

## Содержание

<b>§1. Ряды</b>	<b>2</b>
1. Числовые ряды. Определения . . . . .	2
2. Свойства числовых рядов . . . . .	4
3. Условия сходимости рядов . . . . .	6
3.1. Необходимое . . . . .	6
3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия) . . . . .	6
3.3. Достаточное условие (признаки сходимости) . . . . .	7
4. Знакопередающие ряды . . . . .	12
<b>§2. Функциональные ряды</b>	<b>15</b>
1. Определения . . . . .	15

## §1. Ряды

### 1. Числовые ряды. Определения

*Mem.* Числовая последовательность:  $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$

*Ex. 1.* Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:  $u_n = bq^n$ ,  $\frac{1}{2^n} \stackrel{n=0,1,\dots}{=} \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$

*Ex. 2.*  $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

**Def.**  $\{u_n\}$  - последовательность

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  называется числовым рядом

*Nota.* Начальное значение  $n$  произвольно (целое)

*Ex.*  $u_n = \frac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$

$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$

*Nota.*  $u_n$  называется общим членом ряда

*Nota.* Существует ли сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и в каком смысле?

*Ex. 3.*  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$  - существует, но бесконечная

*Ex. 4.*  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{cases} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{cases}$

*Ex. 5.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

**Def.** Частичная сумма ряда  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n u_k$

*Nota.* Последовательность частичных сумм -  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

*Ex.*  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \frac{3}{2} \quad S_3 = \frac{7}{4} \quad S_4 = \frac{15}{8}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$ , но проблема заключается в том, что бы найти формулу для  $S_n$

**Def.** Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называют сходящимся, а  $S$  называют суммой ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

*Nota.* В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный):  $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^n bq^k = b(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Исследуем предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ :

$$|q| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1}) = \frac{b}{1 - q}$$

$$|q| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty (q^n \rightarrow \infty)$$

$$|q| = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b \frac{0}{0} ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$$

$$q = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} b(-1)^n - \text{расходится (из четвертого примера)}$$

Lab. Доказать при  $q = -1$  по def ( $S_n = ?$ )

## 2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

**Th. 1.** Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \text{ одновременно сходятся или расходятся}$$

□

$$S_n^u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$

$$S_n^v = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \quad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$$

$$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v$$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

**Th. 2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда  $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

**Th. 3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$  - сходится

□ По свойству пределов  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm \sigma$  □

*Nota.* Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

*Ex.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ , но:  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , а  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  расходятся

*Nota.* Докажем расходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

*Ex.* Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как  $u_n \geq v_n$ , то  $S_n \geq \sigma_n$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \rightarrow \infty \implies S_n \rightarrow \infty$$

**Th. 4.** Если ряд сходится к числу  $S$ , то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна  $S$

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = S$ , где  $S_n^{(k)}$  - подпоследовательность  $S_n$

□

$$Ex. \text{ Было } \sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \text{ так как ряд расходится}$$

*Nota.* В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2} S \quad ?!$$

*Nota.* Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

*Nota.* Сходящиеся ряды допускают умножение, но почленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

$$\text{Тогда } \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$$

### 3. Условия сходимости рядов

#### 3.1. Необходимое

$$\text{Th. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

□

*Nota.* Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

$$\text{Ex. } \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \neq 0$$

#### 3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

*Мет.* Критерий Коши для последовательности:  $\{x_n\}$  сходится  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid x_m - x_k \mid < \varepsilon$

$$\text{Th. (без док-ва)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid u_n + \dots + u_m \mid < \varepsilon$$
$$\mid S_m - S_k \mid < \varepsilon$$

*Nota.* Хвост ряда попадает в  $\varepsilon$ -трубу

*Nota.* Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличие от признаков

#### 3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Далее  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  - исследуемый ряд,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  - вспомогательный (уже исследован на сходимость),  
для простоты  $v_n, u_n > 0$  (для отрицательных доказывается аналогично)

**Th. 1.** Признак сравнения (в неравенствах)

- а)  $\exists 0 < u_n \leq v_n$ . Тогда  $\sum v_n$  сходится  $\implies \sum u_n$  сходится  
б)  $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$ . Тогда  $\sum v_n$  расходится  $\implies \sum u_n$  расходится

□

а) Строим частичные суммы:

$$\sum v_n \text{ сходится} \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

$S_n, \sigma_n$  возрастают и обе ограничены числом  $\sigma$

$$\text{Следовательно } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq \sigma$$

Аналогично пункт б)

□

**Th. 2.** Предельный признак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \begin{cases} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{cases}$$

□

По определению предела

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon \iff q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)v_n < u_n < (q + \varepsilon)v_n$$

а) Если  $\sum v_n$  сходится, то из правой части неравенства:  $0 < u_n < (q + \varepsilon)v_n$

По признаку сравнения  $\sum u_n$  также сходится

б) Если  $\sum v_n$  расходится, то из левой части неравенства:  $0 < (q - \varepsilon)v_n < u_n$

Тогда по пункту б) **Th. 1.**  $\sum u_n$  расходится

□

*Nota.* При  $q = 0$  можем говорить, что  $u_n$  - бесконечно малая высшего порядка, чем  $v_n$ , а значит, если ряд  $v_n$  сходится, то  $u_n$  сходится

$$Ex. 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится по признаку сравнения}$$

Ex. 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится}$$

Начиная с некоторого  $n_0$   $n! > 2^n$ . Тогда  $u_n < v_n$  при  $n > n_0$ , по признаку сравнения  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  сходится

Ex. 3.  $\sum_{n=1}^{\infty} 1_n$

*Nota.* Члены рядов  $u_n$  и  $v_n$  - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если  $u_n$  и  $v_n$  одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$$u_n = \arcsin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

**Th. 3.** Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{исследуемый, } \exists \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{а) } 0 \leq \mathcal{D} < 1 \implies \sum u_n \text{ сходится}$$

$$\text{б) } \mathcal{D} > 1 \implies \sum u_n \text{ расходится}$$

$$\text{в) } \mathcal{D} = 1 \implies \text{ничего не следует, требуется другое исследование}$$

□

$$\text{а) По определению предела } \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad 0 \leq \mathcal{D} < 1 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \frac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D} < \varepsilon \iff \mathcal{D} - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$$

Так как  $0 \leq \mathcal{D} < 1$ , можно втиснуть число  $r$  между  $\mathcal{D}$  и 1:  $\mathcal{D} < r < 1$

Положим  $\varepsilon = r - \mathcal{D}$ , то есть  $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$  для  $\forall n > n_0$ , где  $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon = r - \mathcal{D}$

$$u_{n_0+1} < r u_{n_0}$$

$$u_{n_0+2} < r u_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$$



$$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1} + u_{n_0} + \dots}_k = k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены  $v_m < r^l u_{n_0}$ ;  $u_{n_0}$  - фикс. число, а  $\sum_{l=1}^{\infty} r^l$  сходится как геометрический при  $|r| < 1$

Итак ряд  $\sum_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$  сходится и почленно превышает  $\sum v_m = (\sum u_n) - k$

То есть  $\sum u_n$  сходится

б) Lab. (взять  $r$  между  $\mathcal{D}$  и 1,  $1 < r < \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} - r = \varepsilon$ )

Сравнить  $\sum u_n$  с  $\sum r^l$  (расходящимся)

□

Ex. 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$      $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$  - сходится

Ex. 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$      $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  - расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$      $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$  - сходится

**Th. 4.** Радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad u_n \geq 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$$

а)  $0 \leq K < 1 \implies \sum u_n$  сходится

б)  $K > 1 \implies \sum u_n$  расходится

Nota.  $K = 1$  - ничего не следует

□

а) По определению предела  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \sqrt[n]{u_n} - K < \varepsilon$

$\iff k - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon$  Положим  $\varepsilon = r - K$ , где  $K < r < 1$

$\implies 0 \leq u_n < r^n$  - геом. ряд с  $|r| < 1$ , то есть  $\sum r^n$  сходится

б) Аналогично

□

Ex. 1.  $\sum_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$      $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}$$

Но  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-1} \neq 0$  - необходимое условие не выполняется

Ex. 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ,  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-1} < 1$  - сходится

#### Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует  $f(x) : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x)$  монотонно убывает,  $f(n) = u_n$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и

$\int_1^{\infty} f(x) dx$  одновременно сходятся или расходятся

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \\ \sum_{n=2}^b u_n &= u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x) dx < u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n \end{aligned}$$

Обозначим  $\sum_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}$ ,  $\sum_{n=2}^b u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x) dx < S_{b-1}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если  $\int$  сходится, то смотрим правую часть

Если  $\int$  расходится, то смотрим левую часть неравенства

□

## 4. Знакопередающие ряды

Def.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  ( $u_n > 0$ ) - знакопередающийся ряд

#### Th. Признак Лейбница

Если для знакопередающегося ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  верно, что  $u_n \rightarrow 0$  и  $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$ ,

то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  сходится

$$\square \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из  $u_1$  и получаем число гарантированно меньшее  $u_1$

По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность  $\square \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} \stackrel{0}{=} S \in \mathbb{R}$$

$\square$

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \implies \text{ряд сходится}$$

*Nota.* Оценка остатка ряда

Запишем ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k = S_n + P_n$  - остаток ряда

В доказательстве было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1} u_k| = u_k = u_{n+1}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \underbrace{\frac{1}{32} + \dots}_{R_4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

$$|R_4| < \frac{1}{32}$$

$$\text{Проверка: } -\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) - \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{256}\right) - \dots = -\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \underline{\text{Lab.}} \text{ досчитать и сравнить с } \frac{1}{32}$$

*Nota.* Оценка не работает в знакоположительных рядах

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$R_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$$

**Def.** Знакопеременный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , где  $u_n$  - любого знака и не все  $u_n$  одного знака

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

*Nota.* Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

**Th.** Абсолютная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится}$$

*Mem.* См. абсолютную сходимость в **несобственных интегралах**

□

По критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

По неравенству треугольника:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$$

□

*Nota.* Обратное неверно!

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ сходится}$$

$$\text{Но } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

**Def.** Если  $\sum u_n$  сходится, при том что  $\sum |u_n|$  сходится, он называется **абсолютно сходящимся**

**Def.** Если  $\sum u_n$  сходится, при том что  $\sum |u_n|$  расходится, он называется **условно сходящимся**

*Nota.* Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезненна и сохраняет сумму ряда

*Nota.* На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов

1) Признак сравнения:  $|u_n| < |v_n| : \sum |v_n| \text{ сходится} \implies \sum |u_n| \text{ сходится}$

2) Предельный признак:  $\lim \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3)  $D = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

4)  $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$

5)  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  сравнивается с  $\sum |u_n|$

## §2. Функциональные ряды

### 1. Определения

**Def.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , где  $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется функциональным

*Nota.* При фиксации переменной  $x$  ряд становится числовым

*Ex.*  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$  расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  сходится

Таким образом для  $|x| < 1$  ряд будет сходящимся, для  $|x| > 1$  расходящимся

**Def.** Множество значений  $x$ , при которых  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится, называется областью сходимости

**Def.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится при всех  $x$  из некоторого множества  $E$ , то сумма ряда - функция  $S(x)$

*Nota.* То есть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток:  $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ . Часто удобно исследовать  $R_n(x) \rightarrow 0$ . Также работает критерий Коши

**Th.** Критерий Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится в области  $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x) \mid < \varepsilon$   
 $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

*Nota.* Очень неприятно, что  $n_0$  зависит от  $\varepsilon$  и всякого  $x$

**Def.** Равномерная сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в области  $D \stackrel{def}{\iff}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n(x) \mid < \varepsilon$   
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

*Nota.* Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

**Th.** Признак Вейерштрасса

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  - числовой ряд такой, что  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum \alpha_n$  сходится,  $|u_n(x)| \leq \alpha_n \forall n$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходящийся

*Nota.* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  называется мажорирующим

□  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  сходится  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n^\alpha < \varepsilon$   
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Заменим на условие  $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$  (кр. Коши)

$$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \leq |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \leq \alpha_n + \dots + \alpha_m \leq \varepsilon$$

При этом номер  $n_0$  зависит только от  $\varepsilon$

□

*Nota.* Таким образом всякий мажорирующий ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

*Nota.* Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

*Ex.* Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$$

$$\text{При } x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$$

$$\text{При } x < 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$$

$$\text{При } x = 0 \quad S_n = 0$$