

Nota. $\text{Ker } \mathcal{A}$ и $\text{Im } \mathcal{A}$ - подпространства V ($\mathcal{A} : V \rightarrow V$)

Вообще-то $\text{Ker } \mathcal{A} \subset V, \text{Im } \mathcal{A} \subset W$ ($\mathcal{A} : V \rightarrow W$)

$\dim W \leq \dim V$, тогда можно считать, что $W \subset V'$ и рассмотрим $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$ (где V' изоморфен V)

$\text{Ker } \mathcal{A}$ - подпространство, то есть $\text{Ker } \mathcal{A} \subset V$ и $\sum c_i x_i \in \mathcal{A}$, если $\forall x_i \in \text{Ker } \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(\sum c_i x_i) = \sum c_i \mathcal{A}x_i \stackrel{x_i \in \mathcal{A}}{=} \sum c_i 0 = 0$$

Следствие: $\text{Ker } \mathcal{A} = 0 \implies \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

□ От противного:

□ \mathcal{A} - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$ - противоречие

Nota. Обратное также верно:

\mathcal{A} - вз.-однозн. $\iff y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$, так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 = 0$

Тогда 0 является образом только 0-вектора $\implies \text{Ker } \mathcal{A} = 0$

Nota. Также очевидно, что

$$\text{Ker } \mathcal{A} = 0 \iff \text{Im } \mathcal{A} = V$$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = V \implies \text{Im } \mathcal{A} = 0 \text{ и } \mathcal{A} = 0$$

Th. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, тогда $\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim V$

□ Так как $\text{Ker } \mathcal{A}$ - подпространство V , то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса V : $e_1^k, \dots, e_m^k, e_{m+1}^k, \dots, e_n^k$)

Обозначим дополнение W , тогда $\text{Ker } \mathcal{A} \oplus W = V \implies \dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что W и $\text{Im } \mathcal{A}$ - изоморфны

$$\mathcal{A} : W \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} : \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow 0$$

Докажем, что \mathcal{A} действует из W в $\text{Im } \mathcal{A}$ взаимно-однозначно

□ \mathcal{A} невз.-однозн., тогда $\exists x_1, x_2 \in W (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in \text{Im } \mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \stackrel{\text{обозн.}}{=} x \in \text{Ker } \mathcal{A}$, но $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$

Но для прямой суммы $W \cup \text{Ker } \mathcal{A} = 0, x \in W \cup \text{Ker } \mathcal{A} \implies$ предположение неверно

$\implies \mathcal{A}$ - лин. вз.-однозн. $\implies \dim W = \dim \text{Im } \mathcal{A}$

$V = W_1 \oplus W_2$ найдется ЛО $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$W_1 = \text{Ker } \mathcal{A}, W_2 = \text{Im } \mathcal{A}$$

Def. Рангом оператора \mathcal{A} называется $\dim \text{Im } \mathcal{A}$: $\text{rang } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } \mathcal{A} (= r(\mathcal{A}) = \text{rank } \mathcal{A})$

Nota. Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$$

A - матрица $\mathcal{A}, x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$

$$\mathcal{A}x = y \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e'_i$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T$ - это матрица $(e_1 \dots e_n) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$

Nota. Поиск матрицы \mathcal{A} можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. позже)

Тогда $\text{Ker } \mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему

$AX = 0$ ($\dim K = m = \dim \text{ФСР} = n - \text{rang } A$) и при этом $\dim K = n - \dim \text{Im } \mathcal{A}$

$\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A = \dim \text{Im } \mathcal{A}$

Следствия (без док-в)

1) $\text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \text{rang}(\mathcal{A})$ (или $\text{rang } \mathcal{B}$)

2) $\text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq \text{rang}(\mathcal{A}) + \text{rang}(\mathcal{B}) - \dim V$

Nota. Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \rightarrow V^n$ (переход из системы $Ox_i \rightarrow Ox'_i, i = 1..n$)

$\dim \text{Im } T = n, \dim \text{Ker } T = 0 \implies T$ - вз.-однозн.

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e \rightarrow e'}$

2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

Th. $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

$\{e_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e$ и $\{e'_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства V

$\mathcal{T} : V^n \rightarrow V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e'_i$

$\square A, A'$ - матрицы \mathcal{A} в базисах e и e'

Тогда $A' = TAT^{-1}$ ($A'_{e'} = T_{e \rightarrow e'} A T_{e \rightarrow e'}^{-1}$)

$\square \square y = \mathcal{A}x$, где x, y - векторы в базисе e ($x_e = x'_e$ - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$, где x', y' - векторы в базисе e'

$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$

$y = Ax, y' = A'x'$, тогда $Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$

$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$

$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$

$A = T^{-1}A'T \implies A' = TAT^{-1}$