Для линейной параметризации форма дифференциала сохраняется
$d^2z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z \overset{\text{инвариант}}{=} z_t^{(n)} dt^n$

Введем функцию: $z(x(t), y(t)) \overset{\text{обозн}}{=} \varphi(t)$ - $(n+1)$ раз дифференцируема (композиция $(n+1)$ дифференцируемых и линейных функций)

Заметим, что $x = x_0 + \Delta x t \overset{t_0=0}{=} x_0$, $y = y_0 + \Delta y t \overset{t_0=0}{=} y_0$

$$M \overset{t \to t_0 = 0}{\to} M_0$$

То есть $z(M_0) = z(x_0, y_0) = z(x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) = \varphi(0)$

Таким образом $\varphi(t)$ как функция одной переменной может быть разложена в окрестности $t_0 = 0$ по формуле Маклорена

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{d\varphi(0)}{1!}\Delta t + \cdots + \frac{d^n\varphi(0)}{n!}\Delta t^n + o((\Delta t)^n)$$

Вернемся к $z(x, y)$ $(\Delta t = t - t_0 = 1)$:

$$z(x, y) = z(M) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \frac{d^2z(M_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^nz(M_0)}{n!} + r_n(x, y)$$

где $r_n(x, y) = r_n(t) \overset{\text{Лагр.}}{=} \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}\Delta t = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}$

$r_n(x, y)$ должен быть б. м. по отношению к $(\Delta\rho)^n$, то есть $r_n(x, y) = o((\Delta\rho)^n)$

($r_n(t) \overset{n\to\infty}{\to}$, если $\varphi(t)$ нужное число раз дифференцируема $Rightarrow$ ограничена, $r_n(t)$ - огр. б. м.)

Nota: В дальнейшем для исследования $z(x, y)$ на экстремум достаточно разложения по формуле Тейлора до 2-ого порядка включительно. Покажем сходимость $r_n(x, y) \overset{(\Delta\rho)^n \to 0}{\to} 0$ на примере $r_2(x, y) = \frac{d^3z(M_{\text{сред.}})}{3!}$

$r_2(x, y) = \frac{1}{3!}(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y)^3 z = \frac{1}{3!}(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2\Delta y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}(\Delta y)^2\Delta x \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(\Delta y)^3)$

Вообще говоря, значения частных производных берутся в различных средних точках

$r_2(x, y) = \frac{1}{3!}(z_{xxx}(\mu_1)(\Delta x)^3 + 3z_{xxy}(\mu_2)(\Delta x)^2\Delta y + z_{xyy}(\mu_3)(\Delta y)^2\Delta x + 3z_{yyy}(\mu_4)(\Delta y)^3) = \Big|$ вынесем $(\Delta\rho)^3$

$= \frac{(\Delta\rho)^3}{3!}(\text{огран.} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta y)^2\Delta x}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta\rho)^3})$

$\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} = \frac{(\Delta x)^3}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}^3} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, то есть дробь и выражение выше ограничены

$\frac{r_2(x, y)}{(\Delta\rho)^2} = \frac{1}{3!}\frac{(\Delta\rho)^3 \cdot \text{огр.}}{(\Delta\rho)^2} = \frac{1}{3!}\Delta\rho \cdot \text{огр.} \overset{\Delta\rho \to 0}{\to} 0$

4.7 Геометрия ФНП

4.7.1 Линии и поверхности уровня

Положим $z = const$. В сечении плоскостью $z = c$ образуется кривая l с уравнением $\begin{cases} z = c \\ \varphi(x, y) = 0 \leftarrow \text{уравнение } l_{\text{проек}} \text{ на } Oxy \end{cases}$

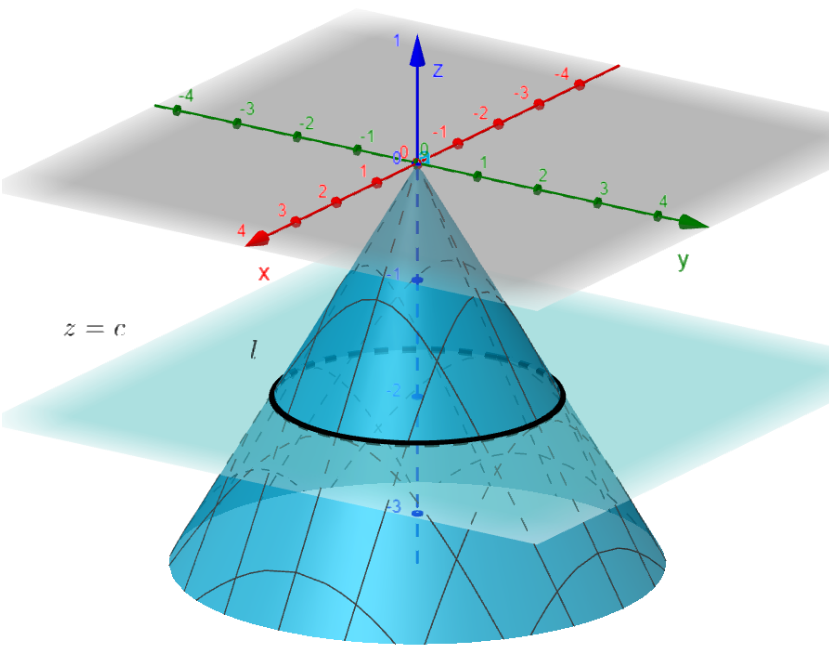
Кривая l с уравнением $z(x, y) = c$ называется линией уровня $\Phi_2\Pi$ $z = z(x, y)$

Def. Поверхность уровня $\mathcal{P}$ - это поверхность с уровнем $u(x, y, z) = c$

Физ. смысл: Пусть $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (значения функции $u(x, y, z)$ - скаляры). Тогда говорят, что в $\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле. Например, поле температур, давления, плотности и т. д.

Тогда $u = c$ - поверхности постоянных температур, давления и т. п. (изотермические, изобарные, эквипотенциальные)

Ex. Конус - $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$



Линии уровня $z = c$:

1. $c > 0 \quad \varnothing$
2. $c = 0 \quad x = y = 0-$ точка $(0, 0)$
3. $c < 0 \quad -|c| = -\sqrt{x^2 + y^2} \quad c^2 = x^2 + y^2$

4.7.2 Производная по направлению, Градиент

Задача. Дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ (напр. давления). Как меняется давление при перемещении в заданном направлении?

Это задача о нахождении скорости изменения $u(x, y, z)$ в заданном направлении $\overrightarrow{s}$

Из $M_0(x_0, y_0, z_0)$ движемся в $M(x, y, z)$ в направлении $\overrightarrow{s}$, $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\Delta s}$$

$$1 = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta s})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta s})^2 + (\frac{\Delta z}{\Delta s})^2}$$

$(\frac{\Delta x}{\Delta s}, \frac{\Delta y}{\Delta s}, \frac{\Delta z}{\Delta s}) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \overrightarrow{s^0}$
Потребуем, чтобы $u(x,y,z)$ имела непрерывность u_x, u_y, u_z в D
То есть $u(x,y,z)$ дифференцируема и
$\Delta u = du + o(\Delta s) = u_x\Delta x + u_y\Delta y + u_z\Delta x + o(\Delta s) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\Delta s}$
$\frac{\Delta u}{\Delta s} = u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma + \frac{o(\Delta s)}{\Delta s}$ - предельный переход
$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

Nota: Изначально $\Delta u = du + (\text{б. м.})\Delta x + (\text{б. м.})\Delta y + (\text{б. м.})\Delta z \quad \Big| \cdot \frac{1}{\Delta s}$
$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{du}{\Delta s} + (\text{б. м.})\cos\alpha,\ (\text{б. м.})\cos\alpha \to 0$

Def. $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$
где α, β, γ - направления $\overrightarrow{s}$, называют производной функции $u = u(x,y,z)$ в направлении $\overrightarrow{s}$

Nota. Производная в определении - число, но $\frac{\partial u}{\partial s}\overrightarrow{s^0}$ - вектор скорости

Nota. Заметим, что если $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ - декартовы орты, то
$\frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial u}{\partial x}1 + \frac{\partial u}{\partial y}0 + \frac{\partial u}{\partial z}0 = \frac{\partial u}{\partial x}$
и аналогично в других направлениях: $\frac{\partial u}{\partial j} = \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial k} = \frac{\partial u}{\partial z}$
Составим вектор $\frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k} \overset{\text{обозн}}{=} \overrightarrow{\nabla} u$
$\overrightarrow{\nabla}$ - набла-оператор (оператор Гамильтона); $\overrightarrow{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z})$ - условный вектор

Def. $\overrightarrow{grad}\ u \overset{def}{=} \overrightarrow{\nabla} u$ - называют градиентом функции $u(x,y,z)$

Свойства градиентов:

Th 1. $\frac{\partial u}{\partial s} = \text{пр.}_{\overrightarrow{s}}\overrightarrow{\nabla} u$

Th 2. $\overrightarrow{\nabla} u$ - направление наибольшего значения $\frac{\partial u}{\partial s}$

Th 3. $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{\nabla} u \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = 0$

Th 4. $u = u(x,y), u = c$ - линии уровня l. Тогда $\overrightarrow{\nabla} u \perp l$

Доказательства:

1. $\frac{\partial u}{\partial s} = (\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \overrightarrow{s^0} = \overrightarrow{\nabla} u\overrightarrow{s^0} = |\overrightarrow{\nabla} u||\overrightarrow{s^0}|\cos(\overrightarrow{\nabla} u, \overrightarrow{s^0}) = |\overrightarrow{\nabla} u|\cos(\overrightarrow{\nabla} u, \overrightarrow{s^0}) = \text{пр.}_{\overrightarrow{s}}\overrightarrow{\nabla} u$
2. $\frac{\partial u}{\partial s} = |\overrightarrow{\nabla} u|\cos\varphi \ldots$ <u>Lab</u>

3. Lab
4. $u = c$ - уравнение $l_{\text{пр}}$ в плоскости Oxy, то есть $u(x, y) = c$, можем рассмотреть как неявную функцию $u(x, y(x)) - c = 0$

   Производная неявной функции: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y} = k_l$ - угловой коэффициент касательной к l

   $\overrightarrow{\nabla} u = (u_x, u_y)$ $\quad \dfrac{u_y}{u_x} = k_{\text{град.}}$ - наклон вектора градиента. Очевидно $k_l \cdot k_{\text{град.}} = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} u \perp l$