

Th. 1. о сдвиге:

Ряд Фурье не изменится, если $[-\pi, \pi]$ заменить на $[a; a + 2\pi]$

Докажем, что если $\varphi(t)$ - 2π -периодична, то $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) dt = \int_a^{a+2\pi} \varphi(t) dt$

У нас $f(x)$ с периодом $[-\pi, \pi]$, обозначим $x = t - 2\pi$ ($t = x + 2\pi$).

Рассмотрим $\int_b^a f(x) dx = \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t - 2\pi) dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(t) dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(x) dx$

Пусть $b = -\pi, c = a$, тогда $\int_b^c f(x) dx = \int_{-\pi}^a f(x) dx = \int_{-\pi+2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{\pi} f(x) dx$

$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

Th. 2. о растяжении:

$f(x)$ - $2l$ -периодична: ($T : [-l, l]$)

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$f(x)$ - $2l$ -периодична: ($T : [-l, l]$)

Обозначим $x = \frac{lt}{\pi}$ $t \Big|_{-\pi}^{\pi}$ $x \Big|_{-l}^l$

$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$ - 2π -периодична

Ряд Фурье для $\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cos ktdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ktdt = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \cos ktd\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx \end{aligned}$$

Аналогично b_k .

Ex. 1. $f(x) = x$ $x \in [-1, 1]$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l x \cos \frac{k\pi x}{d} dx = \int_{-1}^1 x \cos k\pi x dx = \frac{1}{k\pi} \left(x \sin k\pi x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sin k\pi x dx \right) = -\frac{1}{k\pi} \cdot 0 = 0$$

$$b_k = \int_{-1}^1 x \sin k\pi x dx = -\frac{1}{k\pi} \left(x \cos k\pi x \Big|_{-1}^1 - \int_0^1 \cos k\pi x dx \right) = -\frac{2}{k\pi} \left((-1)^k - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k\pi}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{k\pi} \sin k\pi x$$

4.2. Оценка коэффициентов Фурье

Nota. Вернемся к приближению $f(x)$ тригонометрическим многочленом $T_n(x)$. Ранее говорилось, что из всех многочленов типа $\sum_{m=0}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx$ минимально отстоящим будет многочлен Фурье, то есть с a_m и b_m , равными коэффициентам Фурье.

Зададим расстояние δ_n между $f(x)$ и многочленом $T_n(x)$ формулой

$$\delta_n^2 = \|f - T_n\|^2 = (f - T_n, f - T_n) = \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - T_n(x))^2 dx = \left[[a, b] = [-\pi, \pi] \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^n a_m \cos mx + b_m \sin mx \right)^2 dx$$

Далее, честно интегрируя, можно убедиться, что δ будет наименьшим, если a_m и b_m - коэффициенты Фурье

Преобразуем $\|f - f_0\|^2$:

$$\delta_n^2 = \left\| f - \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \left(f, \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m \right) + \left\| \sum_{m=0}^n (f, e_m) e_m \right\|^2 = \|f\|^2 - 2 \sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 +$$

$$\sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=0}^n (f, e_m)^2 - \text{квадраты коэффициентов разложения}$$

$$\text{Тогда } \delta_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (a_m^2 + b_m^2)$$

$$\text{Так как } \delta_n^2 \geq 0, \text{ то } \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^k (a_m^2 + b_m^2)$$

Так как $\sum_{m=1}^n$ растёт и ограничена, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty}$ сходится

$$\text{Можем записать: } \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \right] - \text{неравенство Бесселя}$$

Можем усилить неравенство, если доказать, что при $n \rightarrow \infty$ $\delta_n^2 \rightarrow 0$. В этом случае $f(x)$ раскладывается по полной системе функций $\{\cos mx, \sin mx\}$

Def. Система $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ называется полной, если $\forall f(x) \notin \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \quad \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = 0 \implies f(x) = 0$

$$\left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) \right] - \text{равенство Парсеваля}$$

$$\text{Заметим, что из оценки ранее } \|f\|^2 = \sum_{m=1}^n (f, e_m)^2 = \sum_{m=1}^n f_m^2$$

В ∞ -мерном пространстве $\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^2$ - «теорема Пифагора»

Nota. Эти утверждения верны для любых ортогональных систем функций, а не только для тригонометрических

4.3. Интеграл Фурье

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = I \in \mathbb{R}$

\exists ряд Фурье для $f(x)$ на $[-l, l]$ $\forall l > 0$, то есть

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi t}{l} dt \right) \cos \frac{m\pi x}{l} + \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{m\pi t}{l} dt \right) \sin \frac{m\pi x}{l} \right] = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \frac{m\pi}{l} (t-x) dt \end{aligned}$$

Исследуем при $l \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{I}{2l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

Обозначим $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \alpha_m = \frac{m\pi}{l}, \Delta\alpha_m = \frac{\pi}{l}$

$$\text{Рассмотрим } \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{m\pi(t-x)}{l} dt}_{\text{функция переменной } l} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_m(t-x) dt \right) \Delta\alpha_m$$

Рассмотрим переменную $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha_m = \alpha(m)$, $\Delta\alpha_m = \Delta\alpha$ - дифференциальное

Имеем аналог интегральной суммы $\sum_{m=1}^n \varphi(\alpha_m) \Delta\alpha_m, n \rightarrow \infty$

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha - \text{интеграл Фурье}$$

Nota. От дискретного спектра частот $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ перешли к непрерывному спектру α

$$\text{Nota. В точках разрыва } \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha$$

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos at \cos \alpha x + \sin at \sin \alpha x) dt \right) d\alpha = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \cos at \cos \alpha x dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin at \sin \alpha x dt \right) d\alpha \end{aligned}$$

Если $f(x)$ - четная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt = 2 \int_0^{+\infty} \dots; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin \alpha t dt = 0$

Если $f(x)$ - нечетная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt = 2 \int_0^{+\infty} \dots; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha t dt = 0$

Обозначим $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \alpha t dt \quad \Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \alpha t dt$

Тогда $f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x d\alpha}_{\text{косинус-преобразование Фурье}}, \quad f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha x d\alpha}_{\text{синус-преобразование Фурье}}$

Ex. $f(x) = e^{-\beta x}, \quad (\beta > 0, x \geq 0)$ Lab.
 $F(\alpha) = ? \quad \Phi(\alpha) = ? \quad e^{-\beta x} = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha$