Nota. В строгом определении интегральная сумма строится так:

$\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ - элементарная дуга

Δl_i - длина элемента

Δs_i - длина стягивающей дуги

$\Delta l_i \approx \Delta s_i$

$M_{\text{ср.}}(\xi_i, \eta_i)$ - ср. точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути)

Вдоль пути $\overset{\smile}{AB}$ действует сила $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$

Найдем элементарную работу $dA = \overrightarrow{F}_{\text{ср.}} \overrightarrow{ds}$, где $\overrightarrow{ds}$ - элементарное приращение

$\overrightarrow{ds} = (dx, dy) = (\cos\alpha ds, \sin\alpha ds)$

$\overrightarrow{F}_{\text{ср.}}$ - значение силы на эл. участке в какой-либо его точке

Тогда. $dA = (P(x,y), Q(x,y)) \cdot (dx, dy) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$A = \displaystyle\int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx + Qdy$ - интеграл II рода (в проекциях)

Nota. В проекциях, потому что $F_x = P, F_y = Q$, таким образом скалярное произведение записано в проекциях

При этом часто рассматривают по отдельности

$\displaystyle\int_{AB} f(x,y)dx$ и $\displaystyle\int_{AB} g(x,y)dy$

Nota. Связь интегралов I и II рода

$\displaystyle\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P,Q)(dx,dy) = \int_L (P,Q)(\cos\alpha, \cos\beta)\underbrace{ds}_{\approx dl} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$

Обозначим $\overrightarrow{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$

По теореме Лагранжа $\exists(\xi, \eta) \in$ элементарной дуге, касательная которой параллельна ds

Тогда $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{\tau} ds \approx \overrightarrow{\tau} dl$, где $\overrightarrow{\tau}$ - единичный вектор, касательной в (ξ, η)

Тогда $\displaystyle\int_L Pdx + Qdy \overset{\text{пред. в вект. форме}}{=\!=} \int_L \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau} dl = \int_L \overrightarrow{F} \underbrace{\overrightarrow{dl}}_{\text{ориент. эл. дуги}}$

Свойства:

Nota. Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

Направление обхода.

I рода

$\displaystyle\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$

II рода

$\displaystyle\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$

Def. Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются

$\displaystyle\oint_K fdl$ и $\displaystyle\oint_K Pdx + Qdy.$

Если K (контур) обходят против ч. с., то обозн. $\oint_{K^+}$

Вычисление. (Сведение к $\int_a^b dx$ или $\int_\alpha^\beta dy$ или $\int_\tau^T dt$)

1) Параметризация дуги L:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C^1_{[\tau, T]}$$

$A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau))$

$B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T))$

При этом задании $L \quad y = y(x), x \in [a, b]$ или $x = x(y), y \in [\alpha, \beta]$ - частные случаи параметризации

2)

I рода

$$\int_L f(x,y)dl \overset{dl=\sqrt{\varphi_t'^2+\psi_t'^2}|dt|}{\equiv}$$

$$\int_\tau^T f(t)\sqrt{\varphi_t'^2+\psi_t'^2}|dt|$$

II рода

$$\int_{L=\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy \overset{dx=\varphi_t'dt, dy=\psi_t'}{\equiv}$$

$$\int_\tau^T f(t)(P\varphi' + Q\varphi,)dt|$$

Ex. Дуга L - отрезок прямой от $A(1,1)$ до $B(3,5)$

1) $$\int_{AB}(x+y)dl = \begin{bmatrix} AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \text{или} y = 2x-1, x \in [1,3] \\ f(x,y) = x + 2x - 1 = 3x - 1 \\ dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx \end{bmatrix} = \int_1^3 (3x-1)\sqrt{5}dx = \sqrt{5}(\frac{3x^2}{2} - x)\Big|_1^3 = \sqrt{5}(12-2) = 10\sqrt{5}$$

2) $$\int_{AB}(x+y)dx + (x+y)dy = \begin{bmatrix} x \uparrow_1^3, y \uparrow_1^5 \\ y = 2x-1, x = \frac{y+1}{2} \\ dx = dx, dy = dy \end{bmatrix} = \int_1^3 (x+2x-1)dx + \int_1^5 (\frac{y+1}{2} + y)dy = (\frac{3x^2}{2} - x)\Big|_1^3 + \frac{1}{2}(\frac{3y^2}{2} + y)\Big|_1^5 = 10 + 20 = 30$$

Th. Формула Грина

$D \subset R^2$ - прав. $\uparrow Ox, \uparrow Oy$

Γ_D - гладкая замкнутая кривая

В области D действует $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ - непрерывные дифференциалы

Тогда $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \int_{K^+} Pdx + Qdy$

$\square$ $$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}dx - \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy =$$

$$\int_\alpha^\beta (Q(x,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)})dy - \int_a^b (P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)})dx =$$

$$\int_\alpha^\beta (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y))dy - \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)))dx = \int_{NST} Qdy - \int_{NMT} Qdy - \int_{MTS} Pdx + \int_{MNS} Pdx = \underbrace{\int_{NST} Qdy + \int_{TMN} Qdy}_{\oint_{K^+} Qdy} + \underbrace{\int_{STM} Qdy + \int_{MNS} Qdy}_{\oint_{K^+} Pdx} = \oint_{K^+} Pdx + Qdy$$

$\square$