - огр. б. м.)

Nota. В дальнейшем для исследования $z(x,y)$ на экстремум достаточно разложения по формуле Тейлора до 2-ого порядка включительно. Покажем сходимость $r_n(x,y) \overset{(\Delta\rho)^n\to 0}{\longrightarrow} 0$ на примере $r_2(x,y) = \dfrac{d^3z(M_{\text{сред.}})}{3!}$

$r_2(x,y) = \frac{1}{3!}(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y)^3 z = \frac{1}{3!}(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2\Delta y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}(\Delta y)^2\Delta x \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(\Delta y)^3)$

Вообще говоря, значения частных производных берутся в различных средних точках

$r_2(x,y) = \frac{1}{3!}(z_{xxx}(\mu_1)(\Delta x)^3 + 3z_{xxy}(\mu_2)(\Delta x)^2\Delta y + z_{xyy}(\mu_3)(\Delta y)^2\Delta x + 3z_{yyy}(\mu_4)(\Delta y)^3) = \Big|$ вынесем $(\Delta\rho)^3$

$= \frac{(\Delta\rho)^3}{3!}(\text{огран.}\cdot\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.}\cdot\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.}\cdot\frac{(\Delta y)^2\Delta x}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.}\cdot\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta\rho)^3})$

$\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} = \frac{(\Delta x)^3}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}^3} \overset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} 0$, то есть дробь и выражение выше ограничены

$\frac{r_2(x,y)}{(\Delta\rho)^2} = \frac{1}{3!}\frac{(\Delta\rho)^3\cdot\text{огр.}}{(\Delta\rho)^2} = \frac{1}{3!}\Delta\rho\cdot\text{огр.} \overset{\Delta\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$

4.7. Геометрия ФНП

4.7.1. Линии и поверхности уровня

Положим $z = const$. В сечении плоскостью $z = c$ образуется кривая l с уравнением $\begin{cases} z = c \\ \varphi(x,y) = 0 \leftarrow \text{уравнение } l \end{cases}$

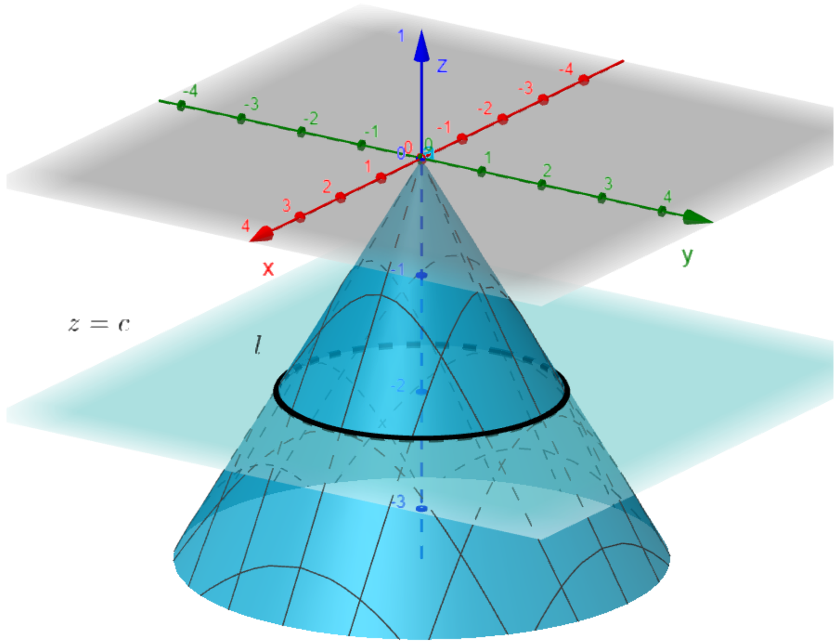
Кривая l с уравнением $z(x,y) = c$ называется линией уровня $\Phi_2\Pi$ $z = z(x,y)$

Def. Поверхность уровня $\mathcal{P}$ - это поверхность с уровнем $u(x,y,z) = c$

Физ. смысл: Пусть $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (значения функции $u(x,y,z)$ - скаляры). Тогда говорят, что в $\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле. Например, поле температур, давления, плотности и т. д.

Тогда $u = c$ - поверхности постоянных температур, давления и т. п. (изотермические, изобарные, эквипотенциальные)

Ex. Конус - $z = -\sqrt{x^2+y^2}$



Линии уровня $z=c$:

1. $c>0$ $\quad \varnothing$
2. $c=0$ $\quad x=y=0-$ точка $(0,0)$
3. $c<0$ $\quad -|c|=-\sqrt{x^2+y^2} \quad c^2=x^2+y^2$

4.7.2. Производная по направлению, Градиент

Задача. Дано скалярное поле $u=u(x,y,z)$ (напр. давления). Как меняется давление при перемещении в заданном направлении?

Это задача о нахождении скорости изменения $u(x,y,z)$ в заданном направлении $\overrightarrow{s}$

Из $M_0(x_0,y_0,z_0)$ движемся в $M(x,y,z)$ в направлении $\overrightarrow{s}$, $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, $z=z_0+\Delta z$

$\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$1=\sqrt{(\dfrac{\Delta x}{\Delta s})^2+(\dfrac{\Delta y}{\Delta s})^2+(\dfrac{\Delta z}{\Delta s})^2}$

$(\dfrac{\Delta x}{\Delta s},\dfrac{\Delta y}{\Delta s},\dfrac{\Delta z}{\Delta s})=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\overrightarrow{s}^0$

Потребуем, чтобы $u(x,y,z)$ имела непрерывность u_x,u_y,u_z в D

То есть $u(x,y,z)$ дифференцируема и

$\Delta u=du+o(\Delta s)=u_x\Delta x+u_y\Delta y+u_z\Delta x+o(\Delta s) \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s}=u_x\cos\alpha+u_y\cos\beta+u_z\cos\gamma+\dfrac{o(\Delta s)}{\Delta s}$ - предельный переход

$\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

Nota. Изначально $\Delta u=du+(\text{б. м.})\Delta x+(\text{б. м.})\Delta y+(\text{б. м.})\Delta z \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s}=\dfrac{du}{\Delta s}+(\text{б. м.})\cos\alpha,\ (\text{б. м.})\cos\alpha\to 0$

Def. $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$
где α, β, γ - направления $\overrightarrow{s}$, называют производной функции $u = u(x, y, z)$ в направлении $\overrightarrow{s}$

Nota. Производная в определении - число, но $\frac{\partial u}{\partial s}\overrightarrow{s^0}$ - вектор скорости

Nota. Заметим, что если $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ - декартовы орты, то
$\frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial u}{\partial x}1 + \frac{\partial u}{\partial y}0 + \frac{\partial u}{\partial z}0 = \frac{\partial u}{\partial x}$
и аналогично в других направлениях: $\frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial z}$
Составим вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k} \overset{\text{обозн}}{=} \overrightarrow{\nabla} u$
$\overrightarrow{\nabla}$ - набла-оператор (оператор Гамильтона); $\overrightarrow{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z})$ - условный вектор

Def. $\overrightarrow{grad}\ u \overset{def}{=} \overrightarrow{\nabla} u$ - называют градиентом функции $u(x, y, z)$
Свойства градиентов:

Th. 1. $\frac{\partial u}{\partial s} = \text{пр.}_{\overrightarrow{s}}\overrightarrow{\nabla} u$

Th. 2. $\overrightarrow{\nabla} u$ - направление наибольшего значения $\frac{\partial u}{\partial s}$

Th. 3. $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{\nabla} u \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = 0$

Th. 4. $u = u(x, y), u = c$ - линии уровня l. Тогда $\overrightarrow{\nabla} u \perp l$
Доказательства:

1. $\frac{\partial u}{\partial s} = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \overrightarrow{s^0} = \overrightarrow{\nabla} u \overrightarrow{s^0} = |\overrightarrow{\nabla} u||\overrightarrow{s^0}|\cos(\overrightarrow{\nabla} u, \overrightarrow{s^0}) = |\overrightarrow{\nabla} u|\cos(\overrightarrow{\nabla} u, \overrightarrow{s^0}) = \text{пр.}_{\overrightarrow{s}}\overrightarrow{\nabla} u$
2. $\frac{\partial u}{\partial s} = |\overrightarrow{\nabla} u|\cos\varphi \ldots$ <u>Lab.</u>
3. <u>Lab.</u>
4. $u = c$ - уравнение $l_{\text{пр}}$ в плоскости Oxy, то есть $u(x, y) = c$, можем рассмотреть как неявную функцию $u(x, y(x)) - c = 0$

   Производная неявной функции: $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} = k_l$ - угловой коэффициент касательной к l

   $\overrightarrow{\nabla} u = (u_x, u_y) \quad \frac{u_y}{u_x} = k_{\text{град.}}$ - наклон вектора градиента. Очевидно $k_l \cdot k_{\text{град.}} = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} u \perp l$

Nota. Итак, в теоремах сказано
1* В любом заданном направлении $\overrightarrow{s}$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}|_M$ равна проекции градиента в M

2-3* В направлении $\overrightarrow{\nabla} u$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ наибольшая по модулю, а в направлении $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{\nabla} u$ $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$

4* Градиент $\perp$ линиям уровня. Прямая, содержащая $\overrightarrow{\nabla} u$ (т. е. перпендикулярная касательной к l), называется нормалью к l а тогда $\overrightarrow{\nabla} u$ - вектор нормали

4.7.3. Касательная и нормаль к поверхности

Будем исследовать поверхность π с уравнением $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание)

Def. Прямая τ называется касательной прямой к поверхности π в точке $P(x, y, z)$, если эта прямая касается какой-либо кривой, лежащей на π и проходящей через P

Nota. Кривая получается (обычно) сечением π какой-либо плоскостью

Nota. В одной точке может быть множество касательных, но необязательно

Nota. Договоримся различать два типа точек поверхности: обыкновенные и особые

Def. Поверхность π задана $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Точка M называется обыкновенной, если существуют все $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, они непрерывны и не все равны нулю

Def. Точка M называется особой, если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ или хотя бы одна не существует

Th. Все касательные прямые к π в обыкновенной точке M_0 лежат в одной плоскости
$\Box \overrightarrow{ds}$ - направляющий вектор касательной τ, проведенной к кривой l в некоторой секущей плоскости
$\overrightarrow{ds}$ - вектор малых приращений, то есть $\overrightarrow{ds} = (dx, dy, dz)$
$\overrightarrow{dp}$ - проекция $\overrightarrow{ds}$ на Oxy, то есть $\overrightarrow{dp} = (dx, dy)$

Кривую l можно задать параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \xi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}$

Прямая τ имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

При отходе от M_0 на малое расстояние по поверхности (точнее по кривой l) задаем приращение $dt \neq 0$

Домножим уравнение на dt

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}}$$

Из условия обыкновенности точки M_0 следует дифференцируемость функции F. Кроме того, уравнение можно преобразовать к виду $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, где $x(t), y(t), z(t)$ - тоже дифференцируемы в точке M_0

Запишем F'_t, как вложенную:

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Или $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) \cdot (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = 0$

Таким образом, $\overrightarrow{N} \cdot \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} = 0$. То есть $\overrightarrow{N} \perp \frac{d\overrightarrow{s}}{dt}$, при том, что $d\overrightarrow{s}$ выбран произвольно (кривая l - кривая произвольного сечения)

Итак, вектор $\overrightarrow{N} \perp$ любой касательной τ к поверхности π в точке M_0. Следовательно все касательные лежат в плоскости κ такой, что $\overrightarrow{N} \perp \kappa$

Def. Плоскость κ (содержащая все касательные прямые τ к π в точке M_0) называется касательной плоскостью к π в M_0

Def. Прямая в направлении $\overrightarrow{N}$ через точку M_0 называется нормалью к π в M_0
$\overrightarrow{N}$ - вектор нормали к поверхности в точке
Уравнение (π) $\quad F(x, y, z) = 0,\ \overrightarrow{N} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}),\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi, \kappa, n$
Касательная плоскость (κ) $\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$
Нормаль (n) $\quad \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Nota. Получим вектор нормали в случае явного задания $\pi \quad z = z(x, y)$
Пересечем π в точке M_0 плоскостями $x = x_0, y = y_0$.
В сечении получим кривые с касательными векторами
Вектор нормали к π в M_0 $\quad \overrightarrow{n} = \overrightarrow{m} \times \overrightarrow{p}$
Найдем $\overrightarrow{m}, \overrightarrow{p}$
В сечении $x = x_0$
картинка
Введем вектор $d\overrightarrow{p} || \overrightarrow{p}$
$d\overrightarrow{p} = (0, dy, \frac{\partial z}{\partial y}dy) = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})dy$
Аналогично найдем $\overrightarrow{m}$ в сечении $y = y_0$
$\overrightarrow{m} || d\overrightarrow{m} = (dx, 0, \frac{\partial z}{\partial x}dx) = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x})dx$
Так как модуль $\overrightarrow{n}$ не важен, а только направление, то будем искать $\overrightarrow{n} = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}) \times (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})$

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(-\frac{\partial z}{\partial x}) - \overrightarrow{j}\frac{\partial z}{\partial y} + \overrightarrow{k} =$$

$$= (-\frac{\partial z}{\partial x}; -\frac{\partial z}{\partial y}; 1)$$

Тогда уравнение κ:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) = dz$$

Уравнение нормали n: $\dfrac{x - x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{y - y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{z - z_0}{1}$

Nota. Последние уравнения можно получить проще, если свести уравнение $z = f(x, y)$ к уравнению $z - f(x, y) = F(x, y, z) = 0$

Lab. Вывести уравнение κ и n, пользуясь предыдущем замечанием

Nota. Если найти $\overrightarrow{n^-} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{m} = -(\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{p})$, то получим также вектор нормали, но обращенный в противоположную сторону

Будем говорить, что $\overrightarrow{n^+}$ - положительный вектор нормали, если угол $\angle\gamma = \angle(\overrightarrow{n^+}, Oz) \in [0; \dfrac{pi}{2})$

$\overrightarrow{n^-}$ - отрицательный, если угол $\angle\gamma = \angle(\overrightarrow{n^-}, Oz) \in (\dfrac{\pi}{2}; \pi)$

Соответственно этому верхней стороной π называется та, к которой вектор нормали положительный

Нижней стороне соответствует $\overrightarrow{n^-}$

Если $\overrightarrow{n} \perp Oz$, то это боковая сторона

4.7.4. Экстремумы ФНП ($\Phi_2\Pi$)

Def. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = z(x, y)$, если $\forall M \in U_\delta(M_0) \quad z(M_0) \geq z(M)$ (для минимума $z(M_0) \leq z(M)$)

Nota. То же, что $z(M) - z(M_0) = z - z_0 = \Delta z \leq 0$ (max), $\quad \Delta z \geq 0$ (min)

Met. Для ФОП формулировали Н. условие экстремума (Ферма), из этого условия получали точки, подозрительные на экстремум : критические - $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ (для острого экстремума); стационарные - $\exists f'(x_0) = 0$ (частный случай критич.)

Далее при помощи достаточных условий (признаков) проверяем наличие экстремума в критических точках

Nota. Все термины переносятся на ФНП

Н. У. и Д. У аналогично

Th. Н. условие экстремума (гладкого):

$z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\quad z_0$ - точка гладкого экстремума, то есть $\exists \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ в M_0 и $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $z_0 \leq z(M)$ или $z_0 \geq z(M)$

Тогда $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0 \end{cases}$

□ Аналогично лемме Ферма в сечениях $x = x_0$, $y = y_0$

Для существования острого экстремума нужно рассмотреть не существования или бесконечность $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial z}{\partial y}$

Если же функция трижды дифференцируема исследования на характер экстремума можно проводить с помощью вторых производных

Th. Д. условие (гладкого) экстремума

Пусть $z = z(x,y)$ непрерывна в окрестности x_0 (критическая точка $\frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0, \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0$) вместе со своими первыми и вторыми производными (можно потребовать трижды дифференцируемость)

Тогда, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{\text{обозн}}{=} A, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \overset{\text{обозн}}{=} B, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{\text{обозн}}{=} C$, то

1. $AC - B^2 > 0, A > 0 \Longrightarrow M_0$ - точка минимума
2. $AC - B^2 > 0, A < 0 \Longrightarrow M_0$ - точка максимума
3. $AC - B^2 < 0$ в точке M_0 нет экстремума
4. $AC - B^2 = 0 \Longrightarrow$ нельзя утверждать наличие или отсутствие экстремума в точке (требуются дополнительные исследования)

□ Функция z дважды дифференцируема, тогда ($z_0 = z(M_0)$)

$\Delta z = z - z_0 = \frac{dz}{1!}|_{M_0} + \frac{d^2 z}{2!}|_{M_0} + o((\Delta\rho)^2)$ $\quad \Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},\ dx = \Delta\rho\cos\alpha, dy = \Delta\rho\sin\alpha$

$o((\Delta\rho)^2) = \lambda(\Delta\rho)^3$

Заметим, что $dz|_{M_0} = 0$, так как M_0 - критическая

$d^2 z = (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})^2 z = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 = A(dx)^2 + 2Bdxdy + C(dy)^2 = A(\Delta\rho)^2\cos^2\alpha + 2B(\Delta\rho)^2\cos\alpha\sin\alpha + C(\Delta\rho)^2\sin^2\alpha$

Тогда $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha + 2\lambda\Delta\rho)$

Далее рассмотрим отдельно случаи $A \neq 0$ и $A = 0$

$A \neq 0$: $A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha = \frac{A^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\sin\alpha + B^2\sin^2\alpha + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} = \frac{(A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A}$

1) $\sqsupset AC - B^2 > 0 (A > 0)$: Числитель неотрицательный и не равен нулю (иначе $\sin\alpha = 0$, то тогда $A\cos\alpha \neq 0$)

Итак, числитель и знаменатель больше нуля. Обозначим всю дробь за $k^2 > 0$

Вернемся к $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(k^2 + 2\lambda\Delta\rho)$

Устремим $\Delta\rho \to 0$, начиная с какого-то δ $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $k^2 + \lambda\Delta\rho > 0$

То есть $\Delta z > 0$ в $U_\delta(M_0) \Longrightarrow M_0$ - точка минимума (локально в $U_\delta(M_0)$)

2) $\sqsupset AC - B^2 > 0 (A < 0)$, тогда $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$ при достаточно малом $\Delta\rho$

3) $\sqsupset AC - B^2 < 0 (A > 0)$, тогда фиксируем направления $\alpha = 0 \Longrightarrow \sin\alpha = 0$

$\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A + 2\lambda\Delta\rho) > 0$

$tg\alpha = -\frac{A}{B} \Longrightarrow \frac{(AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} = -k^2, \Delta z = \frac{(\Delta\rho)^2}{2}(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$

Вдоль разных путей $\alpha = 0$, $tg\alpha = -\dfrac{A}{B}$, разный знак $\Delta z \Longrightarrow$ нет экстремума

Nota. Можно аналогично рассмотреть $A < 0$
4) $A = 0$, вернемся к выражению $\Delta z = \dfrac{1}{2}(\Delta\rho)^2(\sin\alpha(2B\cos\alpha + C\sin\alpha) + 2\lambda\Delta\rho)$
Пусть α беск. мал, тогда $\sin\alpha \approx 0, C\sin\alpha \approx 0, 2B\cos\alpha \approx 2B$. Тогда знак $\sin\alpha \cdot 2B$ зависит от α
То есть Δz колеблется вместе с α по знаку $\Longrightarrow$ нет экстремума
Можно доказать при $A \neq 0$, например, выбрав $tg\alpha = -\dfrac{A}{B}$, что знак Δz зависит от α

5. Интеграл ФНП

5.1. Общая схема интегрирования

Постановка задачи.

В некоторой области Ω (дуга кривой, участок поверхности, тело и т. д.) распределена или действует непрерывно некоторая функция скалярная g или векторная $\overrightarrow{G}$, то есть определены $g(M)$ или $\overrightarrow{G}$ $\forall M \in \Omega$

Ex. Область Ω - дуга кривой $l : y = y(x)$

Скалярная функция $g(M)$ - плотность в точке M

Ex. Область Ω - трубка в $\mathbb{R}^3$

Векторная величина $\overrightarrow{G}(M)$ - скорость жидкой частицы, движущейся по трубке

Из всех векторов $\overrightarrow{v}$ (для всех $M \in \Omega$) складывается «поле жидких скоростей»

Ex. Область Ω - кривая, по которой движется точка M под действием силы $\overrightarrow{G}(M)$

Задача интегрирования - найти суммарное содержание скалярной величины или действие векторной величины в области Ω

Схема Величины $g(M)$ и $\overrightarrow{G}(M)$, меняясь от точки к точке заменяются на квазипостоянные на малых (элементарных) участках $d\omega$

Так как $g(M)$ или $\overrightarrow{G}(M)$ должны быть непрерывны на Ω, то на малом участке $d\omega$ их изменение незначительно и значение функции можно считать почти постоянным, приняв за это значение какое-либо среднее $g_{\text{ср.}}(M), \overrightarrow{G_{\text{ср.}}}(M)$

Тогда элементарное содержание $g(M)$ в $d\omega$ будет отличаться от среднего содержания, то есть $g_{\text{ср.}} d\omega$ на б. м. большего порядка

Ex. Проиллюстрируем на примере $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

S - площадь по наибольшей границе, σ - площадь по наименьшей границе, $S_{\text{трап.}}$ - «истинная» площадь

Т. к. $f(x)$ непр. $\forall x \in [a, b]$, то $\Delta f \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

Для простоты рассмотрим монотонно возрастающую $f(x)$

Хотим доказать, что $S - S_{\text{трап.}}$ - б. м. большего порядка, чем $S_{\text{трап.}}$ или S

$$0 \le S - S_{\text{трап.}} \le dx\Delta y$$

Сравним $\dfrac{dx\Delta y}{S} = \dfrac{dx\Delta y}{dx f(x + \Delta x)} = \dfrac{\Delta y}{\text{огр.}} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

таким образом $S - S_{\text{трап.}} = 0(S_{\text{трап.}})$

Смысл интеграла в случае векторной функции $\overrightarrow{G}(M)$

Будем интегрировать только скалярные выражения вида $\overrightarrow{G}(M) \cdot d\overrightarrow{\omega}$ - скал. произведение векторов, где $d\overrightarrow{\omega}$ - ориентированный элемент $d\omega$

Ex. Сила $\overrightarrow{F}(M)$ перемещает точку M вдоль плоской кривой l. При этом сила совершает работу по перемещению (работа A - скалярная величина)

Известна формула для $\overrightarrow{F} = const$ и перемещения $\overrightarrow{s}$ по прямой: $A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}$

Разобьем дугу на элементы $dl \approx ds$ и ориентируем их (зададим направление перемещению ds)

$dl = ds + o(dl)$, $d\overrightarrow{s}$ - вектор элем. перемещения, как правило, ds направлен согласовано с Ox

Элемент работы $dA = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s} = (F_x, F_y) \cdot (dx, dy) \overset{\text{обозн.}}{=} (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$ - скаляр. Вся работа равна $A = \displaystyle\int dA$

Nota. Ориентированный участок поверхности $d\overrightarrow{\sigma}$ - это размер участка $d\sigma$, умноженный на вектор нормали к участку $\overrightarrow{n}$, то есть $d\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{n} d\sigma$

<u>Итак.</u> Схема интегрирования:

1* Дробление области Ω на элементы $d\omega$ **2*** Выбор постоянного значения функции на $d\omega$, то есть $g_{\text{ср.}}$ или $\overrightarrow{G_{\text{ср.}}}$ **3*** Составление подынтегрального выражения $g_{\text{ср.}}d\omega$ или $\overrightarrow{G_{\text{ср.}}}d\overrightarrow{\omega}$ **4*** «Суммирование» элементарных величин $\displaystyle\int g d\omega$ или $\displaystyle\int \overrightarrow{G} d\overrightarrow{\omega}$

5.2. Классификация интегралов

1* По размерности Ω

$n = 1$: * прямая (опред. интеграл $\displaystyle\int_a^b$) * кривая (криволинейный интеграл $\displaystyle\int_A^B$)

$n = 2$: * плоскость (двойной интеграл $\displaystyle\iint_D$) * поверхность, не криволинейная (поверхностный интеграл $\displaystyle\iint_S$)

$n = 3$: * пространство $\mathbb{R}^3$
(тройной $\displaystyle\iiint_V$ или $\displaystyle\iiint_T$)

2* По виду функции

скалярная $g(M)$	векторная $\overrightarrow{G}(M)$
$n = 1$: определенный, криволинейный I рода	криволин. II рода (интегралы в проекциях)
$n = 2$: двойной, поверхн. I рода	поверхн. II рода
$n = 3$: тройной	

5.3. Двойной и тройной интегралы

Nota. Дадим строгое определение

Def. $z = z(x, y) \quad z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) Дробление на $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx

2) Выбор средней точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, по значению $z(M_i)$ строим элемент. параллелепипед объемом $v_i = z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i \approx V_{\text{малого цилиндра}}$

3) Интеграл суммы

$v_i = \Sigma_{i=1}^n v_i = \Sigma z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$

4) Если $\exists \lim v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от типа дробления и т.д. при $n \to \infty$ и $\tau =$

$\max \Delta x_i, \Delta y_i \to 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \overset{def}{=} \iint_D z(x,y)dxdy$ - двойной интеграл от $z(x,y)$ на области D

Мет. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

$f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}^+$

1) Дробление на элементы P_i прямыми $x = const, y = const$, $S_{P_i} = \Delta x_i \Delta y_i$ (дали dx, dy)

2) Выбор $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, площадь элементарных прямоугольников $f(\xi_i)\Delta x_i \approx S_{\text{полоски}}$

3) Интеграл суммы $\sigma_n = \Sigma_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Nota. Об области D

В простейшем случае рассматривают выпуклую, односвязную $\mathbb{R}^2$-область

а) Выпуклость:

$\exists M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \notin D$ - не выпуклая

$\forall M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \in D$ - выпуклая

б) Связность:

$D = D' \cup D''$ - не связная: $\exists M_1, M_2 \in D \mid \overset{\frown}{M_1M_2} \notin D$

D - связная: $\forall M_1, M_2 \in D \mid \underset{\smile}{M_1M_2} \in D$

Обычно область - открытая, дальше будем рассматривать в том числе области с границей.

Добавим к определению $\displaystyle\iint_{\partial D\text{ - граница } D} z(x,y)dxdy$

Геометрический смысл: В определении при $z(x,y) \geq 0$ интегральная сумма $v_n = \Sigma_{i=1}^n v_i$ была суммой объемов элементарных параллелепипедов и приближала объем подповерхности

Тогда $\displaystyle\iint_D z(x,y)dxdy \overset{z\geq 0}{=} V_{\text{цилиндра с осн. } D}$, а при $z = 1$ $\displaystyle\iint_D dxdy = S_D$

Вычисление: По геометрическому смыслу - найти $\displaystyle\iint_D z(x,y)dxdy$ значит найти объем подповерхности

Можно найти $S(x) = \displaystyle\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy$ - площадь поперечного сечения

Найдем V как объем тела с известными площадями сечений

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy\right)dx$$

Nota. Кратный

Если найдена первообразная для $z(x=c,y)$ (обозн. $F(x,y(x))$), то по формуле N-L:

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy = F(x,y(x))\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = F(x,y_2(x)) - F(x,y_1(x))$$

Тогда $\displaystyle\int_a^b \overbrace{(F(x,y_2) - F(x,y_1))}^{\varphi(x)}\,dx$ - обычный определенный интеграл

Пределы интегрирования во внутреннем интеграле - функции, во внешнем - точки

? Можно вычислить V, рассекая тело сечениями $y = const$. Верно ли, что $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy\right)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx\right)dy$?

Верно, V не зависит от порядка сечения

Таким образом, двойной интеграл $\displaystyle\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)dydx = \int_\alpha^\beta \int_{x_1}^{x_2} z(x,y)dxdy$

Но при другом порядке интегрирования область D может оказаться неправильной

Def. При проходе области D в направлении $Oy \uparrow$ граница области (верхняя) меняет аналитическое задание. Такая область называется направильной в направлении Oy

Выгодно выбирать правильное направление, чтобы не делить интеграл по аддитивности

Ex. $\iint_D xydxdy$, $D : x^2 + y^2 \leq 1$

$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{1} (\int_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}} xydy)dx = \int_{-1}^{1} (\frac{x}{2}y^2\Big|_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}})dx = \int_{-1}^{1} (\frac{x}{2}((1-x^2)-(1-x^2))dx = 0$$

Def. Тройной интеграл

$T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

1) дробление на элементы объема $dv = dxdydz$

2) Вычисление среднего содержания $u(x, y, z)$ в dv: $u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)dv$

3) Интегральная сумма $\sigma_n = \Sigma u(M_i)dv$

4) $\lim\limits_{n\to\infty, \tau=\max dv\to 0} \overset{def}{=} \iiint_T u(x, y, z)dxdydz$

Геометрический смысл. Только при $u = 1$ $\iiint_T dxdydz = V_T$

Физический смысл. $u(x, y, z)$ - плотность в каждой точке T

$\iiint_T u(x, y, z)dxdydz = m_T$ - масса

Вычисление. $\iiint_T u(x, y, z)dxdydz \overset{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} u(x, y, z)dzdydx$

5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

Проблема. $S = \iint_D dxdy$

Если $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$ - то это не площадь круга, а площадь прямоугольника S в распрямленных координатах

Введем Δs_i - площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а $\Delta s_i'$ - площадь прямоугольника, причем $\Delta s_i \neq \Delta s_i'$

Nota. Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы $\Delta s_i \approx$ коэфф. $\cdot \Delta s_i'$

Дроблению будем подвергать область D' в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты: $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$, где функции $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам

Исходно область D в Oxy

картинка

Заменим криволинейный параллелограмм на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади - малая более высокого порядка, чем площадь)

$A(x_A, y_A) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$

$B(x_B, y_B) = (\varphi(u, v+\Delta v), \psi(u, v+\Delta v))$
$C(x_C, y_C) = (\varphi(u+\Delta u, v+\Delta v), \psi(u+\Delta u, v+\Delta v))$
$D(x_D, y_D) = (\varphi(u+\Delta u, v), \psi(u+\Delta u, v))$

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}| = \left\|\begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{matrix}\right\| = \left|\overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix}\right|$$

$$x_B - x_A = \varphi(u, v+\Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v\varphi \approx \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v$$
$$y_B - y_A = \psi(u, v+\Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v\psi \approx \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v$$
$$x_D - x_A = \varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u\varphi \approx \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u$$
$$y_D - y_A = \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u\psi \approx \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u$$

$$\left|\overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix}\right| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \end{matrix}\right\| \overbrace{\Delta v\Delta u}^{\Delta s'} \overset{|det|=|J|}{\Longrightarrow} \Delta s \approx |J|\Delta s'$$

Nota. В пределе это точное равенство:

$$|J| = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta s'}$$

(легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа $\Delta_u\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\xi, \eta)\Delta u \to \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v)\Delta u$)

Def. Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial\xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial\xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial\xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\xi_n} \end{vmatrix}$, где $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) \\ \ldots \\ x_n = f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) \end{cases}$ - преобразование координат $Ox_i \to O\xi_i (f_k \in C^1_D)$ называется определителем Якоби или якобиан

Построение интеграла.

1. Дробление D' в распрямленной Ouv
2. Выбор средней точки, поиск значения $f(\xi_i, \eta_i)$
   Значение величины на элементе $f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \Sigma f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
4. В пределе интеграл $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(u, v)|J|dudv$

Якобианы в ПСК, ЦСК, СфСК

1. ПСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\varphi \quad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi$; $\quad \frac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = \rho\cos\varphi$

   $$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$$

2. ЦСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$

3. СфСК - <u>Lab.</u>

Ex. $T: \begin{matrix} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2=z \end{matrix}$

Конус в ЦСК: $\rho = z, z > 0$ Параболоид в ЦСК: $\rho = \sqrt{z}, z > 0$

$V_T = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z\Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4})\Big|_0^1 = 2\pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}$

<u>Lab.</u> $T: \begin{matrix} x^2+y^2+z^2=1 \\ \sqrt{x^2+y^2}=z \end{matrix}$ - мороженка, считать в СфСК

5.5. Криволинейные интегралы

I рода. Область интегрирования - кривая $l = \breve{AB}$ (дуга) (начнем с плоской дуги)

На l действует скалярная функция $f(x,y)$ (физ. смысл - плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)

Задача в нахождении «суммарной» величины $f(x,y)$, то есть интеграла: «складываем» элементы $f_{\text{ср}}(x,y)dl$

Обозн. Получаем $\int_l f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl$

Nota. В строгом определении интегральная сумма строится так:

$\breve{M_{i-1}M_i}$ - элементарная дуга

Δl_i - длина элемента

Δs_i - длина стягивающей дуги

$\Delta l_i \approx \Delta s_i$

$M_{\text{ср.}}(\xi_i, \eta_i)$ - ср. точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути)

Вдоль пути $\breve{AB}$ действует сила $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$

Найдем элементарную работу $dA = \overrightarrow{F}_{\text{ср.}} \overrightarrow{ds}$, где $\overrightarrow{ds}$ - элементарное приращение

$\overrightarrow{ds} = (dx, dy) = (\cos\alpha ds, \sin\alpha ds)$

$\overrightarrow{F}_{\text{ср.}}$ - значение силы на эл. участке в какой-либо его точке

Тогда. $dA = (P(x,y), Q(x,y)) \cdot (dx, dy) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$A = \int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx + Qdy$ - интеграл II рода (в проекциях)

Nota. В проекциях, потому что $F_x = P, F_y = Q$, таким образом скалярное произведение записано в проекциях

При этом часто рассматривают по отдельности

$\int_{AB} f(x,y)dx$ и $\int_{AB} g(x,y)dy$

Nota. Связь интегралов I и II рода

$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P,Q)(dx,dy) = \int_L (P,Q)(\cos\alpha, \cos\beta)\underbrace{ds}_{\approx dl} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$

Обозначим $\overrightarrow{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

По теореме Лагранжа $\exists(\xi,\eta) \in$ элементарной дуге, касательная которой параллельна ds

Тогда $d\overrightarrow{s} = \overrightarrow{\tau}ds \approx \overrightarrow{\tau}dl$, где $\overrightarrow{\tau}$ - единичный вектор, касательной в (ξ,η)

Тогда $\int_L Pdx + Qdy \overset{\text{пред. в вект. форме}}{=} \int_L \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau}dl = \int_L \overrightarrow{F} \underbrace{\overrightarrow{dl}}_{\text{ориент. эл. дуги}}$

Свойства:

Nota. Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

Направление обхода.

I рода

$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$

II рода

$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$

Def. Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются

$\oint_K fdl$ и $\oint_K Pdx + Qdy$.

Если K (контур) обходят против ч. с., то обозн. $\oint_{K^+}$

Вычисление. (Сведение к $\int_a^b dx$ или $\int_\alpha^\beta dy$ или $\int_\tau^T dt$)

1) Параметризация дуги L:

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C^1_{[\tau,T]}$

$A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau))$

$B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T))$

При этом задании $L \quad y = y(x), x \in [a,b]$ или $x = x(y), y \in [\alpha, \beta]$ - частные случаи параметризации

2)

I рода

$\int_L f(x,y)dl \overset{dl=\sqrt{\varphi_t'^2+\psi_t'^2}|dt|}{=\!=}$

$\int_\tau^T f(t)\sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2}|dt|$

II рода

$\int_{L=\breve{AB}} Pdx + Qdy \overset{dx=\varphi_t'dt, dy=\psi_t'}{=\!=}$

$\int_\tau^T f(t)(P\varphi' + Q\varphi,)dt|$

Ex. Дуга L - отрезок прямой от $A(1,1)$ до $B(3,5)$

1) $\displaystyle\int_{AB}(x+y)dl = \begin{bmatrix} AB: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4} \\ \text{или} y=2x-1, x\in[1,3] \\ f(x,y)=x+2x-1=3x-1 \\ dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{5}dx \end{bmatrix} = \int_1^3 (3x-1)\sqrt{5}dx = \sqrt{5}(\frac{3x^2}{2}-x)\Big|_1^3 = \sqrt{5}(12-2) =$ $10\sqrt{5}$

2) $\displaystyle\int_{AB}(x+y)dx+(x+y)dy = \begin{bmatrix} x\uparrow_1^3, y\uparrow_1^5 \\ y=2x-1, x=\frac{y+1}{2} \\ dx=dx, dy=dy \end{bmatrix} = \int_1^3 (x+2x-1)dx + \int_1^5 (\frac{y+1}{2}+y)dy =$ $\displaystyle(\frac{3x^2}{2}-x)\Big|_1^3 + \frac{1}{2}(\frac{3y^2}{2}+y)\Big|_1^5 = 10+20=30$

Th. Формула Грина

$D\subset R^2$ - прав. $\uparrow Ox, \uparrow Oy$

Γ_D - гладкая замкнутая кривая

В области D действует $\overrightarrow{F}=(P(x,y),Q(x,y))$ - непрерывные дифференциалы

Тогда $\displaystyle\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_{K^+} Pdx+Qdy$

□ $\displaystyle\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_\alpha^\beta dy\int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx - \int_a^b dx\int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy =$ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (Q(x,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)})dy - \int_a^b (P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)})dx =$ $\displaystyle\int_\alpha^\beta (Q(x_2(y),y)-Q(x_1(y),y))dy - \int_a^b (P(x,y_2(x))-P(x,y_1(x)))dx = \int_{NST}Qdy - \int_{NMT}Qdy - \int_{MTS}Pdx + \int_{MNS}Pdx = \underbrace{\int_{NST}Qdy+\int_{TMN}Qdy}_{\oint_{K^+}Qdy} + \underbrace{\int_{STM}Qdy+\int_{MNS}Qdy}_{\oint_{K^+}Pdx} = \oint_{K^+}Pdx+Qdy$

□