1. Евклидовы пространства

1.1. Скалярное произведение

L - линейное пространство $\forall x, y \in L\ c = (x, y) -$ ск. произв.$x, y \to c \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
4. $\forall x \in L\ (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

Если векторы и коэффициенты комплескно-значные, то определения будут другими

Def. Скалярная функция $c = (x, y)$ со свойствами 1-4 называется скалярным произведением элементов x и y

Def. Линейное пространство со скалярным произведением называется Евклидовым

Ex. 1. ЛП - пространство геометрических векторов

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \left[\begin{array}{l} |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi, \quad \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq 0 \\ 0, \quad \overrightarrow{a} = 0 \vee \overrightarrow{b} = 0 \end{array}\right.$$

Ex. 2. ЛП $= C_{[a;b]}$

$$(f(x), g(x)) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Очевидно, что 1-3 выполняются, проверим 4:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f(x) = 0$$

Ex. 3. ЛП - пространство числовых строк вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$(x, y) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ - сумма произведений компонент

1.2. Свойства евклидова пространства - E

Th. Неравенство Коши-Буняковского

$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

$\square$

Нетрудно заметить, что:

$\sphericalangle (\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x - y, \lambda x) - (\lambda x - y, y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \overset{\text{пусть}}{=} 0$

Решим относительно λ

$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y)$

$\dfrac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y)$

Так как $(\lambda x - y) \geq 0$ (4-ое свойство ск. произв.), то уравнение имеет ≤ 1 корня, значит $\dfrac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$

$\square$

1.3. Норма

ЛП $= L, \forall x \in L$ определена функция так, что выполняется $x \to n \in \mathbb{R}, n = \|x\|$

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$

Евклидово пространство с нормой называется нормированным

Th. E^n является нормированным, если $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

$\square$

Свойства 1-2 очевидны, докажем 3 свойство:

$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} = \|x\| + \|y\|$

$\sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$

$(x,x)+2(x,y)+(y,y) \leq (x,x)+(y,y)+2\sqrt{(x,x)(y,y)}$

$(x,y) \leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$

$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$ - верно по неравенству Коши-Буняковского

$\square$

Обобщим геометрические понятия ортогональности и косинуса угла на случай произвольных векторов

Def. x, y - ортогональны, если $(x,y) = 0$ и $x \neq 0$ и $y \neq 0 \quad x \perp y$

Def. $\cos(\widehat{x,y}) = \dfrac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ - косинус угла между векторами

Def. $x, y \in E^n \quad x \perp y \quad z = x + y$ - гипотенуза

Th. $x \perp y$, тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\square$

$$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)^2 + \underbrace{2(x,y)}_{=0, x \perp y} + (y,y)^2 = (x,x)^2 + (y,y)^2$$

$\square$

Def. $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис L^n

На L^n введены (x,y) и $\|x\|$ (то есть $L^n \to E^n_{\|\cdot\|}$ - нормированное евклидово)

B называют ортонормированным базисом, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

Nota. Докажем, что всякая такая система из n векторов линейно независима (то есть всякая нулевая комбинация тривиальная):

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \forall \lambda_i = 0$$

$$(e_k, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_k, e_i) \overset{k \neq i \Rightarrow (e_k, e_i) = 0}{=\!=} \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k = 0 \quad \forall k$$