

## 5.6. Поверхностные интегралы

1\* Поверхностные интегралы I рода (по участку поверхности)

Задача. Масса поверхности

$u = u(x, y, z)$  - плотность (физ. смысл)

Элементарная масса:  $dm = u_{\text{ср.}}(\xi, \eta, \zeta)d\sigma$ ,  $d\sigma$  - элемент поверхности

$$M = \iint_S dm = \iint_S u(x, y, z) - \text{пов. инт. I рода}$$

**Def.** 1) Дробление  $S$  на элементы  $\Delta\sigma_k$  коорд. плоскостями  $x = x_i, y = y_j$

2) Ср. точка  $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$

3) Инт. сумма  $v_n = \sum_{k=1}^n u(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta\sigma_k$

$$4) \iint_S u(x, y, z)d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta\sigma_k \rightarrow 0}} v_n$$

Свойства: Смена обхода поверхности  $S$  не меняет знака интеграла:  $\iint_{S^+} u d\sigma = \iint_{S^-} u d\sigma$

Вычисление

Мет. Вычисление  $\int_L f(x, y)dl$

1) Параметризация  $L \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

$$2) dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$$

$$3) f(x, y) = \tilde{f}(t)$$

$$\iint_L f(x, y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$$

Поверхностный

$$\iint_S u(x, y, z)d\sigma$$

1) Параметризация  $S$ : самая частая -  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  - пределы интегрирования

$$2) d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} |dxdy|, \text{ но т. к. в двойном интеграле договорились, что } dxdy > 0$$

(площадь), модуль можно не ставить (область  $D$  проходится в направлении против часовой стрелки)

$$3) u(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z(x, y)) = \tilde{u}(x, y)$$

$$\iint_S u(x, y, z)d\sigma = \iint_{D^+} \tilde{u}(x, y) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy$$

$$Ex. S: x^2 + y^2 = z^2, z = 0, z = 1$$

$$u(x, y, z) = z$$

$$\iint_S z d\sigma = \left[ \begin{array}{l} S: z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ D: \text{круг}, x^2 + y^2 = 1 \\ d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dxdy = \sqrt{2} dxdy \end{array} \right] = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} dxdy = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \underbrace{\rho}_{|j|} d\rho =$$

$$\sqrt{22\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

2\* II рода

Задача Поток

Будем говорить о потоке вектора  $\vec{F} = (P, Q, R)$  через площадку  $S$  в направлении нормали  $\vec{n}^+$  или  $\vec{n}^-$

Если задано поле жидких скоростей, то потоком называют количество жидкости, протекающей через  $S$  за время  $\Delta t$

В простой ситуации поток  $\Pi = FS(\vec{F} \perp S, \vec{F} = \text{const})$

В общем случае  $\vec{F}$  - переменная,  $S$  - искривленная и  $\angle \vec{F}, S \neq \frac{\pi}{2}$

Переходим к вычислению элементарного потока  $d\Pi$

$d\sigma$  - малый элемент поверхности (почти плоский)

В пределах  $d\sigma$   $\vec{F}$  меняется мало, за среднее берем  $\vec{F} = (P, Q, R)$ , где  $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R(x, y, z)$

Разберемся с наклоном: если площадка перпендикулярна, то  $d\Pi = Fd\sigma$ , но в нашем случае высота цилиндра равна  $\text{пр}_{\vec{n}} \vec{F} = (\vec{n}, \vec{F}) = F \cos \varphi$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор нормали,  $\varphi$  - угол между

нормалью и потоком,  $d\Pi = (\vec{F}, \vec{n})d\sigma = F_n d\sigma$

Пусть  $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , тогда  $d\Pi = (\vec{F}, (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma))d\sigma = (P \cos \alpha, Q \cos \beta, R \cos \gamma)d\sigma$

$$\text{Итак, } \Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} d\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} F_n d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (\vec{F}, \vec{n}) d\sigma = \iint_{S^{\vec{n}}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$$

Но, еще нет координатной записи подынтегрального выражения

Спроектируем  $d\sigma$  на координатные плоскости

Сначала разрежем поверхность  $S$  на элементы плоскостями  $x = \text{const}, y = \text{const}$  (уточним форму  $d\sigma$ ). Т. к.  $d\sigma$  мал, то можно считать его плоским параллелограммом

Тогда  $\cos \gamma d\sigma = \pm dx dy$  ( $\gamma$  - угол между нормалью и осью  $Oz$ )

Нашли последнее слагаемое  $\iint_{S^{\vec{n}}} R \cos \gamma d\sigma$  в исходном интеграле (I рода, т. к. по участку  $d\sigma$ )

Найдем  $\iint_{S^{\vec{n}}} Q \cos \beta d\sigma$ , разобьем поверхность на участки  $d\sigma$  плоскостями  $x = \text{const}, y = \text{const}$

Аналогично  $\cos \beta d\sigma = \pm dx dz$

Тогда в  $\iint_{S^{\vec{n}}} P \cos \alpha d\sigma$   $\cos \alpha d\sigma = \pm dy dz$

Окончательно, поток  $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} \pm P dy dz \pm Q dx dz \pm R dx dy = \iint_{S^{\vec{n}}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma$  - связь интегралов I и II рода

*Nota.* Формулу интеграла можно получить еще так:  $(\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \vec{F} \vec{n} d\sigma = \vec{F} d\vec{\sigma}$ , где  $d\vec{\sigma} = (\pm dy dz, \pm dx dz, \pm dx dy)$

**Def. Математическое.**

Определим  $I = \iint_{S^{\vec{n}}} f(x, y, z) dx dy$

$$I = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau = \max \Delta s_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k \quad (\Delta s_k = \Delta x \Delta y - \text{любого знака, согласованного с обходом})$$

Свойства: Меняет знак при смене обхода с  $\vec{n}^+$  на  $\vec{n}^-$

Вычисление

1) Параметризация  $S$  для  $\iint R dx dy$   $z = z(x, y)$ , для  $\iint Q dx dz$   $y = y(x, z)$ , для  $\iint P dy dz$   $x = x(y, z)$

Пределы интегрирования  $D_{xy} = \text{пр.}_{Oxy} S$  и т. д.

2)  $dx dy \rightarrow \pm dx dy$ , если обход  $D_{xy}$  в направлении против часовой стрелки

3)  $R(x, y, z) = \tilde{R}(x, y, z(x, y)), \dots$