

5.3. Двойной и тройной интегралы

Nota. Дадим строгое определение

Def. $z = z(x, y) \quad z : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Мет. $\int_a^b f(x)dx \quad f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$

1) Дробление на $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx

1) Дробление на элементы P_i прямыми $x = \text{const}, y = \text{const}, S_{P_i} = \Delta x_i \Delta y_i$ (дали dx, dy)

2) Выбор средней точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, по значению $z(M_i)$ строим элемент. параллелепипед объемом

2) Выбор $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, площадь элементарных прямоугольников $f(\xi_i)\Delta x_i \approx S_{\text{полоски}}$

$$v_i = z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i \approx V_{\text{малого цилиндра}}$$

3) Интеграл суммы

3) Интеграл суммы $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

$$v_i = \sum_{i=1}^n v_i = \sum z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

4) Если $\exists \lim v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от типа дробления и т.д. при $n \rightarrow \infty$ и $\tau = \max(\Delta x_i, \Delta y_i) \rightarrow 0$,

$$4) \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$$

то $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} v_n \stackrel{\text{def}}{=} \iint_D z(x, y) dx dy$ - двойной интеграл от $z(x, y)$ на области D

Nota. Об области D

В простейшем случае рассматривают выпуклую, односвязную \mathbb{R}^2 -область

а) Выпуклость:

$\exists M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1 M_2} \notin D$ - не выпуклая

$\forall M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1 M_2} \in D$ - выпуклая

б) Связность:

$D = D' \cup D''$ - не связная: $\exists M_1, M_2 \in D \mid \widetilde{M_1 M_2} \notin D$

D - связная: $\forall M_1, M_2 \in D \mid \widetilde{M_1 M_2} \in D$

Обычно область - открытая, далее будем рассматривать в том числе области с границей.

Добавим к определению $\iint_{\partial D} z(x, y) dx dy$ - граница D

Геометрический смысл: В определении при $z(x, y) \geq 0$ интегральная сумма $v_n = \sum_{i=1}^n v_i$ была суммой объемов элементарных параллелепипедов и приближала объем подповерхности

Тогда $\iint_D z(x, y) dx dy \stackrel{z \geq 0}{=} V_{\text{цилиндра с осн. } D}$, а при $z = 1 \iint_D dx dy = S_D$

Вычисление: По геометрическому смыслу найти $\iint_D z(x, y) dx dy$ - значит найти объем подповерхности

Можно найти $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c, y) dy$ - площадь поперечного сечения

Найдем V как объем тела с известными площадями сечений

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c, y) dy \right) dx$$

Nota. Кратный

Если найдена первообразная для $z(x=c, y)$ (обозн. $F(x, y(x))$), то по формуле N-L:

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c, y) dy = F(x, y(x)) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x))$$

Тогда $\int_a^b \overline{\varphi(x)} (F(x, y_2) - F(x, y_1)) dx$ - обычный определенный интеграл

Пределы интегрирования во внутреннем интеграле - функции, во внешнем - точки

? Можно ли вычислить V , рассекая тело сечениями $y = \text{const}$? Верно ли, что $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x, y) dy \right) dx =$

$$\int_a^b \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x, y) dx \right) dy?$$

Верно, V не зависит от порядка сечения

$$\text{Таким образом, двойной интеграл } \iint_D z(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{x_1}^{x_2} z(x, y) dx dy$$

Но при другом порядке интегрирования область D может оказаться неправильной

Def. При проходе области D в направлении $Oy \uparrow$ граница области (верхняя) меняет аналитическое задание. Такая область называется неправильной в направлении Oy

Выгодно выбирать правильное направление, чтобы не делить интеграл по аддитивности

$$\text{Ex. } \iint_D xy dx dy, D : x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\iint_D xy dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}} xy dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2} y^2 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2} ((1-x^2) - (1-x^2)) \right) dx = 0$$

Def. Тройной интеграл

Пусть дана функция $u(x, y, z) : T \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

1) Дробление на элементы объема $dv = dx dy dz$

2) Вычисление среднего содержания $u(x, y, z)$ в dv : $u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) dv$

3) Интегральная сумма $\sigma_n = u(M_i) dv$

$$4) \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max(dv) \rightarrow 0}} \stackrel{def}{=} \iint\limits_T u(x, y, z) dv = \iiint\limits_T u(x, y, z) dx dy dz$$

Геометрический смысл. Только при $u = 1$ интеграл $\iiint_T dx dy dz = V_T$ равен объему

Физический смысл. Пусть $u(x, y, z)$ - плотность в каждой точке T

Тогда $\iiint_T u(x, y, z) dx dy dz = m_T$ - масса

Вычисление. $\iiint_T u(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} u(x, y, z) dz dy dx$