§1. Ряды

1. Числовые ряды. Определения

Mem. Числовая последовательность: $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$
Ex. 1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $u_n = bq^n$, $\quad \frac{1}{2^n} \overset{n=0,1,\dots}{=} \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$
Ex. 2. $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

Def. $\{u_n\}$ - последовательность
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется числовым рядом
Nota. Начальное значение n произвольно (целое)

Ex. $u_n = \dfrac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$
$u_n = \dfrac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$
Nota. u_n называется общим членом ряда

Nota. Существует ли сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и в каком смысле?

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$ - существует, но бесконечная
Ex. 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \left[\begin{array}{l} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{array}\right.$
Ex. 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots = 2$

Def. Частичная сумма ряда $S_n \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$
Nota. Последовательность частичных сумм - $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

Ex. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dots$
$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \dfrac{3}{2} \quad S_3 = \dfrac{7}{4} \quad S_4 = \dfrac{15}{8}$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = ?$, но проблема заключается в том, что бы найти формулу для S_n

Def. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$
Nota. В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный): $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} bq^k = b(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = b\frac{1-q^n}{1-q}$$

Исследуем предел $\lim_{n\to\infty} S_n$:

$|q| < 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q} \lim_{n\to\infty} (1 - q^n) = \frac{b}{1-q}$

$|q| > 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty (q^n \to \infty)$

$|q| = 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} b\frac{0}{0}?$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$

$q = -1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} b(-1)^n$ - расходится (из четвертого примера)

Lab. Доказать при $q = -1$ по def ($S_n =$?)

2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

Th. 1. Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=k>1}^{\infty} u_n$ одновременно сходятся или расходятся

□

$S_n^u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$

$S_n^v = \sum\limits_{n=k}^{\infty} v_n \qquad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$

$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^u = \lim\limits_{n\to\infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim\limits_{n+\infty} S_n^v$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

Th. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

Th. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$ - сходится

□ По свойству пределов $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma$ □

Nota. Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad$ но: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся

Nota. Докажем расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Ex. Гармонический ряд (эталонный)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$

$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как $u_n \geq v_n$, то $S_n \geq \sigma_n$, тогда $\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \to \infty \Longrightarrow S_n \to \infty$

Th. 4. Если ряд сходится к числу S, то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна S

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{k\to\infty} S_n^{(k)} = S$, где $S_n^{(k)}$ - подпоследовательность S_n

□

Ex. Было $\sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \left[\begin{array}{l} 0, \\ 1, \end{array}\right.$ так как ряд расходится

Nota. В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$

$S = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2}S$?!

Nota. Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

Nota. Сходящиеся ряды допускают умножение, но непочленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$

Тогда $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$

3. Условия сходимости рядов

3.1. Необходимое

Th. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\square$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$

$\square$

Nota. Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+3)\sin\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3)\sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (2+\frac{3}{n}) = 2 \neq 0$

3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

Mem. Критерий Коши для последовательности:

$\{x_n\}$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \ \ |x_m - x_n| < \varepsilon$

Th. (без док-ва)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \ \ \underbrace{|u_{n+1} + \dots + u_m| < \varepsilon}_{|S_m - S_n| < \varepsilon}$

Nota. Хвост ряда попадает в ε-трубу

Nota. Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличии от признаков