

Функция распределения

Def. Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$
 $F(x)$ - вероятность попадания в этот интервал

$$\text{Ex. } \xi \in B_p \quad \begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array} \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1-p & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Свойства функции распределения

- 1) $F(x)$ ограничена $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2) $F(x)$ неубывающая функция: $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

$$x_1 < x_2 \implies \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \implies p(\xi < x_1) \leq p(\xi < x_2), \text{ то есть } F(x_1) \leq F(x_2)$$

- 3) $p(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$p(\xi < \beta) = p(\xi < \alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta) \implies F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta)$$

Nota. Функция распределения $F(x)$ - вероятность попадания в интервал $(-\infty; x)$. Так как Борелевская σ -алгебра порождается такими интервалами, то распределение полностью задается этой функцией

- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Так как $F(x)$ монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать эти пределы для некоторой последовательности $x_n \rightarrow \pm\infty$

$\square A_n = \{n-1 \leq \xi < n, n \in \mathbb{N}\}$ - несовместные события, так как $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, то по аксиоме счетной аддитивности, вероятность $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N p(n-1 \leq \xi < n) =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (F(n) - F(n-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) - \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 1$$

$$\implies \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1 + \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N)$$

Так как $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) \leq 1$ и $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) \geq 0$, то $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1$ и $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 0$

- 5) $F(x)$ непрерывна слева: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_0, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности $p(B_n) \rightarrow 0$

$$P(B_n) = F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow 0$$

$$F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow F(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

6) Скачок в точке x_0 равен вероятности попадания в данную точку: $F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$ или $F(x_0 + 0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \leq x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $C_n = \{x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности $p(C_n) \rightarrow 0$

$$P(C_n) = F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow 0$$

$$p(x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}) + p(\xi = x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

7) Если функция распределения непрерывна в точка $x = x_0$, то очевидно, что вероятность попадания в эту точка $p(\xi = x_0) = 0$ (следствие из 6 пункта)

8) Если $F(x)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$, то $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Th. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение тогда и только тогда, когда ее функция распределения имеет ступенчатый вид

Абсолютно непрерывное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует

$$f_{\xi}(x) \text{ такая, что } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad p(\xi \in B) = \int_B f_{\xi}(x) dx$$

Функция f_{ξ} называется плотностью распределения случайной величины

(в определении использует интеграл Лебега, так как B может быть не просто интервалом на \mathbb{R})

Свойства плотности и функции распределения абсолютно непрерывного распределения

1) Вероятностно-геометрический смысл плотности: $p(\alpha \leq \xi < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x) dx$

2) Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$

Из определения, если $B = \mathbb{R}$

3) $F_{\xi}(x) = \int_B f_{\xi}(x) dx$

Если $B = (-\infty; x)$, то $F_{\xi}(x) = p(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx$

4) $F_{\xi}(x)$ непрерывна

Из свойства непрерывности интеграла с верхним переменным пределом

5) $F_{\xi}(x)$ дифференцируема почти везде и $f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$ для почти всех x

По теореме Барроу

6) $f_{\xi}(x) \geq 0$ по определению и как производная неубывающей $F_{\xi}(x)$

7) $p(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ - так как $F_{\xi}(x)$ непрерывна

8) $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

9) **Th.** Если $f(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ (выполнены свойства 2 и 6), то $f(x)$ - плотность некоторого распределения

Числовые характеристики

Def. Математическим ожиданием $E\xi$ случайной абсолютно непрерывной величины ξ называется величина $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$ при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx < \infty$

Def. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется величина $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_{\xi}(x) dx$ при условии, что данный интеграл сходится

Nota. Вычислять удобно по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - (E\xi)^2$

Def. Среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$ определяется, как корень дисперсии. Смысл этих величин такой же, как и при дискретном распределении. Также свойства аналогичны тем, что и при дискретном распределении

Другие числовые характеристики

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx$ - момент k -ого порядка

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_{\xi}(x) dx$ - центральный момент k -ого порядка

Def. Медианой Me абсолютно непрерывной случайной величины ξ называется значение случайной величины ξ , такое что $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$

Def. Модой Mo случайной величины ξ называется точка локального максимума плотности

Сингулярное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет случайное распределение, если $\exists B$ - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега $\lambda(B) = 0$, такое что $p(\xi \in B) \in (0, 1]$, но $P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in B$

Nota. Такое Борелевское множество состоит из несчетного множества точек, так как в противном случае по аксиоме счетной аддитивности $p(\xi \in B) = 0$. То есть при сингулярном распределении случайная величина ξ распределена на несчетном множестве меры 0

Nota. Так как $p(\xi = x) = 0 \quad \forall x$, F_{ξ} непрерывна.

Ex. Сингулярное распределение получим, если возьмем случайную величину, функция распределения которой

- лестница Кантора

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}F(3x) & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x - 2) & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



Th. Лебега.

$\sqsupset F_{\xi}(x)$ - функция распределения ξ . Тогда $F_{\xi}(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

F_1 - функция дискретного распределения

F_2 - функция абсолютно непрерывного распределения

F_3 - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси