5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

Проблема. $S = \iint_D dxdy$

Если $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$ - то это не площадь круга, а площадь прямоугольника S в распрямленных координатах

Введем Δs_i - площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а $\Delta s_i'$ - площадь прямоугольника, причем $\Delta s_i \neq \Delta s_i'$

Nota. Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы $\Delta s_i \approx$ коэфф. $\cdot \Delta s_i'$

Дроблению будем подвергать область D' в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты: $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$, где функции $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам

Исходно область D в Oxy

картинка

Заменим криволинейный параллелограмм на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади - малая более высокого порядка, чем площадь)

$A(x_A, y_A) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$

$B(x_B, y_B) = (\varphi(u, v + \Delta v), \psi(u, v + \Delta v))$

$C(x_C, y_C) = (\varphi(u + \Delta u, v + \Delta v), \psi(u + \Delta u, v + \Delta v))$

$D(x_D, y_D) = (\varphi(u + \Delta u, v), \psi(u + \Delta u, v))$

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right|$$

$$x_B - x_A = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v$$

$$y_B - y_A = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v$$

$$x_D - x_A = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u$$

$$y_D - y_A = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u$$

$$\left| \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial u} \Delta u \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{matrix} \right\| \underbrace{}_{\Delta v \Delta u}^{\Delta s'} \overset{|det| = |J|}{\Longrightarrow} \Delta s \approx |J| \Delta s'$$

Nota. В пределе это точное равенство:

$$|J| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta s'}$$

(легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа $\Delta_u \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\xi, \eta) \Delta u \to \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \Delta u$)

Def. Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$, где $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$ - преобразование координат $Ox_i \to O\xi_i (f_k \in C_D^1)$ называется определителем Якоби или якобиан

Построение интеграла.

1. Дробление D' в распрямленной Ouv
2. Выбор средней точки, поиск значения $f(\xi_i, \eta_i)$
   Значение величины на элементе $f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \Sigma f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
4. В пределе интеграл $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(u, v)|J|dudv$

Якобианы в ПСК, ЦСК, СфСК

1. ПСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi$, $\quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi$

   $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$
2. ЦСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$
3. СфСК - Lab.

Ex. $T : \begin{matrix} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{matrix}$

Конус в ЦСК: $\rho = z, z > 0$ Параболоид в ЦСК: $\rho = \sqrt{z}, z > 0$

$V_T = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z\Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3)d\rho = 2\pi(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4})\Big|_0^1 = 2\pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}$

Lab. $T : \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{matrix}$ - мороженка, считать в СфСК

5.5. Криволинейные интегралы

I рода. Область интегрирования - кривая $l = \smile{AB}$ (дуга) (начнем с плоской дуги)

На l действует скалярная функция $f(x, y)$ (физ. смысл - плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)

Задача в нахождении «суммарной» величины $f(x, y)$, то есть интеграла: «складываем» элементы $f_{\text{ср}}(x, y)dl$

Обозн. Получаем $\int_l f(x, y)dl = \int_{AB} f(x, y)dl$