

Nota: Итак, в теоремах сказано

1* В любом заданном направлении \vec{s} производная $\frac{\partial u}{\partial s}|_M$ равна проекции градиента в M

2-3* В направлении $\vec{\nabla} u$ производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ наибольшая по модулю, а в направлении $\vec{s} \perp \vec{\nabla} u$
 $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$

4* Градиент \perp линиям уровня. Прямая, содержащая $\vec{\nabla} u$ (т. е. перпендикулярная касательной к l), называется нормалью к l а тогда $\vec{\nabla} u$ - вектор нормали

4.7.3 Касательная и нормаль к поверхности

Будем исследовать поверхность π с уравнением $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание)

Def. Прямая τ называется касательной прямой к поверхности π в точке $P(x, y, z)$, если эта прямая касается какой-либо кривой, лежащей на π и проходящей через P

Nota. Кривая получается (обычно) сечением π какой-либо плоскостью

Nota. В одной точке может быть множество касательных, но необязательно

Nota. Договоримся различать два типа точек поверхности: обыкновенные и особые

Def. Поверхность π задана $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Точка M называется обыкновенной, если существуют все $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, они непрерывны и не все равны нулю

Def. Точка M называется особой, если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ или хотя бы одна не существует

Th. Все касательные прямые к π в обыкновенной точке M_0 лежат в одной плоскости

$\square \vec{s}$ - направляющий вектор касательной τ , проведенной к кривой l в некоторой секущей плоскости

$d\vec{s}$ - вектор малых приращений, то есть $d\vec{s} = (dx, dy, dz)$

$d\vec{p}$ - проекция $d\vec{s}$ на Oxy , то есть $d\vec{p} = (dx, dy)$

Кривую l можно задать параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \xi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}$$

Прямая τ имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

При отходе от M_0 на малое расстояние по поверхности (точнее по кривой l) задаем приращение $dt \neq 0$

Домножим уравнение на dt

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}}$$

Из условия обыкновенности точки M_0 следует дифференцируемость функции F . Кроме того, уравнение можно преобразовать к виду $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, где $x(t), y(t), z(t)$ - тоже дифференцируемы в точке M_0

Запишем F'_t , как вложенную:

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Или $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) \cdot (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) = 0$

Таким образом, $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = 0$. То есть $\vec{N} \perp \frac{d\vec{s}}{dt}$, при том, что $d\vec{s}$ выбран произвольно (кривая l - кривая произвольного сечения)

Итак, вектор $\vec{N} \perp$ любой касательной τ к поверхности π в точке M_0 . Следовательно все касательные лежат в плоскости κ такой, что $\vec{N} \perp \kappa$

Def. Плоскость κ (содержащая все касательные прямые τ к π в точке M_0) называется касательной плоскостью к π в M_0

Def. Прямая в направлении \vec{N} через точку M_0 называется нормалью к π в M_0
 \vec{N} - вектор нормали к поверхности в точке

Уравнение (π) $F(x, y, z) = 0$, $\vec{N} = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi, \kappa, n$

Касательная плоскость (κ) $\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$

Нормаль (n) $\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Nota. Получим вектор нормали в случае явного задания π $z = z(x, y)$

Пересечем π в точке M_0 плоскостями $x = x_0, y = y_0$.

В сечении получим кривые с касательными векторами

Вектор нормали к π в M_0 $\vec{n} = \vec{m} \times \vec{p}$

Найдем \vec{m}, \vec{p}

В сечении $x = x_0$

картинка

Введем вектор $d\vec{p} \parallel \vec{p}$

$$d\vec{p} = (0, dy, \frac{\partial z}{\partial y} dy) = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}) dy$$

Аналогично найдем \vec{m} в сечении $y = y_0$

$$\vec{m} \parallel d\vec{m} = (dx, 0, \frac{\partial z}{\partial x} dx) = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}) dx$$

Так как модуль \vec{n} не важен, а только направление, то будем искать $\vec{n} = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}) \times (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \vec{i} \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \vec{j} \frac{\partial z}{\partial y} + \vec{k} = \\ &= \left(-\frac{\partial z}{\partial x}; -\frac{\partial z}{\partial y}; 1\right) \end{aligned}$$

Тогда уравнение κ :

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) = dz$$

Уравнение нормали n :
$$\frac{x - x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{1}$$

Nota. Последние уравнения можно получить проще, если свести уравнение $z = f(x, y)$ к уравнению $z - f(x, y) = F(x, y, z) = 0$

Lab. Вывести уравнение κ и n , пользуясь предыдущим замечанием

Nota. Если найти $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{m} = -(\vec{m} \times \vec{p})$, то получим также вектор нормали, но обращенный в противоположную сторону

Будем говорить, что \vec{n}^+ - положительный вектор нормали, если угол $\angle \gamma = \angle(\vec{n}^+, Oz) \in [0; \frac{\pi}{2})$

\vec{n}^- - отрицательный, если угол $\angle \gamma = \angle(\vec{n}^-, Oz) \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

Соответственно этому верхней стороной π называется та, к которой вектор нормали положительный

Нижней стороне соответствует \vec{n}^-

Если $\vec{n} \perp Oz$, то это боковая сторона

4.7.4 Экстремумы ФНП ($\Phi_2\Pi$)

Def. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = z(x, y)$, если $\forall M \in U_\delta(M_0) \quad z(M_0) \geq z(M)$ (для минимума $z(M_0) \leq z(M)$)

Nota. То же, что $z(M) - z(M_0) = z - z_0 = \Delta z \leq 0$ (max), $\Delta z \geq 0$ (min)

Mem. Для ФОП формулировали Н. условие экстремума (Ферма), из этого условия получали точки, подозрительные на экстремум : критические - $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ (для острого экстремума); стационарные - $\exists f'(x_0) = 0$ (частный случай критич.)

Далее при помощи достаточных условий (признаков) проверяем наличие экстремума в критических точках

Nota. Все термины переносятся на ФНП

Н. У. и Д. У аналогично

Th. Н. условие экстремума (гладкого):

$z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$; z_0 - точка гладкого экстремума, то есть $\exists \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в M_0 и $\forall M \in U_\delta(M_0) \quad z_0 \leq z(M)$ или $z_0 \geq z(M)$

Тогда
$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0 \end{cases}$$

□ Аналогично лемме Ферма в сечениях $x = x_0, y = y_0$

Для существования острого экстремума нужно рассмотреть не существования или бесконечность $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial z}{\partial y}$

Если же функция трижды дифференцируема исследования на характер экстремума можно проводить с помощью вторых производных

Th. Д. условие (гладкого) экстремума

Пусть $z = z(x, y)$ непрерывна в окрестности x_0 (критическая точка $\frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0, \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0$) вместе со своими первыми и вторыми производными (можно потребовать трижды дифференцируемость)

Тогда, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \stackrel{\text{обозн}}{=} A, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \stackrel{\text{обозн}}{=} B, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \stackrel{\text{обозн}}{=} C$, то

1. $AC - B^2 > 0, A > 0 \implies M_0$ - точка минимума
2. $AC - B^2 > 0, A < 0 \implies M_0$ - точка максимума
3. $AC - B^2 < 0$ в точке M_0 нет экстремума
4. $AC - B^2 = 0 \implies$ нельзя утверждать наличие или отсутствие экстремума в точке (требуется дополнительные исследования)

□ Функция z дважды дифференцируема, тогда ($z_0 = z(M_0)$)

$$\Delta z = z - z_0 = \frac{dz}{1!}|_{M_0} + \frac{d^2 z}{2!}|_{M_0} + o((\Delta \rho)^2) \quad \Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad dx = \Delta \rho \cos \alpha, \quad dy = \Delta \rho \sin \alpha$$

$$o((\Delta \rho)^2) = \lambda (\Delta \rho)^3$$

Заметим, что $dz|_{M_0} = 0$, так как M_0 - критическая

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2 = A(dx)^2 + 2B dx dy + C(dy)^2 = A(\Delta \rho)^2 \cos^2 \alpha + 2B(\Delta \rho)^2 \cos \alpha \sin \alpha + C(\Delta \rho)^2 \sin^2 \alpha$$

$$\text{Тогда } \Delta z = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 (A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha + 2\lambda \Delta \rho)$$

Далее рассмотрим отдельно случаи $A \neq 0$ и $A = 0$

$$A \neq 0: A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha = \frac{A^2 \cos^2 \alpha + 2AB \cos \alpha \sin \alpha + B^2 \sin^2 \alpha + (AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A} = \frac{(A \cos \alpha + B \sin \alpha)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A}$$

1) $\square AC - B^2 > 0 (A > 0)$: Числитель неотрицательный и не равен нулю (иначе $\sin \alpha = 0$, то тогда $A \cos \alpha \neq 0$)

Итак, числитель и знаменатель больше нуля. Обозначим всю дробь за $k^2 > 0$

$$\text{Вернемся к } \Delta z = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 (k^2 + 2\lambda \Delta \rho)$$

Устремим $\Delta \rho \rightarrow 0$, начиная с какого-то $\delta \forall M \in U_\delta(M_0) \quad k^2 + \lambda \Delta \rho > 0$

То есть $\Delta z > 0$ в $U_\delta(M_0) \implies M_0$ - точка минимума (локально в $U_\delta(M_0)$)

2) $\square AC - B^2 > 0 (A < 0)$, тогда $\Delta z = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 (-k^2 + 2\lambda \Delta \rho) < 0$ при достаточно малом $\Delta \rho$

3) $\square AC - B^2 < 0 (A > 0)$, тогда фиксируем направления $\alpha = 0 \implies \sin \alpha = 0$

$$\Delta z = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 (A + 2\lambda \Delta \rho) > 0$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{A}{B} \implies \frac{(AC - B^2) \sin^2 \alpha}{A} = -k^2, \Delta z = \frac{(\Delta \rho)^2}{2} (-k^2 + 2\lambda \Delta \rho) < 0$$

Вдоль разных путей $\alpha = 0$, $\text{tg } \alpha = -\frac{A}{B}$, разный знак $\Delta z \implies$ нет экстремума

Nota. Можно аналогично рассмотреть $A < 0$

4) $A = 0$, вернемся к выражению $\Delta z = \frac{1}{2} (\Delta \rho)^2 (\sin \alpha (2B \cos \alpha + C \sin \alpha) + 2\lambda \Delta \rho)$

Пусть α беск. мал, тогда $\sin \alpha \approx 0, C \sin \alpha \approx 0, 2B \cos \alpha \approx 2B$. Тогда знак $\sin \alpha \cdot 2B$ зависит от α
То есть Δz колеблется вместе с α по знаку \implies нет экстремума

Можно доказать при $A \neq 0$, например, выбрав $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$, что знак Δz зависит от α