

5. Интеграл ФНП

5.1. Общая схема интегрирования

Постановка задачи.

В некоторой области Ω (дуга кривой, участок поверхности, тело и т. д.) распределена или действует непрерывно некоторая функция скалярная g или векторная \vec{G} , то есть определены $g(M)$ или $\vec{G} \forall M \in \Omega$

Ех. Область Ω - дуга кривой $l: y = y(x)$

Скалярная функция $g(M)$ - плотность в точке M

Ех. Область Ω - трубка в \mathbb{R}^3

Векторная величина $\vec{G}(M)$ - скорость жидкой частицы, движущейся по трубке

Из всех векторов \vec{v} (для всех $M \in \Omega$) складывается «поле жидких скоростей»

Ех. Область Ω - кривая, по которой движется точка M под действием силы $\vec{G}(M)$

Задача интегрирования - найти суммарное содержание скалярной величины или действие векторной величины в области Ω

Схема Величины $g(M)$ и $\vec{G}(M)$, меняясь от точки к точке заменяются на квазипостоянные на малых (элементарных) участках $d\omega$

Так как $g(M)$ или $\vec{G}(M)$ должны быть непрерывны на Ω , то на малом участке $d\omega$ их изменение незначительно и значение функции можно считать почти постоянным, приняв за это значение какое-либо среднее $g_{\text{ср.}}(M), \vec{G}_{\text{ср.}}(M)$

Тогда элементарное содержание $g(M)$ в $d\omega$ будет отличаться от среднего содержания, то есть $g_{\text{ср.}}d\omega$ на б. м. большего порядка

Ех. Проиллюстрируем на примере $\int_a^b f(x)dx$

S - площадь по наибольшей границе, σ - площадь по наименьшей границе, $S_{\text{трап.}}$ - «истинная» площадь

Т. к. $f(x)$ непр. $\forall x \in [a, b]$, то $\Delta f \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$

Для простоты рассмотрим монотонно возрастающую $f(x)$

Хотим доказать, что $S - S_{\text{трап.}}$ - б. м. большего порядка, чем $S_{\text{трап.}}$ или S

$$0 \leq S - S_{\text{трап.}} \leq dx \Delta y$$

$$\text{Сравним } \frac{dx \Delta y}{S} = \frac{dx \Delta y}{dx f(x + \Delta x)} = \frac{\Delta y}{\text{огр.}} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

таким образом $S - S_{\text{трап.}} = o(S_{\text{трап.}})$

Смысл интеграла в случае векторной функции $\vec{G}(M)$

Будем интегрировать только скалярные выражения вида $\vec{G}(M) \cdot d\vec{\omega}$ - скал. произведение векторов, где $d\vec{\omega}$ - ориентированный элемент $d\omega$

Ех. Сила $\vec{F}(M)$ перемещает точку M вдоль плоской кривой l . При этом сила совершает работу по перемещению (работа A - скалярная величина)

Известна формула для $\vec{F} = \text{const}$ и перемещения \vec{s} по прямой: $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Разобьем дугу на элементы $dl \approx ds$ и ориентируем их (зададим направление перемещению ds)

$dl = ds + o(dl)$, $d\vec{s}$ - вектор элем. перемещения, как правило, ds направлен согласовано с Ox

Элемент работы $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F_x, F_y) \cdot (dx, dy) \stackrel{\text{обозн.}}{=} (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$ - скаляр. Вся работа равна $A = \int dA$

Nota. Ориентированный участок поверхности $d\vec{\sigma}$ - это размер участка $d\sigma$, умноженный на вектор нормали к участку \vec{n} , то есть $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma$

Итак. Схема интегрирования:

1* Дробление области Ω на элементы $d\omega$

2* Выбор постоянного значения функции на $d\omega$, то есть $g_{\text{ср.}}$ или $\vec{G}_{\text{ср.}}$

3* Составление подынтегрального выражения $g_{\text{ср.}} d\omega$ или $\vec{G}_{\text{ср.}} d\vec{\omega}$

4* «Суммирование» элементарных величин $\int g d\omega$ или $\int \vec{G} d\vec{\omega}$

5.2. Классификация интегралов

1* По размерности Ω

$n = 1$: * прямая (опред. интеграл \int_a^b) * кривая (криволинейный интеграл \int_A^B)

$n = 2$: * плоскость (двойной интеграл \iint_D) * поверхность, не криволинейная (поверхностный интеграл \iint_S)

$n = 3$: * пространство \mathbb{R}^3
(тройной \iiint_V или \iiint_T)

2* По виду функции

скалярная $g(M)$

векторная $\vec{G}(M)$

$n = 1$: определенный, криволинейный I рода криволин. II рода (интегралы в проекциях)

$n = 2$: двойной, поверхн. I рода поверхн. II рода

$n = 3$: тройной