Th. $\mathcal{A} : V^n \to V^n, \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \implies \exists \{e_i\}_{i=1}^n, e_1$ - собственные вектора $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

$\square$ e_1 - собственный вектор $\mathcal{A}$

e_1 найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиального решение $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0 \overset{\mathcal{A}\text{ - самосопр.}}{\implies} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора e_1 строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве V_1 $\mathcal{A}$ действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$. Для e_2 строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, $V_3, V_4, V_5, \dots$, в котором, найдя e_i, ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из e_i, который можно нормировать

$\square$

Nota. Чтобы упорядочить построение базиса, в котором V_i может брать $\max \lambda_i$

Nota. Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализируется: Σ алг. крат. $= n$ (степень уравнения), а Σ геом. крат. $= \dim\{e_1, \dots, _n\} = n$

Разложение самосопряж. оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов $\mathcal{A}$ (ортонорм.)

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x, e_1)e_1 + \dots + (x, e_n)e_n = \sum\limits_{i=1}^n (x, e_i)e_i$

Def. Оператор $P_i x = (x, e_i)e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

Свойства:

1) $P_i^2 = P_i$ (более того $P_i^m = P_i$)
2) $P_i P_j = 0$
3) $P_i = P_i^* \quad ((P_i x, y) \overset{?}{=} (x, P_i y)) \iff (P_i x, y) = ((x, e_i)e_i, y) = (x, e_i)(e_i, y) = (x, (y, e_i)e_i) = (x, P_i y)$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов $\mathcal{A}$, то

$x = \sum\limits_{i=1}^n P_i x = \sum\limits_{i=1}^n (x, e_i)e_i$

$\mathcal{A}x \overset{y = \Sigma(y, e_i)e_i}{=} \sum\limits_{i=1}^n (\mathcal{A}x, e_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n (x, \mathcal{A}e_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n (x, \lambda_i e_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i)e_i = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i P_i x$

$\iff \mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i P_i$ - спектральное разложение $\mathcal{A}$, спектр $= \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_i \le \dots \le \lambda_n\}$

Ex.

$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1)e_1 + (y, e_2)e_2 = (\mathcal{A}x, e_1)e_1 + (\mathcal{A}x, e_2)e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$

2.9. Ортогональный оператор

Мет. Орт. оператор $T : V^n \to V^n \overset{def}{\iff} \forall$ о/н базиса матрица T - ортогональная $T^{-1} = T^T$

Nota. Иначе, T - ортогональный оператор $\iff T^{-1} = T^* \implies TT^* = I$

Def. T - ортог. оператор, если $(T_x, T_y) = (x, y)$
Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

Nota. Ранее в теореме об изменении матрицы A при преобразовании координат T - ортогональный оператор

Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (док-во теоремы позволяет)

Диагонализация самосопряженного оператора:

Дана матрица A_f

1) Находим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

2) Находим $e_1, \dots e_n$ - ортогональный базис собственных векторов

3) Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса

4) Находим $T_{e\to f} A_f T_{f\to e} = A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного $\mathcal{A}$ - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлением

3. Билинейные и квадратичные формы

3.1. Билинейные формы

Def. $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B}: V^n \to \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x,y)$) называется билинейной формой, если выполнены

1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x,z) + \mu \mathcal{B}(y,z)$
2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x,y) + \mu \mathcal{B}(x,z)$

Ex.
1) $\mathcal{B}(x,y) \overset{\text{в } E^n_{\mathbb{R}}}{=} (x,y)$
2) $\mathcal{B}(x,y) = P_y x$ - проектор x на y
Матрица Б.Ф.

Th. $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис V_n, $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u,v) = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$\square$ $\begin{matrix} u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n \\ v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \end{matrix}$ $\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(\sum\limits_{i=1}^n u_i e_i, \sum\limits_{j=1}^n v_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^n u_i \mathcal{B}(e_i, \sum\limits_{j=1}^n v_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^n u_i (\sum\limits_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)) \overset{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i,e_j)=b_{ij}}{=}$
$\sum\limits_{i=1}^n u_i \sum\limits_{j=1}^n v_j b_{ij} = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n u_i v_j b_{ij}$
$\square$

Nota. Составим матрицу из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

Def. Если
1) $\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(v,u)$, то $\mathcal{B}$ - симметричная
2) $\mathcal{B}(u,v) = -\mathcal{B}(v,u)$, то $\mathcal{B}$ - антисимметричная
3) $\mathcal{B}(u,v) = \overline{\mathcal{B}(v,u)}$, то $\mathcal{B}$ - кососимметричная (в C)

Def. $rang\mathcal{B}(u,v) \overset{def}{=} rang B$

Nota.
1) $\mathcal{B}$ называется невырожденной, если $rang\mathcal{B} = n$
2) $rang\mathcal{B}_e = rang\mathcal{B}_{e'}$ (e, e' - различные базисы V^n), то есть $rang\mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \to e'$

Ex. $\mathcal{B}(u,v) \overset{\text{ск. пр.}}{=} (u,v)$
$\begin{matrix} u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \\ v = v_1 e_1 + v_2 e_2 \end{matrix}$, тогда $\mathcal{B}(e_i, e_j) \overset{\text{об}}{==} b_{ij} = (e_i, e_j)$

Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

Ex. $\begin{matrix} u(t) = 1 + 3t \\ v(t) = 2 - t \end{matrix}$, $\{e_i\} = (1, t)$, $\mathcal{B}(u, v) = (u, v) = \displaystyle\int_{-1}^{1} uv dt$

Тогда, $B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{1} dt & \int_{-1}^{1} t dt \\ \int_{-1}^{1} t dt & \int_{-1}^{1} t^2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$