Def: Произведение операторов (композиция)
$\mathcal{AB}$ - произведение, $\mathcal{A}: V \to W;\ \mathcal{B}: U \to V$
$(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x); \quad x \in U$
Свойства: Lab доказать
1* $\lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$
2* $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC}+\mathcal{BC}$
3* $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB}+\mathcal{AC}$
4* $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$

Nota: Можно обобщить 4* на n равных $\mathcal{A}$

Def: $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}\cdot\mathcal{A}\dots\mathcal{A}$ - n раз, степень оператора
Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

2.3 Обратимость оператора

Def: $\mathcal{A}: V \to W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$ $\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \Longrightarrow y_1 \neq y_2$
Тогда $\mathcal{A}$ называется взаимно-однозначно действующим

Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

Th. $\{x_i\}$ - линейно независима $\xrightarrow{\mathcal{A}x=y}$ $\{y_i\}$ - линейно независима
В обратную сторону, если $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен
$\square \sqsupset \mathcal{A}: V \to W$ и $0_V, 0_W$ - нули V и W соответственно
1. $\mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}(\Sigma_{i=1}^k 0\cdot e_i) = \Sigma_{i=1}^k 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$
2. Докажем, что если $x_i \subset V$ - лин. нез., то $y_i \subset W$ - лин. нез.
   Составим $\Sigma_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0_W$ (От противного) $\sqsupset \{y_i\}$ - лин. зав., тогда $\exists \lambda_k \neq 0$
   При этом $\forall j \;\; y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. $\mathcal{A}$ - вз.-однозн., то $n' = m'$: кол-во x_i и y_i равно)
   $\Sigma^{m'}{}_{j=1}\lambda_j \mathcal{A}x_j \overset{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}(\Sigma^{m'}{}_{j=1}\lambda_j x_j) = 0_W$
   Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то 0_W - образ $x = 0_V$, но так как $\mathcal{A}$ - вз.-однозн., то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$
   Значит $\Sigma^{m'}{}_{j=1}\lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists\lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{x_j\}$ - лин. зав. - противоречие
3. $\sqsupset$ теперь $\{y_i\}$ - л. нез., а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - лин. зав.
   $\Sigma_{i=1}^{n'}\lambda_i x_i \overset{\exists\lambda_k\neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$
   $\Sigma_{i=1}^{n'}\lambda_i \mathcal{A}x_i = 0_W$
   При этом $\exists\lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{y_i\}$ - лин. зав. - противоречие

Следствие: $\dim V = \dim W \Longleftarrow \mathcal{A}$ - лин. изоморфизм

Def: $\mathcal{B}: W \to V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A}: V \to W$
если $\mathcal{BA} = \mathcal{AB} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)
Следствие: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x = x$

Th. $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists\mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$
$\square \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \Longrightarrow x = 0$

Th. Н. и Д. условия существования $\mathcal{A}^{-1}$
$\exists\mathcal{A}^{-1} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

$\square \Longrightarrow \exists\mathcal{A}^{-1}$, но $\sqsupset \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \overset{\exists\mathcal{A}^{-1}}{\Longrightarrow} x = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие

$\Longleftarrow$ Так как $\mathcal{A}$ - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists\mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязат. линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}' : W \to V$ - линейный оператор

? $\mathcal{A}'(\Sigma\lambda_i y_i) = \Sigma\lambda_i\mathcal{A}'y_i = \Sigma\lambda_i x_i$

$\mathcal{A}$ - вз.-однозн. $\Longleftrightarrow \forall x_i \longleftrightarrow y_i \quad \Big| \cdot \lambda_i, \Sigma$

$\mathcal{A}(\Sigma\lambda_i x_i) = \mathcal{A}x = y = \Sigma\lambda_i y_i$ и y имеет только один прообраз x

Применим $\mathcal{A}'$ к $y = \Sigma\lambda_i y_i$ $\mathcal{A}'y = x = \Sigma\lambda_i x_i$ - единственный прообраз y

Таким образом, $\mathcal{A}'$ переводит лин. комбинацию в такую же лин. комбинацию прообразов, то есть $\mathcal{A}'$ - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

2.4 Матрица ЛО

$\mathcal{A} : V^n \to W^m$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\Sigma_{j=1}^n c_j e_j) = \Sigma_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j$

$\mathcal{A}e_j \overset{\text{образ базисного вектора}}{=} y_j \overset{\{f_i\}-\text{ базис } W^m}{=} \Sigma_{i=1}^m a_{ij} f_i$

$\mathcal{A}x = \Sigma_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j = \Sigma_{j=1}^n c_j \Sigma_{i=1}^m a_{ij} f_i = \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{i=1}^m c_j a_{ij} f_i = \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n c_j a_{ij} f_i$

Иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Def: Матрица $A = {a_{ij}}_{i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства V^n

Вопросы:

1) $\forall ?\mathcal{A}\ \exists A$
2) $\forall ?A\ \exists\mathcal{A}$
3) если $\exists A$ для $\mathcal{A}$, то единственная?
4) если $\exists\mathcal{A}$ для A, то единственная?

Ответы:

1) При выбранном базисе $\{e_j\}$ $\forall\mathcal{A}\ \exists A$ (алгоритм выше)
3) такая A единственная $\Longrightarrow$ в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A}$ $A_e \neq A_{e'}$
2) $\forall A_{m\times n}$ можно взять пару ЛП V^n, W^m и определить $\mathcal{A} : V^n \to W_n$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$
4) Lab

Nota: Далее будем решать две задачи

1) преобразование координат как действие оператора
2) поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

2.5 Ядро и образ оператора

Def: Ядро оператора - $Ker\mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

Def: Образ оператора - $Im\mathcal{A} \overset{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

$Nota$: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - подпространства