Теорема: $J'_\alpha = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx)$

Ex.
$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx \; I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}\right)'_\alpha dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1}{x}x\cos\alpha x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\alpha x dx = \frac{1}{a+\alpha^2}$
Из этого следует, что $I(\alpha) = \int_{+\infty} {}_0\frac{1}{a+\alpha^2}dx = arctg(\alpha) + C$
Так как $I(\alpha)$ - несобственный интеграл, это функция, а не семейство функций. Найдем C.
$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin 0 * x}{x}dx = 0 \Longrightarrow C = 0$ Таким образом, $I(\alpha) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right)'_\alpha = arctg(\alpha)$

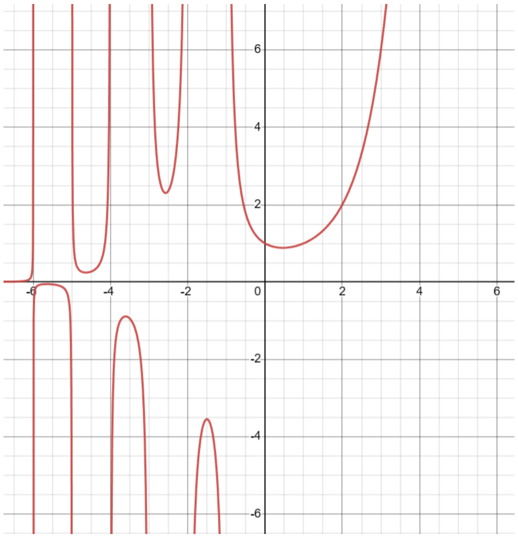
Ex. Гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha > 0)$$

Исследуем на сходимость:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}$$

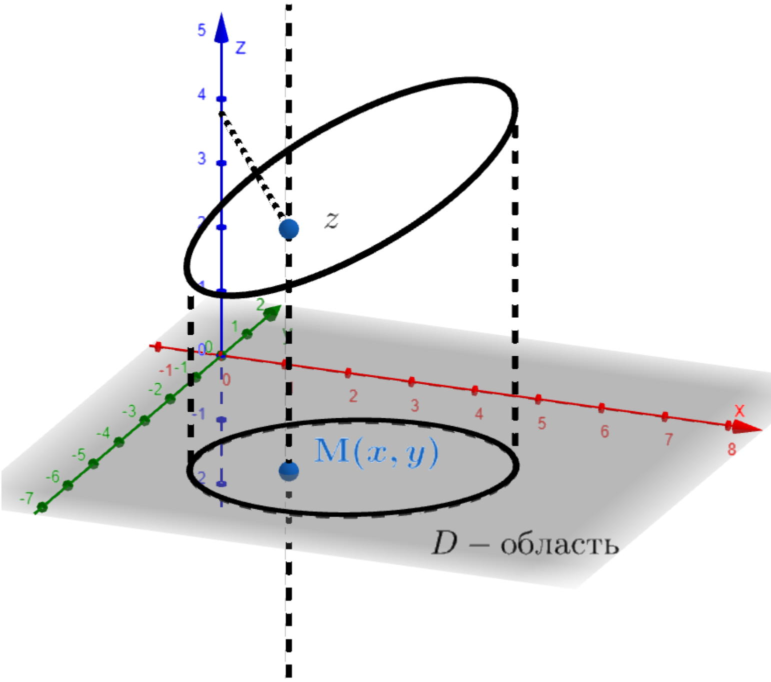
На отрезке $[0;1]$ $e^(-x) \in [0;1]$. Тогда $0 \le \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx \le \int_0^1 x^{\alpha-1}dx \Longrightarrow$ интеграл сходится
Пусть $n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}$, тогда:
$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \le \int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ - по частям, появятся $x^k e^{-x}\Big|_1^{+\infty} \to 0$ и $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится
Найдем формулу для $\Gamma(\alpha)$:
$\alpha \in \mathbb{N} \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$
$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}de^{-x} = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_1^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}(\alpha-1)e^{-x}dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)!\Gamma(1) = (\alpha-1)!$
$\Gamma(n+1) = n!$
Lab. Посмотреть, как обобщается понятие факториала на вещественные числа:


6
4
2
-6
-4
-2
0
2
4
6
-2
-4
-6

4. Функция нескольких переменных (ФНП)

4.1. Определение

Nota. Дадим определение ФНП



$\forall M(x,y) \exists! z \in \mathbb{R} : z = f(x,y) \Longleftrightarrow z = f(x,y)$ - функция двух переменных

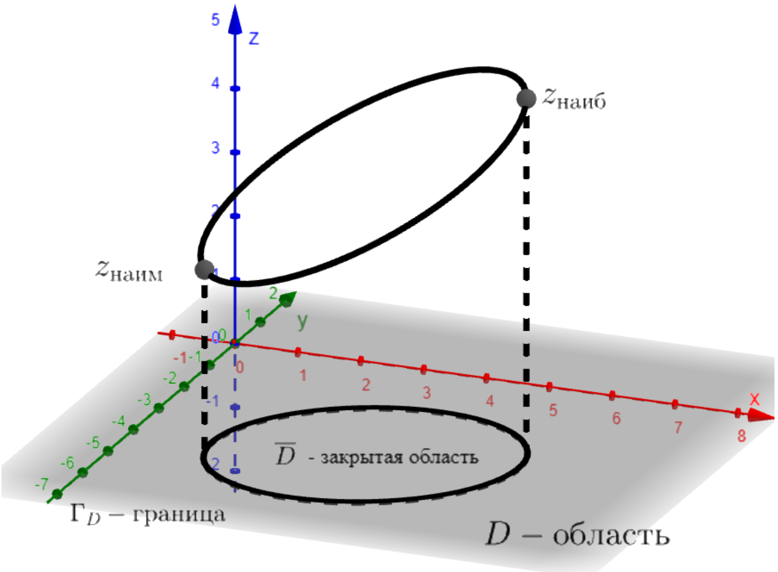
Def. Окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$
$U_\delta(M_0) = \{(x,y) \in Oxy : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0$ - радиус$\}$
$\overset{o}{U}_\delta(M_0)$ - выколотая

Nota. $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, одновременное стремление $\Delta x, \Delta y \to 0$ можно заменить $\Delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$

Def. $\lim\limits_{M \to M_0} z(x,y) = L \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \underset{\delta=\delta(\varepsilon)}{\exists \delta > 0} \mid \forall M \in \overset{o}{U}_\delta(M_0)\ \ |z(x,y) - L| < \varepsilon$
M_0 - точка сгущения и $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (здесь)

Nota. На плоскости Oxy возможно стремление $M \to M_0$ по разным путям $F(x,y) = 0$ (уравнение кривой)
При этом значение предела вдоль разных путей могут отличаться (аналог односторонних пределов)
Предел в определении - предел в общем смысле: его существование и значение не зависит от пути

Def. $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M(x_0, y_0)$, если $z = f(x_0, y_0) = \lim\limits_{M \to M_0} z(x, y)$
z непрерывна на D, если z непрерывна $\forall (x, y) \in D$



Nota. Справедливы теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши для функции, непрерывной в заданной области
$z = f(x, y)$ непрерывна на $\overline{D} = D \cup \Gamma_D$, где $\overline{D}$ - закрытая область, D - открытая область, Γ_D - граница

Th. W1. $z = f(x, y)$ ограничена на $\overline{D}$

Th. W2. $\exists$ наибольшее и наименьшее $z \in \overline{D}$

Th. B-C1. на границе Γ_D z принимает значения разных знаков $\Longrightarrow \exists M \in \overline{D} : z(M) = 0$

Th. B-C1. $z(x, y)$ принимает все значения от $z_{\text{наим}}$ до $z_{\text{наиб}}$

4.2. Производные функции двух переменных

Путям l_1, l_2 соответствуют кривые L_1, L_2 на поверхности $z = f(x, y)$.
Пользуясь геометрическим смыслом производной, заметим, что касательные к L_1, L_2 могут быть различными.
Поэтому для определения производной выберем координатные направления $x = const$ и $y = const$

$z = f(x = c, y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, где $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Определили частную производную z по y

Lab. Дать определение $\frac{\partial z}{\partial x}$

Nota. $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$ и $\Delta_y z$ называют частным приращением

Def. Полное приращение $\Delta z \overset{def}{=} z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Nota. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$!!!

Обозн.: $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = z_x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = z_y$

Как определить функцию, дифференцируемую в точке?

По аналогии $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R}$, α, β - б. м.