

# Содержание

<b>Лекция 1</b>	<b>4</b>
Статистическое определение вероятности . . . . .	4
Пространство элементарных исходов. Случайные события . . . . .	4
Вероятность . . . . .	5
<b>Лекция 2</b>	<b>7</b>
Построение модели случайных явлений . . . . .	7
Свойства вероятности . . . . .	7
Аксиома непрерывности . . . . .	8
<b>Лекция 3</b>	<b>10</b>
Условная вероятность . . . . .	10
Полная группа событий . . . . .	12
<b>Лекция 4</b>	<b>14</b>
Серия испытаний Бернулли . . . . .	14
Наиболее вероятное число успехов . . . . .	15
Статистическое понятие вероятности . . . . .	17
Закон больших чисел Бернулли . . . . .	17
<b>Лекция 5</b>	<b>18</b>
Схема испытаний и соответствующее распределение . . . . .	18
I. Схема Бернулли . . . . .	18
II. Схема до первого успешного испытания . . . . .	19
III. Схема испытаний с несколькими исходами . . . . .	19
IV. Урновая схема . . . . .	20
V. Схема Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли . . . . .	21
<b>Лекция 6</b>	<b>22</b>
Случайные величины . . . . .	22
Основные типы распределения . . . . .	23
Дискретная случайная величина . . . . .	23
Числовые характеристики дискретных случайных величин . . . . .	24
I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность) . . . . .	24
II. Дисперсия . . . . .	25
III. Среднее квадратическое отклонение . . . . .	25
Свойства математического ожидания и дисперсии . . . . .	26

Другие числовые характеристики . . . . .	27
<b>Лекция 7</b>	<b>28</b>
Стандартное дискретное распределение . . . . .	28
I. Распределение Бернулли . . . . .	28
II. Биномиальное распределение . . . . .	28
III. Геометрическое распределение . . . . .	29
IV. Распределение Пуассона . . . . .	29
Задача о разорении игрока . . . . .	31
Случайное блуждание на прямой . . . . .	32
<b>Лекция 8</b>	<b>33</b>
Функция распределения . . . . .	33
Свойства функции распределения . . . . .	34
Абсолютно непрерывное распределение . . . . .	36
Свойства плотности и функции распределения абсолютно непрерывного распределения . . . . .	36
Числовые характеристики . . . . .	37
Другие числовые характеристики . . . . .	37
Сингулярное распределение . . . . .	38
<b>Лекция 9</b>	<b>39</b>
Стандартное абсолютно непрерывное распределение . . . . .	39
I. Равномерное распределение . . . . .	39
II. Показательное распределение . . . . .	40
III. Нормальное распределение (Гауссовское) . . . . .	41
Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями . . . . .	42
Коэффициенты асимметрии и эксцесса . . . . .	43
<b>Лекция 10</b>	<b>44</b>
Преобразование случайных величин . . . . .	44
Стандартизация случайной величины . . . . .	44
Линейное преобразование . . . . .	44
Монотонное преобразование . . . . .	45
Квантильное преобразование . . . . .	45
Характеристики преобразованной случайной величины . . . . .	47
Свойства моментов . . . . .	47

<b>Лекция 11</b>	<b>48</b>
Сходимость случайных величин . . . . .	48
Связь между видами сходимости . . . . .	49
Ключевые неравенства . . . . .	49
I. Неравенство Маркова . . . . .	50
II. Неравенство Чебышева . . . . .	50
III. Правило «трех сигм» . . . . .	50
Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин	50
Законы больших чисел . . . . .	51
I. Закон больших чисел Чебышева . . . . .	51
II. Закон больших чисел Бернулли . . . . .	51
III. Закон больших чисел Хинчина . . . . .	52
IV. Усиленный закон больших чисел Холмогорова . . . . .	52
V. Закон больших чисел Маркова . . . . .	52
Центральная предельная теорема . . . . .	52
<b>Лекция 12</b>	<b>53</b>
Совместное распределение случайных величин . . . . .	53
Функция распределения . . . . .	53
Свойства функции распределения . . . . .	54
Независимость случайных величин . . . . .	54
Дискретная система двух случайных величин . . . . .	55
Абсолютно непрерывная система двух случайных величин . . . . .	56
Многомерное равномерное распределение . . . . .	57
<b>Лекция 13</b>	<b>57</b>
Математическое ожидание и дисперсия случайного вектора . . . . .	57
Функции от двух случайных величин . . . . .	57
Сумма стандартных распределений. Устойчивость относительно суммирования . . . . .	59
Условное распределение . . . . .	60
I. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин . . . . .	60
II. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин . . . . .	61
<b>Лекция 14</b>	<b>62</b>
Пространство случайных величин . . . . .	62
Условное математическое ожидание . . . . .	63
Числовые характеристики. Зависимости случайных величин . . . . .	64
Коэффициент линейной корреляции . . . . .	65

## Лекция 1

В теории вероятности обычно изучают случайные события

Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поиском закономерности в сериях случайных экспериментах

Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

число бросков	число гербов	частота
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

### Статистическое определение вероятности

Пусть проводится  $n$  реальных экспериментов, при которых событие  $A$  появилось  $n_A$  раз

Отношение  $\frac{n_A}{n}$  называется частотой события  $A$

Эксперименты показывают, что при увеличении числа  $n$  частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность:  $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$  при  $n \rightarrow \infty$

### Пространство элементарных исходов. Случайные события

**Def.** Пространством элементарных исходов  $\Omega$  называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются  $\omega$

**Def.** Случайными событиями называется подмножество  $A \subset \Omega$ . События  $A$  наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества  $A$

Ех. 1. Бросок монеты:  $\Omega = \{\Gamma, P\}$ ,  $A = \{\Gamma\}$  - выпал герб

Ех. 2. Игральная кость:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

Ех. 3. Монета бросается дважды.

а) Учитываем порядок:  $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, P\Gamma, \Gamma P\}$

а) Не учитываем порядок:  $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, \Gamma P\}$

Ех. 4. Кубик дважды:  $\Omega = \{\langle i, j \rangle \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{\text{разность } \dot{=} 3\} = \{\langle 1, 4 \rangle; \langle 4, 1 \rangle; \langle 2, 5 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \dots\}$

Ех. 5. Монета бросается до первого герба:  $\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, P\Gamma\Gamma, \dots\}$  - счетно-бесконечное множество

Ех. 6. Монета бросается на плоскость:  $\Omega = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y \rangle - \text{центр монеты}\}$  - несчетное число исходов

Операции над событиями

$\Omega$  - достоверные события (наступают всегда)

$\emptyset$  - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

**Def. 1.** Суммой  $A + B$  называется событие, состоящее в том, что произошло события  $A$  или событие  $B$  (хотя бы одно из них)

**Def. 2.** Произведением  $A \cdot B$  называется событие, состоящее в том, что произошло событие  $A$  и событие  $B$  (оба из них)

*Nota.*  $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$  - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$  - произошли все эти события

**Def. 3.** Противоположным  $A$  событию называется событие  $\bar{A}$ , состоящее в том, что событие  $A$  не произошло

*Nota.*  $\bar{\bar{A}} = A$

**Def. 4.** Дополнение (разность)  $A \setminus B$  называется событие  $A \cdot \bar{B}$

**Def. 5.** События  $A$  и  $B$  называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одной эксперименте)

**Def. 6.** События  $A$  влечет события  $B$ , если  $A \subset B$  (если наступает  $A$ , то наступит  $B$ )

## Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления:  $0 \leq P(A) \leq 1$  - вероятность наступления события  $A$

### Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий  $\Omega$  содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

**Def.**  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$ , где  $n$  - число всех возможных исходов,  $m$  - число благоприятных исходов

В частности, если  $\Omega = n$  и  $A_i$  - элем. исх., то  $P(A_i) = \frac{1}{n}$

Свойства:

- 1)  $0 \leq P(A) \leq 1$
- 2)  $P(\Omega) = 1 \quad (m = n)$
- 3)  $P(\emptyset) = 0 \quad (m = 0)$
- 4) Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

### Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффона)

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$  - мера  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^n$  (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в  $A$  зависит только от меры  $A$  и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Ех. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$\mu(A) = (20 - 3 - 3)^2 = 196$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{196}{400} = 0.49$$

Ех. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом,  $2l$  - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$x \in [0; l]$  - расстояние от центра до ближайшего края,

$\varphi \in [0; \pi]$  - угол

$$\Omega = [0; l] \times [0; \pi]$$

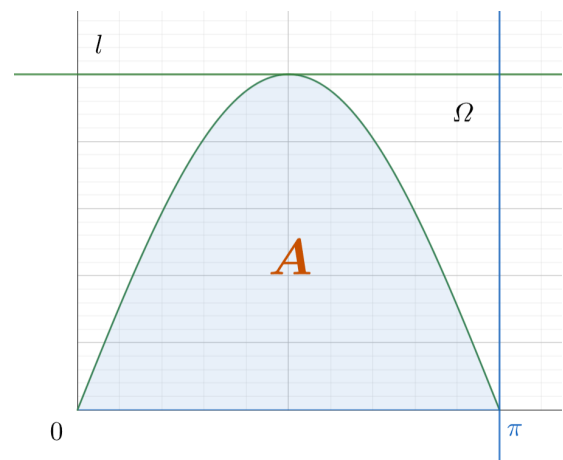
Событие  $A$  (пересечет стык) наступает, если  $x \leq l \sin \varphi$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(\Omega) = \pi l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = -l(-1 - 1) = 2l$$

$$P(A) = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$



## Лекция 2

### Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов  $\Omega$
2. **Def.** Система  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй событий, если:

- 1)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ;
- 2)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$ ;
- 3)  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**Свойства:**

- (a)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ , так как  $\Omega \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
- (b)  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

- (c)  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A, \bar{B} \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B = A \cdot \bar{B} \in \mathcal{F} \quad \square$$

Ex. 1.  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Ex. 2.  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$

Ex. 3. **Def.** Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  - минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.**  $\square$   $\Omega$  - пространство элементарных исходов,  $\mathcal{F}$  - его  $\sigma$ -алгебра событий. Вероятностью на  $(\Omega, \mathcal{F})$  называется функция  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

- (a)  $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$  (неотрицательность)
- (b) Если  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$  - несовместное, то  $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$  (свойство счетной аддитивности)
- (c)  $P(\Omega) = 1$  (условие нормированности)

**Def.** Из этого тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется вероятностным пространством

### Свойства вероятности

1. Так как  $\emptyset$  и  $\Omega$  - несовместные, то  $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2. Формула обратной вероятности:  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\square \quad A \text{ и } \bar{A} - \text{несовместные и } A + \bar{A} = \Omega \implies P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad \square$$

3.  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

## Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Тогда  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

При непрерывном изменении области  $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  соответствующая вероятность  $P(A)$  также должна изменяться непрерывно

**Th.** Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

$\square$

Ясно, что  $A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$

$$\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} \text{ и так как эти события}$$

несовместны, то по свойству счетной аддитивности  $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$  - это остаток (хвост) сходящегося ряда

$$P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n) \text{ и } P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ по необходимому признаку сходимости}$$

$\square$

*Nota.* Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

## Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности:  $A \cdot (B + C) = AB + AC$

2. Формула сложения: если  $A$  и  $B$  несовместны, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

3. Формула сложения вероятностей:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$\square$

$$A + B = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}B - \text{несовместные события} \implies P(A + B) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) = (P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$\square$



Ех. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика,  $P(Д + П) = P(Д) + P(П) - P(ДП) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Формула сложения при  $N = 3$ :  $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай:  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1A_2 \dots A_n)$  - формула включения и исключения

Ех.  $n$  писем случайно раскладывается по  $n$  конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

$\square A_i$  -  $i$ -ое письмо в своем конверте

$$P(A_i) = \frac{1}{n}; P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

Слагаемых вида  $A_i$  -  $n$  штук;  $A_iA_j$  -  $C_n^2$ ;  $A_iA_jA_k$  -  $C_n^3$ ;  $A_1A_2 \dots A_n$  - 1 штука

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{A_n^2} + C_n^3 \frac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Так как  $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots$ , то при  $n \rightarrow \infty$   $P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-1} \approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$$\square |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов  $\Omega \times \Omega$  и  $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики  $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$$P(AB) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \frac{m_1 m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$$

**Def.** События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab.  $\square P(A), P(B) \neq 0$ , доказать, что если  $A$  и  $B$  несовместны, то они зависимы

Свойство: Если  $A$  и  $B$  независимы, то независимы  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ ,  $A$  и  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  и  $B$

Доказательство:  $A = A \cdot (B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$  - несовместные события  $\implies P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \implies P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \implies$  независимы

**Def.** События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  - независимы в совокупности, если для любого набора  $i_1, i_2, \dots, i_k$  ( $2 \leq k \leq n$ )  $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

*Nota.* Из независимости в совокупности при  $k = 2$  получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ех. (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр,  $\square A$  - грань, которая содержит красный цвет,  $B$  - синий,  $C$  - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Так как } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) \text{ - попарная независимость}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) \text{ - но вот независимость в совокупности не соблюдается}$$

Ех. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма,  $\approx 1650$  г.)

Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка

$A_1$  - при первом броске шестерка,  $A_2$  - при втором,  $A_3$  - при третьем,  $A_4$  - при четвертом

$B$  - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$  - совместные события, но независимые

Найдем обратную вероятность:  $\bar{B}$  - ни разу не выпала шестерка

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{B} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 0.52$$

## Лекция 3

### Условная вероятность

Условная вероятность  $P(A|B)$  (или  $P_B(A)$ ) - вероятность события  $A$ , вычисленная в предположении, что событие  $B$  уже произошло

Ех. Бросается кость один раз, известно, что выпало больше 3 очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков

$A$  - выпало четное число очков

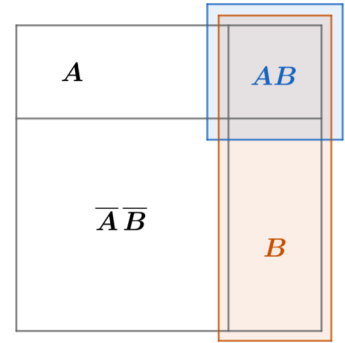
$B$  - выпало больше трех очков

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6; A = \{2, 4, 6\}; B = \{4, 5, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Интерпретация с помощью геометрической вероятности:

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{\frac{S_{AB}}{S_{\Omega}}}{\frac{S_B}{S_{\Omega}}}$$



**Def.** Условной вероятностью события  $A$  при условии, что имело место событие  $B$ , называется величина  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

*Ex.* Известно, что среди населения 1% воров. В комнате, где находилось 10 гостей, у хозяина пропал кошелек. Какова вероятность того, что произвольный гость является вором.

$A$  - гость является вором  $P(A) = 0.01$

$B$  - пропал кошелек (хотя бы один вор среди гостей есть)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(\bar{B})} = \frac{P(A)}{1 - 0.99^{10}} = \frac{0.01}{1 - 0.99^{10}} = 0.105$$

Формула умножения:

В качестве следствия условной вероятности получаем:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \implies P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Общий случай:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

База индукции  $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Шаг индукции: пусть верно при  $n-1$ :

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2})$$

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$

$$P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

*Ex.* Студент выучил 1 билет из  $n$ , в группе  $n$  студентов. Каким по очереди ему нужно зайти, чтобы вероятность сдать экзамен была наибольшей

Пусть  $A_i$  - билет, вытянутый на  $i$ -ом шаге ( $1 \leq i \leq n$ )

$A$  - студент сдал экзамен

$$P(A) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{i-1} \cdot A_i) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \cdot \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$$

## Полная группа событий

**Def.** События  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$$

Следствие:  $\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

**Th. Формула полной вероятности.**  $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  - полная группа событий. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

□

$$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + H_2 + H_3 + \dots)A) = P(H_1A + H_2A + H_3A + \dots) = [H_i \cdot A \cdot H_j \cdot A = \emptyset \cdot A] = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

□

**Th. Формула Байеса.**  $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n$  - полная группа событий, и известно, что событие  $A$  уже произошло

Тогда  $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

□

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

□

*Ex. 1.* В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили 2 шара, затем из второй коробки достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым

$\sqsupset H_1$  - переложили 2 белых  $H_2$  - 2 черных

$H_3$  - разного цвета

$A$  - из второй коробки достали белый шар

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{75} + \frac{1}{75} + \frac{16}{75} =$$

$$\frac{35}{75} = \frac{7}{15}$$

Ех. 2. Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.9, а второго 0.3. Наугад вызванный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это бы первый стрелок?

$H_1$  - вызван первый стрелок

$H_2$  - вызван второй стрелок

$A$  - стрелок попал

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = 0.9 \quad P(A|H_2) = 0.3$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.9}{\frac{1}{2} \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 0.3} = \frac{9}{9+3} = 0.75$$

Ех. 3. По статистике раком болеет 1% населения. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительный. Найти вероятность того, что человек болен.

$H_1$  - человек болен

$H_2$  - человек здоров

$A$  - анализ положительный

$$P(H_1) = 0.01$$

$$P(H_2) = 0.99$$

$$P(A|H_1) = 0.99$$

$$P(A|H_2) = 0.01$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01} = \frac{1}{2} = 0.5$$




Допустим, что второй независимый с первым анализ также оказался положительным. Найти вероятность того, что человек болен.

$$P(H_1) = 0.01 \quad P(H_2) = 0.99$$

$$P(AA|H_1) = 0.99^2 \quad P(AA|H_2) = 0.01^2$$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.01 \cdot 0.99^2}{0.01 \cdot 0.99^2 + 0.99 \cdot 0.01^2} = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Интуитивно вероятность  $\frac{1}{2}$  может поддаваться непониманию, однако можно рассуждать так: пусть в городе живут 10000 человек, из них 100 болеют, а у 99 из них положительный анализ; у других 9900 положительный анализ всего лишь у 99, отсюда выходит  $\frac{1}{2}$

Ех. 4. В телевизионной студии 3 двери , за одной из них приз . Игрок выбрал наугад одну из 3 дверей, после чего ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей и показывает, что там приза нет . После чего предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?

$H_1$  - игрок угадал

$H_2$  - игрок не угадал

$A$  - ведущий открыл дверь без приза

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(A|H_1) = 1 \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Но это неправильно, так как действия ведущего неслучайны - он всегда откроет дверь без приза

В этом случае, если мы гипотетически выберем 300 дверей, в 100 случаях мы отгадаем, ведущий откроет любую дверь без приза; но в 200 случаях мы не отгадаем, ведущий откроет вторую дверь без приза, и в этом случае мы сможем поменяться на дверь с призом, отсюда шанс  $\frac{2}{3}$ , если мы поменяем свой выбор

Ех. 5. Вероятность того, что в семье с детьми ровно  $k$  детей, равна  $\frac{1}{2^k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.

$H_i$  - в семье  $i$  детей ( $1 \leq i < \infty$ )

$$P(H_i) = \frac{1}{2^i}$$

$A$  - в семье нет девочки

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|H_i) = \frac{1}{2^i}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$$

## Лекция 4

### Серия испытаний Бернулли

Схемой Бернулли - называется серия одинаковых независимых экспериментов, каждый из которых имеет 2 исхода: произошло интересующее нас событие или нет

$p = p(A)$  - вероятность успеха при одном испытании

$q = 1 - p$  - вероятность неудачи

$v_n$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний

$$p(v_n = k) = p_n(k)$$

Из этого получаем формулу Бернулли:

**Th.** Вероятность того, что при  $n$  испытаниях произойдет ровно  $k$  успехов, равна  
 $p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

□

Рассмотрим один из элементарных исходов, благоприятных данному событию:

$A_n = \underbrace{YUY \dots YN \dots NNN}_{k \quad n-k}$  -  $k$  успехов,  $n - k$  неудачи

$$p(Y) = p, p(N) = q$$

Так как испытания независимы, то  $p(A_n) = p^k q^{n-k}$

Остальные элементарные исходы имеют ту же вероятность, перебираем все расстановки исходов, получаем  $C_n^k$ , в итоге, получаем формулу Бернулли

□

*Ex.* Вероятность попадания стрелка при одном выстреле - 0.8. Какова вероятность того, что из пяти выстрелов точными будут три

$$n = 5 \quad p = 0.8 \quad q = 1 - p = 0.2 \quad k = 3$$

$$p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$$

## Наиболее вероятное число успехов

Выясним, при каком значении  $k$  вероятность предшествующего числа успехов  $k - 1$  будет не более, чем вероятность  $k$  успехов

$$p_n(k - 1) \leq p_n(k)$$

$$C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \leq C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q \leq \frac{n!}{(k)!(n-k)!} p$$

$$\frac{q}{(k-1)!(n-k+1)!} \leq \frac{p}{(k)!(n-k)!}$$

$$\frac{q}{n-k+1} \leq \frac{p}{k}$$

$$k(1-p) \leq p(n-k+1)$$

$$k \leq np + p$$

$$\text{Отсюда } np + p - 1 \leq k \leq np + p$$

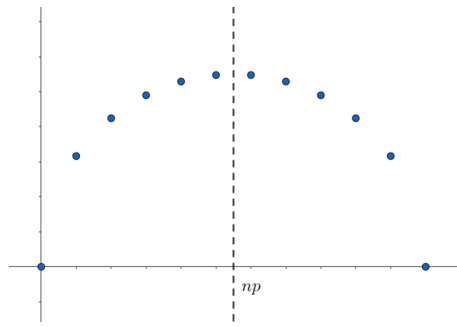
Рассмотрим 3 ситуации:

1)  $np$  - целое, тогда  $np + p$  - нецелое, и  $k = np$  - наиболее вероятное

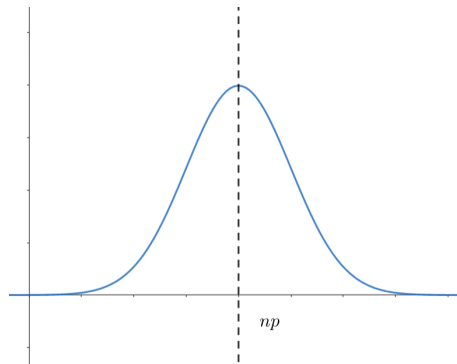
2)  $np + p$  - нецелое, тогда  $k = \lfloor np + p \rfloor$

3)  $np + p$  - целое, тогда  $np + p - 1$  - целое, и 2 наиболее вероятных числа успеха

Геометрическая интерпретация:



При увеличении числа  $n$  точки превращаются в кривую Гаусса



При увеличении числа испытаний  $n$  формула Бернулли вырождается в следующие асимптотические формы (применяем, если требуется найти вероятность точного числа успеха)

1) локальная формула Муавра-Лапласа

$$p_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \text{функция гаусса}$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Свойства  $\varphi(x)$ :

1.  $\varphi(x) = \varphi(-x)$  - функция четная
2. при  $x > 5$   $\varphi(x) \approx 0$

2) Интегральная формула Муавра-Лапласа (если требуется найти вероятность того, что число успехов в данном диапазоне)

$$p_n(k_1 \leq k \leq k_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \text{функция Лапласа}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} - \text{отклонение от левой границы, } x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} - \text{отклонение от правой}$$

Свойства  $\Phi(x)$

1.  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$  - функция нечетная
2. при  $x > 5$   $\Phi(x) \approx 0.5$

*Nota.* Эти формулы обычно можно применять при  $n \geq 100$  и  $0.1 \leq p \leq 0.9$



*Nota.* В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевают другую функцию:  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  - стандартное отклонение. Эта функция отличается от  $F_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi(x)$

Так как  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  - интеграл Пуассона

*Ex.* Вероятность попадания стрелка в цель 0.8, стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, что:

а) произошло ровно 330 попаданий

б) произошло от 312 до 336 попаданий

$$\text{а) } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{330 - 320}{8} = 1.25$$

$$p_{400}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(1.25) = \frac{1}{8} \varphi(1.25) \approx \frac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$$

$$\text{б) } x_1 = \frac{312 - 320}{8} = -1, x_2 = \frac{336 - 320}{8} = 2$$

$$p_{400}(312 \leq k \leq 336) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

## Статистическое понятие вероятности

Пусть проводим  $n$  реальных экспериментов,  $n_A$  - число появления события  $A$ ,  $\frac{n_A}{n}$  - относительная частота события  $A$ .

Эксперименты с монетой показали, что при больших  $n$ ,  $\frac{n_A}{n} \approx p(A)$  - явление стабилизации

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события

$n$  - число испытаний,  $p = p(A)$ ,  $\frac{n_A}{n}$  - экспериментальная частота

$$p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = p\left(-\varepsilon \leq \frac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon\right) = p(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) = p(np - n\varepsilon \leq n_A \leq n\varepsilon + np) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [\text{по интегральной формуле Лапласа}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$$

Итак, получили, что нужная нам вероятность  $p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$

## Закон больших чисел Бернулли

$$\text{Итак, } p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right)$$

при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} \rightarrow \infty$ ,  $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) \rightarrow 0.5$ ,  $p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 2 \cdot 0.5 = 1$  - закон больших

чисел показывает, что вероятность попадания относительной частоты в  $\varepsilon$ -трубу вероятность события приближается к 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 1 \text{ или } \frac{n_A}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p - \text{сходимость по вероятности}$$

*Ex.* Для оценки доли  $p$  курящих людей берется выборка объема  $n$ , и делается оценка доли курящих людей по формуле  $p^* = \frac{n_A}{n}$ . Каким должен быть объем  $n$ , чтобы с вероятностью  $\gamma = 0.95$  данная оценка отличалась от истинного значения не более, чем на  $\varepsilon = 0.01$

По формуле вероятности отклонения частоты от вероятности  $p(|p^* - p| \leq \varepsilon) = p\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) = 0.95$$

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right) = 0.475$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} = 1.96$$

$$\frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} = 196$$

$$\frac{1}{pq} = 38416$$

$$n \geq 38416pq$$

$$\text{В самой худшей ситуации } pq \leq 0.5^2 = \frac{1}{4}$$

$$n \geq \frac{38416}{4} = 9604$$

## Лекция 5

### Схема испытаний и соответствующее распределение

Введем обозначения:

$n$  - число испытаний

$p$  - вероятность успеха при одном испытании

$q = 1 - p$  - вероятность неудачи

#### I. Схема Бернулли

$\exists v_n$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний

$$P_n(v_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, \dots, n$  называется биномиальным распределением (обозначается  $B_{n,p}$  или  $B(n, p)$ )

## II. Схема до первого успешного испытания

Пусть проводится бесконечная серия испытаний, которая заканчивается после первого успешного испытания под номером  $\tau$

$$\text{Th. } P(\tau = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots$$

□

$$P(\tau = k) = P(\underbrace{H \dots H}_{k-1} Y) = q^{k-1}p$$

□

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow q^{k-1}p, k \in \mathbb{N}$  называется геометрическим распределением вероятности (обозначается  $G_p$  или  $G(p)$ )

*Nota.* Геометрическое распределение обладает свойством нестарения или свойством отсутствия последствия

$$\text{Th. } \exists P(\tau = k) = q^{k-1}p, k \in \mathbb{N}. \text{ Тогда } \forall n, k \geq 0 \quad P(\tau > n+k \mid \tau > n) = P(\tau > k)$$

□

Заметим, что  $P(\tau > m) = q^m$ , первые  $m$  - неудачи

$$P(\tau > n+k \mid \tau > n) = \frac{P(\tau > n+k, \tau > n)}{P(\tau > n)} = \frac{P(\tau > n+k)}{P(\tau > n)} = \frac{q^{n+k}}{q^n} = q^k$$

□

*Nota.*  $P(\tau = n+k \mid \tau > n) = p(\tau = k)$  - Lab. доказать

## III. Схема испытаний с несколькими исходами

Пусть при  $n$  независимых испытаний могут произойти  $m$  исходов (несовместных)

$p_i$  - вероятность  $i$ -ого исхода при одном испытании

**Th.** Вероятность того, что при  $n$  испытаниях первый исход появится  $n_1$  раз, второй -  $n_2$  раз,  $m$ -ый -  $n_m$  ( $\sum_{i=1}^m n_i = n$ ) равно

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

При  $m = 2$  получаем формулу Бернулли

□

Рассмотрим следующий благоприятный исход, обозначим  $A_1$

$$A_1 = \underbrace{11 \dots 1}_{n_1} \underbrace{22 \dots 2}_{n_2} \dots \underbrace{mm \dots m}_{n_m}$$

$$p(A_1) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}$$

Все остальные благоприятные исходы имеют ту же вероятность и отличаются лишь расположением  $i$ -ых исходов на  $n$  позициях, получаем мультиномиальную теорему:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

В итоге получаем требуемую формулу

□

*Ех.* Два одинаковых сильных шахматиста играют шесть партий

Вероятность ничьи в партии - 0.5. Какова вероятность того, что второй игрок выиграет две партии, а еще три сведет к ничьей

1-ый исход - выиграл 1 игрок

2-ой исход - выиграл 2 игрок

3-ий исход - ничья

$$n = 6; \quad p_3 = 0.5; \quad p_1 = p_2 = \frac{1 - p_3}{2} = 0.25$$

$$P_6(1; 2; 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} \frac{1}{2^9} \approx 0.12$$

#### IV. Урновая схема

В урне  $N$  шаров, из которых  $K$  шаров белые,  $N - K$  - черные

Из урны вынимаем (без учета порядка)  $n$  шаров. Найти вероятность, что из них  $k$  белых

а) Схема с возвратом (после каждого раза кладем шар обратно). В этом случае вероятность вынуть белый шар одинакова и равна  $\frac{K}{N}$ . Получаем схему Бернулли:  $P_n(k) = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$

б) Схема без возврата - вынутый шар мы выбрасываем

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$ ,  $k = 0, \dots, n$  называется гипергеометрическим распределением

*Nota.* Если  $K, N \rightarrow \infty$  так, что  $\frac{K}{N} \approx p$  (не меняется), а  $n$  и  $k$  зафиксировать, то после выбора  $n$  шаров пропорции состава шаров не сильно изменятся, поэтому логично предположить, что гипергеометрическое распределение будет сходиться к биномиальному

**Th.** Если  $K, N \rightarrow \infty$  таким образом, что  $\frac{K}{N} \rightarrow p \in (0; 1)$ , а  $n$  и  $0 \leq k \leq n$  фиксированы, то вероятность при гипергеометрическом распределении будет стремиться к биномиальному:

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

Воспользуемся леммой:  $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$  при  $n \rightarrow \infty$  и фиксированном  $k$

Доказательство леммы:  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{n^k}{k!} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{n^k}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$

□

$$P_{N,K}(n, k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \sim \frac{K^k}{k!} \frac{(N-K)^{n-k}}{N^n} \frac{n!}{N^n} = \frac{n!}{k!} \frac{(N-K)^{n-k}}{N^n} \frac{K^k}{N^n} = C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k} \rightarrow C_n^k \left(\frac{K}{N}\right)^k \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

□

## V. Схема Пуассона. Теорема Пуассона для схемы Бернулли

*Nota.* Если вероятность успеха  $p$  в схеме Бернулли мала или близка к 1, то предельная формула Лапласа при недостаточно большом числе испытаний дает достаточно большую погрешность.

В этой ситуации следует использовать формулу Пуассона (формула редких событий)

Схема: вероятность числа успеха при одном испытании  $p_n$  зависит от числа испытаний  $n$ , причем таким образом, что  $np_n \approx \lambda = \text{const}$

$\lambda$  - интенсивность появления редких событий в единицу времени в потоке испытаний

**Th. 1.** (формула Пуассона) Пусть  $n \rightarrow \infty, p_n \rightarrow 0$  таким образом, что  $np_n \rightarrow \lambda = \text{const} > 0$

Тогда вероятность  $k$  успехов при  $n$  испытаниях:  $P_n(k) = C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

□

Обозначим  $\lambda_n = np_n$ . Тогда  $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$  и

$$P_n(k) = C_n^k \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k!} \frac{\lambda_n^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n =$$

$$\frac{\lambda_n^k}{k!} \left( \left( 1 - \frac{\lambda_n}{n} \right)^{-\frac{n}{\lambda_n}} \right)^{-\frac{\lambda_n}{n} n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

□

**Th. 2.** (оценка погрешности в формуле Пуассона) Пусть  $v_n$  - число успехов при  $n$  испытаниях в схеме Бернулли

$p$  - вероятность успеха при одном испытании,  $\lambda = np$ ,  $A \subset \{0, 1, \dots, n\}$  - произвольное подмножество чисел

Тогда  $|P_n(v_n \in A) - \sum_{k \in A} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \min(p, np^2) = \min(p, p\lambda)$   
(без доказательства)

**Def.** Соответствие  $k \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  называется распределением Пуассона с параметром  $\lambda > 0$  (обозначается  $\Pi_\lambda$ )

*Ex.* Прибор состоит из 1000 элементов, вероятность отказа каждого элемента равна 0.001. Какова вероятность отказа больше двух элементов

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$n = 1000, p = 0.001, \lambda = 1$$

$$P_n(k > 2) = 1 - P_n(k \leq 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) \approx 1 - \left( \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} + \frac{1^2}{2!} e^{-1} \right) = 1 - \left( 1 + 1 + \frac{1}{2} \right) e^{-1} \approx 0.0803$$

## Лекция 6

### Случайные величины

Примеры случайных величин:

*Ex. 1.* Бросаем кость, может выпасть 6 граней, здесь случайная величина  $\xi$  - число выпавших очков

*Ex. 2.*  $\xi$  - время работы микросхемы, в этом случае время может быть:

а) дискретным -  $\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$

б) непрерывным -  $\xi \in [0; \infty)$

*Ex. 3.* Температура за окном:  $\xi \in (-50, +50)$

**Def.** На вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$  функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется  $\mathcal{F}$ -измеримой,

если  $\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x \} \in \mathcal{F}$  (то есть  $\xi^{-1}(y) \in \mathcal{F}$ , где  $y \in (-\infty; x)$ )

**Def.** Случайной величиной, заданной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , называется  $\mathcal{F}$ -измеримая функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , которая сопоставляет каждому элементарному исходу некоторое вещественное число

*Nota.* Не все функции являются  $\mathcal{F}$ -измеримыми

*Ex.* Кость:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ;  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$

Пусть  $\xi(\omega) = i$  - число выпавших очков. Тогда при  $x = 4$ :  $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \implies$  случайная величина не является  $\mathcal{F}$ -измеримой

В данном случае следует сделать  $\xi$  таким, что  $\xi(2) = \xi(4) = \xi(6) = 1$ ,  $\xi(1) = \xi(3) = \xi(5) = 0$

*Nota.* Смысл измеримости: если задана случайная величина  $\xi$ , то мы можем задать вероятность попадания случайной величины в интервал  $(-\infty; x)$ :  $p(\xi \in (-\infty; x)) = p(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\})$

А из интервалов  $(-\infty; x)$  с помощью операций пересечения, объединения и дополнения можно получить все другие интервалы (включая точки) и также приписать им вероятности

Из матанализа известно, что мера из интервалов однозначно продолжается до меры на всей Борелевской  $\sigma$ -алгебре на  $\mathbb{R}$  и, таким образом, с помощью случайной величины каждому Борелевскому множеству  $B$  также приписывается вероятность  $p(\xi \in B)$

Итак, пусть  $\xi$  задана на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ , с помощью нее получаем новой вероятностное пространство  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\xi)$

Получая новое вероятностное пространство, мы упрощаем и формализуем работу, так как можем не учитывать природу и структуру исходного пространства

**Def.** Функция  $p(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , ставящая в соответствие каждому Борелевскому множеству вероятность, называется распределением случайной величины  $\xi$

## Основные типы распределения

- a) Дискретное
- b) Абсолютно непрерывное
- c) Сингулярное
- d) Смешанное

## Дискретная случайная величина

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение, если она принимает не более, чем счетное число значений. То есть существует конечный или счетный набор чисел

$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  такой, что  $p(\xi = x_i) = p_i > 0$  и  $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) задается законом распределения: доска

$\xi$	$x_1$	$x_1$	$\dots$	$x_n$	$\dots$	- значения случайной величины
$p$	$p_1$	$p_1$	$\dots$	$p_n$	$\dots$	- вероятности этих значений

$(\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$  - условие нормировки)

Ex. 1. кость,  $\xi(\omega) = i$  - число выпавших очков

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ex. 2. все распределения из предыдущих лекций (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона)

Ex. 3. индикатор события  $A$ :  $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, & \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

## Числовые характеристики дискретных случайных величин

### I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность)

**Def.** Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной величины  $\xi$  называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

при условии, что данный ряд сходится абсолютно

*Nota.* Если  $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \infty$ , то говорят, что матожидание не существует

При условной сходимости ряда при перестановке членов сумма изменяется, поэтому необходима абсолютная

**Физический смысл:** Среднее значение - число, вокруг которого группируются значения случайной величины, центр тяжести точек  $x_i$  с весами  $p_i$

**Статистический смысл:** среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины при большом числе реальных экспериментов



## II. Дисперсия

**Def.** Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называют среднее квадратов ее отклонения от математического ожидания:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \text{ или } D\xi = \sum_{i=0}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i \text{ при условии, что данный ряд сходится}$$

В противном случае говорится, что дисперсии не существует

*Nota.* Дисперсию обычно удобно считать по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E\xi^2$

**Смысл** - квадрат среднего разброса (рассеивания) значения случайной величины относительно ее математического ожидания

## III. Среднее квадратическое отклонение

**Def.** Среднее квадратическое отклонение (СКО)  $\sigma_\xi$  называется величина  $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$

**Смысл** - средний разброс

*Ex. 1.* Кость

$\xi$	1	2	3	4	5	6
$p$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E\xi = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = 3.5 \text{ (в данном случае ср. арифм.)}$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^6 (x_i - E\xi)^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx 1.79$$

*Ex. 2.* Индикатор события  $A$ :  $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin A - \text{событие } A \text{ не происходит} \\ 1, \omega \in A - \text{событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

$\xi$	0	1
$p$	$1 - P(A)$	$P(A)$

$$E\xi = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A)$$

$$D\xi = 0^2 \cdot (1 - P(A)) + 1^2 P(A) - P(A)^2 = P(A)(1 - P(A)) = pq$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{pq}$$

## Свойства матожидания и дисперсии

**Th. 1.** Случайная величина  $\xi$  имеет вырожденное распределение, если  $\xi(\omega) = \text{const} \quad \forall \omega \in \Omega$

$\xi$	$C$
$p$	$1$

$$E\xi = C \quad D\xi = 0$$

**Th. 2.** Свойство сдвига:  $E(\xi + C) = E\xi + C; D(\xi + C) = D\xi$

**Th. 3.** Свойство растяжения:

$$E(C\xi) = CE\xi$$

$$D(C\xi) = C^2 D\xi$$

Lab. 2-3 доказать

**Th. 4.**  $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$  (из третьего свойства матожидание - линейная функция)

□

$$\begin{aligned} \exists x_i, y_j - \text{значения случайных величин } \xi, \eta, \text{ а } p_i \text{ и } q_j - \text{их соответствующие вероятности} \\ E(\xi + \eta) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) + \sum_j y_j \sum_i p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) \\ = \sum_i x_i p(\xi = x_i) + \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi + E\eta \end{aligned}$$

□

**Def.** Дискретные случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, если  $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j) \quad \forall i, j$

То есть случайные величины принимают свои величины независимо друг от друга

**Th. 5.** Если случайные свойства  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$ ; обратное неверно

□

$$\begin{aligned} E(\xi\eta) &= \sum_{i,j} x_i y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_i x_i \sum_j y_j p(\xi = x_i) p(\eta = y_j) = \\ &= \sum_i x_i p(\xi = x_i) \sum_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta \end{aligned}$$

□

**Th. 6.**  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

□

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E((E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

□

**Def.**  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$ , где  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$  - ковариация случайных величин (равна 0 при независимых величинах) - индикатор наличия связи между случайными величинами

□

$$D(\xi + \eta) = E(\xi + \eta)^2 - (E(\xi + \eta))^2 = E\xi^2 + 2E\xi E\eta + E\eta^2 - (E\xi + E\eta)^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

□

**Th. 7.** Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$  и  $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$

□

**Th. 8.** Общая формула дисперсии суммы:  $D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i,j(i \neq j)} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$

## Другие числовые характеристики

Моменты старших порядков

а)  $m_k = E\xi^k$  - момент  $k$ -ого порядка случайной величины  $\xi$

б)  $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

$E\xi = m_1$  - момент первого порядка

$E\xi^2 = m_2$  - момент второго порядка

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$  - центральный момент второго порядка

*Nota.* Центральные моменты можно выразить через обычный момент:

$$\mu_2 = D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = m_2 - m_1^2$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_2 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

Ех. Разберем задачу Бюффона с точки зрения матожидания (для простоты  $l$  - ширина доски): пусть  $p(A)$  - пересечет стык,  $\xi = I_A$  - число пересечений. Тогда матожидание  $E\xi = EI_A = P(A)$ . Заметим, что при изменении длины иглы с  $l$  до  $2l$  матожидание пересекаемых стыков увеличивается в два раза. Помимо этого можно составить из  $k$  игл ломаную, матожидание стыков которой будет равно  $kE\xi$ .

Заметим, что такое работает и в обратную сторону: при уменьшении иглы в  $k$  раз матожидание равно  $\frac{E\xi}{k}$ .

Теперь сделаем замкнутый многоугольник из игл, получим, что матожидание в таком случае  $P \frac{E\xi}{l}$ , где  $P$  - периметр.

В пределе строим круг диаметра  $l$  - он всегда пересечет линии стыка 2 раза, значит матожидание  $E_o = P_o \frac{E\xi}{l} = 2$ .

Длина окружность  $P_o = \pi l$ , получаем  $E\xi = \frac{2l}{P_o} = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$ .

## Лекция 7

### Стандартное дискретное распределение

#### I. Распределение Бернулли

Распределение Бернулли  $B_p$  (с параметром  $0 < p < 1$ )

$\xi$  - число успехов при одном испытании,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании

$\xi$	0	1
$p$	$1 - P(A)$	$P(A)$

Матожидание:  $E\xi = p$

Дисперсия:  $D\xi = p(1 - p) = pq$

Ех. Индикатор события  $I_A \in B_p$  как раз имеет распределение Бернулли, где  $p = P(A)$ .

#### II. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение  $B_{n,p}$  (с параметрами  $n, p$ )

$\xi$  - число успехов в серии из  $n$  испытаний,  $p$  - вероятность успеха при одном испытании

$p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n \iff \xi \in B_{n,p}$

$\xi$	0	1	...	$k$	...	$n$
$p$	$q^n$	$nq^{n-1}p$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$p^n$

Заметим, что  $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - число успехов при  $i$ -ой испытании

$$E\xi_i = p; \quad D\xi = pq$$

$$E\xi = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = p + \dots + p = \boxed{np}$$

$$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = pq + \dots + pq = \boxed{npq}$$

### III. Геометрическое распределение

Геометрическое распределение  $G_p$  (с параметром  $p$ )

$\xi$  - номер 1-ого успешного испытания в бесконечной серии

$$p(\xi = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots \iff \xi \in G_p$$

$\xi$	1	2	...	$k$	...	$n$
$p$	$p$	$qp$	...	$q^{k-1}p$	...	$p_n$

$$\text{Матожидание } E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left( \sum_{k=1}^{\infty} (q^k) \right)' = p \left( \frac{1}{1-q} \right)' =$$

$$\frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q_{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + E\xi = pq \left( \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'' + \frac{1}{p} = pq \left( \frac{1}{1-q} \right)'' + \frac{1}{p} =$$

$$2pq \frac{1}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = 2pq \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

### IV. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона  $\Pi_\lambda$  (с параметром  $\lambda > 0$ )

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ , если  $p(\xi =$

$$k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\xi$	0	1	...	$k$	...	$n$
$p$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...	$p_n$

Покажем корректность определения - докажем, что сумма нижней строки равна 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{ряд Тейлора для } e^x} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda = np$$

$$\begin{aligned}
E\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \\
&\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda \\
D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

## Задача о разорении игрока

Постановка задачи: играют 2 игрока, вероятность выигрыша первого игрока в одной игре равна  $p$ ,  $q = 1 - p$  - вероятность его проигрыша (выигрыш второго)

В каждой игре разыгрывается 1 биткоин. Капитал первого игрока -  $k$  биткоинов,  $m - k$  биткоинов - капитал второго

Найти вероятность разорения первого игрока

Траектория капитала первого игрока будет выглядеть как-то так:



Пусть  $r_k$  - интересующая нас вероятность разорения игрока при капитале  $k$  (то есть достижения оси абсцисс на графике)

$$r_k = p \cdot r_{k+1} + q r_{k-1}$$

$$p r_{k+1} - r_k + (1 - p) r_{k-1} = 0, \quad r_0 = 1, r_m = 0$$

$$p \lambda^2 - \lambda + (1 - p) = 0$$

$$D = 1 - 4p(1 - p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p - 1)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm (2p - 1)}{2p}; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \frac{2 - 2p}{2p} = \frac{q}{p}$$

$$\text{Обозначим } \lambda = \frac{q}{p}$$

Рассмотрим два случая:

- $p \neq \frac{1}{2}$

Тогда общее решение:  $r_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = C_1 + C_2 \lambda^k$

Найдем частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 + C_2 \lambda^m \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 1 - C_2 + C_2 \lambda^m = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2(1 - \lambda^m) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - \frac{1}{1 - \lambda^m} = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} \\ C_2 = \frac{1}{1 - \lambda^m} \end{cases}$$

$$r_k = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} + \frac{1}{1 - \lambda^m} \lambda^k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m}$$

Посмотрим, что будет происходить при бесконечной игре (то есть когда  $m \rightarrow \infty$  - капитал неограничен)

1)  $p < q$ , то есть  $\lambda > 1$ . Тогда  $\lambda^m \rightarrow \infty$ ,  $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} = \frac{\frac{\lambda^k}{\lambda^m} - 1}{\frac{1}{\lambda^m} - 1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$  - то есть первый игрок гарантированно разорится

2)  $p > q$ , то есть  $\lambda < 1$ . Тогда  $\lambda^m \rightarrow 0$ ,  $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda^k$  - то есть  $r_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$

- $p = \frac{1}{2} \implies D = 0$

Тогда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Общее решение:  $r_k = C_1 \lambda^k + C_2 k \lambda_k = C_1 + C_2 k$

Частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = C_1 + C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ -1 = C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ C_2 = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

$$r_k = 1 - \frac{k}{m}$$

При бесконечной игре:

$$r_k = 1 - \frac{k}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 \text{ - то есть при равной игре игрок неминуемо разорится}$$

## Случайное блуждание на прямой

Пусть в начальный момент времени находимся в начале координат. С вероятностью  $p$  идем на единицу вправо, с вероятностью  $q$  - влево

При  $p = \frac{1}{2}$  мы рано или поздно попадем в любую точку числовой прямой

Можно привести аналогию с орлянкой: рано или поздно каждый игрок будет при сколь угодно большом выигрыше

Посмотрим на орлянку как на распределение Бернулли:

$\xi$	-1	1
$p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E\xi = 0; \quad D\xi = 1$$

Пусть  $\xi$  - выигрыш первого после  $n$  игр.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = 0$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i = n$$

$\sigma_\xi = \sqrt{n}$  - среднее квадратическое отклонение

Это означает, что при большом  $n$  СКО поглотит всю числовую прямую

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow E\xi$$



Закон больших чисел в этой ситуации говорит, что точка останется у 0, однако в то же время она может оказаться на любой точке на числовой прямой

Ex. По  $n$  конвертам случайным образом раскладывается  $m$  писем. Случайная величина  $\xi$  - число писем в своих конвертах

$$\square A_i - \text{число } i \text{ письма в своем конверте, } \xi_i = I_A = \begin{cases} 0, & i\text{-ое письмо в не своем конверте} \\ 1, & i\text{-ое письмо в своем конверте} \end{cases}$$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$E\xi_i = P(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$D\xi_i = pq = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$$

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = 1 \frac{1}{n} = 1 - \text{в среднем будет одно письмо в своем конверте}$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Найдем ковариацию:

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E\xi_i \xi_j - E\xi_i E\xi_j = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$\text{Заметим, что для любых } i, j, i < j: \xi_i \xi_j = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы одно не в своем} \\ 1, & \text{если оба в своем} \end{cases}$$

$$\text{То есть } \xi_i \xi_j \in B_p \text{ и } E\xi_i \xi_j = P(\text{оба письма в своих}) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{Получаем: } D\xi = n \frac{n-1}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

## Лекция 8

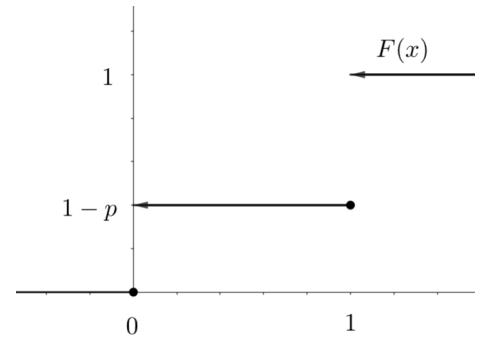
### Функция распределения

Def. Функция распределения  $F_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  называется функция  $F_\xi(x) = P(\xi < x)$



$$\text{Ex. } \xi \in B_p \quad \begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1-p & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

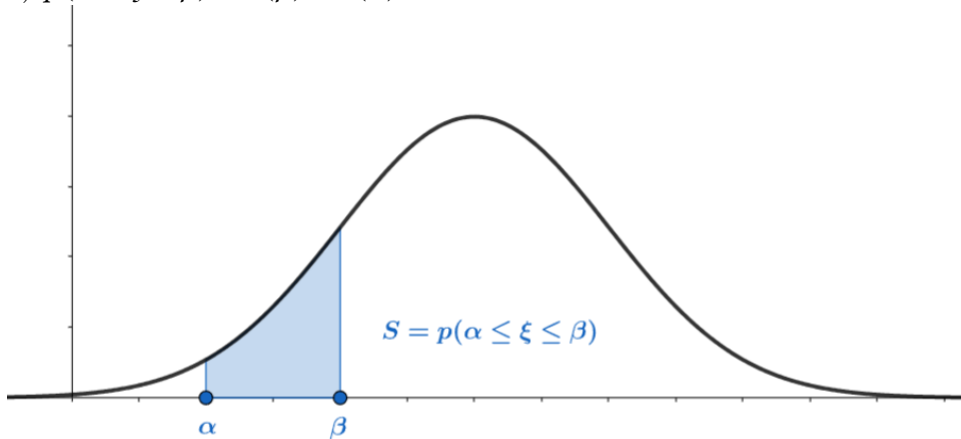


### Свойства функции распределения

- 1)  $F(x)$  ограничена  $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2)  $F(x)$  неубывающая функция:  $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

$$x_1 < x_2 \implies \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \implies p(\xi < x_1) \leq p(\xi < x_2), \text{ то есть } F(x_1) \leq F(x_2)$$

$$3) p(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$



$$p(\xi < \beta) = p(\xi < \alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta) \implies F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta)$$

*Nota.* Функция распределения  $F(x)$  - вероятность попадания в интервал  $(-\infty; x)$ . Так как Борелевская  $\sigma$ -алгебра порождается такими интервалами, то распределение полностью задается этой функцией

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Так как  $F(x)$  монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать эти пределы для некоторой последовательности  $x_n \rightarrow \pm\infty$   
 $\exists A_n = \{n-1 \leq \xi < n, n \in \mathbb{N}\}$  - несовместные события, так как  $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ , то по аксиоме

счетной аддитивности, вероятность  $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N p(n-1 \leq \xi < n) =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (F(n) - F(n-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) - \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1 + \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N)$$

Так как  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) \leq 1$  и  $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) \geq 0$ , то  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1$  и  $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 0$

5)  $F(x)$  непрерывна слева:  $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий  $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_0, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как  $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности  $p(B_n) \rightarrow 0$

$$P(B_n) = F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow 0$$

$$F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow F(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

6) Скачок в точке  $x_0$  равен вероятности попадания в данную точку:  $F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$   
или  $F(x_0 + 0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \leq x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий  $C_n = \{x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как  $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности  $p(C_n) \rightarrow 0$

$$P(C_n) = F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow 0$$

$$p(x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}) + p(\xi = x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

7) Если функция распределения непрерывна в точке  $x = x_0$ , то очевидно, что вероятность попадания в эту точку  $p(\xi = x_0) = 0$  (следствие из 6 пункта)

8) Если  $F(x)$  непрерывна  $\forall x \in \mathbb{R}$ , то  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

**Th.** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение тогда и только тогда, когда ее функция распределения имеет ступенчатый вид

## Абсолютно непрерывное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует  $f_\xi(x)$  такая, что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad p(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x) dx$

Функция  $f_\xi$  называется плотностью распределения случайной величины

(в определении использует интеграл Лебега, так как  $B$  может быть не просто интервалом на  $\mathbb{R}$ )

### Свойства плотности и функции распределения абсолютно непрерывного распределения

1) Вероятностно-геометрический смысл плотности:  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x) dx$

2) Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x) dx = 1$

Из определения, если  $B = \mathbb{R}$

3)  $F_\xi(x) = \int_B f_\xi(x) dx$

Если  $B = (-\infty; x)$ , то  $F_\xi(x) = p(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^x f_\xi(x) dx$

4)  $F_\xi(x)$  непрерывна

Из свойства непрерывности интеграла с верхним переменным пределом

5)  $F_\xi(x)$  дифференцируема почти везде и  $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$  для почти всех  $x$

По теореме Барроу

6)  $f_\xi(x) \geq 0$  по определению и как производная неубывающей  $F_\xi(x)$

7)  $p(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  - так как  $F_\xi(x)$  непрерывна

8)  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

9) **Th.** Если  $f(x) \geq 0$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  (выполнены свойства 2 и 6), то  $f(x)$  - плотность некоторого распределения

### Числовые характеристики

**Def.** Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной абсолютно непрерывной величины  $\xi$  называется величина  $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{\xi}(x)dx$  при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть  $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f_{\xi}(x)dx < \infty$

**Def.** Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называется величина  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_{\xi}(x)dx$  при условии, что данный интеграл сходится

*Nota.* Вычислять удобно по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x)dx - (E\xi)^2$

**Def.** Среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$  определяется, как корень дисперсии. Смысл этих величин такой же, как и при дискретном распределении. Также свойства аналогичны тем, что и при дискретном распределении

### Другие числовые характеристики

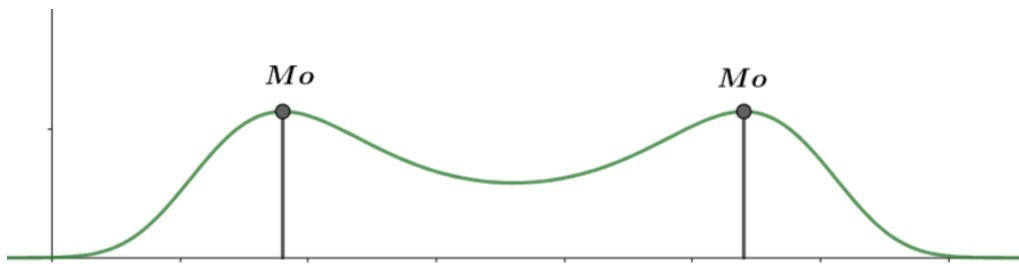
$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x)dx$  - момент  $k$ -ого порядка

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_{\xi}(x)dx$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

**Def.** Медианой  $Me$  абсолютно непрерывной случайной величины  $\xi$  называется значение случайной величины  $\xi$ , такое что  $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$



**Def.** Модой  $Mo$  случайной величины  $\xi$  называется точка локального максимума плотности



## Сингулярное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет случайное распределение, если  $\exists B$  - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега  $\lambda(B) = 0$ , такое что  $p(\xi \in B) \in 1$ , но  $P(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in B$

*Nota.* Такое Борелевское множество состоит из несчетного множества точек, так как в противном случае по аксиоме счетной аддитивности  $p(\xi \in B) = 0$ . То есть при сингулярном распределении случайная величина  $\xi$  распределена на несчетном множестве меры 0

*Nota.* Так как  $p(\xi = x) = 0 \quad \forall x$ ,  $F_\xi$  непрерывна.

*Ex.* Сингулярное распределение получим, если возьмем случайную величину, функция распределения которой - лестница Кантора

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}F(3x) & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2) & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



### Th. Лебега.

$\square F_\xi(x)$  - функция распределения  $\xi$ . Тогда  $F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$ , где  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$F_1$  - функция дискретного распределения

$F_2$  - функция абсолютно непрерывного распределения

$F_3$  - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси

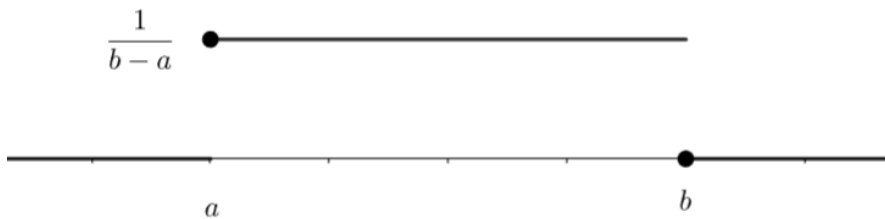
## Лекция 9

### Стандартное абсолютно непрерывное распределение

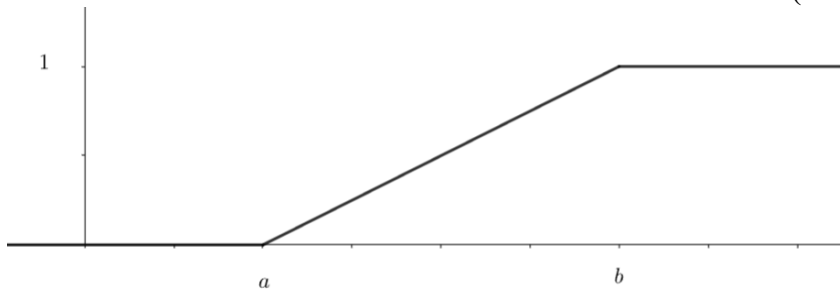
#### I. Равномерное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение  $\xi \in u(a, b)$ , если ее плотность на этом отрезке постоянна

Получаем функцию плотности  $f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$   $\frac{1}{b-a}$  из усл. нормировки



Из этого функция распределения  $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$



**Числовые характеристики:**

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

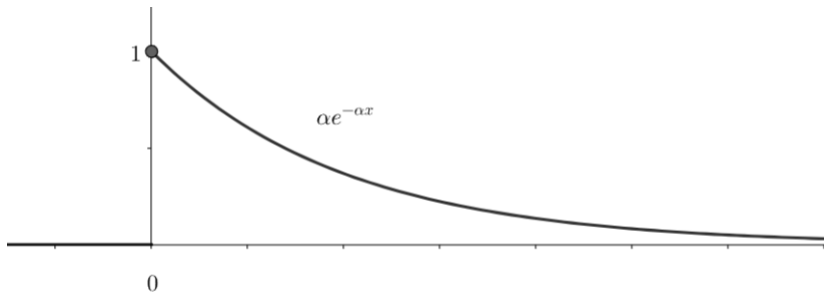
$$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} \text{ при условии, что } \alpha, \beta \in [a, b]$$

*Nota.* Примеры равномерного распределения: задача со временем, датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение  $u(0, 1)$

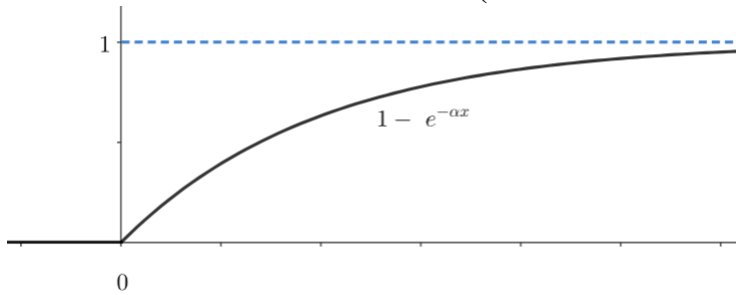
## II. Показательное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром  $\alpha > 0$  (обозн.  $\xi \in E_\alpha$ ), если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Функция распределения  $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$



**Числовые характеристики:**

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx = \left[ \begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{matrix} \right] = -xe^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx =$$

$$-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} (\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} - 1) = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x}dx = \left[ \begin{matrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\alpha e^{-\alpha x} & v=-e^{-\alpha x} \end{matrix} \right] = -x^2 e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x}dx =$$

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} = \frac{2}{\alpha} E\xi = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\alpha}$$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\alpha\alpha} - e^{-\beta\alpha} \quad a, b \geq 0$$



*Nota.* Из непрерывных случайных величин только показательная обладает свойством нестарения

**Th.**  $\exists \xi \in E_\alpha$ . Тогда  $p(\xi < x + y \mid \xi > x) = p(\xi > y) \quad \forall x, y > 0$

□

$$p(\xi < x + y \mid \xi > x) = p(\xi > y) = \frac{p(\xi > x + y, \xi > x)}{p(\xi > x)} = \frac{1 - p(\xi < x + y)}{1 - p(\xi < x)} = \frac{1 - F(x + y)}{1 - F(x)} = \frac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = e^{-\alpha y} = 1 - (1 - e^{-\alpha y}) = 1 - p(\xi < y) = p(\xi > y)$$

□

*Ex. 1.* Время работы надежной микросхемы до поломки

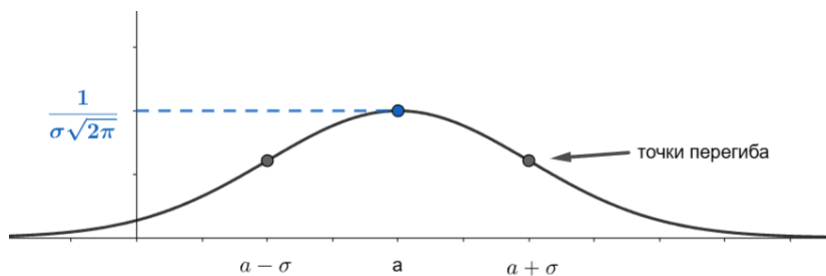
*Ex. 2.* Время между появлениями двух редких событий (через схему Пуассона)

*Nota.* Применится в системах массового обслуживания, теория надежности

### III. Нормальное распределение (Гауссовское)

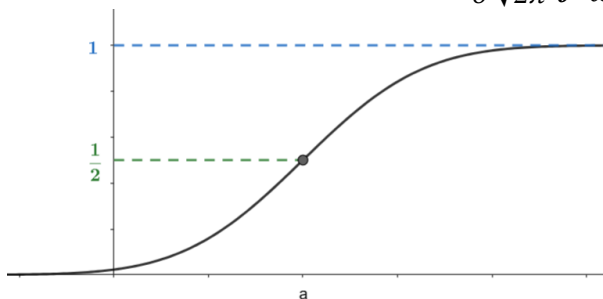
**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет нормальное распределение с параметрами  $a$  и  $\sigma^2$  (обозн.  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ ), если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



Смысл параметров распределения:  $a = E\xi$  - матожидание и медиана,  $\sigma$  - СКО, а  $D\xi = \sigma^2$

Функция распределения:  $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$



Проверим корректность определения - условие нормировки. Покажем, что  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[ \begin{array}{ll} t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} & dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \\ t(\pm\infty) = \pm\infty & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{array} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1 - \text{верно}$$

Ясно, что  $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$  - интеграл сходится абсолютно для любого  $k$  (степень  $e$  задавит полином)

$$E\xi = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a \text{ в силу симметрии}$$

Найдем дисперсию при помощи дифференцирования интеграла по параметру:

$$\text{Из условия нормировки } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left( -\frac{(x-a)^2}{2} (-\sigma^{-3}) \right) dx = 1$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 = D\xi, \text{ получаем, что } \sigma - \text{СКО}$$

## Стандартное нормальное распределение

**Def.** Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами  $a = 0, \sigma^2 = 1$ :  $\xi \in N(0, 1)$

Плотность:  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  - функция Гаусса

$$E\xi = 0; D\xi = 1$$

Распределение:  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  - функция стандартного нормального распределения

Заметим, что  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(x)$ , где  $\Phi(x)$  - функция Лапласа

Функция Лапласа нечетная и из соображения симметрии легко вычисляется для отрицательных  $x$ , однако большинство ПО используют  $F_0(x)$

## Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями

1)  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ . Тогда  $F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

□

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \left[ \begin{array}{lll} z = \frac{t-a}{\sigma} & t = \sigma z + a & dt = \sigma dz \\ z(-\infty) = -\infty & z(x) = \frac{x-a}{\sigma} & \end{array} \right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

□

2) Если  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0, 1)$  (процесс  $\xi \rightarrow \eta$  называется стандартизацией)

□

$$F_\eta(x) = p(\eta < x) = p\left(\frac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = p(\xi < \sigma x + a) = F_\xi(\sigma x + a) = F_0\left(\frac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = F_0(x), \text{ так как}$$

$$F_\eta(x) = F_0(x), \text{ то } \eta \in N(0, 1)$$

□

3)  $\square \xi \in N(a, \sigma^2)$ . Тогда  $p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

4) Вероятность попадания в симметричный интервал (вероятность отклонения случайной величины от матожидания)  $p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$

$$p(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi < a + t) = \Phi\left(\frac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - t - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

*Nota.* Если через  $F_0(x)$ , то  $p(|\xi - a| < t) = 2F_0\left(\frac{t}{\sigma}\right) - 1$

5) Правило 3 «сигм»:  $p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$  - попадание случайной величины нормального распределения в интервал  $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$  близко к 1

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.49685 = 0.9973$$

6) Свойство линейности: если случайная величина  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$  (можем доказать при помощи свойств ранее, но мы докажем позже, используя другие методы)

7) Устойчивость относительно суммирования: если случайные величины  $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2)$ ,  $\xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$ , и они независимы, то  $\xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

### Коэффициенты асимметрии и эксцесса

**Def. 1.** Асимметрией распределения называется число  $A_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu^3}{\sigma^3}$

**Def. 2.** Эксцессом распределения называется число  $E_s = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$

*Nota.* Если случайная величина  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $A_\xi = E_\xi = 0$ , таким образом, отличие этих характеристик от нуля характеризует степень отклонения распределения. Благодаря этим и другим параметрам, можно проверять на практике, является ли распределение нормальным

## Лекция 10

### Преобразование случайных величин

#### Стандартизация случайной величины

**Def.** Пусть имеется случайная величина  $\xi$ . Соответствующей ей стандартной величиной называется случайная величина  $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sigma}$

**Свойства:**

$$E\eta = 0; D\eta = 1$$

$$E\eta = E\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}(E\xi - E\xi) = 0$$

$$D\eta = D\frac{\xi - E\xi}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}D\xi = 1$$

Стандартизованная случайная величина не имеет единиц измерения, таким образом, ее свойства от них не зависят

Задача: пусть имеется функция  $g(x)$  и случайная величина  $\xi$ ,  $\eta = g(\xi)$ . Определить ее характеристики

*Nota.* Если  $\xi$  - дискретная случайная величина, то ее законы распределения находятся просто: значения  $x_i$  в верхней строке заменяем  $g(x_i)$ , вероятности остаются прежние. Поэтому будем рассматривать непрерывной случайной величины  $\xi$

*Nota.* Возможна ситуация, когда  $\xi$  - абсолютно непрерывная случайная величина,  $g(x)$  - непрерывна, но  $g(\xi)$  имеет дискретное распределение

#### Линейное преобразование

**Th.** Пусть  $\xi$  имеет плотность  $f_\xi(x)$ , тогда  $\eta = a\xi + b$ , где  $a \neq 0$ , имеет плотность  $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|}f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$

Пусть  $a > 0$ , тогда  $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi < \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t) dt =$

$$\left[ \begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dy \quad y = at + b \\ y(-\infty) = -\infty \quad y(\frac{x-b}{a}) = x \end{array} \right] = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \Rightarrow \eta = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Пусть  $a < 0$ , тогда  $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(a\xi + b < x) = p(\xi > \frac{x-b}{a}) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{\infty} f_\xi(t) dt =$

$$\left[ \begin{array}{l} t = \frac{y-b}{a} \quad dt = \frac{1}{a} dy \quad y = at + b \\ y(\infty) = -\infty \quad y(\frac{x-b}{a}) = x \end{array} \right] = - \int_{-\infty}^x \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy \Rightarrow \eta = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Следствие

1) Если  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b; \gamma^2\sigma^2)$

Так как  $\xi \in N(a, \sigma^2)$ , то  $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$

Тогда  $f_\eta(x) = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{x-b}{\gamma}-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|\gamma|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b-a\gamma)^2}{2\sigma^2\gamma^2}} \Rightarrow \eta \in N(b+a\gamma; \sigma^2\gamma^2)$

- 2) Если  $\eta \in N(0, 1)$  - стандартное нормальное распределение, то  $\xi = \sigma\eta + a \in N(a, \sigma^2)$
- 3) Если  $\eta \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение и  $a > 0$ , то  $\xi = a\eta + b \in U(b, a+b)$
- 4) Если  $\xi \in E_\alpha$ , то  $\alpha\xi \in E_1$

**Монотонное преобразование**

**Th.** Пусть  $f_\xi(x)$  - плотность случайной величины  $\xi$ ,  $g(x)$  - строго монотонная функция. Тогда случайная величина  $\eta = g(\xi)$  имеет плотность

$$f_\eta(x) = |h'(x)| f_\xi(h(x)), \quad \text{где } h(g(x)) = x$$

Если  $g(x)$  не является монотонной функцией, то поступаем следующим образом: разбиваем  $g(x)$  на интервалы монотонности, для каждого  $i$ -ого интервала находимся  $h_i(x)$  и плотность случайной величины ищем по формуле Смирнова:  $f_\eta(x) = \sum_{i=0}^n |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$

**Квантильное преобразование**

**Th. 1.** Пусть функция распределения случайной величины  $\xi$   $F_\xi(x)$  - непрерывная функция. Тогда  $\eta = F(\xi) \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение

Ясно, что  $0 \leq \eta \leq 1$

а)  $F(x)$  - строго возрастающая функция. Тогда  $\exists F^{-1}(x)$  - обратная,  $F_\eta(x) = p(\eta < x) =$

$$p(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} - \text{функция распределения } U(0, 1)$$

б)  $F(x)$  - не является строго возрастающей функцией - то есть существуют участки постоянства, в этом случае определим  $F^{-1}$  как  $F^{-1}(x) = \min_t (t \mid F(t) = x)$  - то есть берем самую левую точку такого интервала

Тогда снова будет при  $0 \leq x \leq 1$   $F_\eta(x) = p(\eta < x) = p(F(\xi) < x) = F(F^{-1}(x)) = x$

Сформулируем обратную теорему: пусть  $F(x)$  - функция распределения (необязательно непрерывная) случайной величины  $\xi$ , обозначим  $F^{-1}(x) = \inf_t (t \mid F(t) \geq x)$ .

В случае непрерывной  $F(x)$  это определение совпадает с предыдущим

**Th. 2.** Пусть  $\eta \in U(0, 1)$  - стандартное равномерное распределение,  $F(x)$  - произвольная функция распределения. Тогда  $\xi = F^{-1}(\eta)$  имеет функцию распределения  $F(x)$

Данное преобразование  $\xi = F^{-1}(\eta)$  называют квантильным

Доказательство аналогично предыдущей теореме

Смысл: датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение, из теоремы следует, что при помощи датчика случайных чисел и квантильного преобразования мы сможем смоделировать любое нужное распределение

Ех. 1. Смоделируем показательное распределение  $E_\alpha$ :  $F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$\eta = 1 - e^{-\alpha x}$ ,  $e^{-\alpha x} = 1 - \eta$ ,  $x = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta)$  - функция, обратная к  $F_\alpha(x)$

Если  $\eta \in U(0, 1)$ , то  $\xi = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \eta) \in E_\alpha$

Ех. 2.  $\xi \in N(0, 1)$ ,  $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} 2dz$

Пусть  $F_0^{-1}(x)$  - функция обратная к  $F_0(x)$

Если  $\eta \in U(0, 1)$ , то  $F_0^{-1}(\eta) \in N(0, 1)$

## Характеристики преобразованной случайной величины

**Th.** Если  $\xi$  - дискретная случайная величина, то  $Eg(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p(\xi = x_i)$

Для непрерывной случайной величины  $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx$

### Свойства моментов

- 1) Если  $\xi \geq 0$ , то  $E\xi \geq 0$
- 2) Если  $\xi \leq \eta$ , то  $E\xi \leq E\eta$

$$\xi \leq \eta \implies \eta - \xi \geq 0 \implies E(\eta - \xi) \geq 0 \implies E\eta - E\xi \geq 0 \implies E\eta \geq E\xi$$

- 3) Если  $|\xi| \leq |\eta|$ , то  $E|\xi|^k \leq E|\eta|^k$
- 4) Если существует момент  $m_t$  случайной величины  $\xi$ , то существует  $m_s$  при  $s < t$  (при условии, что интеграл/сумма сходятся)

Пусть  $s < t$ . Тогда  $|x|^s \leq \min(1, |x|^t) \leq 1 + |x|^t$ , так как при  $|x| < 1$ ,  $|x|^s \leq 1$  и при  $|x| \geq 1$ ,  $|x|^s \leq |x|^t$   
 $E|\xi|^s \leq E|\xi|^t + 1$  и если  $E|\xi|^t$  существует (конечно), то  $\exists E|\xi|^s$

**Th. Неравенство Йенсена.** Пусть функция  $g(x)$  выпукла вниз, тогда для любой случайной величины  $\xi$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

*Nota.* Если  $g(x)$  выпукла вверх, знак неравенства меняется

Если  $g(x)$  выпукла вниз, то в любой ее точке, можно провести прямую, лежащую не выше графика функции. То есть для любой  $x_0$  существует  $k(x_0)$  такой, что  $g(x) \geq g(x_0) + k(x_0)(x - x_0)$

Пусть  $x_0 = E\xi$ ,  $g(E\xi) \geq g(E\xi) + k(E\xi)(x - E\xi)$

$$Eg(\xi) \geq Eg(E\xi) + k(E\xi)(E\xi - E\xi)$$

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Следствие:

$$Ee^\xi \geq e^{E\xi}, \quad E\xi^2 \geq (E\xi)^2, \quad E|q| \geq |Eq|, \quad E \ln(\xi) \leq \ln(E\xi), \quad E\frac{1}{\xi} \geq \frac{1}{E\xi} \text{ при } \xi > 0$$

Ех. на формулу Смирнова: дана плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{4}{3x^2}, & 1 \leq x \leq 4, \\ 0 & x > 4 \end{cases}$$

Найти  $f_\eta$  для  $\eta = |\xi - 2|$

Решение

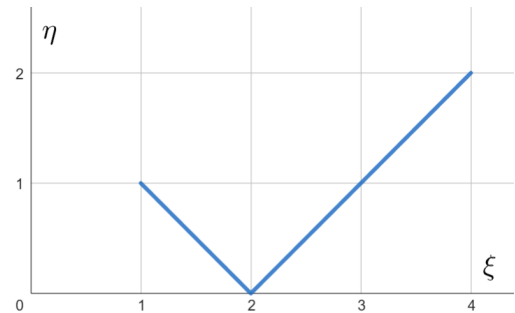
$$\xi \in [1, 4], \quad \eta \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} 0 \leq \eta \leq 1 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 \text{ и } h_2(\eta) = 2 - \eta & - 2 \text{ ветви} \\ 1 < \eta \leq 2 \implies h_1(\eta) = \eta + 2 & - 1 \text{ ветвь} \end{cases}$$

$$h'_1(\eta) = 1, h'_2(\eta) = -1 \quad |h'_1(\eta)| = |h'_2(\eta)| = 1$$

$$f_\eta(x) = \sum_i |h'_i(x)| f_\xi(h_i(x))$$

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{3} \left( \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} \right), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{4}{3} \frac{1}{(x+2)^2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$



## Лекция 11

### Сходимость случайных величин

Рассмотрим 3 вида сходимости:

- Сходимость «почти наверное»

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет свойство Cond «почти наверное», если вероятность  $p(\xi \text{ имеет свойство Cond}) = 1$

*Nota.* То есть  $p(\xi \text{ не имеет свойство Cond}) = 0$

$p(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \text{ не имеет св-во Cond})$

**Def.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится «почти наверное» к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi$ ), если  $p(\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)) = 1$

- Сходимость по вероятности

**Def.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}$  сходится по вероятности к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - \xi| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$



*Nota.* Не надо думать, что из сходимости по вероятности следует сходимость математического ожидания  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \not\Rightarrow E\xi_n \rightarrow E\xi$

**Th.** Пусть  $|\xi_n| \leq C = \text{const} \quad \forall n$

Тогда  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow E\xi_n \rightarrow E\xi$

- Слабая сходимость

**Def.** Последовательность случайных величин  $\xi_n$  слабо сходится к случайной величине  $\xi$  при  $n \rightarrow \infty$  ( $\xi_n \Rightarrow \xi$ ), если  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_\xi(x) \forall x$ , где  $F_\xi(x)$  - непрерывна

### Связь между видами сходимости

**Th.**  $\xi_n \xrightarrow{\text{п. н.}} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \Rightarrow \xi$

**Th.** Если  $\xi_n C = \text{const}$ , то  $\xi_n \xrightarrow{p} C$

Если  $\xi_n \Rightarrow C$ , то по определению  $F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_C(x) = \begin{cases} 0, & x \leq C \\ 1, & x > C \end{cases} \quad \forall x \neq C$

$\forall \varepsilon > 0 \quad p(|\xi_n - C| < \varepsilon) = p(-\varepsilon < \xi_n - C < \varepsilon) = p(C - \varepsilon < \xi_n < C + \varepsilon) \geq p\left(C - \frac{\varepsilon}{2} < \xi_n < C + \varepsilon\right) = F_{\xi_n}(C + \varepsilon) - F_{\xi_n}\left(C - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 1 - 0 = 1$

Так как  $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \leq 1$ , то по теореме о 2 милиционерах  $p(|\xi_n - C| < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  то есть по определению  $\xi_n \xrightarrow{p} C$

*Nota.* В общем случае не только из слабой сходимости не следует сходимость по вероятности, но и бессмысленно говорить об этом, так как слабая сходимость - это сходимость не случайных величин, а их распределений

*Ex.*  $\exists \xi_n \Rightarrow \xi \in N(0, 1)$ , тогда  $\eta = -\xi \in N(0, 1)$ , но ясно, что  $\xi_n \xrightarrow{p} \eta = -\xi$  - неверно

### Ключевые неравенства

В дальнейшем будем считать, что у случайных величин первый момент существует

## I. Неравенство Маркова

$$\text{Th. } p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A & - A \text{ нет} \\ 1, & \omega \in A & - A \text{ есть} \end{cases}$$

$$EI_A = p(A)$$

$$|\xi| \geq |\xi| \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon) \geq \varepsilon I(|\xi| \geq \varepsilon)$$

$$E|\xi| \geq E(\varepsilon \cdot I(|\xi| \geq \varepsilon))$$

$$E|\xi| \geq \varepsilon \cdot E(I(|\xi| \geq \varepsilon)) = \varepsilon \cdot p(|\xi| \geq \varepsilon) \implies p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi|}{\varepsilon}$$

## II. Неравенство Чебышева

$$\text{Th. } P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

$$p(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) = p((\xi - E\xi)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

## III. Правило «трех сигм»

$$\text{Th. } P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{По неравенству Чебышева } P(|\xi - E\xi| \geq 3\sigma) \leq \frac{D\xi}{(3\sigma)^2} = \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}$$

## Среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  - независимые одинаково распределенные случайные величины с конечным вторым моментом

Обозначим  $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  - их сумма

$\frac{S_n}{n} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$  - среднее арифметическое

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n) = \frac{1}{n}na = a = E\xi_1 - \text{математическое ожидание не меняется}$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \dots + D\xi_n) = \frac{1}{n^2}nd = \frac{d}{n} = \frac{D\xi_1}{n} - \text{дисперсия уменьшилась в } n \text{ раз}$$

$$\sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \text{СКО уменьшилось в } \sqrt{n} \text{ раз}$$

## Законы больших чисел

### I. Закон больших чисел Чебышева

**Th.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных с конечным вторым моментом, тогда  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} E\xi_1$

Обозначим  $a = E\xi_i, d = D\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}, \quad 1 \leq i \leq n$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

Тогда по неравенству Чебышева  $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) = p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{d}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$   
 $\Rightarrow p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ , то есть  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} a$

Среднее арифметическое большого числа независимых одинаковых случайных величин «стабилизируется» около математического ожидания, «при  $n \rightarrow \infty$  случайность переходит в закономерность»

Статистический смысл: при большом объеме  $n$  статистических данных среднее арифметическое данных дает достаточно точную оценку теоретического математического ожидания

*Nota.* При доказательстве получили полезную, хотя и грубую оценку:  $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_i}{n\varepsilon^2}$

### II. Закон больших чисел Бернулли

**Th.** Пусть  $v_n$  - число успехов из  $n$  независимых испытаний,  $p = P(A)$  - вероятность успеха при одном испытании. Тогда  $\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} P(A)$

При этом  $P\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

$v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i \in B_p$  - число успехов при  $i$ -ом испытании

$$E\xi_i = p; D\xi_i = pq$$

$$\frac{v_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_1 = p$$

$$p\left(\left|\frac{v_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi_1}{n\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

### III. Закон больших чисел Хинчина

**Th.**  $v_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным первым моментом, тогда  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} E\xi_i$

### IV. Усиленный закон больших чисел Холмогорова

В условиях теоремы Хинчина  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$

### V. Закон больших чисел Маркова

**Th.** Пусть имеется последовательность случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  с конечными вторыми моментами, таких что  $D(S_n) = o(n^2)$ . Тогда  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} E\left(\frac{S_n}{n}\right)$  или  $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{p} \frac{1}{n}(E\xi_1 + \dots + E\xi_n)$

По неравенству Чебышева  $p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{o(n^2)}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow p\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \leq \varepsilon\right) \rightarrow 1$

## Центральная предельная теорема

**Th.** Центральная предельная теорема (ЦПТ Маркова,  $\approx 1901$  год)

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией ( $D\xi_1 < \infty$ ) и  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Тогда имеет место слабая сходимость:

$$\frac{S_n - nE\xi_1}{\sqrt{nD\xi_1}} \Rightarrow N(0, 1)$$

Теорема показывает, что стандартизованная сумма слабо сходится к стандартному нормальному распределению

*Nota.* Можно представить в ином виде:  $\exists a = E\xi_i, \sigma = \sigma_{\xi_i}$ , тогда  $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = a, \sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , а  $\frac{\frac{S_n}{n} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow N(0, 1)$

*Nota.* Другая, грубая, формулировка:  $\frac{S_n}{n} \Rightarrow N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

## Лекция 12

### Совместное распределение случайных величин

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  заданы на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, p)$

**Def.** Случайным вектором  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  называется упорядоченный набор случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве

Случайный вектор задает отображение  $(\xi_1, \dots, \xi_n)(\omega) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Поэтому случайный вектор еще называют многомерной случайной величиной, а соответствующее ей распределение многомерным распределением:

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad P(B) = P(\omega \in \Omega \mid (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B)$$

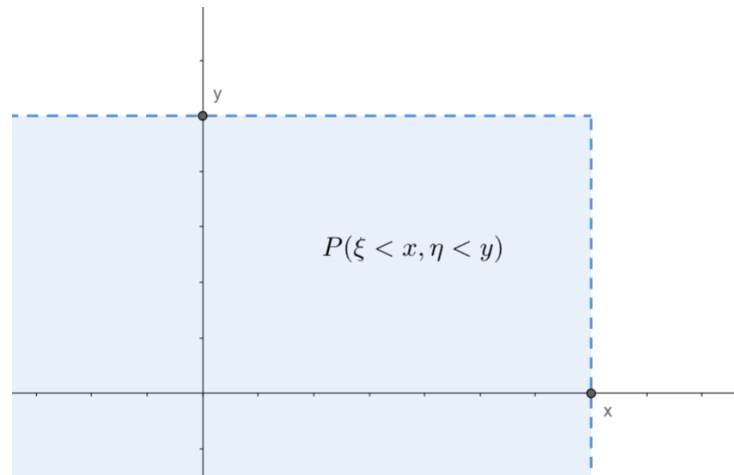
Таким образом, получили новое вероятностное пространство. В качестве элементарных исходов берем точки многомерного пространства, а  $\sigma$ -алгебра - многомерное Борелевская  $\sigma$ -алгебра  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P(B))$

### Функция распределения

**Def.** Функцией совместного распределения случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называется функция  $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$

*Nota.* Распределение полностью задается функцией распределения

*Nota.* В дальнейшем, в основном, будем рассматривать системы из 2 случайных величин. Функция распределения в данном случае  $F_{\xi, \eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$  - вероятность попадания в эту область.



### Свойства функции распределения

1.  $0 \leq F_{\xi, \eta}(x, y) \leq 1$
2.  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  - неубывающая по каждому аргументу
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$ , и наоборот -  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$
4. Восстановление маргинального (частного) распределения:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$ , и наоборот -  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi, \eta}(x, y) = F_{\xi}(x)$
5.  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  - непрерывна слева по каждому аргументу
6.  $P(x_1 \leq \xi < x_2, y_1 \leq \eta < y_2) = F_{\xi, \eta}(x_2, y_2) - F_{\xi, \eta}(x_2, y_1) - F_{\xi, \eta}(x_1, y_2) + F_{\xi, \eta}(x_1, y_1)$

### Независимость случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности, если для любого набора Борелевских множеств из  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$

$$p(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n) = p(\xi_1 \in B_1) \cdot p(\xi_2 \in B_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n \in B_n)$$

**Def.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  попарно независимы, если независимы любые две из них

*Nota.* Из независимости в совокупности следует попарная независимость:

$\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности, тогда покажем  $\forall i, j$   $\xi_i$  и  $\xi_j$  - независимы

Возьмем набор  $B_i, B_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , при  $k \neq i, j$   $B_k = \mathbb{R}$

$$P(\xi_k \in B_k) = 1$$

Тогда  $p(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_i \in B_i, \xi_j \in B_j) = P(\xi_i \in B_i) \cdot P(\xi_j \in B_j)$

*Nota.* Из попарной независимости не следует независимость в совокупности, как видно из примера Бернштейна

Под независимыми величинами будем понимать независимые в совокупности

## Дискретная система двух случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi, \eta$  имеют совместное дискретное распределение, если случайный вектор  $(\xi, \eta)$  принимает не более, чем счетное число значений, то есть существует конечный или счетный набор пар чисел  $(x_i, y_i)$ , таких что  $P(\xi = x_i, \eta = y_i) > 0$ ,  $\sum_{i,j} P(\xi = x_i, \eta = y_i) = 1$

Таким образом двумерная дискретная случайная величина задается законом распределения - таблице вероятностей

$\xi \backslash \eta$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1m}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$\dots$	$p_{nm}$

Условие нормировки:  $\sum_{i,j} p_{i,j} = 1$

Зная общий закон распределения, можно восстановить частное (маргинальное) распределение по формулам:

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_{i,j} \quad q_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j}$$

**Def.** Дискретные случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, если для любых  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $p(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = p(\xi_1 = x_1) \cdot p(\xi_2 = x_2) \cdot \dots \cdot p(\xi_n = x_n)$

При  $n = 2$ :  $p_{i,j} = p_i \cdot q_j \quad \forall i, j$

Ex.

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1	$p_i$
-1	0.1	0.2	0.1	0.4
2	0.2	0.3	0.1	0.6
$q_j$	0.3	0.5	0.2	$\Sigma = 1$

Найти маргинальное распределение и проверить независимость случайных величин

$\xi$	-1	2		
$p_i$	0.4	0.6		
$\eta$	-1	0	1	
$q_j$	0.3	0.5	0.2	

$$p_{11} = 0.1 \neq 0.12 = p_1 \cdot q_1 \quad \implies \xi, \eta - \text{зависимы}$$

## Абсолютно непрерывная система двух случайных величин

**Def.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение, если  $\exists f_{\xi,\eta}(x, y)$ , такая что  $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) P((\xi, \eta) \in B) = \iint_B f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$

Функцию  $f_{\xi,\eta}(x, y)$  будем называть функцией плотности совместного распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$

Геометрический смысл плотности:

Свойства плотности:

1.  $f_{\xi,\eta}(x, y) \geq 0$
2. Условие нормировки:  $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = 1$
3.  $F_{\xi,\eta} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi,\eta}(x, y) dy dx$
4.  $f_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\xi,\eta}(x, y)}{\partial x \partial y}$
5. Если случайные величины  $\xi, \eta$  имеют абсолютно непрерывное совместное распределение с плотностью  $f(x, y)$ , то маргинальное распределение величин  $\xi, \eta$  также имеют абсолютно непрерывное распределение с плотностями  $f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dy, f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y) dx$

$$F_{\xi}(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$

$$\text{Из этого } \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = f_{\xi}(x)$$

6. Так как вероятность попадания в Борелевские множества полностью задается функцией распределения, то условие независимости случайных величин эквивалентно следующему:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы, если функция общего распределения распадается в произведение отдельных функций распределения

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot F_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

7. *Равносильное определение:* абсолютно непрерывные случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы в совокупности тогда и только тогда, когда плотность совместного распределения  $f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$

При  $n = 2$  случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы  $\iff F_{\xi,\eta}(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx \cdot \int_{-\infty}^y f_{\eta}(y) dy = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) dx dy \implies f_{\xi,\eta}(x, y) = f_{\xi}(x) f_{\eta}(y)$   
Аналогично для высших размерностей

*Nota.* Совместное распределение абсолютно непрерывных случайных величин не обязано быть



абсолютно непрерывным, оно может быть сингулярным

*Ex.* Бросаем точку на отрезок прямой  $y = x$  ( $0 \leq x, y \leq 1$ ),  $\xi$  - абсцисса точки,  $\eta$  - ордината точки

Случайный вектор  $(\xi, \eta)$  имеют сингулярное распределение (непрерывное с нулевой областью) - так как число элементарных исходов несчетно, но мера Лебега в  $\mathbb{R}^2$  отрезка равна 0

*Nota.* Совместное распределение  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  будет сингулярным, если одна из координат является функцией других (наблюдается функциональная зависимость)

## Многомерное равномерное распределение

**Def.**  $\exists D \subset \mathbb{R}^n$  - Борелевское множество в  $\mathbb{R}^n$  с конечной мерой Лебега ( $0 < \lambda(D) < \infty$ ), случайный вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  имеет равномерное распределение, если плотность совместного распределения постоянна в данной области и равна нулю вне данной области

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(D)}, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0, & \text{если } (x_1, \dots, x_n) \notin D \end{cases}$$

## Лекция 13

### Математическое ожидание и дисперсия случайного вектора

$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  - случайный вектор,  $\forall 1 \leq i \leq n$   $\xi_i$  - случайная величина

**Def.** Математическим ожиданием случайного вектора называется вектор с координатами из математических ожиданий его компонент:  $E\vec{\xi} = (E\xi_1, \dots, E\xi_n)$

**Def.** Дисперсией (или матрицей ковариаций) случайного вектора называется матрица  $D\vec{\xi} = E(\vec{\xi} - E\vec{\xi})(\vec{\xi} - E\vec{\xi})^T$ , состоящая из элементов  $d_{i,j} = (\xi_i, \xi_j)$ . В частности  $d_{i,i} = (\xi_i, \xi_i) = D\xi_i$

### Функции от двух случайных величин

**Th.** Пусть  $\xi_1, \xi_2$  - случайные величины с общим плотностью  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$ , и есть функция  $g(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда случайная величина  $\eta = g(\xi_1, \xi_2)$  имеет функцию распределения  $F_\eta(z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$ , где  $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) < z\}$

$$F_\eta = p(\eta < z) = p(g(\xi_1, \xi_2) < z) = p((\xi_1, \xi_2) \in D_z) = \iint_{D_z} f(x, y) dx dy$$

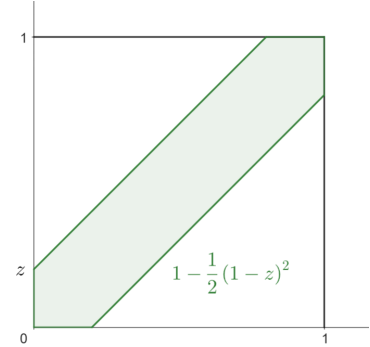
Ех. Задача о встрече. двое договорились встретится между 12:00 и 13:00. Случайная величина  $\eta$  - время ожидания. Найти функцию распределения

$\xi_1$  - время прихода первого,  $\xi_2$  - второго;  $\xi_1, \xi_2 \in U(0, 1)$ , они независимы,  $\forall x, y \in [0, 1] f_{\xi_1}(x) = 1, f_{\xi_2}(y) = 1$

Поэтому  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y) = 1, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$\eta = |\xi_1 - \xi_2| \implies D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < z\}$$

$$F_\eta = \iint_{D_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} dx dy = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}(1 - z)^2 = 2z - z^2, z \in [0, 1]$$



**Th.**  $\square \xi_1, \xi_2$  - независимые абсолютно непрерывные случайные величины с плотностями  $f_{\xi_1}(x)$  и  $f_{\xi_2}(y)$

Тогда плотность суммы  $\xi_1 + \xi_2$  равна  $f_{\xi_1 + \xi_2}(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx}_{\text{т. н. свертка}}$

Так как случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y)$$

И согласно предыдущей теореме

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \iint_{D_z} f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dx dy,$$

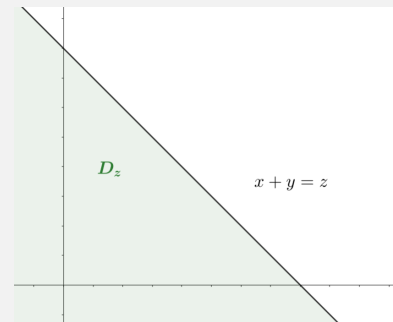
где  $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < z\}$

$$F_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(y) dy =$$

$$\left[ \begin{array}{l} y = t - x; \quad dy = dt; \quad t = y + x \\ t(-\infty) = -\infty; \quad t(z - x) = z \end{array} \right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) dx \int_{-\infty}^z f_{\xi_2}(t - x) dt =$$

$$\int_{-\infty}^z \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx \right) dt \implies f_{\xi_1 + \xi_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(t - x) dx$$



Следствие: сумма двух независимых абсолютно непрерывных случайных величин также имеет абсолютно непрерывное распределение

*Nota.* Условие независимости существенно, контр-пример:  $\xi_1; \xi_2 = -\xi_1$ , тогда  $\xi_1 + \xi_2 \equiv 0$

## Сумма стандартных распределений. Устойчивость относительно суммирования

**Def.** Если сумма двух независимых случайных величин одного типа распределения также будет этого же типа, то говорят, что распределение устойчиво относительно суммирования

*Ex. 1.*  $\xi \in B_{n,p}; \eta \in B_{m,p}$ . Тогда ясно, что  $\xi + \eta \in B_{n+m,p}$  (по определению биномиального распределения  $B_{n,p}$  - число успехов из  $n$  испытаний, где  $p$  - вероятность успеха)

*Ex. 2.*  $\xi \in \Pi_\lambda, \eta \in \Pi_\mu$ , они независимы. Тогда  $\xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu}$

$$\begin{aligned} \xi + \eta = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \exists k \geq 0. \text{ Тогда } p(\xi + \eta = k) &= \sum_{i=0}^k P(\xi = i, \eta = k - i) = \sum_{i=0}^k P(\xi = i)P(\eta = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\mu} = e^{-\lambda-\mu} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \mu^{k-i} k!}{i!(k-i)!} = e^{-\lambda-\mu} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \lambda^i \mu^{k-i} C_k^i = \\ &= e^{-\lambda-\mu} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \Rightarrow \xi + \eta \in \Pi_{\lambda+\mu} \end{aligned}$$

*Ex. 3.*  $\xi, \eta \in N(0, 1)$  и независимы. Тогда  $\xi + \eta \in N(0, 2)$

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\ \text{По формуле свертки } f_{\xi+\eta}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - tx + \frac{t^2}{2})} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2 - tx + \frac{t^2}{4})} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x - \frac{t}{2})^2} d(x - \frac{t}{2}) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2(\sqrt{2})^2}} \Rightarrow \\ &\xi + \eta \in N(0, 2) \end{aligned}$$

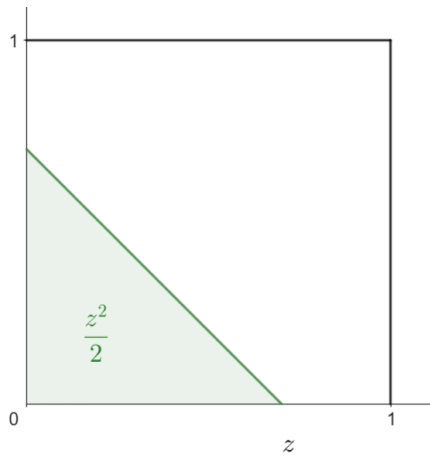
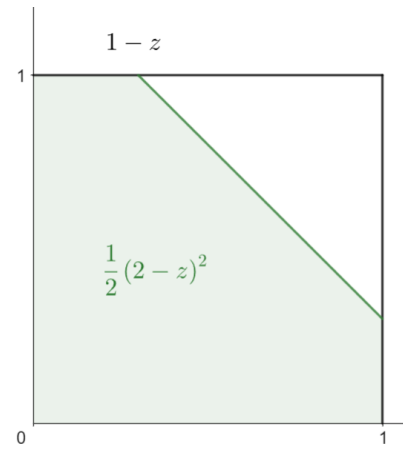
*Ex. 4.* В общности для независимых  $\xi \in N(a_1, \sigma_1^2), \eta \in N(a_2, \sigma_2^2)$   $\xi + \eta \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

*Ex. 5.* Равномерное распределение неустойчиво относительно суммирования, контрпример:

$\xi, \eta \in U(0, 1)$  - независимы

$\forall x, y \in [0, 1] \quad f_\xi(x) = 1, f_\eta(y) = 1$  и  $f_{\xi,\eta}(x, y) = 1$

По первой теореме  $F_{\xi,\eta}(x, y) = \iint_{D_z} f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy = \iint_{D_z} 1 dx dy = S_{D_z}$ , где  $D_z = \{(x, y) \mid x + y < z\}$

а)  $0 < z \leq 1$ б)  $1 < z \leq 2$ 

$$S_{D_z} = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{z^2}{2}, & 0 \leq z \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2 & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi+\eta}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z, & 0 \leq z \leq 2 \\ 2-z & 1 \leq z \leq 2 \\ 0, & z > 2 \end{cases} \neq C \implies \xi + \eta \text{ не имеют равномерное распределение}$$

*Nota.* FUN FACT: сумма нескольких величин с равномерным распределением приближается к нормальному распределению

## Условное распределение

**Def.** Условным распределением случайной величины из системы случайных величин  $(\xi, \eta)$  называется ее распределение, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение. Обозначается  $\xi|\eta = y$

**Def. A.:** Условным математическим ожиданием (обозначается  $E(\xi|\eta = y)$ ) называется математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  при соответствующем условном распределении

### I. Условное распределение в дискретной системе двух случайных величин

Пусть  $(\xi, \eta)$  задана законом распределения:

$\xi \backslash \eta$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1m}$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$\dots$	$p_{nm}$

Формула условной вероятности:  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Вероятности условных распределений считаем по формулам:

$$\xi|\eta = y_j: p_i = p(\xi = x_i | \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}$$

$$\eta|\xi = x_i: q_j = p(\eta = y_j | \xi = x_i) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}$$

То есть вероятность в соответствующем столбце делим на

## II. Условное распределение в непрерывной системе двух случайных величин

Пусть  $(\xi, \eta)$  задана плотностью  $f_{\xi, \eta}(x, y)$  совместного распределения, тогда плотность условного распределения  $\xi|\eta = y$ :

$$f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{\xi, \eta}(x, y) dx} = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$$

**Def.** Функция  $f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$  называется условной плотностью

**Def.** Условное математическое ожидание вычисляется по формуле  $E(\xi|\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx$

Аналогично  $E(\eta|\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy$

*Nota.* При фиксированном значении  $x$   $f(y|x)$  зависит только от  $y$ , а  $E(\eta|\xi = x) \in \mathbb{R}$ . Если рассматривать  $x$  как переменную, то условное математическое ожидание  $E(\eta|\xi = x)$  является функцией от  $x$  и называется функцией регрессии  $\eta$  на  $\xi$ . График такой функции называют линией регрессии

*Nota.* Так как значение  $x$  - значение случайной величины  $\xi$ , то условное матожидание  $E(\eta|\xi = x)$  можно рассматривать как случайную величину

## Лекция 14

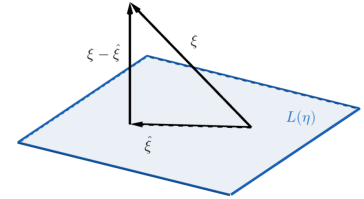
### Пространство случайных величин

*Nota.* Если две случайных величин  $\xi \stackrel{\text{п.н.}}{=} \eta$ , то считаем, что  $\xi = \eta$

Пусть имеется вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Введем пространство  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi \mid D\xi < \infty\}$  - множество случайных величин на данном пространстве с конечной дисперсией

Ясно, что  $L_2$  - линейное пространство. Введем на нем скалярное произведение



**Def.** Скалярным произведением случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  из  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  называется число  $(\xi, \eta) = E(\xi\eta)$

*Nota.* Если  $(\xi, \eta)$  - дискретная система случайных величин  $(p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p_{ij})$ , то  $E(\xi\eta) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij}$

Если же  $(\xi, \eta)$  - непрерывная система с плотностью  $f_{\xi,\eta}(x, y)$ , то  $E(\xi\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{\xi,\eta}(x, y) dx dy$

**Свойства:**

1.  $(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$
2.  $(C\xi, \eta) = C(\xi, \eta)$
3.  $(\xi_1 + \xi_2, \eta) = (\xi_1, \eta) + (\xi_2, \eta)$
4.  $(\xi, \xi) \geq 0$
5.  $(\xi, \xi) = 0 \implies \xi = 0$  п.н.

То есть это действительно скалярное произведение

**Def.** Норма вектора равна числу  $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$

**Def.** Метрикой (расстоянием) между случайными величинами называют число  $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$

**Th.** Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют конечный второй момент, тогда  $|E(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$  (или  $|( \xi, \eta )| \leq \| \xi \| \cdot \| \eta \|$ )

Причем  $|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \iff \eta = C\xi$ , где  $C = \text{const}$

$$P_2(x) = E(x\xi - \eta)^2 = x^2 E\xi^2 - 2xE(\xi\eta) + E\eta^2 \geq 0 \implies D = 4(E(\xi\eta))^2 - 4E\xi^2 - E\eta^2 \leq 0 \implies |E(\xi\eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$$

$$|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 - E\eta^2} \implies D = 0 \implies \exists \text{ какая-либо точка касания } C, \text{ из этого } E(C\xi - \eta)^2 = 0 \implies C\xi - \eta = 0 \iff \eta = C\xi \text{ п.н.}$$

## Условное математическое ожидание

В  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  возьмем линейное подпространство  $L(\eta) = \{g(\eta) \mid Dg(\eta) < \infty\}$

**Def. В.** Условное математическое ожидание (УМО, обозначается  $E(\xi|\eta) = \hat{\xi}$ ) случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  называется ортогональная проекция случайной величины  $\xi$  на  $L(\eta)$

**Свойства:**

1. Тождество ортопроекции:  $\exists \hat{\xi} \in L(\eta)$ , тогда  $\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta)) \forall g(\eta) \in L(\eta)$

$$\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \iff (\xi - \hat{\xi}) \perp L(\eta) \iff (\xi - \hat{\xi}, g(\eta)) = 0 \forall g(\eta) \in L(\eta) \iff E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta))$$

2. Формула полного математического ожидания

$$E\xi = E(E(\xi|\eta)) \text{ или } E\xi = E\hat{\xi}$$

*Nota.* При распределении Бернулли получаем обычную формулу полной вероятности

$$\text{Верно из тождества ортопроекции при } g(\eta) = 1$$

3. Линейность:  $E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 \mid \eta) = C_1E(\xi_1|\eta) + C_2E(\xi_2|\eta)$
4. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $E(\xi|\eta) = E\xi$

$$\xi, \eta \text{ независимы} \implies \xi \text{ и } g(\eta) \text{ независимы}$$

$$\text{Из этого } E(\xi \cdot g(\eta)) = E\xi \cdot E(g(\eta)) = E(E\xi \cdot g(\eta)) \implies E\xi = \hat{\xi}$$

5. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $(\xi - E\xi) \perp g(\eta) \forall g(\eta) \in L(\eta)$ , в частности  $(\xi - E\xi) \perp \eta$

Докажем, что **Def. А.** согласуется с **Def. В.**

По **Def. А.**  $E(\xi|\eta) = h(\eta)$ , где  $h(y) = E(\xi|\eta = y)$

Рассмотрим случай абсолютно непрерывной системы  $(\xi, \eta)$  с плотностью  $f_{\xi, \eta}(x, y)$ . Тогда

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx, \text{ где } f(x|y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_{\eta}(y)}$$

Следует доказать, что функция  $h(y)$  удовлетворяет тождеству ортопроекций  $E(\xi g(\eta)) = E(h(\eta)g(\eta)) \forall g(\eta) \in L(\eta)$

$$E(\xi \cdot g(\eta)) = \iint_{\mathbb{R}^2} xg(y)f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$

$$E(h(\eta)g(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)g(y)f_{\eta}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_{\eta}(y)} dx \right) g(y)f_{\eta}(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} xg(y)f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = E(\xi g(\eta))$$

## Числовые характеристики. Зависимости случайных величин

*Мет.* Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , то  $E(\xi\eta) = E\xi E\eta \implies E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 0$

Поэтому в качестве индикатора наличия связи берем величину  $E(\xi\eta) - E\xi E\eta = \text{cov}(\xi, \eta)$

**Def.** Ковариацией  $(\xi, \eta)$  называется величина  $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$

**Свойства:**

$$1. \text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = E(\xi\eta - \eta E\xi - \xi E\eta + E\xi E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$$

$$2. \text{cov}(\xi, \xi) = D\xi$$

$$\text{cov}(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$3. \text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$$

$$4. \text{cov}(C_1\xi_1 + C_2\xi_2, \eta) = C_1\text{cov}(\xi_1, \eta) + C_2\text{cov}(\xi_2, \eta)$$

$$5. D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

$$6. D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

$$7. (a) \text{ Если } \xi \text{ и } \eta \text{ - независимы, то } \text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

$$(b) \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) \neq 0, \text{ то } \xi \text{ и } \eta \text{ - зависимы}$$

$$(c) \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) = 0, \text{ то неясно}$$

$$8. \text{ Если } \text{cov}(\xi, \eta) > 0, \text{ то зависимость прямая, если } \text{cov}(\xi, \eta) < 0, \text{ то обратная}$$

*Nota.* Ковариация зависит от единиц измерения случайных величин, поэтому по ее величине нельзя судить о силе зависимости



## Коэффициент линейной корреляции

**Def.** Коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  с конечными вторыми моментами, называется величина  $r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$

Можно записать в другой форме:  $r_{\xi,\eta} = \frac{E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2} \sqrt{E(\eta - E\eta)^2}} = \frac{(\xi - E\xi, \eta - E\eta)}{\|\xi - E\xi\| \|\eta - E\eta\|} = \cos(\xi - E\xi, \eta - E\eta)$   
 - косинус угла между величинами (грубая интерпретация)

**Свойства:**

1.  $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
2. (а) Если  $\xi$  и  $\eta$  - независимы, то  $r_{\xi,\eta} = 0$   
 (б) Если  $r_{\xi,\eta} \neq 0$ , то  $\xi$  и  $\eta$  - зависимы  
 (с) Если  $r_{\xi,\eta} = 0$ , то неясно
3.  $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца  $|E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| \leq \sqrt{E(\xi - E\xi)^2} \sqrt{E(\eta - E\eta)^2}$

4.  $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff \eta = a\xi + b$  п.н.

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца  $|r_{\xi,\eta}| = 1 \iff |E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| = \sqrt{E(\xi - E\xi)^2} \sqrt{E(\eta - E\eta)^2} \implies \eta - E\eta = C(\xi - E\xi) \implies \eta = C\xi + (E\eta - CE\xi)$  п.н.

5. (а) Если  $r_{\xi,\eta} = 1$ , то  $\eta = a\xi + b$  и  $a > 0$  (прямая линейная зависимость)  
 (б) Если  $r_{\xi,\eta} = -1$ , то  $\eta = a\xi + b$  и  $a < 0$  (обратная линейная зависимость)

Так как  $|r_{\xi,\eta}| = 1$ , то по свойству 4)  $\eta = a\xi + b$  и  $r_{\xi,\eta} = \frac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{E(\xi(a\xi + b)) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{D\xi D(a\xi + b)}} = \frac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{D\xi a^2 D\xi}} = \frac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a|D\xi} = \frac{a}{|a|} = \text{sign } a$

**Def.** Если  $r_{\xi,\eta} \neq 0$ , то говорят, что случайные величины коррелированы друг с другом. Если  $r_{\xi,\eta} > 0$ , то имеет прямая корреляция, если  $r_{\xi,\eta} < 0$  - обратная

*Nota.* Корреляция не транзитивна:  $r_{\xi_1, \xi_2} > 0 \wedge r_{\xi_2, \xi_3} > 0 \not\Rightarrow r_{\xi_1, \xi_3} > 0$