Содержание

В теории вероятности обычно изучают случайные события

Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поисков закономерности в сериях случайных экспериментах

Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

число бросков	число гербов	частота
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

1. Статистическое определение вероятности

Пусть проводится n реальных экспериментов, при которых событие A появилось n_A раз

Отношение $\dfrac{n_A}{n}$ называется частотой события A

Эксперименты показывают, что при увеличении числа n частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность: $P(A) \approx \dfrac{n_A}{n}$ при $n \to \infty$

Пространство элементарных исходов. Случайные события

Def. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω

Def. Случайными событиями называется подмножество $A \subset \Omega$. События A наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества A

Ex. 1. Бросок монеты: $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$, $A = \{\text{Г}\}$ - выпал герб

Ex. 2. Игральная кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

Ex. 3. Монета бросается дважды.

а) Учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{РГ}, \text{ГР}\}$

а) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{ГР}\}$

Ex. 4. Кубик дважды: $\Omega = \{\langle i, j\rangle \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{\text{разность} \,\vdots\, 3\} = \{\langle 1, 4\rangle; \langle 4, 1\rangle; \langle 2, 5\rangle; \langle 5, 2\rangle; \dots\}$

Ex. 5. Монета бросается до первого герба: $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \dots\}$ - счетно-бесконечное множество

Ex. 6. Монета бросается на плоскость: $\Omega = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y\rangle$ - центр монеты$\}$ - несчетное число исходов

Операции над событиями

Ω - достоверные события (наступают всегда)

$\varnothing$ - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

Def. 1. Суммой $A+B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A или событие B (хотя бы одно из них)

Def. 2. Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и событие B (оба из них)

Nota. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$ - произошли все эти события

Def. 3. Противоположным A событием называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло

Nota. $\overline{\overline{A}} = A$

Def. 4. Дополнение (разность) $A \setminus B$ называется событие $A \cdot \overline{B}$

Def. 5. События A и B называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одной эксперименте)

Def. 6. События A влечет события B, если $A \subset B$ (если наступает A, то наступит B)

Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления: $0 \le P(A) \le 1$ - вероятность наступления события A

Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

Def. $\boxed{P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n}}$, где n - число всех возможных исходов, m - число благоприятных исходов

В частности, если $\Omega = n$ и A_i - элем. исх., то $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$

Свойства:

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(A) = 1 \quad (m = n)$

3) $P(\varnothing) = 0 \quad (m = 0)$

4) Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффон)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$ - мера Ω в $\mathbb{R}^n$ (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в A зависит только от меры A и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Ex. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$

$\mu(A) = (20-3-3)^2 = 196$

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{196}{400} = 0.49$

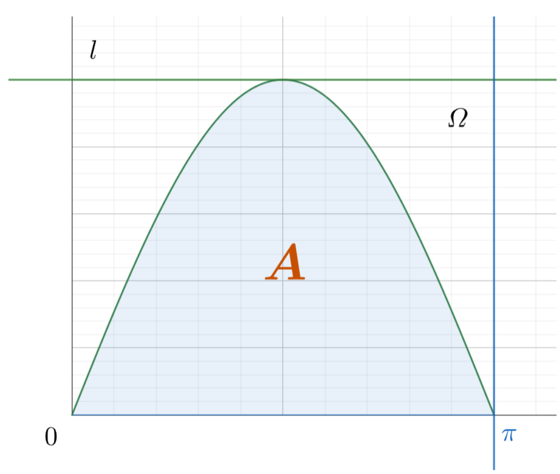
Ex. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом, $2l$ - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$\sqsupset x \in [0;1]$ - расстояние от центра до ближайшего края, $\varphi \in [0;\pi]$ - угол

$\Omega = [0;1] \times [0;\pi]$

Событие A (пересечет стык) наступает, если $x \le l \sin\varphi$



$P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$

$S(\Omega) = \pi l$

$S(A) = \displaystyle\int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = -l(-1-1) = 2l$

$P(A) = \dfrac{2l}{\pi l} = \dfrac{2}{\pi}$

Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов Ω

2. **Def.** Система $\mathcal{F}$ подмножеств Ω называется σ-алгеброй событий, если:

   1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

   2) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$;

   3) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   Свойства:

   (a) $\varnothing \in \mathcal{F}$, так как $\Omega \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{\Omega} = \varnothing \in \mathcal{F}$

   (b) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

   $\square$ $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ $\square$

   (c) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

   $\square$ $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \setminus B = A \cdot \overline{B} \in \mathcal{F}$ $\square$

   Ex. 1. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$

   Ex. 2. $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$

   Ex. 3. **Def.** Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - минимальная σ-алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.** $\sqsupset$ Ω - пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ - его σ-алгебра событий. *Вероятностью* на $(\Omega, \mathcal{F})$ называется функция $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ со свойствами:

   (a) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность)

   (b) Если $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$ - несовместное, то $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (свойство счетной аддитивности)

   (c) $P(\Omega) = 1$ (условие нормированности)

Def. Из этого тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством

Свойства вероятности

1. Так как $\varnothing$ и Ω - несовместные, то $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \varnothing) = 1 + P(\varnothing) \Longrightarrow P(\varnothing) = 0$
2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

   $\square$ A и $\overline{A}$ - несовместные и $A + \overline{A} = \Omega \Longrightarrow P(A + \overline{A}) = P(\Omega) = 1$ $\square$

3. $P(A) = 1 - P(\overline{A}) \leq 1$

Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_n = \varnothing$

Тогда $P(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

При непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $P(A)$ также должна изменятся непрерывно

Th. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

$\square$

Ясно, что $A_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} A_i\overline{A}_{i+1} + \prod\limits_{i=n}^{\infty} A_i$

$\prod\limits_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod\limits_{i=1}^{n} \cdot \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod\limits_{i=1}^{\infty} = \varnothing \Longrightarrow A_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} A_n\overline{A_{n+1}}$ и так как эти события несовместны, то по свойству счетной аддитивности $P(A_n) = \sum\limits_{i=n}^{\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}})$ - это остаток (хвост) сходящегося ряда

$P(A_1) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i\overline{A_{i+1}}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} P(A_i\overline{A_{i+1}}) + P(A_n)$ и $P(A_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по необходимому признаку сходимости

$\square$

Nota. Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения: если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$
3. Формула сложения вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\square$

$A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$ - несовместные события $\Longrightarrow P(A + B) = P(A\overline{B}) + P(AB) + P(\overline{A}B) = (P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\square$

Ex. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика, $P(\text{Д}+\text{П}) = P(\text{Д}) + P(\text{П}) - P(\text{ДП}) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Формула сложения при $N = 3$: $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\limits_{i<j} P(A_iA_j) + \sum\limits_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1A_2 \dots A_n)$ - формула включения и исключения

Ex. n писем случайно раскладывается по n конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

$\sqsupset A_i$ - i-ое письмо в своем конверте

$P(A_i) = \dfrac{1}{n}; P(A_iA_j) = \dfrac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k) = \dfrac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2 \dots A_n) = \dfrac{1}{n!}$

Слагаемых вида A_i - n штук; A_iA_j - C_n^2; $A_iA_jA_k$ - C_n^3; $A_1A_2 \dots A_n$ - 1 штука

$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \dfrac{1}{n} - C_n^2 \dfrac{1}{A_n^2} + C_n^3 \dfrac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}$

Так как $e^{-1} = 1 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3!} + \dots$, то при $n \to \infty \quad P(A) \underset{n\to\infty}{\to} 1 - e^{-1} \approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$\sqsupset |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов $\Omega \times \Omega$ и $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$P(AB) = \dfrac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \dfrac{m_1m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$

Def. События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab. $\sqsupset P(A), P(B) \neq 0$, доказать, что если A и B несовместны, то они зависимы

Свойство: Если A и B независимы, то независимы $\overline{A}$ и $\overline{B}$, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B

Доказательство: $A = A \cdot (B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$ - несовместные события $\Longrightarrow P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) \Longrightarrow P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}) \Longrightarrow$ независимы

Def. События $A_1, A_2, \dots A_n$ - независимы в совокупности, если для любого набора $i_1, i_2, \dots, i_k$ $(2 \leq k \leq n)$ $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Nota. Из независимости в совокупности при $k = 2$ получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ex. (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр, $\sqsupset A$ - грань, которая содержит красный цвет, B - синий, C - зеленый.

$P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

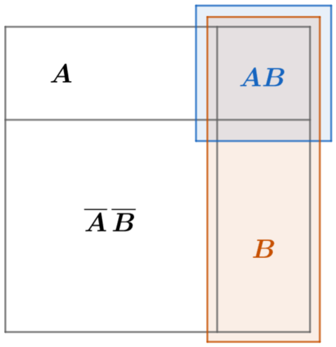
Так как $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$
$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$ - попарная независимость
$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$ - но вот независимость в совокупности не соблюдается

Ex. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма, $\approx$ 1650 г.)
Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка
A_1 - при первом броске шестерка, A_2 - при втором, A_3 - при третьем, A_4 - при четвертом
B - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках
$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ - совместные события, но независимые
Найдем обратную вероятность: $\overline{B}$ - ни разу не выпала шестерка
$\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4}$
$P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = P(\overline{A_4}) = \frac{5}{6}$
$\overline{B} = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 0.52$

Условная вероятность

Условная вероятность $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) - вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Ex. Бросается кость один раз, известно, что выпало больше 3 очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков
A - выпало четное число очков
B - выпало больше трех очков
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6; A = \{2, 4, 6\}; B = \{4, 5, 6\}$
$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$
Интерпретация с помощью геометрической вероятности:
$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{\frac{S_{AB}}{S_\Omega}}{\frac{S_B}{S_\Omega}}$



Def. Условной вероятностью события A при условии, что имело место событие B, называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Ex. Известно, что среди населения 1% воров. В комнате, где находилось 10 гостей, у хозяина пропал кошелек. Какова вероятность того, что произвольный гость является вором.
A - гость является вором $P(A) = 0.01$

B - пропал кошелек (хотя бы один вор среди гостей есть)
$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(AB)}{1 - P(\overline{B})} = \dfrac{P(A)}{1 - 0.99^{10}} = \dfrac{0.01}{1 - 0.99^{10}} = 0.105$
Формула умножения:

В качестве следствия условной вероятности получаем:
$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \Longrightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$
Общий случай:

$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(P_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$

□

База индукции $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Шаг индукции: пусть верно при $n - 1$:

$P(A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(P_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-2})$

$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}) =$

$P(A_1)P(A_2|A_1)P(P_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$

□

Ex. Студент выучил 1 билет из n, в группе n студентов. Каким по очереди ему нужно зайти, чтобы вероятность сдать экзамен была наибольшей

Пусть A_i - билет, вытянутый на i-ом шаге ($1 \le i \le n$)

A - студент сдал экзамен

$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i-1}} \cdot A_i) = \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \dfrac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \cdot \dfrac{1}{n-(i-1)} = \dfrac{1}{n}$

Полная группа событий

Def. События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы

$H_i \cap H_j = \varnothing \ \forall i, j \qquad \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$

Следствие: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

Th. Формула полной вероятности. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ - полная группа событий. Тогда
$P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

□

$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + H_2 + H_3 + \dots)A) = P(H_1 A + H_2 A + H_3 A + \dots) = [H_i \cdot A \cdot H_j \cdot A = \varnothing \cdot A] =$
$P(H_1 A) + P(H_2 A) + \dots = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$

□

Th. Формула Байеса. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий, и известно, что событие A уже произошло

Тогда $P(H_k|A) = \dfrac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

□

$P(H_k|A) = \dfrac{P(H_k A)}{P(A)} = \dfrac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

□

Ex. 1. В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили 2 шара, затем из второй коробки достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым

$\sqsupset H_1$ - переложили 2 белых H_2 - 2 черных

H_3 - разного цвета

A - из второй коробки достали белый шар

$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$

$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{75} + \frac{1}{75} + \frac{16}{75} =$
$\frac{35}{75} = \frac{7}{15}$

Ex. 2. Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.9, а второго 0.3. Наугад вызванный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это бы первый стрелок?

H_1 - вызван первый стрелок

H_2 - вызван второй стрелок

A - стрелок попал

$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_1) = 0.9 \qquad P(A|H_2) = 0.3$

$P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)|P(A|H_2)} = \dfrac{\frac{1}{2}0.9}{\frac{1}{2}0.9 + \frac{1}{2}0.3} = \dfrac{9}{9+3} = 0.75$

Ex. 3. По статистике раком болеет 1% населения. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительный. Найти вероятность того, что человек болен.

H_1 - человек болен

H_2 - человек здоров

A - анализ положительный

$P(H_1) = 0.01$

$P(H_2) = 0.99$

$P(A|H_1) = 0.99$

$P(A|H_2) = 0.01$

$P(H_1|A) = \dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \dfrac{0.01 + 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

Допустим, что второй независимый с первым анализ также оказался положительным. Найти вероятность того, что человек болен.

$P(H_1) = 0.01 \qquad P(H_2) = 0.99$

$P(AA|H_1) = 0.99^2 \qquad P(AA|H_2) = 0.01^2$

$P(H_1|AA) = \dfrac{0.01 + 0.99^2}{0.01 \cdot 0.99^2 + 0.99 \cdot 0.01^2} = \dfrac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$

Интуитивно вероятность $\dfrac{1}{2}$ может поддаваться непониманию, однако можно рассуждать так: пусть в городе живут 10000 человек, из них 100 болеют, а у 99 из них положительный анализ; у других 9900 положительный анализ всего лишь у 99, отсюда выходит $\dfrac{1}{2}$

Ex. 4. В телевизионной студии 3 двери 🚪🚪🚪, за одной из них приз 🚗. Игрок выбрал наугад одну из 3 дверей, после чего ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей и показывает, что там приза нет 🛴. После чего предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?

H_1 - игрок угадал

H_2 - игрок не угадал

A - ведущий открыл дверь без приза

$P(H_1) = \dfrac{1}{3} \qquad P(H_2) = \dfrac{2}{3}$

$P(A|H_1) = 1 \qquad P(A|H_2) = \dfrac{1}{2}$

$P(H_1|A) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

Но это неправильно, так как действия ведущего неслучайны - он всегда откроет дверь без приза

В этом случае, если мы гипотетически выберем 300 дверей, в 100 случаях мы отгадаем, ведущий откроет любую дверь без приза; но в 200 случаях мы не отгадаем, ведущий откроет вторую дверь без приза, и в этом случае мы сможем поменяться на дверь с призом, отсюда шанс $\dfrac{2}{3}$, если мы поменяем свой выбор

Ex. 5. Вероятность того, что в семье с детьми ровно k детей, равна $\frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.

H_i - в семье i детей $(1 \leq i < \infty)$

$P(H_i) = \frac{1}{2^i}$

A - в семье нет девочки

$P(A|H_1) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_2) = \frac{1}{4}$

$P(A|H_i) = \frac{1}{2^i}$

$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4} = 0.75$