Nota. $Ker\ \mathcal{A}$ и $Im\ \mathcal{A}$ - подпространства V $(\mathcal{A}: V \to V)$

Вообще-то $Ker\ \mathcal{A} \subset V, Im\ \mathcal{A} \subset W$ $(\mathcal{A}: V \to W)$

$\dim W \leq \dim V$, тогда можно считать, что $W \subset V'$ и рассмотрим $\mathcal{A}: V \to V'$ (где V' изоморфен V)

$Ker\mathcal{A}$ - подпространство, то есть $Ker\mathcal{A} \subset V$ и $\Sigma c_i x_i \subset \mathcal{A}$, если $\forall x_i \in Ker\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(\Sigma c_i x_i) = \Sigma c_i \mathcal{A} x_i \overset{x_i \in \mathcal{A}}{=} \Sigma c_i 0 = 0$

Следствие: $Ker\mathcal{A} = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

$\square$ От противного:

$\sqsupset \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V(x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \in Ker\mathcal{A}$ - противоречие

Nota. Обратное также верно:

$\mathcal{A}$ - вз.-однозн. $\Longleftrightarrow y_1 = y_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$, так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 = 0$

Тогда 0 является образом только 0-вектора $\Longrightarrow Ker\mathcal{A} = 0$

Nota. Также очевидно, что

$Ker\mathcal{A} = 0 \Longleftrightarrow Im\mathcal{A} = V$

$Ker\mathcal{A} = V \Longrightarrow Im\mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A} = 0$

Th. $\mathcal{A}: V \to V$, тогда $\dim Ker\mathcal{A} + \dim Im\mathcal{A} = \dim V$

$\square$ Так как $Ker\mathcal{A}$ - подпространство V, то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса V: $e_1^k, \dots e_m^k, e_{m+1}^k, \dots e_n^k$)

Обозначим дополнение W, тогда $Ker\mathcal{A} \oplus W = V \Longrightarrow \dim Ker\mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что W и $Im\mathcal{A}$ - изоморфны

$\mathcal{A}: W \to Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}: Ker\mathcal{A} \to 0$

Докажем, что $\mathcal{A}$ действует из W в $Im\mathcal{A}$ взаимно-однозначно

$\sqsupset \mathcal{A}$ невз.-однозн., тогда $\exists x_1, x_2 \in W(x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \overset{\text{обозн.}}{=} x \in Ker\mathcal{A}$, но $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$

Но для прямой суммы $W \cup Ker\mathcal{A} = 0, x \ni W \cup Ker\mathcal{A} \Longrightarrow$ предположение неверно

$\Longrightarrow \mathcal{A}$ - лин. вз.-однозн. $\Longrightarrow \dim W = \dim Im\mathcal{A}$

$V = W_1 \oplus W_2$ найдется ЛО $\mathcal{A}: V \to V$

$W_1 = Ker\mathcal{A}, W_2 = Im\mathcal{A}$

Def. Рангом оператора $\mathcal{A}$ называется $\dim Im\mathcal{A}$: $rang\mathcal{A} \overset{def}{=} \dim Im\mathcal{A} (= r(\mathcal{A}) = rank\mathcal{A})$

Nota. Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A}: V^n \to W^m$

A - матрица $\mathcal{A}, x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$

$$\mathcal{A}x = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e_i'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T$ - это матрица $\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$

Nota. Поиск матрицы $\mathcal{A}$ можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. позже)

Тогда $Ker\mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему

$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \text{ФСР} = n - rangA)$ и при этом $\dim K = n - \dim Im\mathcal{A}$

$rang\mathcal{A} = rangA = \dim Im\mathcal{A}$

Следствия (без док-в)

1) $rang(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq rang(\mathcal{A})$ (или $rang\mathcal{B}$)

2) $rang(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq rang(\mathcal{A}) + rang(\mathcal{B}) - \dim V$

Nota. Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \to V^n$ (переход из системы $Ox_i \to Ox'_i$, $i = 1..n$)

$\dim ImT = n, \dim KerT = 0 \Longrightarrow T$ - вз.-однозн.

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e \to e'}$

2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

Th. $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

$\{e_i\} \overset{\text{об}}{=} e$ и $\{e'_i\} \overset{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства V

$\mathcal{T} : V^n \to V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e'_i$

$\sqsupset A, A'$ - матрицы $\mathcal{A}$ в базисах e и e'

Тогда $A' = TAT^{-1}$ $(A'_{e'} = T_{e \to e'} A T^{-1}_{e \to e'})$

$\square \sqsupset y = \mathcal{A}x$, где x, y - векторы в базисе e ($x_e = x'_{e'}$ - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$, где x', y' - векторы в базисе e'

$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$

$y = Ax$, $y' = A'x'$, тогда $Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdots T^{-1}$

$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$

$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$

$A = T^{-1}A'T \Longrightarrow A' = TAT^{-1}$