

Def. Произведение операторов (композиция)

\mathcal{AB} - произведение, $\mathcal{A} : V \rightarrow W$; $\mathcal{B} : U \rightarrow V$

$(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$; $x \in U$

Свойства: Lab доказать

1* $\lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$

2* $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$

3* $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$

4* $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$

Nota. Можно обобщить 4* на n равных \mathcal{A}

Def. $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \dots \mathcal{A}$ - n раз, степень оператора

Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

2.3. Обратимость оператора

Def: $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V) \quad \begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$

Тогда \mathcal{A} называется взаимно-однозначно действующим

Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

Th. $\{x_i\}$ - линейно независима $\xrightarrow{\mathcal{A}x=y} \{y_i\}$ - линейно независима

В обратную сторону, если \mathcal{A} - взаимно-однозначен

$\square \square \mathcal{A} : V \rightarrow W$ и $0_V, 0_W$ - нули V и W соответственно

1. $\mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^k 0 \cdot e_i) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$

2. Докажем, что если $x_i \in V$ - лин. нез., то $y_i \in W$ - лин. нез.

Составим $\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0_W$ (От противного) $\square \{y_i\}$ - лин. зав., тогда $\exists \lambda_k \neq 0$

При этом $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. \mathcal{A} - вз.-однозн., то $n' = m'$: кол-во x_i и y_i равно)

$$\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A}x_j \stackrel{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}(\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j) = 0_W$$

Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то 0_W - образ $x = 0_V$, но так как \mathcal{A} - вз.-однозн., то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит $\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{x_j\}$ - лин. зав. - противоречие

3. \square теперь $\{y_i\}$ - л. нез., а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - лин. зав.

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \stackrel{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Bigg| \mathcal{A}$$

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A}x_i = 0_W$$

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{y_i\}$ - лин. зав. - противоречие

Следствие: $\dim V = \dim W \iff \mathcal{A}$ - лин. изоморфизм

Def: $\mathcal{B} : W \rightarrow V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \rightarrow W$

если $\mathcal{BA} = \mathcal{AB} = I$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

Следствие: $\mathcal{AA}^{-1}x = x$

Th. $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$

$$\square \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \implies x = 0$$

Th. Н. и Д. условия существования \mathcal{A}^{-1}

$\exists \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

$\square \implies \exists \mathcal{A}^{-1}$, но $\square \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}x_1 -$

$\mathcal{A}x_2 = 0 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \xrightarrow{\exists \mathcal{A}^{-1}} x = 0_V \iff x_1 = x_2$ - противоречие

\iff Так как \mathcal{A} - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists \mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязат. линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}' : W \rightarrow V$ - линейный оператор

? $\mathcal{A}'(\Sigma \lambda_i y_i) = \Sigma \lambda_i \mathcal{A}' y_i = \Sigma \lambda_i x_i$

\mathcal{A} - вз.-однозн. $\iff \forall x_i \longleftrightarrow y_i \mid \cdot \lambda_i, \Sigma$

$\mathcal{A}(\Sigma \lambda_i x_i) = \mathcal{A}x = y = \Sigma \lambda_i y_i$ и y имеет только один прообраз x

Применим \mathcal{A}' к $y = \Sigma \lambda_i y_i$ $\mathcal{A}' y = x = \Sigma \lambda_i x_i$ - единственный прообраз y

Таким образом, \mathcal{A}' переводит лин. комбинацию в такую же лин. комбинацию прообразов, то есть \mathcal{A}' - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

2.4. Матрица ЛО

$\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\Sigma_{j=1}^n c_j e_j) = \Sigma_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j$

$\mathcal{A}e_j$ образ базисного вектора y_j $\{f_i\}$ -базис W^m $\Sigma_{i=1}^m a_{ij} f_i$

$\mathcal{A}x = \Sigma_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j = \Sigma_{j=1}^n c_j \Sigma_{i=1}^m a_{ij} f_i = \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{i=1}^m c_j a_{ij} f_i = \Sigma_{i=1}^m \Sigma_{j=1}^n c_j a_{ij} f_i$

Иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Def: Матрица $A = a_{ij, i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства V^n

Вопросы:

1) $\forall ? \mathcal{A} \exists A$

2) $\forall ? A \exists \mathcal{A}$

3) если $\exists A$ для \mathcal{A} , то единственная?

4) если $\exists \mathcal{A}$ для A , то единственная?

Ответы:

1) При выбранном базисе $\{e_j\} \forall \mathcal{A} \exists A$ (алгоритм выше)

3) такая A единственная \implies в разных базисах матрицы ЛО \mathcal{A} $A_e \neq A_{e'}$

2) $\forall A_{m \times n}$ можно взять пару ЛП V^n, W^m и определить $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W_n$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$

4) Lab.

Nota: Далее будем решать две задачи

1) преобразование координат как действие оператора

2) поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

2.5. Ядро и образ оператора

Def. Ядро оператора - $\text{Ker}\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

Def. Образ оператора - $\text{Im}\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

Nota. $\text{Ker}\mathcal{A}$ и $\text{Im}\mathcal{A}$ - подпространства