2) Несобственные интегралы

2.1 Определения

1* Интегралы на неограниченном промежутке

Геометрический смысл: пусть $f(x) : [a; +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) \in C_{[a;+\infty]}$

Тогда определенный интеграл имеет смысл - это площадь под графиком функции:

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

Имеет ли смысл площадь неограниченной фигуры под графиком функции?

Предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ может быть конечным или бесконечным

*Def.*1: Определим несобственный интеграл первого рода (на неограниченном промежутке) ($f(x)$ любого знака):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Nota: Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. В противном случае расходится

*Def.*2: Функция определена на полуинтервале $[-\infty; b]$ и непрерывна. Тогда определен:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$$

*Def.*3: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

Nota: Этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них (в том числе если возникает неопределенность $\infty - \infty$)

Ex: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Сделаем ее непрерывной

$S_1 = S_2$, но $I_1 = -I_2$. Суммарный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ должен быть равен нулю.

Но по определению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится

Чтобы учесть обнуление интеграла в ситуации взаимного погашения площадей S_1 и S_2 (а это происходит тогда, когда левый и правый концы промежутка синхронно стремятся к $+\infty$) используют понятие интеграла в смысле главного значения ($v.p.$ - от французского *valeur principale*):

$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\delta\to-\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$

Разложение по формуле Ньютона-Лейбница

***Ex.*1:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = arctgx\Big|_{-\infty}^{c=0} + arctgx\Big|_{c=0}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} arctgx - arctg(0) + arctg(0) - \lim_{x\to-\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

***Ex.*2:**

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{xlnx} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dlnx}{lnx} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t} = lnt\Big|_{0}^{+\infty} = lnlnx\Big|_{1}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} lnlnx - \lim_{x\to1} lnlnx = \infty - \infty$$

- расходится

Заметим нарушение непрерывности функции $\frac{1}{xlnx}$ в $x = 1$, что привело к $lnlnx \to -\infty$ при $x \to 1$

Это не интеграл первого рода, а комбинация интегралов первого и второго рода

2* Интеграл от неограниченной на отрезке функции:

$f(x) : [a;b) \to \mathbb{R}$, где b - точка разрыва второго рода, а именно бесконечного

*Def.*1: Интеграл второго рода (несобственный)

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\beta\to b} \int_{a}^{\beta} f(x)dx$$

Этот интеграл сходится, если предел существует и конечен

*Def.*2: Аналогично (a - точка бесконечного разрыва):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to a} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

*Def.*3 $c \in [a;b]$ - точка бесконечного разрыва:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

Сходится, если оба интеграла сходятся

***Ex.*1:**

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = ln|x|\Big|_{-1}^{0} + ln|x|\Big|_{0}^{1}$$

- интеграл расходится

Не заметили $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0$???

***Ex.2*:**

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{dx}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$$

- неверно

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{dx}{x}\Big|_{-1}^{0}+-\frac{dx}{x}\Big|_{0}^{1}$$

- расходится

Nota: Если нет разбиения $[a;b]$ по аддитивности, то неопределенности раскрываются

Ex: $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{2}(ln|x-1|-ln|x+1|)\Big|_{1}^{2}=$

$=\displaystyle\frac{1}{2}(ln|1-1|-ln|x+1|)\Big|_{1}^{2}=\infty$, т. к. разбивается отрезок

$=\displaystyle\frac{1}{2}(ln|\frac{x-1}{x+1})\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}(ln\frac{1}{3}-ln(0))=\infty$ - теперь точно ∞

2.1 Свойства

1) Линейность: $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int_{a}^{+\infty}f(x)dx+\mu\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ - если интегралы сходятся (иначе исследуем по определению через предел)

2) Аддитивность: $\displaystyle I=\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$ - отсечение любого конечного интеграла $\displaystyle\int_{a}^{c}f(x)dx$ не влияет на сходимость

3) Знаки интегралов:

$\displaystyle\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\geq\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ при $f(x)\leq g(x)$ и интегралы сходятся

В частности $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\geq 0$ при $f(x)\leq 0$ на $[a;+\infty]$

Nota: Исследование интегралов двух функций используется для определения их сходимости

2.3 Сходимость несобственных интегралов

Задача: Часто нужно исследовать интеграл на сходимость без или до его вычисления (обычно приближенного для неберущихся интегралов)

Требуются признаки сходимости интегралов, часто использующие сравнение с эталонными интегралами (вычисляемые по формуле Ньютона-Лейбница)

1* Признак сравнения в неравенствах (далее только для интегралов $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$, для остальных аналогично)

$f(x),g(x):[a;+\infty)\to\mathbb{R}^+$, непрерывны на $[a;+\infty)$ и $\forall x\in[a;+\infty)f(x)\leq g(x)$

Тогда, если $\displaystyle\int_{a}^{+\infty}g(x)dx=I\in\mathbb{R}$, то $\displaystyle J=\int_{a}^{+\infty}f(x)dx$ сходится, причем $\displaystyle 0\leq\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\leq\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$

Прежде чем использовать свойство ОИ и предельный переход в неравенства, нужно доказать, что интеграл $J = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ сходится

Т. к. $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$ монотонно возрастающая функция

При этом:

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \lim_{b\to+\infty}\int_a^b g(x)dx = I \in \mathbb{R}$$

То $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена и по признаку Вейерштрасса сходится

Можно использовать предельный переход

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \Big|\lim_{b\to+\infty}$$

$$0 \leq J \leq I$$

Nota: Можно аналогично сравнить функции отрицательного знака

Если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $g(x) \leq f(x) \leq 0$, то сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Интегралы от функций разных знаков этим методов не сравниваются

$f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; +\infty)$, но функции разных знаков, и нижняя площадь, т. е. $\int_a^b |f(x)|dx$, больше верхней

1* $f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; +\infty)$

$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится

□ Lab. (от противного)

Nota. Отметим, что если $f(x)$ не является убывающей к нулю, т. е. б. м. на $+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ разойдется

Таким образом, если сравнить б. м. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, то можно исследовать их интегралы на сходимость

2* Предельный признак сравнения

$f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $f(x), g(x) > 0$

$\exists \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}\{0\}$. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

□ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 | \forall x > \delta | \dfrac{f(x)}{g(x)} - k| < \varepsilon$

$-\varepsilon + k < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + k \quad \Big| * g(x) > 0$

$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\varepsilon + k)g(x)$

Т. к. $k > 0$ ($\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$) и ε - сколь угодно мало, то $k \pm \varepsilon$ - положительное и не близкое к нулю число

ОИ: $\int_a^b (k-\varepsilon)g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b (k+\varepsilon)g(x)dx$

$\lim\limits_{b\to+\infty}$: $(k-\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx < \int_a^{+\infty} f(x)dx < (k+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$

Если $I = \infty$ (но $k-\varepsilon \neq 0$), то по первому признаку (линейность) J расходится Если $I \in \mathbb{R}$ ($k+\varepsilon \neq \infty$), то по первому признаку (линейность) J сходится

3* Абсолютная сходимость

$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = J \in \mathbb{R}$

Nota: Обратное неверно

□ ОИ и модуль:

$$\int_a^b f(x)dx \le |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Очевидно, что $0 \le |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b |f(x)|dx = I$

$$-I \le \int_a^b f(x)dx \le I$$

$$0 \le \lim_{b\to\infty} |\int_a^b f(x)dx| = |\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx = I$$

Nota: Если $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $|\int_a^{+\infty} f(x)dx|$ расходится, то I называют условно сходящимся

Ex: $I = \int_a^{+\infty} \dfrac{sinx}{8x^2+3}dx$

$\int_a^{+\infty} |\dfrac{sinx}{8x^2+3}|dx = \int_a^{+\infty} \dfrac{|sinx|}{8x^2+3}dx$синус ограничен $\le \int_a^{+\infty} \dfrac{dx}{8x^2+3}dx = \dfrac{1}{k}arctg\dfrac{x}{k}\Big|_1^{+\infty} \in \mathbb{R}$

В качестве эталонных интегралов удобно использовать:

I рода: $\int_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^n}$

II рода: $\int_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^n}$

Lab. Исследовать на сходимость в зависимости от $n \in \mathbb{Z}(\mathbb{Q})$

3 Интегралы зависящие от параметра

Задача. *Ex* ($\alpha \neq 0$). $\int_0^1 cos\alpha x dx = \dfrac{1}{\alpha}\int_0^1 cos\alpha x d\alpha x = \dfrac{1}{\alpha}sin\alpha x\Big|_0^1 = \dfrac{sin\alpha}{\alpha} = \phi(\alpha)$

$J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ - интеграл, зависящий от параметра

$f(x,\alpha)$ непрерывна в $a \le x \le b$, $c \le \alpha \le d$ и существует непрерывная производная f'_α

Тогда на $[c;d]$ определена $J'_\alpha(\alpha) = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha dx$

Если последний интеграл берется лучше, чем исходный, то теорема полезна

$\square J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \frac{1}{\Delta\alpha}(\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx) == \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \frac{1}{\Delta\alpha}(\int_a^b (f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha))dx)$

По теореме Лагранжа о среднем $\exists \xi \in [\alpha; \alpha+\Delta\alpha]$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \int_a^b f(x,\xi)dx$

Т. к. f'_α непрерывна, то $f'_\alpha(x,\xi) = \lim\limits_{\xi\to\alpha} f'_\alpha(x,\xi) + \varepsilon = f'_\alpha(x,\alpha) + \varepsilon$

Таким образом $J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx + \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \int_a^b \varepsilon dx = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \int_a^b f'_\alpha(x,\xi)dx$