6. Гироскоп. Механическая работа.

Повторим то, что было на прошлой лекции. Рассмотрим два типа движения:

Поступательное движение

$d\vec{r}; x, y, z$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{a}_\tau = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

m

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{p} = const$ при $\vec{F}_{\text{вн.}} = 0$ (ЗСИ)

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Вращательное движение

$d\vec{\varphi}$

$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

$I \qquad I_{\text{м.т.}} = mr^2, \qquad I = \int r^2 dm$

$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad \vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$

$\vec{L} = const$ при $\vec{M}_{\text{вн}} = 0$ (ЗСМИ)

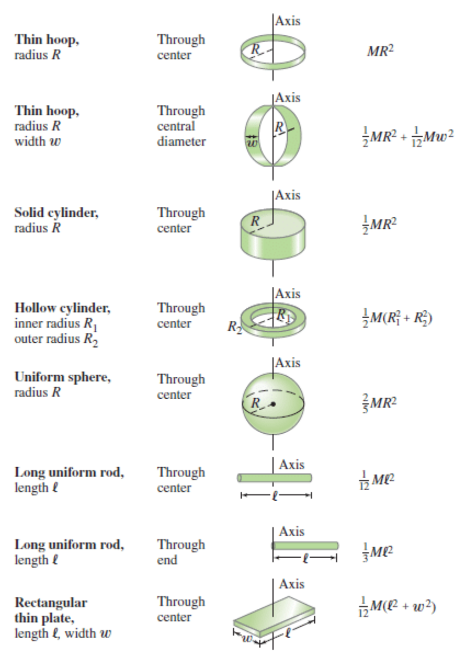
$M_z = I\beta_z$

$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \qquad = [\vec{r}\vec{F}]$

Теорема Штейнера: момент инерции I тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого тела I_0 относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:

$$I = I_0 + md^2$$

Также мы рассмотрели моменты инерции для разных тел



Thin hoop, radius R	Through center	MR^2
Thin hoop, radius R, width w	Through central diameter	$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
Solid cylinder, radius R	Through center	$\frac{1}{2}MR^2$
Hollow cylinder, inner radius R_1, outer radius R_2	Through center	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Uniform sphere, radius R	Through center	$\frac{2}{5}MR^2$
Long uniform rod, length ℓ	Through center	$\frac{1}{12}M\ell^2$
Long uniform rod, length ℓ	Through end	$\frac{1}{3}M\ell^2$
Rectangular thin plate, length ℓ, width w	Through center	$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$

Гироскоп

Рассмотрим вращающийся волчок: вращаясь, он постепенно теряет энергию из-за трения и сопротивления воздуха, из-за чего его вращение замедляется, и его ось начинает вращаться по другой оси.

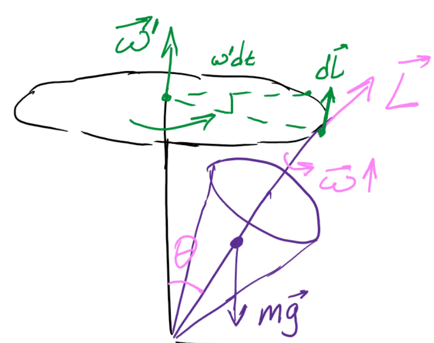
Обозначим за $\vec{L}_\omega$ момент инерции волчка и за $\vec{L}'$ момент инерции оси. Тогда:

$\vec{L} = \vec{L}_\omega + \vec{L}'$

$\vec{L}_\omega = I\vec{\omega}$

Заметим, что в опыте скорость вращения волчка намного больше скорости вращения оси $\omega \gg \omega'$

Из этого $d\vec{L} = L\sin\theta \cdot \omega' dt$



Или в векторной форме:

$d\vec{L} = [\vec{\omega}\vec{L}]dt$

$\vec{M} = [\vec{\omega}\vec{L}]$

Также заметим, что $L_\omega \gg L'$

Способность сохранять положение вращающегося волчка используется в таком приборе, как гироскоп. Гироскоп применяется для определения положения аппарата (например, самолет, космического корабля) в авионике.

Механическая работа

$d\vec{r}$ - элементарное перемещение, в пределах которого сила $\vec{F}$ постоянна

Fs - проекция силы на направление перемещения

$d\vec{r} = ds$

Элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$

$dA = \vec{F}d\vec{r} = F \cdot ds \cos\alpha = F_s ds$

$A = \sum dA = \int dA$

$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$

Допустим на тело действует несколько сил:

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$

$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots)d\vec{r}$

Мощность - скалярная величина, равная работе силы, совершаемой за единицу времени. Характеризует скорость, с которой совершается работа

$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

$A = \int N dt$

Работа силы упругости: $A = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$

Работа силы тяжести: $A = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = mgh_1 - mgh_2$

Работа силы тяготения: $A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Gm_1m_2}{r^2}dr = -\frac{Gm_1m_2}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{Gm_1m_2}{r_1} - \frac{Gm_1m_2}{r_2}$

Силы, чья работа не зависит от траектории пути, будет называть *консервативными* (потенциальными)

Тогда из этого мы можем вывести потенциальную энергию:

Потенциальная энергия для силы упругости: $U = \frac{kx^2}{2}$

Потенциальная энергия для силы тяжести: $U = mgh$

Потенциальная энергия для силы тяготения: $U = \frac{Gm_1m_2}{r}$

В общем виде получаем $A = U_1 - U_2$

$dA = -dU \qquad \vec{F} d\vec{r} = -dU$

$\vec{F} = -(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k})$

$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U$