

## 5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

Проблема.  $S = \iint_D dx dy$

Если  $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$  - то это не площадь круга, а площадь прямоугольника  $S$  в распрямленных координатах

Введем  $\Delta s_i$  - площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а  $\Delta s'_i$  - площадь прямоугольника, причем  $\Delta s_i \neq \Delta s'_i$

*Nota.* Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы  $\Delta s_i \approx \text{коэфф.} \cdot \Delta s'_i$

Дроблению будем подвергать область  $D'$  в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты:  $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ , где функции  $\varphi(u, v), \psi(u, v)$  непре-

рывно дифференцируемы по обоим аргументам

Исходно область  $D$  в  $Oxy$

картинка

Заменим криволинейный параллелограмм на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади - малая более высокого порядка, чем площадь)

$$A(x_A, y_A) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

$$B(x_B, y_B) = (\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$$

$$C(x_C, y_C) = (\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v))$$

$$D(x_D, y_D) = (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$$

$$S_{ABCD} = |\vec{AB} \vec{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{vmatrix} = \left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right|$$

$$x_B - x_A = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v$$

$$y_B - y_A = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v$$

$$x_D - x_A = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u$$

$$y_D - y_A = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u$$

$$\left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta v \\ \Delta u \end{vmatrix} \right\| \xrightarrow{\Delta s' = |\det|} \Delta s \approx |J| \Delta s'$$

*Nota.* В пределе это точное равенство:

$$|J| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}$$

(легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа  $\Delta_u \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\xi, \eta) \Delta u \rightarrow$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \Delta u)$$

**Def.** Определитель  $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$ , где  $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$  - преобразование координат  $Ox_i \rightarrow O\xi_i (f_k \in C_D^1)$

называется определителем Якоби или якобиан

### Построение интеграла.

1. Дробление  $D'$  в распрямленной  $Ouv$
2. Выбор средней точки, поиск значения  $f(\xi_i, \eta_i)$   
Значение величины на элементе  $f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
3. Интегральная сумма  $\sigma_n = \sum f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
4. В пределе интеграл  $\iint_D f(x, y)dx dy = \iint_{D'} f(u, v)|J|dudv$

### Якобианы в ПСК, ЦСК, СфСК

1. ПСК:  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \\ y = \rho \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \end{cases}$   
 $J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$
2. ЦСК:  $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$
3. СфСК - Lab.

$$Ex. T: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$$

Конус в ЦСК:  $\rho = z, z > 0$  Параболоид в ЦСК:  $\rho = \sqrt{z}, z > 0$

$$V_T = \iiint_T dx dy dz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z \Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = 2\pi \left( \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\underline{Lab.} T: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{cases} - \text{мороженка, считать в СфСК}$$

## 5.5. Криволинейные интегралы

I рода. Область интегрирования - кривая  $l = \widetilde{AB}$  (дуга) (начнем с плоской дуги)

На  $l$  действует скалярная функция  $f(x, y)$  (физ. смысл - плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)

Задача в нахождении «суммарной» величины  $f(x, y)$ , то есть интеграла: «складываем» элементы  $f_{cp}(x, y)dl$

$$\text{Обозн. Получаем } \int_l f(x, y)dl = \int_{AB} f(x, y)dl$$