

## Дифференциал

**Th.**  $z : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\exists$  непрерывные  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$

Тогда функция представима  $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ , где  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta = \text{б. м.}$

$$\square \quad \Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) + z(x + \Delta x, y) - z(x, y)$$

По теореме Лагранжа:

$$z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) = z'_y(\eta)\Delta y$$

$$z(x + \Delta x, y) - z(x, y) = z'_x(\xi)\Delta x$$

По теореме о представлении функции ее пределом:

$$z'_x(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x(\Delta x \rightarrow 0)} z'_x(\xi) + \alpha$$

$$z'_y(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow y} z'_y(\eta) + \beta$$

Так как  $z'_x(\xi)$ ,  $z'_y(\eta)$  непрерывны, то  $\lim_{\xi \rightarrow x} z'_x(\xi) = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\lim_{\eta \rightarrow y} z'_y(\eta) = \frac{\partial z}{\partial y}$

$$\text{Тогда } \Delta z = \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha \right) \Delta x + \left( \frac{\partial z}{\partial y} + \beta \right) \Delta y = \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$$

Заметим, что  $\alpha\Delta x$  и  $\beta\Delta y$  - б. м. порядка выше, чем  $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \iff$

$$1 = \sqrt{\left( \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right)^2 + \left( \frac{\Delta y}{\Delta \rho} \right)^2} \quad \left| \frac{\Delta x}{\Delta \rho} \right| \leq 1, \left| \frac{\Delta y}{\Delta \rho} \right| \leq 1$$

$$\text{Сравним } \frac{\alpha\Delta x}{\Delta \rho} = \text{б. м. огр.} \xrightarrow{\Delta \rho \rightarrow 0} 0, \frac{\beta\Delta y}{\Delta \rho} \xrightarrow{\Delta \rho \rightarrow 0} 0$$

Функция, приращение которой представимо  $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + o(\Delta \rho)$ , называется дифференцируемой в точке  $(x, y)$ , линейная часть приращения называется полным дифференциалом

$$\text{Обозначение: } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\text{Ex. } z = 3xy^2 + 4\cos xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = 3y^2 - 4\sin xy \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = 6xy - 4\sin xy \cdot x$$

$$dz = (3y^2 - 4y\sin xy)dx + (6xy - 4x\sin xy)dy$$

### 4.3. Правила дифференцирования

*Nota.* При нахождении  $\frac{\partial z}{\partial x_i}$  ( $x_i$  - какая-либо переменная) дифференцирование проводится по правилам для функции одной переменной ( $x_j \neq x_i$  считаются константами)

Выпишем более сложные правила

#### 1\* Сложная функция

*Мет.*  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Def.** Сложная функция двух переменных:  $z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$

Формула: Найдем  $\frac{\partial z}{\partial x}(u, v)$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}(u, v)$

**Th.**  $z = z(u, v), u(x, y), v(x, y)$  непрерывно дифференцируемы по  $x, y$

Тогда 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$\square$   $z$  дифференцируема  $\iff \Delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta v + o(\Delta u + \Delta v)$

Зададим приращение  $\Delta x$  (представление  $\Delta z$  не должно измениться)

$$\begin{aligned} \Delta_x z &= \frac{\partial z}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta_x v + o(\Delta_x u + \Delta_x v) \\ \frac{\Delta_x z}{\Delta x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + o\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right) \end{aligned} \quad \left| \cdot \Delta x \right.$$

По теореме Лагранжа:  $\frac{\partial u}{\partial x}(\xi) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial x}$

В пределе: 
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Аналогично для  $\frac{\partial z}{\partial y}$

*Nota.* Интересен случай  $z = z(x, u, v)$ , где  $u = u(x), v = v(x)$

Здесь  $z$  является функцией одной переменной  $x$

Обобщая правило на случай трех переменных, можем записать формулу полной производной, которая имеет смысл

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

*Ex.* Пусть  $w = w(x, y, z)$  - функция координат  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  - функции времени

$w$  явно не зависит от времени, тогда  $\frac{dw}{dt} = w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$ , где  $v_x$  - проекция скорости

Если  $w = w(x, y, z, t)$ , то  $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$

**2\* Неявная функция одной переменной:** пусть  $F(x, y(x)) = 0$  - неявное задание  $y = y(x)$

Найдем  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$

Отсюда  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

## 4.4. Производная высших порядков

*Nota.* Пусть  $z = z(x, y)$  дифференцируема и  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  также дифференцируемы, при этом в общем

случае  $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$

Тогда определены вторые частные производные

$$\text{Def. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} - \text{чистые производные}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \text{смешанные производные}$$

**Th.**  $z = z(x, y)$ , функции  $z(x, y)$ ,  $z'_x$ ,  $z'_y$ ,  $z''_{xy}$ ,  $z''_{yx}$  определены и непрерывны в  $\overset{o}{U}(M(x, y))$

Тогда  $z''_{xy} = z''_{yx}$

□ Введем вспомогательную величину

$$\Phi = (z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y)) - (z(x, y + \Delta y) - z(x, y))$$

Обозначим  $\phi(x) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Тогда  $\Phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$  - дифференцируема, непрерывна, как комбинация

По теореме Лагранжа  $\phi(x + \Delta x) - \phi(x) = \phi'(\xi)\Delta x = (z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y))\Delta x$ , где  $\xi \in (x; x + \Delta x)$

Здесь  $z'_x$  дифференцируема также на  $[y, y + \Delta y]$

Тогда по теореме Лагранжа  $\exists \eta \in (y, y + \Delta y) \mid z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y) = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y$

Таким образом  $\Phi = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y$

Перегруппируем  $\Phi$ , далее аналогично для  $z''_{yx}$

Тогда  $z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x\Delta y = \Phi = z''_{yx}(\xi', \eta')\Delta x\Delta y$

## 4.5. Дифференциалы

*Мет. 1.* Полный дифференциал (1-ого порядка) функции  $z = z(x, y)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy - \text{сумма частных дифференциалов}$$

*Мет. 2.* Инвариантность формы первого дифференциала функции одной переменной

$$dy(x) = y'(x)dx \stackrel{x=\phi(t)}{=} y'(t)dt$$

**Th.** Инвариантность полного дифференциала первого порядка.

$z = z(u, v)$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  - дифференциалы

$$\text{Тогда } dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\square \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \right) = \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Мет.  $d^2y(x) \stackrel{\text{def}}{=} d(dy(x)) = y''(x)dx^2 \neq y''(t)dt^2$

Def:  $z = z(x, y)$  - дифференцируема и  $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$  - дифференцируемая функция

Тогда второй полный дифференциал:

$$d^2z \stackrel{\text{def}}{=} d(dz)$$

Формула:  $d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z'_x dx)'_x dx + (z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx)'_y dy + (z'_y dy)'_y dy = (z'_x)'_x (dx)^2 + (z'_y)'_x dx dy + (z'_x)'_y dy dx + (z'_y)'_y (dy)^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (dy)^2$

Nota: Заметим формальное сходство с биномом Ньютона:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Введем условное обозначение  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$

Тогда  $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$ , здесь  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2$  - оператор второго полного дифференцирования

$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$  - дифференциал  $n$ -ого порядка

Nota: Можно ли утверждать, что  $d^2z(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \stackrel{x=x(u,v), y=y(u,v)}{=} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$  ???

Нет, нельзя ( $d^2z$  не инвариантен при замене)

Покажем, что не выполняется в простом случае:  $z = z(x, y) = z(x(t), y(t))$  - параметризация.

Геометрически, это выбор пути в области  $D$  от точки  $M_0(x_0, y_0)$  до точки  $M(x, y)$

Итак

$$\begin{aligned} d(dz) &\stackrel{z=\Phi_1\Pi}{=} (dz)'_t dt = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_t dt \stackrel{dx(t)=\frac{dx}{dt}dt, dy(t)=\frac{dy}{dt}dt}{=} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)'_t dt^2 + \\ &\left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_t \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)'_t\right) dt^2 + \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_t \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)'_t\right) dt^2 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}\right) dt^2 + \\ &\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}\right) dt^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}\right) dt^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y + \\ &2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases} \quad \text{- линейная параметризация}$$

Lab. Дать инвариантность при линейной параметризации

Причем, это свойство верно для  $d^n z$ , то есть если  $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$  (например), то

$$d^n z \stackrel{z=z(t)}{=} z^{(n)}(t)dt$$

## 4.6. Формула Тейлора

$$\text{Mem. } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \begin{cases} o((x - x_0)^n) - \text{Пеано} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} - \text{Лагранжа} \end{cases}$$

В дифференциалах:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(x_0)}{n!} + \text{остаток}$$

Формула Тейлора для  $z = z(x, y)$  в окрестности  $M_0(x_0, y_0)$  (как раньше  $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ )

$$z(M \overset{o}{=} M_0) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \dots + \frac{d^nz(M_0)}{n!} + o((\Delta\rho)^n)$$

*Nota.* Формула выше верна, если  $z = z(x, y)$  - непрерывна со своими частными производными до  $n + 1$  порядка включительно в некоторой окрестности  $U_\delta(M_0(x_0, y_0))$ , где  $M(x, y) \in U_\delta(M_0)$