

*Nota.*  $\text{Ker } \mathcal{A}$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$  - подпространства  $V$  ( $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ )

Вообще-то  $\text{Ker } \mathcal{A} \subset V, \text{Im } \mathcal{A} \subset W$  ( $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ )

$\dim W \leq \dim V$ , тогда можно считать, что  $W \subset V'$  и рассмотрим  $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$  (где  $V'$  изоморфен  $V$ )

$\text{Ker } \mathcal{A}$  - подпространство, то есть  $\text{Ker } \mathcal{A} \subset V$  и  $\sum c_i x_i \in \mathcal{A}$ , если  $\forall x_i \in \text{Ker } \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(\sum c_i x_i) = \sum c_i \mathcal{A}x_i \stackrel{x_i \in \mathcal{A}}{=} \sum c_i 0 = 0$$

Следствие:  $\text{Ker } \mathcal{A} = 0 \implies \mathcal{A}$  - вз.-однозн.

□ От противного:

□  $\mathcal{A}$  - не вз.-однозн., то есть  $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$  - противоречие

***Nota.* Обратное также верно:**

$\mathcal{A}$  - вз.-однозн.  $\iff y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$ , так как  $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 = 0$

Тогда 0 является образом только 0-вектора  $\implies \text{Ker } \mathcal{A} = 0$

*Nota.* Также очевидно, что

$$\text{Ker } \mathcal{A} = 0 \iff \text{Im } \mathcal{A} = V$$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = V \implies \text{Im } \mathcal{A} = 0 \text{ и } \mathcal{A} = 0$$

*Th.*  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ , тогда  $\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim V$

□ Так как  $\text{Ker } \mathcal{A}$  - подпространство  $V$ , то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса  $V$ :  $e_1^k, \dots, e_m^k, e_{m+1}^k, \dots, e_n^k$ )

Обозначим дополнение  $W$ , тогда  $\text{Ker } \mathcal{A} \oplus W = V \implies \dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что  $W$  и  $\text{Im } \mathcal{A}$  - изоморфны

$$\mathcal{A} : W \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} : \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow 0$$

Докажем, что  $\mathcal{A}$  действует из  $W$  в  $\text{Im } \mathcal{A}$  взаимно-однозначно

□  $\mathcal{A}$  невз.-однозн., тогда  $\exists x_1, x_2 \in W (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in \text{Im } \mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \stackrel{\text{обозн.}}{=} x \in \text{Ker } \mathcal{A}$ , но  $x \neq 0$ , так как  $x_1 \neq x_2$

Но для прямой суммы  $W \cup \text{Ker } \mathcal{A} = 0, x \in W \cup \text{Ker } \mathcal{A} \implies$  предположение неверно

$\implies \mathcal{A}$  - лин. вз.-однозн.  $\implies \dim W = \dim \text{Im } \mathcal{A}$

$V = W_1 \oplus W_2$  найдется ЛО  $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$W_1 = \text{Ker } \mathcal{A}, W_2 = \text{Im } \mathcal{A}$$

*Def.* Рангом оператора  $\mathcal{A}$  называется  $\dim \text{Im } \mathcal{A}$ :  $\text{rang } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } \mathcal{A} (= r(\mathcal{A}) = \text{rank } \mathcal{A})$

*Nota.* Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$$

$A$  - матрица  $\mathcal{A}, x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$

$$\mathcal{A}x = y \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса  $Ae_i = e'_i$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

Здесь  $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T$  - это матрица  $(e_1 \dots e_n) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$

*Nota.* Поиск матрицы  $\mathcal{A}$  можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе  $\{e_i\}$ , то есть  $A(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. th. позже)

Тогда  $\text{Ker } \mathcal{A} = K$  - множество векторов, которые решают систему

$AX = 0$  ( $\dim K = m = \dim \Phi CP = n - \text{rang } A$ ) и при этом  $\dim K = n - \dim \text{Im } \mathcal{A}$

$\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A = \dim \text{Im } \mathcal{A}$

Следствия (без док-в)

1)  $\text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \text{rang}(\mathcal{A})$  (или  $\text{rang } \mathcal{B}$ )

2)  $\text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq \text{rang}(\mathcal{A}) + \text{rang}(\mathcal{B}) - \dim V$

*Nota.* Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор  $T : V^n \rightarrow V^n$  (переход из системы  $Ox_i \rightarrow Ox'_i, i = 1..n$ )

$\dim \text{Im } T = n, \dim \text{Ker } T = 0 \implies T$  - вз.-однозн.

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя  $T_{e \rightarrow e'}$

## 2.6 Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

*Th.*  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

$\{e_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e$  и  $\{e'_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e'$  - базисы пространства  $V$

$\mathcal{T} : V^n \rightarrow V^n$  - преобразование координат, то есть  $Te_i = e'_i$

$\square A, A'$  - матрицы  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $e'$

Тогда  $A' = TAT^{-1}$  ( $A'_{e'} = T_{e \rightarrow e'} A T_{e \rightarrow e'}^{-1}$ )

$\square \square y = \mathcal{A}x$ , где  $x, y$  - векторы в базисе  $e$  ( $x_e = x'_e$ , - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$ , где  $x', y'$  - векторы в базисе  $e'$

$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$

$y = Ax, y' = A'x'$ , тогда  $Ty = A'(Tx) \quad \Bigg| \dots T^{-1}$

$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$

$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$

$A = T^{-1}A'T \implies A' = TAT^{-1}$