

7. Комбинаторика

Базовые понятия:

- **Алфавит** (Alphabet) Σ (или X , *Ex.* $X = \{a, b, c\}$) - множество символов в нашей системе
- **Диапазон** (Range) $[n] = \{1, \dots, n\}$ - конечное множество последовательных натуральных чисел
- **Расстановка** (Ordered arrangement) - последовательность каких-либо элементов (тоже самое, что кортеж), *Ex.* $x = (a, b, c, d, b, b, c) \quad |x| = n$
 Расстановку можно представить как функцию $f: \underbrace{[n]}_{\text{domain}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{codomain}}$, которая по порядковому номеру выдает символ
 $\text{ran } f = \{c \in \Sigma \mid \exists i \in [n] : f(i) = c\}$
- **Перестановка** (Permutation) - $\pi: [n] \rightarrow \Sigma$, где $n = |\Sigma|$
 Расстановка π - биекция между $[n]$ и Σ

Ex. $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

Одна из задач комбинаторики - посчитать количество различных расстановок или перестановок при заданных n и Σ

- **k -перестановка** (k -permutation) - расстановка из k различных элементов из Σ

Ex. $\underbrace{[31475]}_{5\text{-perm из } \Sigma=[7]} = 5$

k -перестановка - инъекция $\pi: [k] \rightarrow \Sigma$ ($k \leq n = |\Sigma|$)

- $P(n, k)$ - множество всех k -перестановок алфавита $\Sigma = [n]$ (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и $[n]$)

$$P(n, k) = \{f \mid f: [k] \rightarrow [n]\}$$

Чаще интересует не само множество, а его размер, поэтому под обозначением $P(n, k)$ подразумевается $|P(n, k)|$

- $S_n = P_n = P(n, n)$ - множество всех перестановок. Также чаще всего нас будет интересовать не множество, а его размер

$|S_n| = n!$ - всего существует $n!$ перестановок

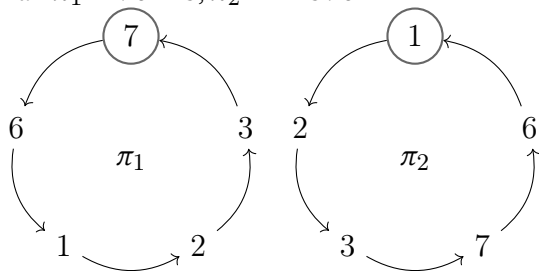
$$|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Циклические k -перестановки** (Circular k -permutations)

$\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$ - циклически эквивалентны тогда и только тогда:

$$\exists s \mid \forall i \pi_1((i+s) \% k) = \pi_2(i)$$

Ех. $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$



$P_C(n, k)$ - множество всех циклических k -перестановок в Σ

$$|P_C(n, k)| \cdot k = |P(n, k)|$$

$$|P_C(n, k)| = \frac{|P(n, k)|}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

- **Неупорядоченная расстановка k элементов** (Unordered arrangement of k elements) - мультимножество Σ^* размера k

Ех. $\Sigma^* = \{\Delta, \Delta, \square, \Delta, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \Delta, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$

Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:

$r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, $r(x)$ - кол-во повторений объекта x

- **k -сочетание** (k -combination) - неупорядоченная перестановка из k различных элементов из Σ (еще называют k -подмножеством, k -subset)

Соответственно $C(n, k)$ - множество всех таких k -сочетаний

$$|C(n, k)| = C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$C(n, k) = \binom{\Sigma}{k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot k! = |P(n, k)|$$

$$|C(n, k)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Th. Биномиальная теорема (Binomial theorem):

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ - биномиальный коэффициент

Th. Мультиномиальная теорема (Multinomial theorem)

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$ - мультиномиальный коэффициент