Содержание

7. Комбинаторика

Базовые понятия:

- **Алфавит** (Alphabet) Σ (или X, *Ex.* $X = \{a, b, c\}$) - множество символов в нашей системе

- **Диапазон** (Range) $[n] = \{1, \ldots, n\}$ - конечное множество последовательных натуральных чисел

- **Расстановка** (Ordered arrangement) - последовательность каких-либо элементов (тоже самое, что кортеж), *Ex.* $x = (a, b, c, d, b, b, c) \quad |x| = n$
  Расстановку можно представить как функцию $f : \underbrace{[n]}_{\text{domain}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{codomain}}$, которая по порядковому номеру выдает символ
  $ranf = \{c \in \Sigma \mid \exists i \in [n] \ : \ f(i) = c\}$

- **Перестановка** (Permutation) - $\pi : [n] \to \Sigma$, где $n = |\Sigma|$
  Расстановка π - биекция между $[n]$ и Σ

  Ex. $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

  Одна из задач комбинаторики - посчитать количество различных расстановок или перестановок при заданных n и Σ

- **k-перестановка** (k-permutation) - расстановка из k различных элементов из Σ

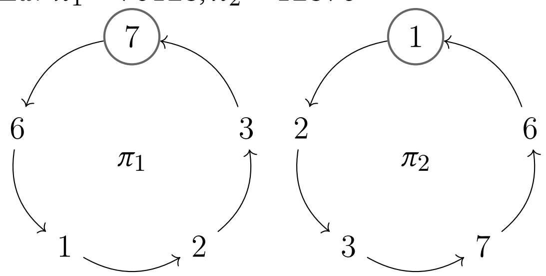
  Ex. $\underbrace{|31475|}_{\text{5-perm из } \Sigma=[7]} = 5$
  k-перестановка - инъекция $\pi : [k] \to \Sigma$ ($k \leq n = |\Sigma|$)

- $P(n, k)$ - множество всех k-перестановок алфавита $\Sigma = [n]$ (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и $[n]$)
  $P(n, k) = \{f \mid f : [k] \to [n]\}$
  Чаще интересует не само множество, а его размер, поэтому под обозначением $P(n, k)$ подразумевается $|P(n, k)|$

- $S_n = P_n = P(n, n)$ - множество всех перестановок. Также чаще всего нас будет интересовать не множество, а его размер
  $|S_n| = n!$ - всего существует $n!$ перестановок
  $|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

- **Циклические k-перестановки** (Circular k-permutations)
  $\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$ - циклически эквивалентны тогда и только тогда:
  $\exists s \mid \forall i \ \pi_1((i+s)\%k) = \pi_2(i)$

Ex. $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$



$P_C(n,k)$ - множество всех циклических k-перестановок в Σ
$|P_C(n,k)| \cdot k = |P(n,k)|$
$|P_C(n,k)| = \dfrac{|P(n,k)|}{k} = \dfrac{n!}{k(n-k)!}$

- **Неупорядоченная расстановка k элементов** (Unordered arrangement of k elements) - мультимножество Σ^* размера k

  Ex. $\Sigma^* = \{\triangle, \triangle, \square, \triangle, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \triangle, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$
  Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:
  $r : \Sigma \to \mathbb{N}, \quad r(x)$ - кол-во повторений объекта x

- **k-сочетание** (k-combination) - неупорядоченная перестановка из k различных элементов из Σ (еще называют k-подмножеством, k-subset)
  Соответственно $C(n,k)$ - множество всех таких k-сочетаний
  $|C(n,k)| = C_n^k = \dbinom{n}{k}$
  $C(n,k) = \dbinom{\Sigma}{k}$
  $\dbinom{n}{k} \cdot k! = |P(n,k)|$
  $|C(n,k)| = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Th. Биномиальная теорема (Binomial theorem):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\dbinom{n}{k}$ - биномиальный коэффициент

Th. Мультиномиальная теорема (Multinomial theorem)

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \cdots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \cdot \cdots \cdot x_r^{k_r}$$

$\dbinom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \dfrac{n!}{k_1! \ldots k_r!}$ - мультиномиальный коэффициент

Ex. мультиномиальной теоремы:

$(x+y+z)^4 = 1(x^4+y^4+z^4)+4(xy^3+xz^3+x^3y+yz^3+y^3z+yz^3)+6(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)+12(xyz^2+xy^2z+x^2yz)$

Доказательство:

$\square$

$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum\limits_{\substack{i_j\in[r]\\ j\in[n]}} x_{i_1}^1\cdot\dots\cdot x_{i_n}^1 = \sum\limits_{\substack{i_j\in[r]\\ j\in[n]}} x_1^{k_1}\cdot\dots\cdot x_r^{k_r}$, где k_t - количество x с индексом t в одночлене ($k_t = |\{j\in[n] | i_j = t\}|$)

Получается мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$ будет равен количество способов поставить k_1 единиц в индексы в $x_{i_1}^1\cdot\dots\cdot x_{i_n}^1$, k_2 двоек в индексы и так далее

У нас есть $\binom{n}{k_1}$ способов поставить единицу в индексы в одночлен, $\binom{n-k_1}{k_2}$ способов поставить двойку и т. д., получаем:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = [n-k_1-\dots-k_r = 0] =$$
$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\dots\frac{(n-k_1-\dots-k_{r-1})!}{k_r!0!} = \frac{n!}{k_1!\dots k_r!}$$

$\square$

- **Перестановка мультимножества** Σ^* (Permutations of a multiset Σ^*)

  $\Sigma^* = \{\triangle^1,\triangle^2,\square,\star\} = (\Sigma, r) \quad r:\Sigma\to\mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$

  Nota. $\begin{cases}\triangle^1,\triangle^2,\square,\star\\ \triangle^2,\triangle^1,\square,\star\end{cases}$ считаются равными перестановками

  $|P^*(\Sigma^*, n)| = \dfrac{n!}{r_1!\dots r_s!} = \dbinom{n}{r_1,\dots,r_s}$ - количество перестановок мультимножества, где r_i - количество i-ого элемента в мультимножестве

- **k-комбинация бесконечного мультимножества** (k-combinations of infinite multiset) - такое субмультимножество размера k, содержащее элементы из исходного мультимножества. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента r_i в исходном мультимножестве не больше размера комбинации k

  $\Sigma^* = \{\infty\cdot\triangle,\infty\cdot\square,\infty\cdot\star,\infty\cdot\text{🐈}\}^* \quad n = |\Sigma^*| = \infty$

  $\Sigma = \{\triangle,\square,\star,\text{🐈}\} \quad s = |\Sigma| = 4$

  Ex. 5-комбинация: $\{\triangle,\star,\square,\star,\square\}$

  Разделяем на группы по Σ палочками:

  $\triangle\Big|\square\square\Big|\star\star\Big|$

  Заменяем элементы на точечки - нам уже не так важен тип элемента, потому что мы знаем из разделения:

  $\bullet\Big|\bullet\bullet\Big|\bullet\bullet\Big|$

  (другой *Ex.* $\bullet\bullet\bullet\bullet\Big|\Big|\Big|\bullet = \{4\cdot\triangle, 1\cdot\text{🐈}\}$)

  Получается всего k точечек и $s-1$ палочек, всего $k+s-1$ объектов. Получаем мультимножество $\{k\cdot\bullet,(s-1)\cdot\Big|\}$ (*Star and Bars method*)

Получаем количество перестановок этого мультимножества: $\dfrac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} = \dbinom{k+s-1}{k, s-1} = \dbinom{k+s-1}{k} = \dbinom{k+s-1}{s-1}$
что и является количеством возможных k-комбинаций бесконечного мультимножества

- **Слабая композиция** (Weak composition) неотрицательного целого числа n в k частей - это решение $(b_1, \dots, b_k)$ уравнение $b_1 + \cdots + b_k = n$, где $b_i \geq 0$
  $|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \dbinom{n+k-1}{n, k-1}$
  Для решения воспользуемся аналогичным из доказательства мультиномиальной теоремы приемом:
  $n = 1+1+1+\cdots+1$
  Поставим палочки:
  $n = 1+1\Big|1\Big|\cdots+1$
  Получаем задачу поиска количеств k-комбинаций в мультимножестве: $\{n \cdot 1, (k-1) \cdot \Big|\}$;
  получаем $\dbinom{n+k-1}{n, k-1}$

- **Композиция** (Composition) - решение для $b_1 + \cdots + b_k = n$, где $b_i > 0$
  $|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \dbinom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$
  Мы знаем, что одну единичку получит каждая b_i, поэтому мы решаем это как слабую композицию для $n-k$ в k частей

- **Число композиций n в некоторой число частей** (Number of all compositions into some number of positive parts)
  $\sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$
  Пусть $t = k-1$, тогда $\sum\limits_{t=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{t} = 2^{n-1}$

- **Разбиения множества** (Set partitions) - множество размера k непересекающихся непустых подмножеств
  Ex. $\{1,2,3,4\}, n = 4, k = 2 \longrightarrow$ [разбиение в 2 части] $\longrightarrow$
  $$\begin{aligned}&\{\{1\},\{2,3,4\}\},\\&\{\{1,2\},\{3,4\}\},\\&\{\{1,2,3\},\{4\}\},\\&\{\{1,3\},\{2,4\}\},\\&\{\{1,4\},\{2,3\}\},\\&\{\{2\},\{1,3,4\}\},\\&\{\{3\},\{1,2,4\}\}\end{aligned}$$
  $|\{\text{разбиение } n \text{ элементов в } k \text{ частей}\}| = \left\{{n \atop k}\right\} = S_k^{II}(n) = S(n,k)$ - число Стирлинга второго рода
  Для примера выше число Стирлинга $S(4,2) = \left\{{4 \atop 2}\right\} = 7$

Согласно Википедии для формулы Стирлинга есть формула: $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}j^n$

- **Формула Паскаля** (Pascal's formula)
  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга** (Recurrence relation for Stirling$^{(2)}$ number):
  $\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$
  Возьмем какое-либо разбиение для $n-1$ элементов на k частей, тогда возможны два случая:
  1) В k-ое множество нет ни одного элемента, тогда мы обязаны в него положить наш n-ый элемент по определению, количество перестановок будет равно $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\} \cdot 1$
  2) В k-ом множестве уже есть элементы, тогда все множества будут заполнены и у нас будет выбор из k множеств, куда положить k-ый элемент, то есть $k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$
  Эти два случая независимы, поэтому получаем $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$

- **Число Белла** (Bell number) - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера n
  Число Белла вычисляется по формуле: $B_n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)$

- **Целочисленное разбиение** (Integer partition) - решение для $a_1 + \cdots + a_k = n$, где $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$
  $p(n,k)$ - число целочисленных разбиений n в k частей
  $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$ - число всех разбиений для n

  Ex. $5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$

- **Принцип включения/исключения** (Principle of Incusion/Exclusion (PIE))
  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

  Ex. есть $n = 11$ объектов, нужно распределить их между $k = 3$ группами A, B и C
  Эту задачу можно решить с помощью *Stars and bars method*, тогда мы получим $\binom{n+k-1}{n, k-1} = \binom{13}{2} = 78$
  Введем ограничение: пусть мощность каждого множества будет не больше 4.
  Посчитаем количество неподходящих вариантов:
  $|A| = |\{b_A \geq 5\}| = 1 \cdot \binom{11-5+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$

$|A \cap B| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5\}| = \binom{3}{2} = 3$

$|A \cap B \cap C| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5 \wedge b_C \geq 5\}| = 0$

Итого получаем $28 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 0 = 75$ вариантов.

Далее исключаем эти варианты из количества всех вариантов, а значит подходящих вариантов всего $78 - 75 = 3$

- **Принцип включения/исключения** (Inclusion/Exclusion Principle (PIE))
  - X - начальное множество элементов
  - $P_1, \ldots, P_m$ - свойства
  - Пусть $X_i = \{x \in X \mid P_i$ - свойство для $x\}$
  - Пусть $S \in [m]$ - множество свойств
  - Пусть $N(S) = \bigcap\limits_{i \in S} X_i = \{x \in X \mid x$ имеет все свойства $P_1, \ldots, P_m\}$

  $N(\varnothing) = X \quad |N(\varnothing)| = |X| = n$

- **Теорема ПВ/И** (Theorem PIE)

  $|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m)| = \sum\limits_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)|$ - количество элементов множества X, не имеющих никакое из свойств

  Доказательство:

  Пусть $x \in X$

  Если x не имеет свойств $P_1, \ldots, P_m$, то $x \in N(\varnothing)$ и $x \notin N(S)\ \forall S \neq \varnothing$

  Поэтому x дает в общую сумму 1

  Иначе, если x имеет $k \geq 1$ свойств $T \in \binom{[m]}{k}$,

  то $x \in N(S)$ тогда и только тогда, когда $S \subseteq T$.

  Поэтому x дает в сумму $\sum\limits_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i = 0$

- **Следствие**

  $|\bigcup\limits_{i \in [m]} X_i| = |X| - \sum\limits_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum\limits_{S \subseteq [m], S \neq \varnothing} (-1)^{|S|-1} |N(S)|$

- **Приложения**:

  * Определяете «плохие» свойства $P_1, \ldots, P_m$

  * Посчитываете $N(S)$

  * Применяете ПВ/И

- **Количество сюръекций (правототальных функций)**

  * $X = \{$функция $f : [k] \to [n]\}$

  * Плохое свойство $P_i\ :\ X_i = \{f : [k] \to [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$

  * $|\{$сюръекции $f : [k] \to [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_m)| \overset{\text{PIE}}{=} \sum\limits_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum\limits_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} (n - |S|)^k = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

- **Количество биекций**
  $n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n$
- **Число Стирлинга** (опять)
  Заметим, что сюръекция = разбиение, тогда:
  $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = n! S_n^{II}(k)$

- **Беспорядки** (Derangements) - перестановка без фиксированных точек
  Если $f(i) = i$, то i - фиксированная точка
  * X = все $n!$ перестановок
  * Плохие свойства $P_1, \ldots, P_m : \pi \in X$ имеет свойство $P_i \Longleftrightarrow \pi(i) = i$
  * Посчитаем $N(S): \quad N(S) = (n - |S|)!$
  * Применяем ПВ/И: $X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} N(S) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} (n - |S|)! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$

8. Рекуррентности и производящие функции

Производящие функции (Generating Functions)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Функция выше задает последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$

Ex. $3 + 8x^2 + x^3 + \frac{1}{7}x^5 + 100x^6 + \dots \to (3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \dots)$

Ex. Последовательность $(1, 1, 1, \dots)$ задает функцию $1 + x + x^2 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

Пусть $S = 1 + x + x^2 + \dots$, тогда $xS = x + x^2 + \dots$, $(1 - x)S = 1 \Longrightarrow$

$\boxed{S = \frac{1}{1-x} \text{ задает последовательность } (1, 1, 1, \dots)}$

Ex.

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2x^n$

$(2, 4, 10, 28, 82, \dots) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) + (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$

$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2-4x}{(1-x)(1-3x)}$

$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} \to (1, 0, 1, 0, \dots)$

$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \to (0, 1, 0, 1, \dots)$

Взятие производной:

$\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \to (1, 2, 3, 4, \dots)$

Ex. Найти ПФ для $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

$A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$

$xA = 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + \dots$

$(1-x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$

$(1-x)A = 1 + \frac{2x}{1-x} \quad A = \frac{1 + \frac{2x}{1-x}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

Ex. Найти ПФ для $(1, 4, 9, 16, \dots)$

$A = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots \quad (1-x)A =$

Подсчет, используя производящие функции

Найти число решений для $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, где $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

$A_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

$A_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$
$A_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
$A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \ldots$
Ответ - 18