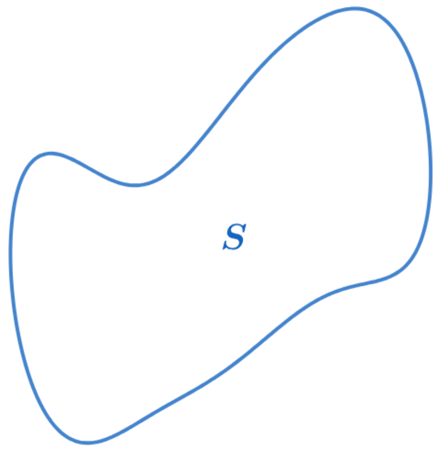
Содержание

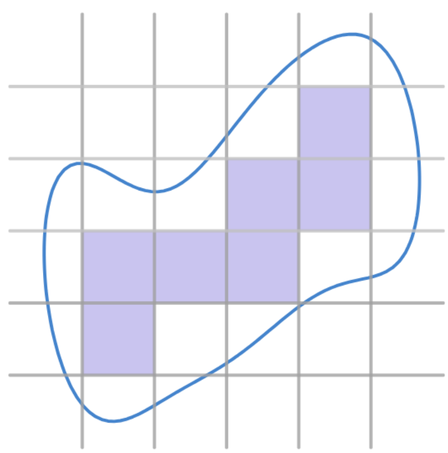
1. Определенный интеграл

1.1. Задача и определение

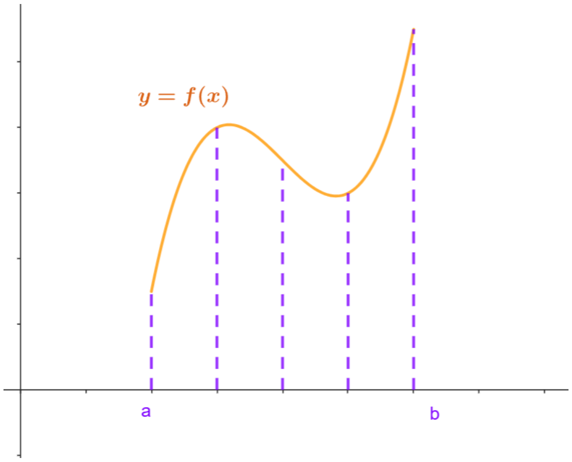
Задача. Дана криволинейная фигура:

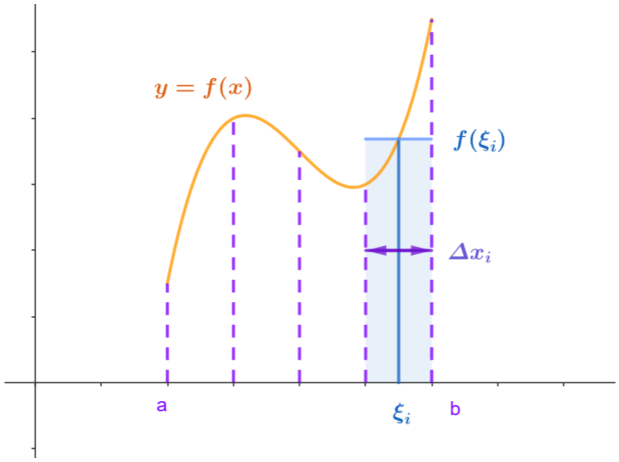


Надо найти ее площадь S
Произведем ее дробление на маленькие элементарные фигуры, площадь которых мы можем посчитать:



Уменьшаем дробление, чтобы свести погрешность к 0 (погрешность между истинной площадью и суммарной площадью прямоугольников)
Сведем задачу к простейшей в ДПСК:





1. Вводим разбиение отрезка $[a; b]$ $(a < b)$ точками $a < x_0 < \cdots < x_n < b$
   $T = \{x_i\}_{i=0}^n$
2. Выбираем средние точки на частичных отрезках $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^n$
   $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ - набор средних точек
   $\Delta x_i \overset{\text{обозн.}}{=} x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка
3. Строим элементарные прямоугольники
4. Составляем сумму площадей всех таких прямоугольников:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$$

   - интегральная сумма Римана
5. Заменяя разбиение, выбор ξ_i при каждом n, получаем последовательность $\{\sigma_n\}$
   При этом следим, чтобы ранг разбиения $\tau = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$
   Иначе получим неуничтожаемую погрешность

6. **Def.** Если существует конечный предел интегральной суммы и он не зависит от типа, ранга дробления и выбора средних точек, то он называется определенным интегралом

$$\lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sigma_n = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Независимость от дробления и выбора средних точек существенна

Ex. $\mathcal{D} = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1], x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Сумма Римана для этой функции неопределенна, так как все зависит от выбора средних точек:

- если средние точки иррациональные, то сумма равна единице
- иначе сумма равна нулю

В обозначении определенного интеграла a и b называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно

Дифференциал dx имеет смысл Δx, понимается как б. м., то есть:

$f(x)dx$ - площадь элементарных прямоугольников, тогда

$\int_a^b f(x)dx$ - сумма этих прямоугольников

1. $\int_a^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=} 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Можно доказать, что определенный интеграл существует для всякой непрерывной на отрезке функции

<u>Геом. смысл</u>. Заметим в определении площадь подграфика функции $(f(x) \geq 0)$

Заметим, что для $f(x) \leq 0 \quad \int_a^b f(x)dx = -S$

1.2. Свойства

1. Линейность пределов $\Longrightarrow$ линейность пределов
   $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$
2. Аддитивность (часто для кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разбивается на участки непрерывности)
   $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
   Доказательства строятся на свойствах конечных сумм и пределов
3. Оценка определенного интеграла
   $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ (имеет наимен. (m) и наибол. (M) значения). Тогда:
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
   □ Док-во:
   По теореме Вейерштрасса 2 $f(x)$ принимает наименьшее и наибольшее значения и для всякого x из $[a;b]$: $m <= f(x) <= M$
   Так как все средние точки принадлежат $[a;b]$, то
   $m \leq f(\xi_i) \leq M \quad \forall \xi_i$
   $m\Delta_i \leq f(\xi_i)\Delta_i \leq M\Delta_i$
   $m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq f(\xi_i)\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$
   Предельный переход:
   $\lim\limits_{n\to\infty,\ \tau\to 0} m\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim\limits_{n\to\infty,\ \tau\to 0} M\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$

$$m \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \le \int_a^b f(x)dx \le M \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$\square$

4. **Th.** Лагранжа о среднем (в интегральной форме)

   $f(x) \in C'_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

   Тогда найдется такая средняя точка, что

   $$f(x) \in C_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

   $\square$

   $m \le \underbrace{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx}_{\text{некоторое число}} \le M$ по свойству выше

   По теореме Больцано-Коши $f(x)$ непрерывна, поэтому пробегает все значения от m до M

   Значит найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

   $\square$

5. Сравнение интегралов

   $f(x), g(x) \in C_{[a,b]} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \ge g(x)$

   Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

   $\square$

   $$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(f(\xi_i)-g(\xi_i))}_{\ge 0}\underbrace{\Delta x_i}_{\ge 0} \ge 0$$

   $\square$

6. Интеграл и модуль

   $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

   $\square$

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$$

   $$\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

   Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

   Так как определен $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$, то можно рассмотреть случаи

   $S > 0: \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n > 0$ (вблизи S)

   $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

   $S > 0: \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n < 0$ (вблизи S)

   $\lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = -\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n|$

   $S = 0: \lim\limits_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n| = 0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |\lim_{n\to\infty} \sigma_n| = \lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$$ (модуль суммы меньше или равен сумме модулей)

□

Nota. Интеграл и разрыв
Изъятие из отрезка не более, чем счетного числа точек, не меняет значение интеграла, что позволяет считать интеграл на интервале

Nota. Сходимость интеграла - в определении интеграла подчеркивается, что это число. Если предел интегральных сумм не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится

Nota. Вычисления
Определение дает способ вычисления и его можно упростить:
$\forall i\ \Delta x_i = \Delta x, \quad \xi_i = \left[\begin{array}{l} x_{i-1} \\ x_i \end{array}\right.$ - концы отрезка
Так вычисляют «неберущиеся интегралы»
Для функций, у которых первообразные выражаются в элементарных функциях используется не этот метод, а формула Ньютона-Лейбница

1.3. Вычисление определенного интеграла

1.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом

Дана $f(x) : [a;+\infty), f(x) \in C_{[a;+\infty)}$
$\forall x \in [a;+\infty)$ определен $\displaystyle\int_a^x f(x)dx$
Таким образом определена функция $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ - переменная площадь
В общем случае обозначим $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt \quad tin[a,x]$
Итак, различают три объекта:

1. Семейство функций: $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$
2. Функция $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$
3. Число $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$

Выявим связь между ними.

Th. Об интеграле с переменным верхним пределом (Барроу)

$f(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) \in C_{[a;+\infty+}$

Тогда $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - первообразная для $f(x)$ - $\Phi(x) = F(x)$

□

Докажем по определению

$\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} =$ [по **Th.** Лагранжа $\exists \xi \in [x; x+\Delta x]$] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} f(\xi) = f(x)$

□

Th. Основная теорема математического анализа (формула Ньютона-Лейбница, N-L)

$f(x) \in C_{[a;b]}, F(x)$ - какая-либо первообразная $f(x)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

□

Для $f(x)$ определена $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C$

Найдем значения $\Phi(a)$ и $\Phi(b)$

$\Phi(a) = F(a) + C = \int_a^a f(t)dt = 0 \Longrightarrow F(a) + C = 0 \Longrightarrow F(a) = -C$

$\Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

□

1.3.2. Методы интегрирования

1* Замена переменной в определенном интеграле

Th. $f(x) \in C_{[a;b]} \quad x = \varphi(t) \in C'_{[\alpha;\beta]}, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

□

N-L: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$

Докажем, что $F(x) = F(\varphi(t))$ - первообразная для $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\frac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t)$

□

Ex. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t \\ x \uparrow_0^{\frac{1}{2}} \quad t \uparrow_0^{\frac{\pi}{6}} \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{|\cos t|} \cos t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$

2* По частям

Th. $u, v \in C'_{[a;b]} \quad uv\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

□

$u(x)v(x)$ - первообразная для $u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

Или $d(uv) = udv + vdu$

По формуле N-L $\displaystyle\int_a^b (udv + vdu) = \int_a^b d(uv) = u(x)v(x)\Big|_a^b$

$\displaystyle\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

□

Ex. $\displaystyle\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e xd\ln x = e\ln e - 1\ln 1 - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e = 1$

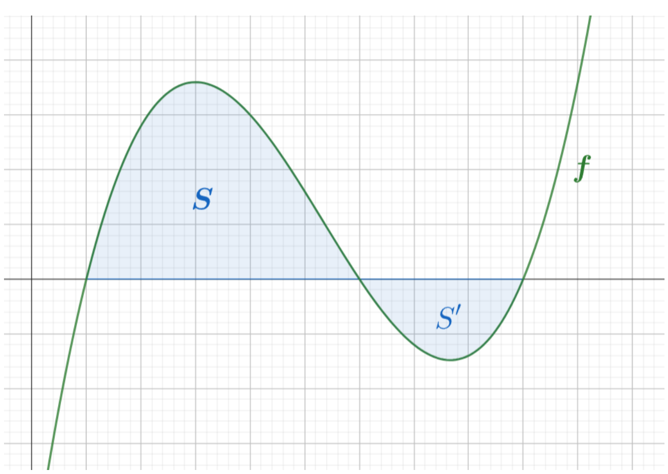
Nota. Не всякий интеграл вида $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ является определенным

Ex. $\displaystyle\int_0^e \ln x dx = x\ln x\Big|_0^e - x\Big|_0^e = e\ln e - \underbrace{0\ln 0}_{0\cdot\infty} - e$ - несобственный интеграл

1.4. Приложения определенного интеграла

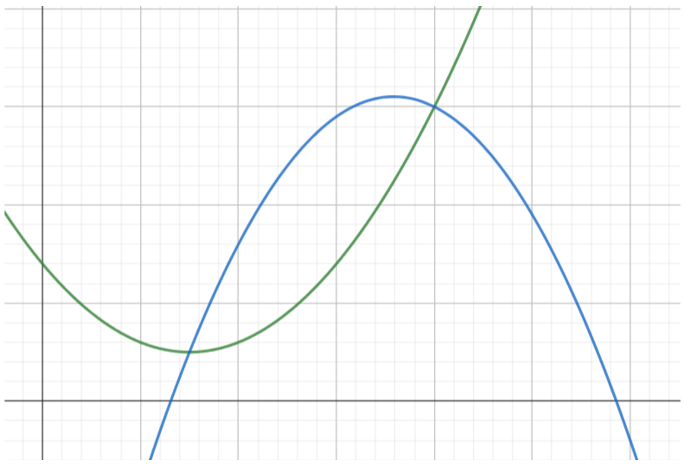
1.4.1. Площади

1* *Мет.* Значение интеграла - площадь фигуры под графиком



<u>Геом. смысл</u>. $S = \int_a^b f(x)dx \qquad S' = -\int_b^c f(x)dx$

2*



Площадь фигуры, окруженной графиками функций $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$, a, b - абсциссы точек пересечения

Nota. Симметрия

Если $f(x)$ - четная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Если $f(x)$ - нечетная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

1.4.2. Площадь в ПСК

В ДПСК мы производили дробление фигуры на элементарные прямоугольники. Сделаем подобное в ПСК для $\rho(\varphi)$:

1) Дробление $[\alpha; \beta]$ на угловые сектора $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$

$\Delta\varphi_i$ - угол сектора

2) Выбор средней точки $\psi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, площадь сектора $S_i = \frac{1}{2}\Delta\varphi_i\rho^2(\psi_i)$

3) Интегральная сумма $\sigma_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i$

4) Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \rho^2(\varphi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$

Ex. Кардиоида:

$\rho = 1 + \cos\varphi$

$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\varphi)\Delta\varphi = \int_0^{\pi} \rho^2(\varphi)\Delta\varphi = \int_0^{\pi}(1 + \cos\varphi)^2\Delta\varphi = \int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\Delta\varphi = \varphi\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\Delta\varphi = \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$

Nota. Если фигура задана параметрическими уравнениями:
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta$

То площадь будет равна $S = \int_a^b y(x)dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$

1.4.3. Длина кривой дуги

Пусть дуга AB задана уравнением $y = f(x) \quad x \in [a; b]$

1. Производим дробление дуги на элементарные дуги точками $A = M_0 < M_1 < \cdots < B = M_n$
   Здесь порядок M_i таков, что их абсциссы $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \Delta x_i > 0$
2. Стягиваем сумму элементарными хордами. Сумма длин этих хорд при уменьшении их длин будет приближать длину этой дуги
   $\Delta s_i = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$
   По **Th.** Лагранжа существует такая точка $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, что значение производной в этой точке равно наклону отрезка: $f'(\xi_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (y'(\xi_i))^2}\Delta x_i$
4. Предельный переход $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sigma_n = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}dx = l_{\text{дуги}}$

Nota. Очевидно потребовалась гладкость дуги, то есть спрямляемость. Только при этом условии $\Delta l_i \approx \Delta s_i$, и работает **Th.** Лагранжа
Параметрическое задание:
$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta]$
$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\varphi'(\theta_i)\Delta t)^2 + (\psi'(\theta_i)\Delta t)^2} = |\Delta t|\sqrt{(\varphi'(\theta_i))^2 + (\psi'(\theta_i))^2}$
$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}|dt|$

Ex. Длина эллипса
$L = 4l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{c^2\sin^2 t + b^2}dt = 4\frac{b}{c}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2\sin^2 t}dt$ - эллиптический интеграл

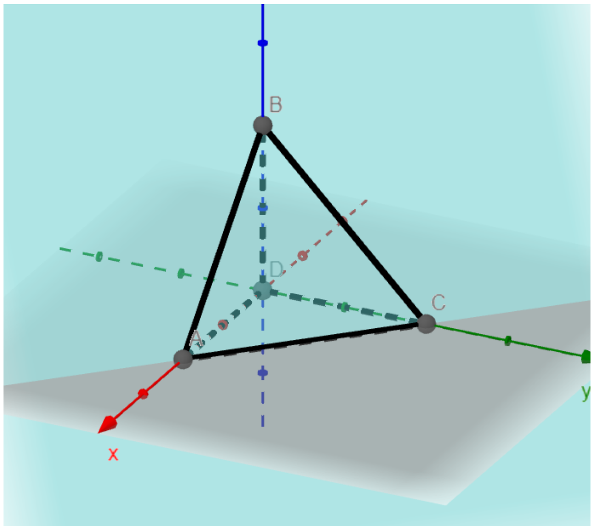
1.4.4. Объемы тел

1* Объемы тел с известными площадями сечений

Для тела известна площадь сечения перпендикулярной Ox плоскости $S(x)$

Аналогично обычному дроблению $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} v_n = \int_a^b S(x)dx = V_{\text{тела}}$

Ex. Тело отсечено от I октанта плоскостью $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}+\dfrac{z}{a}=1$

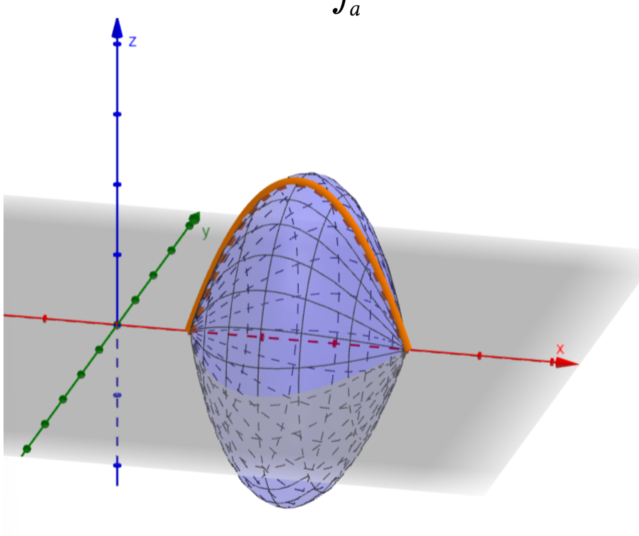


$S(x) = S_{DBC} = \dfrac{(a-x)^2}{2}$

Тогда $V = \int_0^a \frac{1}{2}(a-x)^2dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x-a)^2dx = \frac{1}{2}\int_0^a (x-a)^2 d(x-a) = \frac{1}{6}(x-a)^3\Big|_0^a = \frac{a^3}{6}$

Nota. Объем тела вращения

Пусть дана функция $r(x)$, задающая радиус тела вращения на уровне x, тогда объем тела вращения будет равен $\int_a^b \pi r^2(x)dx$

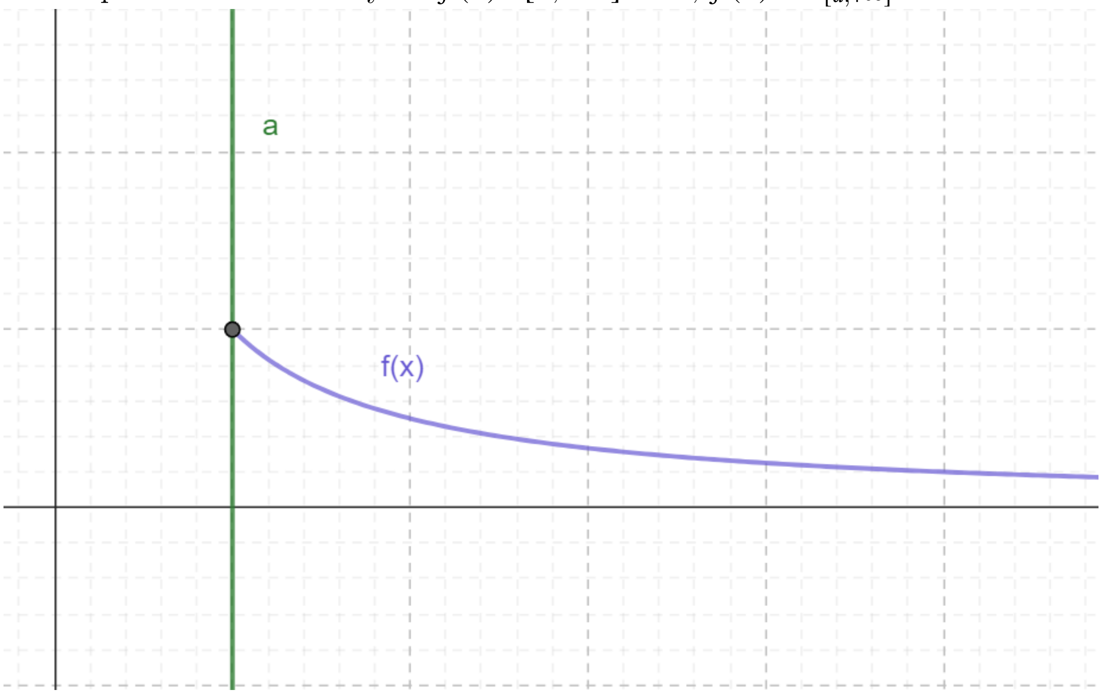


2. Несобственные интегралы

2.1 Определения

1* Интегралы на неограниченном промежутке

Геометрический смысл: пусть $f(x) : [a; +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) \in C_{[a;+\infty]}$



Тогда определенный интеграл имеет смысл - это площадь под графиком функции:

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

Имеет ли смысл площадь неограниченной фигуры под графиком функции?

Предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ может быть конечным или бесконечным

Def. 1. Определим несобственный интеграл первого рода (на неограниченном промежутке) ($f(x)$ любого знака):

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. В противном случае расходится

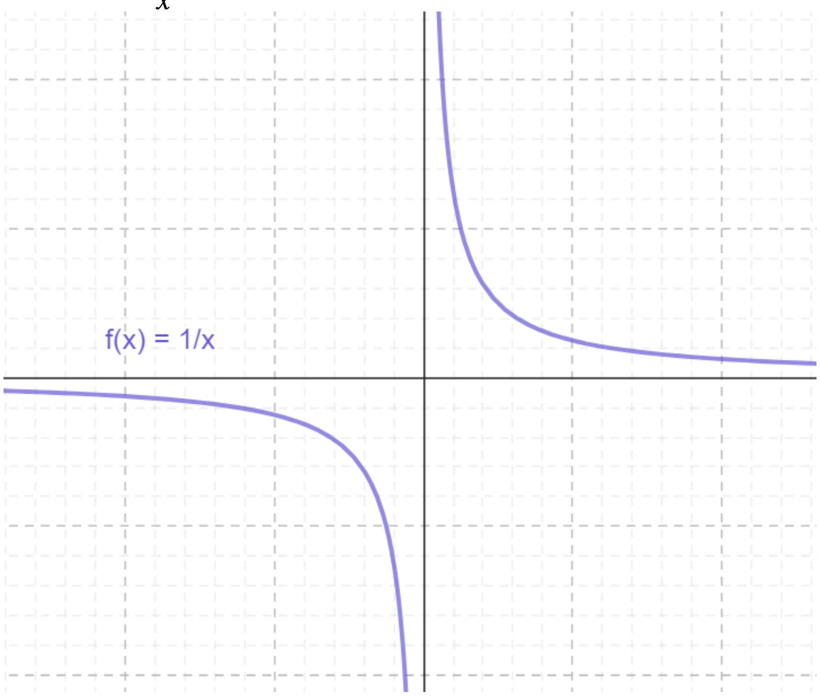
Def. 2. Функция определена на полуинтервале $[-\infty; b]$ и непрерывна. Тогда определен:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

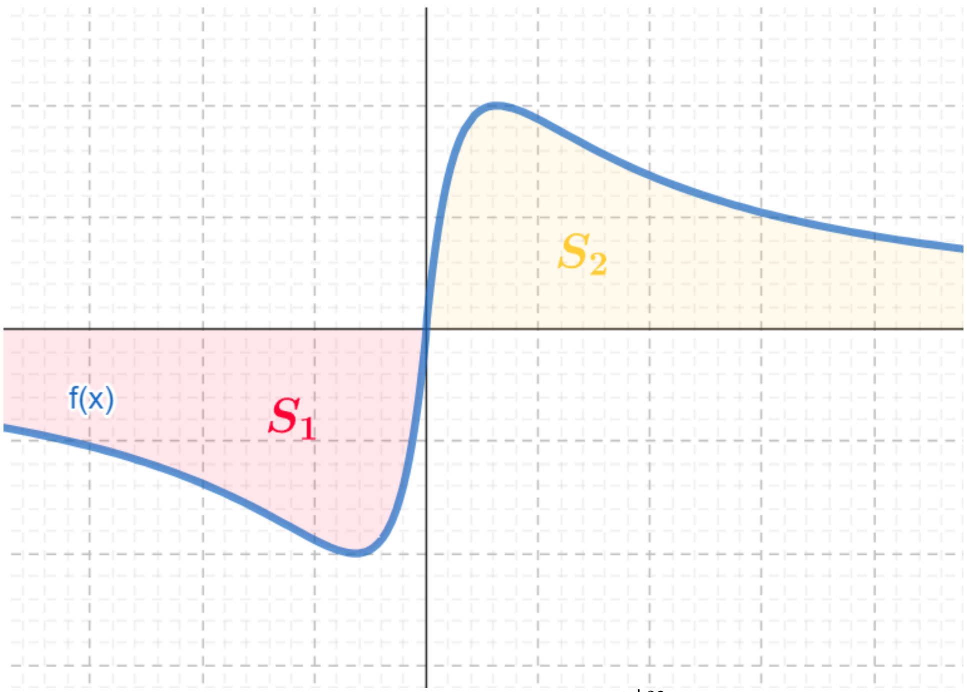
Def. 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$

Nota. Этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них (в том числе если возникает неопределенность $\infty - \infty$)

Ex. $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Сделаем ее непрерывной



$S_1 = S_2$, но $I_1 = -I_2$. Суммарный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ должен быть равен нулю.

Но по определению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится

Чтобы учесть обнуление интеграла в ситуации взаимного погашения площадей S_1 и S_2 (а это происходит тогда, когда левый и правый концы промежутка синхронно стремятся к $+\infty$) используют понятие интеграла в смысле главного значения ($v.p.$ - от французского *valeur principale*):

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\delta \to -\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$$

Разложение по формуле Ньютона-Лейбница

Ex. 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = arctgx\Big|_{-\infty}^{c=0} + arctgx\Big|_{c=0}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} arctgx - arctg(0) + arctg(0) - \lim_{x\to-\infty} arctgx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ex. 2.

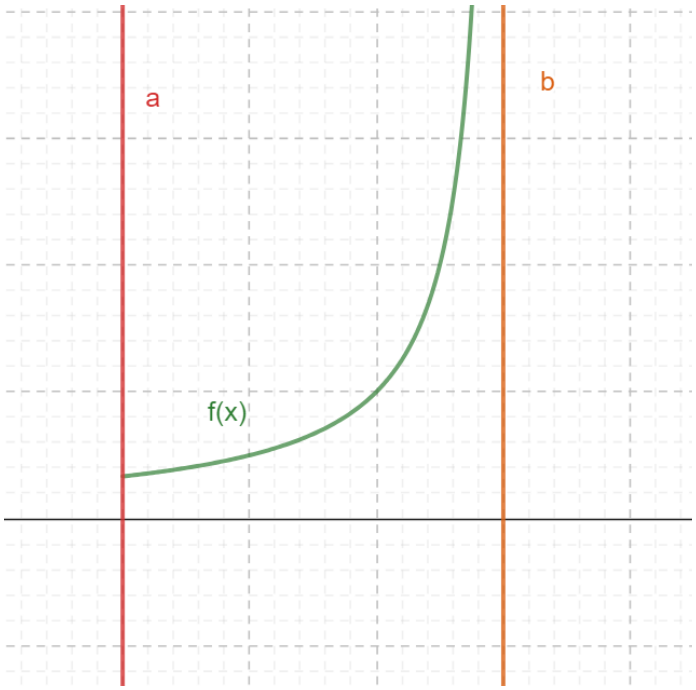
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{xlnx} = \int_1^{+\infty} \frac{dlnx}{lnx} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} = lnt\Big|_0^{+\infty} = lnlnx\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} lnlnx - \lim_{x\to 1} lnlnx = \infty - \infty$$

- расходится

Заметим нарушение непрерывности функции $\frac{1}{xlnx}$ в $x = 1$, что привело к $lnlnx \to -\infty$ при $x \to 1$

Это не интеграл первого рода, а комбинация интегралов первого и второго рода

2* Интеграл от неограниченной на отрезке функции



$f(x) : [a; b) \to \mathbb{R}$, где b - точка разрыва второго рода, а именно бесконечного

Def. 1. Интеграл второго рода (несобственный)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)dx$$

Этот интеграл сходится, если предел существует и конечен

Def. 2. Аналогично (a - точка бесконечного разрыва):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f(x)dx$$

Def. 3. $c \in [a; b]$ - точка бесконечного разрыва:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Сходится, если оба интеграла сходятся

Ex. 1.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = ln|x|\Big|_{-1}^0 + ln|x|\Big|_0^1$$

- интеграл расходится

Не заметили $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = ln|x|\Big|_{-1}^1 = 0$???

Ex. 2.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{dx}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$$

- неверно

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{dx}{x}\Big|_{-1}^{0}+-\frac{dx}{x}\Big|_{0}^{1}$$

- расходится

Nota. Если нет разбиения $[a;b]$ по аддитивности, то неопределенности раскрываются

Ex. $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int_{1}^{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{2}(ln|x-1|-ln|x+1|)\Big|_{1}^{2}=$
$=\frac{1}{2}(ln|1-1|-ln|x+1|)\Big|_{1}^{2}=\infty$, т. к. разбивается отрезок
$=\frac{1}{2}(ln|\frac{x-1}{x+1})\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}(ln\frac{1}{3}-ln(0))=\infty$ - теперь точно ∞

2.2 Свойства

1) Линейность: $\int_{a}^{+\infty}(\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int_{a}^{+\infty}f(x)dx+\mu\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ - если интегралы сходятся (иначе исследуем по определению через предел)
2) Аддитивность: $I=\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx$ - отсечение любого конечного интеграла $\int_{a}^{c}f(x)dx$ не влияет на сходимость
3) Знаки интегралов:
$\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\geq\int_{a}^{+\infty}g(x)dx$ при $f(x)\leq g(x)$ и интегралы сходятся
В частности $\int_{a}^{+\infty}f(x)dx\geq 0$ при $f(x)\leq 0$ на $[a;+\infty]$

Nota. Исследование интегралов двух функций используется для определения их сходимости

2.3 Сходимость несобственных интегралов

Задача: Часто нужно исследовать интеграл на сходимость без или до его вычисления (обычно приближенного для неберущихся интегралов)
Требуются признаки сходимости интегралов, часто использующие сравнение с эталонными интегралами (вычисляемые по формуле Ньютона-Лейбница)

2* Признак сравнения в неравенствах (далее только для интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, для остальных аналогично)

$f(x), g(x) : [a; +\infty) \to \mathbb{R}^+$, непрерывны на $[a; +\infty)$ и $\forall x \in [a; +\infty) f(x) \leq g(x)$

Тогда, если $\int_a^{+\infty} g(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, причем $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$

Прежде чем использовать свойство ОИ и предельный переход в неравенства, нужно доказать, что интеграл $J = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ сходится

Т. к. $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ при $b \to \infty$ монотонно возрастающая функция

При этом:

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g(x)dx = I \in \mathbb{R}$$

То $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена и по признаку Вейерштрасса сходится

Можно использовать предельный переход

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \Big| \lim_{b\to+\infty}$$

$$0 \leq J \leq I$$

Nota. Можно аналогично сравнить функции отрицательного знака

Если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $g(x) \leq f(x) \leq 0$, то сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Интегралы от функций разных знаков этим методов не сравниваются

$f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; +\infty)$, но функции разных знаков, и нижняя площадь, т. е. $\int_a^b |f(x)|dx$, больше верхней

1* $f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$**,** $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; +\infty)$

$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится

□ Lab. (от противного)

Nota. Отметим, что если $f(x)$ не является убывающей к нулю, т. е. б. м. на $+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ разойдется

Таким образом, если сравнить б. м. $\frac{f(x)}{g(x)}$, то можно исследовать их интегралы на сходимость

2* Предельный признак сравнения

$f(x), g(x) \in C_{[a;+\infty)}$, $f(x), g(x) > 0$

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R}\{0\}$. Тогда $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $J = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

$\square \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0|\forall x > \delta|\dfrac{f(x)}{g(x)} - k| < \varepsilon$

$-\varepsilon + k < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + k \quad \Big| * g(x) > 0$

$(k-\varepsilon)g(x) < f(x) < (\varepsilon + k)g(x)$

Т. к. $k > 0$ $(\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0)$ и ε - сколь угодно мало, то $k \pm \varepsilon$ - положительное и не близкое к нулю число

ОИ: $\displaystyle\int_a^b (k-\varepsilon)g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b (k+\varepsilon)g(x)dx$

$\lim\limits_{b\to+\infty} : (k-\varepsilon)\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx < \int_a^{+\infty} f(x)dx < (k+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)dx$

Если $I = \infty$ (но $k - \varepsilon \neq 0$), то по первому признаку (линейность) J расходится Если $I \in \mathbb{R}$ $(k + \varepsilon \neq \infty)$, то по первому признаку (линейность) J сходится

3* Абсолютная сходимость

$\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = I \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = J \in \mathbb{R}$

Nota. Обратное неверно

$\square$ ОИ и модуль:

$$\int_a^b f(x)dx \leq |\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Очевидно, что $0 \leq |\displaystyle\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \lim_{b\to\infty}\int_a^b |f(x)|dx = I$

$$-I \leq \int_a^b f(x)dx \leq I$$

$$0 \leq \lim_{b\to\infty} |\int_a^b f(x)dx| = |\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx = I$$

Nota. Если $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $|\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx|$ расходится, то I называют условно сходящимся

Ex. $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{sinx}{8x^2+3}dx$

$\displaystyle\int_a^{+\infty} |\frac{sinx}{8x^2+3}|dx = \int_a^{+\infty} \frac{|sinx|}{8x^2+3}dx$синус ограничен $\leq \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{8x^2+3}dx = \frac{1}{k}arctg\frac{x}{k}\Big|_1^{+\infty} \in \mathbb{R}$

В качестве эталонных интегралов удобно использовать:

I рода: $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$

II рода: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$

Lab. Исследовать на сходимость в зависимости от $n \in \mathbb{Z}(\mathbb{Q})$

3. Интегралы зависящие от параметра

Задача. Ex ($\alpha \neq 0$). $\int_0^1 cos\alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 cos\alpha x d\alpha x = \frac{1}{\alpha} sin\alpha x\Big|_0^1 = \frac{sin\alpha}{\alpha} = \phi(\alpha)$

$J(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx$ - интеграл, зависящий от параметра

$f(x,\alpha)$ непрерывна в $a \leq x \leq b$, $c \leq \alpha \leq d$ и существует непрерывная производная f'_α

Тогда на $[c;d]$ определена $J'_\alpha(\alpha) = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha dx$

Если последний интеграл берется лучше, чем исходный, то теорема полезна

$\Box J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{J(\alpha+\Delta\alpha)-J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}(\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x,\alpha)dx) == \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{\Delta\alpha}(\int_a^b (f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha))dx)$

По теореме Лагранжа о среднем $\exists \xi \in [\alpha;\alpha+\Delta\alpha]$

$= \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f(x,\xi)dx$

Т. к. f'_α непрерывна, то $f'_\alpha(x,\xi) = \lim\limits_{\xi\to\alpha} f'_\alpha(x,\xi) + \varepsilon = f'_\alpha(x,\alpha)+\varepsilon$

Таким образом $J'_\alpha(\alpha) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx + \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b \varepsilon dx = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\xi)dx$

Теорема: $J'_\alpha = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx)$

Ex.

$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}dx$ $I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty}(e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x})'_\alpha dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{1}{x}xcos\alpha x dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}cos\alpha x dx = \frac{1}{a+\alpha^2}$

Из этого следует, что $I(\alpha) = \int_{+\infty} {}_0 \frac{1}{a+\alpha^2}dx = arctg(\alpha)+C$

Так как $I(\alpha)$ - несобственный интеграл, это функция, а не семейство функций. Найдем C.

$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{sin0 * x}{x}dx = 0 \Longrightarrow C = 0$ Таким образом, $I(\alpha) = (\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{sin\alpha x}{x}dx)'_\alpha = arctg(\alpha)$

Ex. Гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha > 0)$$

Исследуем на сходимость:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}$$

На отрезке $[0;1]$ $e^(-x) \in [0;1]$. Тогда $0 \leq \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}dx \leq \int_0^1 x^{\alpha-1}dx \Longrightarrow$ интеграл сходится

Пусть $n > \alpha - 1, n \in \mathbb{N}$, тогда:

$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \le \int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$ - по частям, появятся $x^k e^{-x}\Big|_1^{+\infty} \to 0$ и $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится

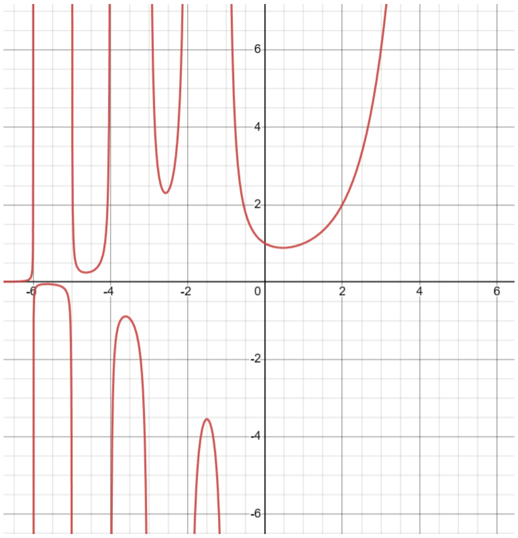
Найдем формулу для $\Gamma(\alpha)$:

$\alpha \in \mathbb{N} \quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}de^{-x} = -x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_1^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^{\alpha-2}(\alpha-1)e^{-x}dx = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1)!\Gamma(1) = (\alpha-1)!$

$\Gamma(n+1) = n!$

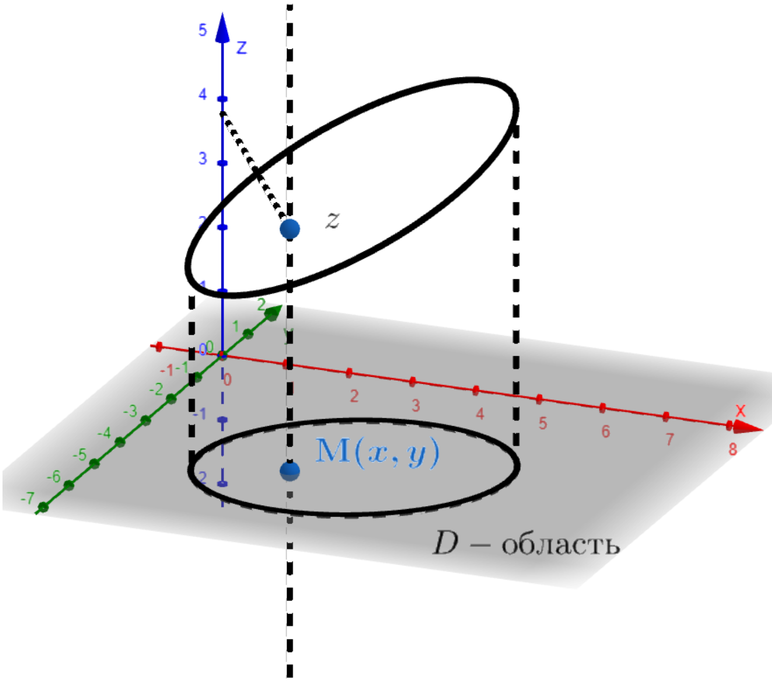
Lab. Посмотреть, как обобщается понятие факториала на вещественные числа:



4. Функция нескольких переменных (ФНП)

4.1. Определение

Nota. Дадим определение ФНП



$\forall M(x,y) \exists! z \in \mathbb{R} : z = f(x,y) \Longleftrightarrow z = f(x,y)$ - функция двух переменных

Def. Окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$
$U_\delta(M_0) = \{(x,y) \in Oxy : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0$ - радиус$\}$
$\overset{o}{U}_\delta (M_0)$ - выколотая

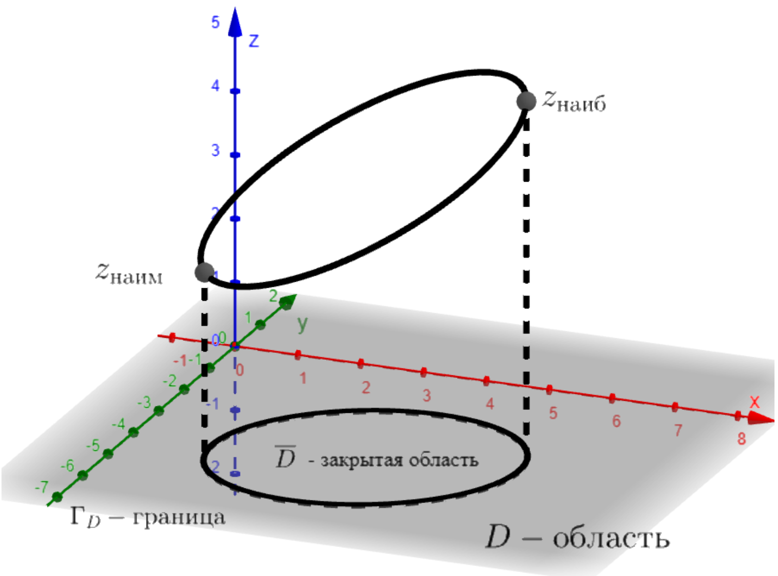
Nota. $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$, одновременное стремление $\Delta x, \Delta y \to 0$ можно заменить $\Delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \to 0$

Def. $\lim\limits_{M \to M_0} z(x,y) = L \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\varepsilon)) | \forall M \in \overset{o}{U}_\delta (M_0)\ |z(x,y) - L| < \varepsilon$
M_0 - точка сгущения и $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ (здесь)

Nota. На плоскости Oxy возможно стремление $M \to M_0$ по разным путям $F(x,y) = 0$ (уравнение кривой)
При этом значение предела вдоль разных путей могут отличаться (аналог односторонних пределов)

Предел в определении - предел в общем смысле: его существование и значение не зависит от пути

Def. $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_(x_0, y_0)$, если $z = f(x_0, y_0) = \lim\limits_{M\to M_0} z(x, y)$
z непрерывна на D, если z непрерывна $\forall (x, y) \in D$



Nota. Справедливы теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши для функции, непрерывной в заданной области
$z = f(x, y)$ непрерывна на $\overline{D} = D \cup \Gamma_D$, где $\overline{D}$ - закрытая область, D - открытая область, Γ_D - граница

Th. W1. $z = f(x, y)$ ограничена на $\overline{D}$

Th. W2. $\exists$ наибольшее и наименьшее $z \in \overline{D}$

Th. B-C1. на границе Γ_D z принимает значения разных знаков $\Longrightarrow \exists M \in \overline{D} : z(M) = 0$

Th. B-C1. $z(x, y)$ принимает все значения от $z_{\text{наим}}$ до $z_{\text{наиб}}$

4.2. Производные функции двух переменных

Путям l_1, l_2 соответствуют кривые L_1, L_2 на поверхности $z = f(x, y)$.

Пользуясь геометрическим смыслом производной, заметим, что касательные к L_1, L_2 могут быть различными.

Поэтому для определения производной выберем координатные направления $x = const$ и $y = const$

$z = f(x = c, y)$

$\frac{\partial z}{\partial y} \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, где $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Определили частную производную z по y

<u>Lab.</u> Дать определение $\frac{\partial z}{\partial x}$

Nota. $\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$ и $\Delta_y z$ называют частным приращением

Def. Полное приращение $\Delta z \overset{def}{=} z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)$

Nota. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$!!!

Обозн.: $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = z_x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = z_y$

Как определить функцию, дифференцируемую в точке?

По аналогии $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R}$, α, β - б. м.

Дифференциал

Th. $z : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\exists$ непрерывные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

Тогда функция представима $\Delta z = Adx + Bdy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $A, B \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta =$ б. м.

$\square$ $\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y) = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) + z(x + \Delta x, y) - z(x, y)$

По теореме Лагранжа:

$z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y) = z'_y(\eta)\Delta y$

$z(x + \Delta x, y) - z(x, y) = z'_x(\xi)\Delta x$

По теореме о представлении функции ее пределом:

$z'_x(\xi) = \lim\limits_{\xi \to x (\Delta x \to 0)} z'_x(\xi) + \alpha$

$z'_y(\eta) = \lim\limits_{\eta \to y} z'_y(\eta) + \beta$

Так как $z'_x(\xi), z'_y(\eta)$ непрерывны, то $\lim\limits_{\xi \to x} z'_x(\xi) = \frac{\partial z}{\partial x}, \lim\limits_{\eta \to y} z'_y(\eta) = \frac{\partial z}{\partial y}$

Тогда $\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \beta\right)\Delta y = \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$

Заметим, что $\alpha\Delta x$ и $\beta\Delta y$ - б. м. порядка выше, чем $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Longleftrightarrow$

$1 = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)^2} \quad |\frac{\Delta x}{\Delta\rho}| \leq 1, |\frac{\Delta y}{\Delta\rho}| \leq 1$

Сравним $\frac{\alpha\Delta x}{\Delta\rho} =$ б. м. огр. $\overset{\Delta\rho\to 0}{\to} 0$, $\frac{\beta\Delta y}{\Delta\rho} \overset{\Delta\rho\to 0}{\to} 0$

Функция, приращение которой представимо $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + o(\Delta\rho)$, называется дифференцируемой в точке (x, y), линейная часть приращения называется полным дифференциалом

Обозначение: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Ex. $z = 3xy^2 + 4cosxy$
$\dfrac{\partial z}{\partial x} \overset{y=const}{=} 3y^2 - 4sinxy \cdot y$
$\dfrac{\partial z}{\partial y} \overset{x=const}{=} 6xy - 4sinxy \cdot x$
$dz = (3y^2 - 4ysinxy)dx + (6xy - 4xsinxy)dy$

4.3. Правила дифференцирования

Nota. При нахождении $\dfrac{\partial z}{\partial x_i}$ (x_i - какая-либо переменная) дифференцирование проводится по правилам для функции одной переменной ($x_j \neq x_i$ считаются константами)
Выпишем более сложные правила

1* Сложная функция

Mem. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Def. Сложная функция двух переменных: $z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y)$
Формула: Найдем $frac\partial z(u, v)\partial x$ и $frac\partial z(u, v)\partial y$

Th. $z = z(u, v),\ u(x, y), v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x, y
Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x}\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y}$
□ z дифференцируема $\Longleftrightarrow \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$
Зададим приращение Δx (представление Δz не должно измениться)
$\Delta_x z = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x + v \quad \Big| \cdot \Delta x$
$\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha\dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\dfrac{\Delta_x v}{\Delta x} \quad \Big| \cdot \Delta x$
По теореме Лагранжа: $\dfrac{\partial u}{\partial x}(\xi) \overset{\Delta x \to 0}{\to} \dfrac{\partial u}{\partial x}$
В пределе: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$
Аналогично для $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Nota. Интересен случай $z = z(x, u, v)$, где $u = u(x), v = v(x)$
Здесь z является функцией одной переменной x

Обобщая правило на случай трех переменных, можем записать формулу полной производной, которая имеет смысл
$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$

Ex. Пусть $w = w(x, y, z)$ - функция координат $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ - функции времени w явно не зависит от времени, тогда $\frac{dw}{dt} = w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$, где v_x - проекция скорости
Если $w = w(x, y, z, t)$, то $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} w'_x v_x + w'_y v_y + w'_z v_z$

2* Неявная функция одной переменной: пусть $F(x, y(x)) = 0$ - неявное задание $y = y(x)$
Найдем $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$
Отсюда $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

4.4. Производная высших порядков

Nota. Пусть $z = z(x, y)$ дифференцируема и $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ также дифференцируемы, при этом в общем случае $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y)$
Тогда определены вторые частные производные

Def. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y}$ - чистые производные
$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x}$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$ - смешанные производные

Th. $z = z(x, y)$, функции $z(x, y), z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ определены и непрерывны в $\overset{o}{U}(M(x, y))$
Тогда $z''_{xy} = z''_{yx}$
□ Введем вспомогательную величину
$\Phi = (z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x + \Delta x, y)) - (z(x, y + \Delta y) - z(x, y))$
Обозначим $\phi(x) = z(x, y + \Delta y) - z(x, y)$
Тогда $\Phi = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$ - дифференцируема, непрерывна, как комбинация
По теореме Лагранжа $\phi(x + \Delta x) - \phi(x) = \phi'(\xi)\Delta x = (z'_x(\xi, y + \Delta y) - z'_x(\xi, y))\Delta x$, где $\xi \in (x; x + \Delta x)$

Здесь z'_x дифференцируема также на $[y, y+\Delta y]$

Тогда по теореме Лагранжа $\exists \eta \in (y, y+\Delta y) \mid z'_x(\xi, y+\Delta y) - z'_x(\xi, y) = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta y$

Таким образом $\Phi = z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y$

Перегруппируем Φ, далее аналогично для z''_{yx}

Тогда $z''_{xy}(\xi, \eta)\Delta x \Delta y = \Phi = z''_{yx}(\xi', \eta')\Delta x \Delta y$

4.5. Дифференциалы

Мет. 1. Полный дифференциал (1-ого порядка) функции $z = z(x, y)$

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ - сумма частных дифференциалов

Мет. 2. Инвариантность формы первого дифференциала функции одной переменной

$dy(x) = y'(x)dx \overset{x=\phi(t)}{=} y'(t)dt$

Th. Инвариантность полного дифференциала первого порядка.

$z = z(u, v), \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$ - дифференциалы

Тогда $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}du + \dfrac{\partial z}{\partial v}dv = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

□ $dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \dfrac{\partial z}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

Мет. $d^2y(x) \overset{def}{=} d(dy(x)) = y''(x)dx^2 \neq y''(t)dt^2$

Def: $z = z(x, y)$ - дифференцируема и $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ - дифференцируемая функция

Тогда второй полный дифференциал:

$d^2z \overset{def}{=} d(dz)$

Формула: $d^2z = d\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = (z'_x dx)'_x dx + (z'_y dy)'_x dx + (z'_x dx)'_y dy + (z'_y dy)'_y dy = (z'_x)'_x (dx)^2 + (z'_y)'_x dxdy + (z'_x)'_y dydx + (z'_y)'_y (dy)^2 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$

Nota: Заметим формальное сходство с биномом Ньютона: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Введем условное обозначение $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2$

Тогда $d^2z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 z$, здесь $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2$ - оператор второго полного дифференцирования

$d^n z = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^n z$ - дифференциал n-ого порядка

Nota: Можно ли утверждать, что $d^2 z(x,y) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \overset{x=x(u,v),y=y(u,v)}{=} \left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right)^2 z$???

Нет, нельзя ($d^2 z$ не инвариантен при замене)

Покажем, что не выполняется в простом случае: $z = z(x,y) = z(x(t), y(t))$ - параметризация.

Геометрически, это выбор пути в области D от точки $M_0(x_0, y_0)$ до точки $M(x,y)$

Итак

$d(dz) \overset{z-\Phi_1\Pi}{=} (dz)'_t dt = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy\right)'_t dt \overset{dx(t)=\frac{dx}{dt}dt, dy(t)=\frac{dy}{dt}dt}{=} \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}\right)'_t dt^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}\right)'_t dt^2 = \left(\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)'_t \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)'_t\right) dt^2 + \left(\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)'_t \dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)'_t\right) dt^2 = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{d^2 x}{dt^2}\right) dt^2 + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{d^2 y}{dt^2}\right) dt^2 + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dy}{dt}\right) dt^2 = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \dfrac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \dfrac{\partial z}{\partial y}d^2 y + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dydx = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 z \dfrac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \dfrac{\partial z}{\partial y}d^2 y$

$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ - линейная параметризация

<u>Lab.</u> Дать инвариантность при линейной параметризации

Причем, это свойство верно для $d^n z$, то есть если $\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$ (например), то

$d^n z \overset{z=z(t)}{=} z^{(n)}(t) dt$

4.6. Формула Тейлора

Mem. $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \left[\begin{array}{l} o((x-x_0)^n) - \text{Пеано} \\ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - \text{Лагранжа} \end{array}\right.$

В дифференциалах:

$f(x) = f(x_0) + \dfrac{df(x_0)}{1!} + \dfrac{d^2 f(x_0)}{2!} + \dots + \dfrac{d^n f(x_0)}{n!} +$ остаток

Формула Тейлора для $z = z(x,y)$ в окрестности $M_0(x_0, y_0)$ (как раньше $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$)

$z(M = \overset{o}{U}(M_0)) = z(M_0) + \dfrac{dz(M_0)}{1!} + \dots + \dfrac{d^n z(M_0)}{n!} + o((\Delta\rho)^n)$

Nota. Формула выше верна, если $z = z(x,y)$ - непрерывна со своими частными производными до $n+1$ порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(M_0(x_0, y_0))$, где $M(x,y) \in U_\delta(M_0)$

Для линейной параметризации форма дифференциала сохраняется

$d^2z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z \overset{\text{инвариант}}{=} z_t^{(n)} dt^n$

Введем функцию: $z(x(t), y(t)) \overset{\text{обозн}}{=} \varphi(t)$ - $(n+1)$ раз дифференцируема (композиция $(n+1)$ дифференцируемых и линейных функций)

Заметим, что $x = x_0 + \Delta x t \overset{t_0=0}{=} x_0$, $y = y_0 + \Delta y t \overset{t_0=0}{=} y_0$

$$M \overset{t \to t_0 = 0}{\to} M_0$$

То есть $z(M_0) = z(x_0, y_0) = z(x(t_0), y(t_0)) = \varphi(t_0) = \varphi(0)$

Таким образом $\varphi(t)$ как функция одной переменной может быть разложена в окрестности $t_0 = 0$ по формуле Маклорена

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{d\varphi(0)}{1!}\Delta t + \dots + \frac{d^n\varphi(0)}{n!}\Delta t^n + o((\Delta t)^n)$$

Вернемся к $z(x, y)$ $(\Delta t = t - t_0 = 1)$:

$$z(x, y) = z(M) = z(M_0) + \frac{dz(M_0)}{1!} + \frac{d^2z(M_0)}{2!} + \dots + \frac{d^nz(M_0)}{n!} + r_n(x, y)$$

где $r_n(x, y) = r_n(t) \overset{\text{Лагр.}}{=} \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}\Delta t = \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta\Delta t)}{(n+1)!}$

$r_n(x, y)$ должен быть б. м. по отношению к $(\Delta\rho)^n$, то есть $r_n(x, y) = o((\Delta\rho)^n)$

$(r_n(t) \overset{n\to\infty}{\to}$, если $\varphi(t)$ нужное число раз дифференцируема $Rightarrow$ ограничена, $r_n(t)$ - огр. б. м.)

Nota. В дальнейшем для исследования $z(x, y)$ на экстремум достаточно разложения по формуле Тейлора до 2-ого порядка включительно. Покажем сходимость $r_n(x, y) \overset{(\Delta\rho)^n \to 0}{\to} 0$ на примере $r_2(x, y) = \frac{d^3z(M_{\text{сред.}})}{3!}$

$r_2(x, y) = \frac{1}{3!}(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y)^3 z = \frac{1}{3!}(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(\Delta x)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}(\Delta x)^2\Delta y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}(\Delta y)^2\Delta x \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(\Delta y)^3)$

Вообще говоря, значения частных производных берутся в различных средних точках

$r_2(x, y) = \frac{1}{3!}(z_{xxx}(\mu_1)(\Delta x)^3 + 3z_{xxy}(\mu_2)(\Delta x)^2\Delta y + z_{xyy}(\mu_3)(\Delta y)^2\Delta x + 3z_{yyy}(\mu_4)(\Delta y)^3) = \Big|$ вынесем $(\Delta\rho)^3$

$= \frac{(\Delta\rho)^3}{3!}(\text{огран.} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta y)^2\Delta x}{(\Delta\rho)^3} + \text{огран.} \cdot \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta\rho)^3})$

$\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta\rho)^3} = \frac{(\Delta x)^3}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}^3} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, то есть дробь и выражение выше ограничены

$\frac{r_2(x, y)}{(\Delta\rho)^2} = \frac{1}{3!}\frac{(\Delta\rho)^3 \cdot \text{огр.}}{(\Delta\rho)^2} = \frac{1}{3!}\Delta\rho \cdot \text{огр.} \overset{\Delta\rho \to 0}{\to} 0$

4.7. Геометрия ФНП

4.7.1. Линии и поверхности уровня

Положим $z = const$. В сечении плоскостью $z = c$ образуется кривая l с уравнением $\begin{cases} z = c \\ \varphi(x, y) = 0 \leftarrow \text{уравнение } l \end{cases}$

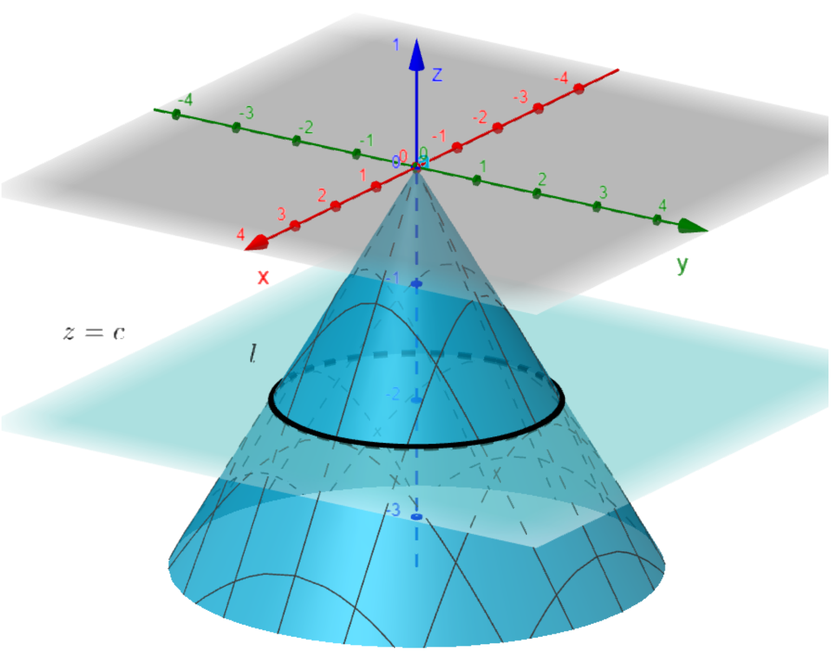
Кривая l с уравнением $z(x, y) = c$ называется линией уровня $\Phi_2\Pi$ $z = z(x, y)$

Def. Поверхность уровня $\mathcal{P}$ - это поверхность с уровнем $u(x, y, z) = c$

Физ. смысл: Пусть $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (значения функции $u(x, y, z)$ - скаляры). Тогда говорят, что в $\mathbb{R}^3$ задано скалярное поле. Например, поле температур, давления, плотности и т. д.

Тогда $u = c$ - поверхности постоянных температур, давления и т. п. (изотермические, изобарные, эквипотенциальные)

Ex. Конус - $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$



Линии уровня $z = c$:

1. $c > 0 \quad \varnothing$
2. $c = 0 \quad x = y = 0-$ точка $(0, 0)$
3. $c < 0 \quad -|c| = -\sqrt{x^2 + y^2} \quad c^2 = x^2 + y^2$

4.7.2. Производная по направлению, Градиент

Задача. Дано скалярное поле $u = u(x, y, z)$ (напр. давления). Как меняется давление при перемещении в заданном направлении?

Это задача о нахождении скорости изменения $u(x, y, z)$ в заданном направлении $\overrightarrow{s}$

Из $M_0(x_0, y_0, z_0)$ движемся в $M(x, y, z)$ в направлении $\overrightarrow{s}$, $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$

$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$1 = \sqrt{(\dfrac{\Delta x}{\Delta s})^2 + (\dfrac{\Delta y}{\Delta s})^2 + (\dfrac{\Delta z}{\Delta s})^2}$

$(\dfrac{\Delta x}{\Delta s}, \dfrac{\Delta y}{\Delta s}, \dfrac{\Delta z}{\Delta s}) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \overrightarrow{s^0}$

Потребуем, чтобы $u(x, y, z)$ имела непрерывность u_x, u_y, u_z в D

То есть $u(x, y, z)$ дифференцируема и

$\Delta u = du + o(\Delta s) = u_x \Delta x + u_y \Delta y + u_z \Delta x + o(\Delta s) \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s} = u_x \cos\alpha + u_y \cos\beta + u_z \cos\gamma + \dfrac{o(\Delta s)}{\Delta s}$ - предельный переход

$\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

Nota. Изначально $\Delta u = du + (\text{б. м.})\Delta x + (\text{б. м.})\Delta y + (\text{б. м.})\Delta z \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{\Delta s}$

$\dfrac{\Delta u}{\Delta s} = \dfrac{du}{\Delta s} + (\text{б. м.})\cos\alpha,\ (\text{б. м.})\cos\alpha \to 0$

Def. $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$

где α, β, γ - направления $\overrightarrow{s}$, называют производной функции $u = u(x, y, z)$ в направлении $\overrightarrow{s}$

Nota. Производная в определении - число, но $\dfrac{\partial u}{\partial s}\overrightarrow{s^0}$ - вектор скорости

Nota. Заметим, что если $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ - декартовы орты, то

$\dfrac{\partial u}{\partial i} = \dfrac{\partial u}{\partial x}1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}0 + \dfrac{\partial u}{\partial z}0 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$

и аналогично в других направлениях: $\dfrac{\partial u}{\partial j} = \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial k} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

Составим вектор $\dfrac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k} \overset{\text{обозн}}{=} \overrightarrow{\nabla} u$

$\overrightarrow{\nabla}$ - набла-оператор (оператор Гамильтона); $\overrightarrow{\nabla} = (\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z})$ - условный вектор

Def. $\overrightarrow{grad}\ u \overset{def}{=} \overrightarrow{\nabla} u$ - называют градиентом функции $u(x, y, z)$

Свойства градиентов:

Th. 1. $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \text{пр.}_{\overrightarrow{s}} \overrightarrow{\nabla} u$

Th. 2. $\overrightarrow{\nabla} u$ - направление наибольшего значения $\dfrac{\partial u}{\partial s}$

Th. 3. $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{\nabla} u \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial s} = 0$

Th. 4. $u = u(x, y), u = c$ - линии уровня l. Тогда $\overrightarrow{\nabla} u \perp l$

Доказательства:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial s} = (\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}) \cdot \overrightarrow{s^0} = \overrightarrow{\nabla} u \overrightarrow{s^0} = |\overrightarrow{\nabla} u||\overrightarrow{s^0}| \cos(\overrightarrow{\nabla} u, \overrightarrow{s^0}) = |\overrightarrow{\nabla} u| \cos(\overrightarrow{\nabla} u, \overrightarrow{s^0}) = \text{пр.}_{\overrightarrow{s}} \overrightarrow{\nabla} u$
2. $\dfrac{\partial u}{\partial s} = |\overrightarrow{\nabla} u| \cos\varphi \dots$ Lab.
3. Lab.
4. $u = c$ - уравнение $l_{\text{пр}}$ в плоскости Oxy, то есть $u(x, y) = c$, можем рассмотреть как неявную функцию $u(x, y(x)) - c = 0$

   Производная неявной функции: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y} = k_l$ - угловой коэффициент касательной к l

   $\overrightarrow{\nabla} u = (u_x, u_y) \quad \dfrac{u_y}{u_x} = k_{\text{град.}}$ - наклон вектора градиента. Очевидно $k_l \cdot k_{\text{град.}} = -1 \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla} u \perp l$

Nota. Итак, в теоремах сказано

1* В любом заданном направлении $\overrightarrow{s}$ производная $\dfrac{\partial u}{\partial s}|_M$ равна проекции градиента в M

2-3* В направлении $\overrightarrow{\nabla} u$ производная $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ наибольшая по модулю, а в направлении $\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{\nabla} u$ $\dfrac{\partial u}{\partial s} = 0$

4* Градиент $\perp$ линиям уровня. Прямая, содержащая $\overrightarrow{\nabla} u$ (т. е. перпендикулярная касательной к l), называется нормалью к l а тогда $\overrightarrow{\nabla} u$ - вектор нормали

4.7.3. Касательная и нормаль к поверхности

Будем исследовать поверхность π с уравнением $F(x, y, z(x, y)) = 0$ (неявное задание)

Def. Прямая τ называется касательной прямой к поверхности π в точке $P(x, y, z)$, если эта прямая касается какой-либо кривой, лежащей на π и проходящей через P

Nota. Кривая получается (обычно) сечением π какой-либо плоскостью

Nota. В одной точке может быть множество касательных, но необязательно

Nota. Договоримся различать два типа точек поверхности: обыкновенные и особые

Def. Поверхность π задана $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Точка M называется обыкновенной, если существуют все $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$, они непрерывны и не все равны нулю

Def. Точка M называется особой, если $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ или хотя бы одна не существует

Th. Все касательные прямые к π в обыкновенной точке M_0 лежат в одной плоскости

□

$d\overrightarrow{s}$ - направляющий вектор касательной τ, проведенной к кривой l в некоторой секущей плоскости

$d\overrightarrow{s}$ - вектор малых приращений, то есть $d\overrightarrow{s} = (dx, dy, dz)$

$d\overrightarrow{p}$ - проекция $d\overrightarrow{s}$ на Oxy, то есть $d\overrightarrow{p} = (dx, dy)$

Кривую l можно задать параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \xi(t) \\ z = \theta(t) \end{cases}$

Прямая τ имеет уравнение

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz}$$

При отходе от M_0 на малое расстояние по поверхности (точнее по кривой l) задаем приращение $dt \neq 0$

Домножим уравнение на dt

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}}$$

Из условия обыкновенности точки M_0 следует дифференцируемость функции F. Кроме того, уравнение можно преобразовать к виду $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$, где $x(t), y(t), z(t)$ - тоже дифференцируемы в точке M_0

Запишем F'_t, как вложенную:

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Или $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 0$

Таким образом, $\overrightarrow{N} \cdot \frac{d\overrightarrow{s}}{dt} = 0$. То есть $\overrightarrow{N} \perp \frac{d\overrightarrow{s}}{dt}$, при том, что $d\overrightarrow{s}$ выбран произвольно (кривая l - кривая произвольного сечения)

Итак, вектор $\overrightarrow{N} \perp$ любой касательной τ к поверхности π в точке M_0. Следовательно, все касательные лежат в плоскости κ такой, что $\overrightarrow{N} \perp \kappa$

□

Def. Плоскость κ (содержащая все касательные прямые τ к π в точке M_0) называется касательной плоскостью к π в M_0

Def. Прямая в направлении $\overrightarrow{N}$ через точку M_0 называется нормалью к π в M_0
$\overrightarrow{N}$ - вектор нормали к поверхности в точке
Уравнение (π) $\quad F(x,y,z)=0,\ \overrightarrow{N}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right),\ M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi,\kappa,n$
Касательная плоскость (κ) $\quad \frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0$
Нормаль (n) $\quad \frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

Nota. Получим вектор нормали в случае явного задания $\pi \quad z=z(x,y)$
Пересечем π в точке M_0 плоскостями $x=x_0, y=y_0$.
В сечении получим кривые с касательными векторами
Вектор нормали к π в M_0 $\quad \overrightarrow{n}=\overrightarrow{m}\times\overrightarrow{p}$
Найдем $\overrightarrow{m},\overrightarrow{p}$
В сечении $x=x_0$
картинка
Введем вектор $d\overrightarrow{p}\,||\,\overrightarrow{p}$
$d\overrightarrow{p}=\left(0,dy,\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$
Аналогично найдем $\overrightarrow{m}$ в сечении $y=y_0$
$\overrightarrow{m}\,||\,d\overrightarrow{m}=\left(dx,0,\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)=\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx$
Так как модуль $\overrightarrow{n}$ не важен, а только направление, то будем искать $\overrightarrow{n}=\left(1,0,\frac{\partial z}{\partial x}\right)\times\left(0,1,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$\overrightarrow{n}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x}\\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}=\overrightarrow{i}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\overrightarrow{j}\frac{\partial z}{\partial y}+\overrightarrow{k}=$$
$$=\left(-\frac{\partial z}{\partial x};-\frac{\partial z}{\partial y};1\right)$$

Тогда уравнение κ:

$$z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0)=dz$$

Уравнение нормали n: $\frac{x-x_0}{-\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{-\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{1}$

Nota. Последние уравнения можно получить проще, если свести уравнение $z=f(x,y)$ к уравнению $z-f(x,y)=F(x,y,z)=0$

Lab. Вывести уравнение κ и n, пользуясь предыдущим замечанием

Nota. Если найти $\overrightarrow{n^-} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{m} = -(\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{p})$, то получим также вектор нормали, но обращенный в противоположную сторону
Будем говорить, что $\overrightarrow{n^+}$ - положительный вектор нормали, если угол $\angle\gamma = \angle(\overrightarrow{n^+}, Oz) \in [0; \frac{pi}{2})$
$\overrightarrow{n^-}$ - отрицательный, если угол $\angle\gamma = \angle(\overrightarrow{n^-}, Oz) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
Соответственно этому верхней стороной π называется та, к которой вектор нормали положительный
Нижней стороне соответствует $\overrightarrow{n^-}$
Если $\overrightarrow{n} \perp Oz$, то это боковая сторона

4.7.4. Экстремумы ФНП (Ф$_2$П)

Def. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой максимума (минимума) функции $z = z(x, y)$, если $\forall M \in U_\delta(M_0) \quad z(M_0) \geq z(M)$ (для минимума $z(M_0) \leq z(M)$)

Nota. То же, что $z(M) - z(M_0) = z - z_0 = \Delta z \leq 0$ (max), $\quad \Delta z \geq 0$ (min)

Mem. Для ФОП формулировали Необходимое условие экстремума (Ферма), из этого условия получали точки, подозрительные на экстремум : критические - $f'(x_0) = 0$ или $\nexists f'(x_0)$ (для острого экстремума); стационарные - $\exists f'(x_0) = 0$ (частный случай критич.)
Далее при помощи достаточных условий (признаков) проверяем наличие экстремума в критических точках

Nota. Все термины переносятся на ФНП
Необходимое условие и достаточное условие аналогично

Th. Необходимое условие экстремума (гладкого):
$z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad z_0$ - точка гладкого экстремума, то есть $\exists \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ в M_0 и $\forall M \in U_\delta(M_0)$ $z_0 \leq z(M)$ или $z_0 \geq z(M)$
Тогда $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0 \end{cases}$
$\square$ Аналогично лемме Ферма в сечениях $x = x_0$, $y = y_0$ $\square$
Для существования острого экстремума нужно рассмотреть не существования или бесконечность $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$
Если же функция трижды дифференцируема исследования на характер экстремума можно проводить с помощью вторых производных

Th. Достаточное условие (гладкого) экстремума

Пусть $z = z(x, y)$ непрерывна в окрестности x_0 (критическая точка $\frac{\partial z}{\partial x}|_{M_0} = 0, \frac{\partial z}{\partial y}|_{M_0} = 0$) вместе со своими первыми и вторыми производными (можно потребовать трижды дифференцируемость)

Тогда, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \overset{\text{обозн}}{=} A, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \overset{\text{обозн}}{=} B, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \overset{\text{обозн}}{=} C$, то

1. $AC - B^2 > 0, A > 0 \Longrightarrow M_0$ - точка минимума
2. $AC - B^2 > 0, A < 0 \Longrightarrow M_0$ - точка максимума
3. $AC - B^2 < 0$ в точке M_0 нет экстремума
4. $AC - B^2 = 0 \Longrightarrow$ нельзя утверждать наличие или отсутствие экстремума в точке (требуются дополнительные исследования)

□

Функция z дважды дифференцируема, тогда ($z_0 = z(M_0)$)

$\Delta z = z - z_0 = \frac{dz}{1!}|_{M_0} + \frac{d^2 z}{2!}|_{M_0} + o((\Delta\rho)^2) \quad \Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},\ dx = \Delta\rho\cos\alpha, dy = \Delta\rho\sin\alpha$

$o((\Delta\rho)^2) = \lambda(\Delta\rho)^3$

Заметим, что $dz|_{M_0} = 0$, так как M_0 - критическая

$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 = A(dx)^2 + 2B dx dy + C(dy)^2 = A(\Delta\rho)^2\cos^2\alpha + 2B(\Delta\rho)^2\cos\alpha\sin\alpha + C(\Delta\rho)^2\sin^2\alpha$

Тогда $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha + 2\lambda\Delta\rho)$

Далее рассмотрим отдельно случаи $A \neq 0$ и $A = 0$

$A \neq 0$: $A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha = \frac{A^2\cos^2\alpha + 2AB\cos\alpha\sin\alpha + B^2\sin^2\alpha + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} = \frac{(A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A}$

1) $\sqsupset AC - B^2 > 0 (A > 0)$: Числитель неотрицательный и не равен нулю (иначе $\sin\alpha = 0$, то тогда $A\cos\alpha \neq 0$)

Итак, числитель и знаменатель больше нуля. Обозначим всю дробь за $k^2 > 0$

Вернемся к $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(k^2 + 2\lambda\Delta\rho)$

Устремим $\Delta\rho \to 0$, начиная с какого-то $\delta\ \forall M \in U_\delta(M_0)\ k^2 + \lambda\Delta\rho > 0$

То есть $\Delta z > 0$ в $U_\delta(M_0) \Longrightarrow M_0$ - точка минимума (локально в $U_\delta(M_0)$)

2) $\sqsupset AC - B^2 > 0 (A < 0)$, тогда $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$ при достаточно малом $\Delta\rho$

3) $\sqsupset AC - B^2 < 0 (A > 0)$, тогда фиксируем направления $\alpha = 0 \Longrightarrow \sin\alpha = 0$

$\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A + 2\lambda\Delta\rho) > 0$

$tg\alpha = -\frac{A}{B} \Longrightarrow \frac{(AC - B^2)\sin^2\alpha}{A} = -k^2, \Delta z = \frac{(\Delta\rho)^2}{2}(-k^2 + 2\lambda\Delta\rho) < 0$

Вдоль разных путей $\alpha = 0$, $tg\alpha = -\frac{A}{B}$, разный знак $\Delta z \Longrightarrow$ нет экстремума

Nota. Можно аналогично рассмотреть $A < 0$

4) $A = 0$, вернемся к выражению $\Delta z = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(\sin\alpha(2B\cos\alpha + C\sin\alpha) + 2\lambda\Delta\rho)$
Пусть α беск. мал, тогда $\sin\alpha \approx 0, C\sin\alpha \approx 0, 2B\cos\alpha \approx 2B$. Тогда знак $\sin\alpha \cdot 2B$ зависит от α
То есть Δz колеблется вместе с α по знаку $\Longrightarrow$ нет экстремума
Можно доказать при $A \neq 0$, например, выбрав $tg\alpha = -\frac{A}{B}$, что знак Δz зависит от α
□

5. Интеграл ФНП

5.1. Общая схема интегрирования

Постановка задачи.
В некоторой области Ω (дуга кривой, участок поверхности, тело и т. д.) распределена или действует непрерывно некоторая функция скалярная g или векторная $\overrightarrow{G}$, то есть определены $g(M)$ или $\overrightarrow{G}$ $\forall M \in \Omega$

Ex. Область Ω - дуга кривой $l : y = y(x)$
Скалярная функция $g(M)$ - плотность в точке M

Ex. Область Ω - трубка в $\mathbb{R}^3$
Векторная величина $\overrightarrow{G}(M)$ - скорость жидкой частицы, движущейся по трубке
Из всех векторов $\overrightarrow{v}$ (для всех $M \in \Omega$) складывается «поле жидких скоростей»

Ex. Область Ω - кривая, по которой движется точка M под действием силы $\overrightarrow{G}(M)$
Задача интегрирования - найти суммарное содержание скалярной величины или действие векторной величины в области Ω
Схема Величины $g(M)$ и $\overrightarrow{G}(M)$, меняясь от точки к точке заменяются на квазипостоянные на малых (элементарных) участках $d\omega$
Так как $g(M)$ или $\overrightarrow{G}(M)$ должны быть непрерывны на Ω, то на малом участке $d\omega$ их изменение незначительно и значение функции можно считать почти постоянным, приняв за это значение какое-либо среднее $g_{\text{ср.}}(M), \overrightarrow{G_{\text{ср.}}}(M)$
Тогда элементарное содержание $g(M)$ в $d\omega$ будет отличаться от среднего содержания, то есть $g_{\text{ср.}} d\omega$ на б. м. большего порядка

Ex. Проиллюстрируем на примере $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$
S - площадь по наибольшей границе, σ - площадь по наименьшей границе, $S_{\text{трап.}}$ - «истинная» площадь
Т. к. $f(x)$ непр. $\forall x \in [a, b]$, то $\Delta f \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$
Для простоты рассмотрим монотонно возрастающую $f(x)$
Хотим доказать, что $S - S_{\text{трап.}}$ - б. м. большего порядка, чем $S_{\text{трап.}}$ или S

$$0 \le S - S_{\text{трап.}} \le dx\Delta y$$

Сравним $\dfrac{dx\Delta y}{S} = \dfrac{dx\Delta y}{dx f(x+\Delta x)} = \dfrac{\Delta y}{\text{огр.}} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$
таким образом $S - S_{\text{трап.}} = 0(S_{\text{трап.}})$

Смысл интеграла в случае векторной функции $\overrightarrow{G}(M)$

Будем интегрировать только скалярные выражения вида $\overrightarrow{G}(M)\cdot d\overrightarrow{\omega}$ - скал. произведение векторов, где $d\overrightarrow{\omega}$ - ориентированный элемент $d\omega$

Ex. Сила $\overrightarrow{F}(M)$ перемещает точку M вдоль плоской кривой l. При этом сила совершает работу по перемещению (работа A - скалярная величина)

Известна формула для $\overrightarrow{F}=const$ и перемещения $\overrightarrow{s}$ по прямой: $A=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{s}$

Разобьем дугу на элементы $dl\approx ds$ и ориентируем их (зададим направление перемещению ds)

$dl=ds+o(dl)$, $d\overrightarrow{s}$ - вектор элем. перемещения, как правило, ds направлен согласовано с Ox

Элемент работы $dA=\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{s}=(F_x,F_y)\cdot(dx,dy)\overset{\text{обозн.}}{=}(P,Q)\cdot(dx,dy)=Pdx+Qdy$ - скаляр. Вся работа равна $A=\displaystyle\int dA$

Nota. Ориентированный участок поверхности $d\overrightarrow{\sigma}$ - это размер участка $d\sigma$, умноженный на вектор нормали к участку $\overrightarrow{n}$, то есть $d\overrightarrow{\sigma}=\overrightarrow{n}d\sigma$

Итак. Схема интегрирования:

1* Дробление области Ω на элементы $d\omega$ **2*** Выбор постоянного значения функции на $d\omega$, то есть $g_{\text{ср.}}$ или $\overrightarrow{G_{\text{ср.}}}$ **3*** Составление подынтегрального выражения $g_{\text{ср.}}d\omega$ или $\overrightarrow{G_{\text{ср.}}}d\overrightarrow{\omega}$ **4*** «Суммирование» элементарных величин $\displaystyle\int gd\omega$ или $\displaystyle\int\overrightarrow{G}d\overrightarrow{\omega}$

5.2. Классификация интегралов

1* По размерности Ω

$n=1$: * прямая (опред. интеграл $\int_a^b$)	* кривая (криволинейный интеграл $\int_A^B$)
$n=2$: * плоскость (двойной интеграл $\iint_D$)	* поверхность, не криволинейная (поверхностный интеграл $\iint_S$)
$n=3$: * пространство $\mathbb{R}^3$ (тройной $\iiint_V$ или $\iiint_T$)	

2* По виду функции

скалярная $g(M)$	векторная $\overrightarrow{G}(M)$
$n=1$: определенный, криволинейный I рода	криволин. II рода (интегралы в проекциях)
$n=2$: двойной, поверхн. I рода	поверхн. II рода
$n=3$: тройной	

5.3. Двойной и тройной интегралы

Nota. Дадим строгое определение

Def. $z = z(x, y) \quad z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) Дробление на $[x_{i-1}, x_i]$ длиной Δx

2) Выбор средней точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, по значению $z(M_i)$ строим элемент. параллелепипед объемом

$v_i = z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i \approx V_{\text{малого цилиндра}}$

3) Интеграл суммы

$v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = \sum z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$

4) Если $\exists \lim v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от типа дробления и т.д. при $n \to \infty$ и $\tau = \max(\Delta x_i, \Delta y_i) \to 0$,

то $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} v_n \overset{def}{=} \iint_D z(x, y)dxdy$ - двойной интеграл от $z(x, y)$ на области D

Мет. $\int_a^b f(x)dx \qquad f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^+$

1) Дробление на элементы P_i прямыми $x = const, y = const$, $S_{P_i} = \Delta x_i \Delta y_i$ (дали dx, dy)

2) Выбор $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, площадь элементарных прямоугольников $f(\xi_i)\Delta x_i \approx S_{\text{полоски}}$

3) Интеграл суммы $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

4) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \tau\to 0}} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$

Nota. Об области D

В простейшем случае рассматривают выпуклую, односвязную $\mathbb{R}^2$-область

а) Выпуклость:

$\exists M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \notin D$ - не выпуклая

$\forall M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \in D$ - выпуклая

б) Связность:

$D = D' \cup D''$ - не связная: $\exists M_1, M_2 \in D \mid \overset{\smile}{M_1M_2} \notin D$

D - связная: $\forall M_1, M_2 \in D \mid \underset{\smile}{M_1M_2} \in D$

Обычно область - открытая, дальше будем рассматривать в том числе области с границей.

Добавим к определению $\iint_{\partial D \text{ - граница } D} z(x, y)dxdy$

Геометрический смысл: В определении при $z(x, y) \geq 0$ интегральная сумма $v_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ была суммой объемов элементарных параллелепипедов и приближала объем подповерхности

Тогда $\iint_D z(x, y)dxdy \overset{z\geq 0}{=} V_{\text{цилиндра с осн. } D}$, а при $z = 1$ $\iint_D dxdy = S_D$

Вычисление: По геометрическому смыслу найти $\iint_D z(x, y)dxdy$ - значит найти объем подповерхности

Можно найти $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy$ - площадь поперечного сечения
Найдем V как объем тела с известными площадями сечений
$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy\right)dx$

Nota. Кратный
Если найдена первообразная для $z(x=c,y)$ (обозн. $F(x,y(x))$), то по формуле N-L:
$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x=c,y)dy = F(x,y(x))\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = F(x,y_2(x)) - F(x,y_1(x))$
Тогда $\int_a^b \overbrace{(F(x,y_2)-F(x,y_1))}^{\varphi(x)}dx$ - обычный определенный интеграл
Пределы интегрирования во внутреннем интеграле - функции, во внешнем - точки
? Можно ли вычислить V, рассекая тело сечениями $y = const$? Верно ли, что $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy\right)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx\right)dy$?
Верно, V не зависит от порядка сечения
Таким образом, двойной интеграл $\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)dydx = \int_\alpha^\beta \int_{x_1}^{x_2} z(x,y)dxdy$
Но при другом порядке интегрирования область D может оказаться неправильной

Def. При проходе области D в направлении $Oy \uparrow$ граница области (верхняя) меняет аналитическое задание. Такая область называется неправильной в направлении Oy
Выгодно выбирать правильное направление, чтобы не делить интеграл по аддитивности

Ex. $\iint_D xydxdy,\ D: x^2+y^2 \le 1$
$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}} xydy\right)dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{2}y^2\Big|_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int_{-1}^1 (\frac{x}{2}((1-x^2)-(1-x^2))dx = 0$$

Def. Тройной интеграл
Пусть дана функция $u(x,y,z)\ :\ T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
1) Дробление на элементы объема $dv = dxdydz$
2) Вычисление среднего содержания $u(x,y,z)$ в dv: $u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)dv$
3) Интегральная сумма $\sigma_n = u(M_i)dv$
4) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max(dv)\to 0}} \overset{def}{=} \iiint_T u(x,y,z)dxdydz$

Геометрический смысл. Только при $u = 1$ интеграл $\iiint_T dxdydz = V_T$ равен объему
Физический смысл. Пусть $u(x,y,z)$ - плотность в каждой точке T
Тогда $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz = m_T$ - масса

Вычисление. $\iiint_T u(x,y,z)dxdydz \overset{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} u(x,y,z)dzdydx$

5.4. Замена переменной в двойном и тройном интегралах

Проблема. $S = \iint_D dxdy$

Если $S_{D'} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho = \iint_{D'} d\rho d\varphi$ - то это не площадь круга, а площадь прямоугольника S в распрямленных координатах

Введем Δs_i - площадь кольцевого сектора в полярных координатах, а $\Delta s_i'$ - площадь прямоугольника, причем $\Delta s_i \neq \Delta s_i'$

Nota. Будем искать поправочный коэффициент так, чтобы $\Delta s_i \approx$ коэфф. $\cdot \Delta s_i'$

Дроблению будем подвергать область D' в распрямленной системе координат

Введем новые криволинейные координаты: $\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$, где функции $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ непрерывно дифференцируемы по обоим аргументам

Исходно область D в Oxy

картинка

Заменим криволинейный параллелограмм на обычный, стянув вершины хордами (погрешность в площади - малая более высокого порядка, чем площадь)

$A(x_A, y_A) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$

$B(x_B, y_B) = (\varphi(u,v+\Delta v), \psi(u,v+\Delta v))$

$C(x_C, y_C) = (\varphi(u+\Delta u,v+\Delta v), \psi(u+\Delta u,v+\Delta v))$

$D(x_D, y_D) = (\varphi(u+\Delta u,v), \psi(u+\Delta u,v))$

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_D - x_A & y_D - y_A & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right|$$

$$x_B - x_A = \varphi(u,v+\Delta v) - \varphi(u,v) = \Delta_v \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v$$

$$y_B - y_A = \psi(u,v+\Delta v) - \psi(u,v) = \Delta_v \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v$$

$$x_D - x_A = \varphi(u+\Delta u,v) - \varphi(u,v) = \Delta_u \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u$$

$$y_D - y_A = \psi(u+\Delta u,v) - \psi(u,v) = \Delta_u \psi \approx \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u$$

$$\left| \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A \end{vmatrix} \right| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial \psi}{\partial v}\Delta v \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial \psi}{\partial u}\Delta u \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \end{matrix} \right\| \underbrace{\Delta v \Delta u}_{\Delta s'} \overset{|det|=|J|}{\Longrightarrow} \Delta s \approx |J| \Delta s'$$

Nota. В пределе это точное равенство:

$|J| = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta s'}$

(легко понять, если считать частные приращения по теореме Лагранжа $\Delta_u \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(\xi, \eta)\Delta u \to \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)\Delta u$)

Def. Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$, где $\begin{cases} x_1 = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \dots \\ x_n = f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases}$ - преобразование координат $Ox_i \to O\xi_i (f_k \in C_D^1)$

называется определителем Якоби или якобиан

Построение интеграла.

1. Дробление D' в распрямленной Ouv
2. Выбор средней точки, поиск значения $f(\xi_i, \eta_i)$

   Значение величины на элементе $f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
3. Интегральная сумма $\sigma_n = \Sigma f(\xi_i, \eta_i)|J|dudv$
4. В пределе интеграл $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(u, v)|J|dudv$

Якобианы в ПСК, ЦСК, СфСК

1. ПСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi$, $\quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi$

   $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$
2. ЦСК: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$ $\quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$
3. СфСК - Lab.

Ex. $T: \begin{matrix} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 = z \end{matrix}$

Конус в ЦСК: $\rho = z, z > 0$ Параболоид в ЦСК: $\rho = \sqrt{z}, z > 0$

$V_T = \iiint_T dxdydz = \iiint_{T'} \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} \rho dz = 2\pi \int_0^1 \rho z\Big|_{z_1=\rho^2}^{z_2=\rho} d\rho = 2\pi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3)d\rho = 2\pi(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4})\Big|_0^1 = 2\pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{6}$

Lab. $T: \begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = z \end{matrix}$ - мороженка, считать в СфСК

5.5. Криволинейные интегралы

I рода. Область интегрирования - кривая $l = \smile{AB}$ (дуга) (начнем с плоской дуги)
На l действует скалярная функция $f(x,y)$ (физ. смысл - плотность, то есть имеем неоднородный кривой стержень)
Задача в нахождении «суммарной» величины $f(x,y)$, то есть интеграла: «складываем» элементы $f_{\text{ср}}(x,y)dl$
Обозн. Получаем $\int_l f(x,y)dl = \int_{AB} f(x,y)dl$

Nota. В строгом определении интегральная сумма строится так:
$\overset{\smile}{M_{i-1}M_i}$ - элементарная дуга
Δl_i - длина элемента
Δs_i - длина стягивающей дуги
$\Delta l_i \approx \Delta s_i$
$M_{\text{ср.}}(\xi_i, \eta_i)$ - ср. точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути)
Вдоль пути $\overset{\smile}{AB}$ действует сила $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$
Найдем элементарную работу $dA = \overrightarrow{F}_{\text{ср.}} d\overrightarrow{s}$, где $d\overrightarrow{s}$ - элементарное приращение
$d\overrightarrow{s} = (dx, dy) = (\cos\alpha ds, \sin\alpha ds)$
$\overrightarrow{F}_{\text{ср.}}$ - значение силы на эл. участке в какой-либо его точке
Тогда. $dA = (P(x,y), Q(x,y)) \cdot (dx, dy) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
$A = \int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx + Qdy$ - интеграл II рода (в проекциях)

Nota. В проекциях, потому что $F_x = P, F_y = Q$, таким образом скалярное произведение записано в проекциях
При этом часто рассматривают по отдельности
$\int_{AB} f(x,y)dx$ и $\int_{AB} g(x,y)dy$

Nota. Связь интегралов I и II рода
$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P,Q)(dx,dy) = \int_L (P,Q)(\cos\alpha, \cos\beta)\underbrace{ds}_{\approx dl} = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)dl$
Обозначим $\overrightarrow{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta)$
По теореме Лагранжа $\exists(\xi, \eta) \in$ элементарной дуге, касательная которой параллельна ds
Тогда $d\overrightarrow{s} = \overrightarrow{\tau} ds \approx \overrightarrow{\tau} dl$, где $\overrightarrow{\tau}$ - единичный вектор, касательной в (ξ, η)

Тогда $\int_L Pdx + Qdy \overset{\text{пред. в вект. форме}}{=} \int_L \overrightarrow{F}\overrightarrow{\tau}\,dl = \int_L \overrightarrow{F} \underbrace{\overrightarrow{dl}}_{\text{ориент. эл. дуги}}$

Свойства:

Nota. Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла

Направление обхода.

I рода

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl$$

II рода

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = -\int_{BA} Pdx + Qdy$$

Def. Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются

$\oint_K fdl$ и $\oint_K Pdx + Qdy$.

Если K (контур) обходят против ч. с., то обозн. $\oint_{K^+}$

Вычисление. (Сведение к $\int_a^b dx$ или $\int_\alpha^\beta dy$ или $\int_\tau^T dt$)

1) Параметризация дуги L:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C^1_{[\tau,T]}$$

$A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau))$

$B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T))$

При этом задании $L \quad y = y(x), x \in [a,b]$ или $x = x(y), y \in [\alpha, \beta]$ - частные случаи параметризации

2)

I рода

$$\int_L f(x,y)dl \overset{dl=\sqrt{\varphi_t'^2+\psi_t'^2}|dt|}{=\!=} \int_\tau^T f(t)\sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2}|dt|$$

II рода

$$\int_{L=\smile{AB}} Pdx + Qdy \overset{dx=\varphi_t'dt, dy=\psi_t'}{=\!=} \int_\tau^T f(t)(P\varphi' + Q\varphi,)dt|$$

Ex. Дуга L - отрезок прямой от $A(1,1)$ до $B(3,5)$

1) $$\int_{AB}(x+y)dl = \begin{bmatrix} AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \text{или} y = 2x-1, x \in [1,3] \\ f(x,y) = x + 2x - 1 = 3x - 1 \\ dl = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{5}dx \end{bmatrix} = \int_1^3 (3x-1)\sqrt{5}dx = \sqrt{5}(\frac{3x^2}{2} - x)\Big|_1^3 = \sqrt{5}(12-2) = 10\sqrt{5}$$

2) $$\int_{AB}(x+y)dx + (x+y)dy = \begin{bmatrix} x\upharpoonleft_1^3, y \upharpoonleft_1^5 \\ y = 2x-1, x = \frac{y+1}{2} \\ dx = dx, dy = dy \end{bmatrix} = \int_1^3 (x + 2x - 1)dx + \int_1^5 (\frac{y+1}{2} + y)dy =$$

$$(\frac{3x^2}{2} - x)\Big|_1^3 + \frac{1}{2}(\frac{3y^2}{2} + y)\Big|_1^5 = 10 + 20 = 30$$

Th. Формула Грина

$D \subset R^2$ - прав. $\uparrow Ox, \uparrow Oy$

Γ_D - гладкая замкнутая кривая

В области D действует $\overrightarrow{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ - непрерывные дифференциалы

Тогда $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint_{K^+} Pdx + Qdy$

$\square$ $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$
$\int_\alpha^\beta (Q(x,y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)}) dy - \int_a^b (P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}) dx =$
$\int_\alpha^\beta (Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)) dy - \int_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))) dx = \int_{NST} Qdy - \int_{NMT} Qdy -$
$\int_{MTS} Pdx + \int_{MNS} Pdx = \underbrace{\int_{NST} Qdy + \int_{TMN} Qdy}_{\oint_{K^+} Qdy} + \underbrace{\int_{STM} Qdy + \int_{MNS} Qdy}_{\oint_{K^+} Pdx} = \oint_{K^+} Pdx + Qdy$

$\square$

Следствие. $S_D = \frac{1}{2} \oint_K xdy - ydx$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{y}{2}) = -\frac{1}{2}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$

Формула Грина: $\iint_D (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) dxdy = \iint_D (\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})) dxdy = \iint_D dxdy = S_D \overset{\text{Ф. Гр.}}{=} \oint_{K^+} (-\frac{y}{2}) dx + \frac{x}{2} dy$

$\int$ НЗП - Интеграл, не зависящий от пути интегрирования.

Def. $P, Q : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемы по 2-м переменным

$\breve{AB} \subset D \quad \forall M, N \in D$

Параметризация $\breve{AB}$: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ - φ, ψ - непр. дифф (кусочно)

$I = \int_{AB} Pdx + Qdy$ называется интегралом НЗП, если $\forall M, N \in D \quad \int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy$

Nota. Обозначают $\int_A^B Pdx + Qdy$ или $\int_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy$

Th. Об интеграле НЗП

В условиях def

I. $\int_{AB} Pdx + Qdy$ - инт. НЗП

II. $\oint_K Pdx + Qdy = 0 \quad \forall K \subset D$

III. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ \forall M(x,y) \in D$

IV. $\exists \Phi(x,y) \mid d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ в обл. D

Причем $\Phi(x,y) = \displaystyle\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy$, где $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in D$

Тогда $I \Longleftrightarrow II \Longleftrightarrow III \Longleftrightarrow IV$

$\square I \Longleftrightarrow II$

$\boxed{\Longrightarrow}$ По def $\displaystyle\int$ НЗП $\Longleftrightarrow \int_{AMB} = \int_{ANB}$

Рассмотрим $\displaystyle\int_{AMB} - \int_{ANB} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = \oint_K = 0 \forall K \subset D$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Достаточно разбить $\displaystyle\oint_{K^+} = \int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$

Поскольку $\displaystyle\int_{AMB} + \int_{BNA} = 0$, то $\displaystyle\int_{AMB} - \int_{ANB} = 0$

II $\Longleftrightarrow$ III

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\displaystyle\oint_K = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ \forall M(x,y) \in D$

От противного $\quad \exists M_0(x_0,y_0) \in D \mid \displaystyle\frac{\partial P}{\partial y}\Big|_{M_0} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\Big|_{M_0} \Longleftrightarrow (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\Big|_{M_0} \neq 0$

Для определенности $\sqsupset (\displaystyle\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\Big|_{M_0} > 0$

Тогда $\exists \delta > 0 \mid (\displaystyle\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\Big|_{M_0} > \delta > 0$

Выберем малую окрестность в точке M_0 $(U(M_0))$ и обозначим ее контур Γ

Так как P и Q непр. дифф., $(\displaystyle\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\Big|_{M_0} > 0$ в $U(M_0)$

Формула Грина: $\displaystyle\iint_{U(M_0)} (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) dxdy > \iint_{U(M_0)} \delta dxdy = \delta S_{U(M_0)} > 0$

С другой стороны $\displaystyle\iint_{U(M_0)} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = 0$

Таким образом, возникаем противоречие

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\displaystyle\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \forall M \in D$

Тогда $\forall D' \subset D \quad \displaystyle\iint_{D'} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = 0 = \oint_{\Gamma_{D'}} Pdx + Qdy \forall \Gamma_{D'} \subset D$

III $\Longleftrightarrow IV$

$\boxed{\Longrightarrow}$ $\displaystyle\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Longrightarrow \exists \Phi(x,y)$

Так как доказано $I \Longleftrightarrow III$, то докажем $I \Longrightarrow IV$

$\displaystyle\int_{AM} Pdx + Qdy = \int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy$ - НЗП $\forall A, M \in D$

Обозн. $\displaystyle\int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy - \Phi(x,y)$

Докажем, что $d\Phi = Pdx + Qdy$

Так как $d\Phi(x,y) = \displaystyle\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx - \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy$, то нужно доказать $\displaystyle\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x,y)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x} = [\text{задали приращение вдоль } MM_1] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x, y) - \Phi(x,y)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_A^{M_1} Pdx + Qdy - \int_A^M Pdx + Qdy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_A^M + \int_M^{M_1} - \int_A^M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_M^{M_1}}{\Delta x} \overset{\text{НЗП}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx}{\Delta x} =$$

[по th Лагранжа $\exists \xi \in [x; x+\Delta x]$] $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(\xi, y)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} P(\xi, y) = P(x, y)$

Аналогично $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y)$

$\boxed{\Longleftarrow} d\Phi = Pdx + Qdy \overset{?}{\Longrightarrow} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Известно $P = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, Q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}$

Тогда $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

□

Nota. Φ - первообразная для $Pdx + Qdy$:

Th. Ньютона-Лейбница

Выполнены условия th об интеграле НЗП

Тогда $\displaystyle\int_A^B Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A)$

□ $\displaystyle\int_A^B Pdx + Qdy \overset{\exists \Phi | d\Phi = Pdx + Qdy}{=} \int_A^B d\Phi(x, y) \overset{\text{параметр.} AB}{=} \int_\alpha^\beta d\Phi(t) = \Phi(t)\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \Phi(B) - \Phi(A)$

□

Применение

Ex. $\displaystyle\int_{AB} (4 - \frac{y^2}{x^2})dx + \frac{2y}{x}dy$

Проверим НЗП: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{2y}{x^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{2y}{x^2} \Longleftrightarrow$ ÍÇÏ

Найдем первообразную $\Phi(x, y)$ на все случаи жизни:

$\Phi(x, y) = \displaystyle\int_{M_0(x_0, y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy$

Выберем путь (самый удобный)

$\Phi(x, y) = \displaystyle\int_{M_0}^N + \int_N^M$

$\displaystyle\int_{M_0}^N \overset{y=0, x_0=1, dy=0}{=} \int_{(1,0)}^{(x,0)} 4dx = 4x\Big|_{(1,0)}^{(x,0)} = 4x - 4$

$\displaystyle\int_N^M \overset{dx=0}{=} \int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{2y}{x}dy = \frac{y^2}{x}\Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{y^2}{x}$

$\Phi(x, y) = 4x - 4 + \dfrac{y^2}{x} + C = 4x + \dfrac{y^2}{x} + C$

Проверим: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 4 - \dfrac{y^2}{x^2} = P$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{2y}{x} = Q$

Теперь можем искать $\displaystyle\int_{AB}$ $\forall A, B \in D$ по N-L

$\sqsupset A(1, 1), B(2, 2)$

$\displaystyle\int_{AB} Pdx + Qdy = \Phi\Big|_A^B = \frac{y^2}{x} + 4x\Big|_{(1,1)}^{(2,2)} = \frac{4}{2} + 8 - 1 - 4 = 5$

Nota. Функция Φ ищется в тех случаях, когда $\int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B (P,Q)(dx,dy) = A$ - работа силы, которая не зависит от пути
(*Ex.* работа силы тяжести не зависит от пути, а силы трения - зависит)

Ex. $\exists \overrightarrow{F} = (P,Q) = (0, -mg)$
$\Phi(x,y) = \int_O^M 0dx - mgdy = -\int_0^y mgdy = -mgy$ - потенциал гравитационного поля (или силы тяжести)

5.6. Поверхностные интегралы

1* Поверхностные интегралы I рода (по участку поверхности)
Задача. Масса поверхности
$u = u(x,y,z)$ - плотность (физ. смысл)
Элементарная масса: $dm = u_{\text{ср.}}(\xi,\eta,\zeta)d\sigma$, $d\sigma$ - элемент поверхности
$M = \iint_S dm = \iint_S u(x,y,z)$ - пов. инт. I рода

Def. 1) Дробление S на элементы $\Delta\sigma_k$ коорд. плоскостями $x = x_i, y = y_j$
2) Ср. точка (ξ_k, η_k, ζ_k)
3) Инт. сумма $v_n = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta\sigma_k$
4) $\iint_S u(x,y,z)\Delta\sigma = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta\sigma_k\to 0}} v_n$ - поверхностный интеграл первого рода
Свойства: Смена обхода поверхности S не меняет знака интеграла: $\iint_{S^+} ud\sigma = \iint_{S^-} ud\sigma$

Вычисление
Мет. Вычисление $\int_L f(x,y)dl$
1) Параметризация L $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$
2) $dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$
3) $f(x,y) = \tilde{f}(t)$
$\iint_L f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta \tilde{f}(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}|dt|$
Поверхностный
$\iint_S u(x,y,z)d\sigma$
1) Параметризация S: самая частая - $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$ - пределы интегрирования

2) $d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}|dxdy|$, но т. к. в двойном интеграле договорились, что $dxdy > 0$ (площадь), модуль можно не ставить (область D проходится в направлении против часовой стрелки)

3) $u(x,y,z) = \tilde{u}(x,y,z(x,y)) = \tilde{u}(x,y)$

$\iint_S u(x,y,z)d\sigma = \iint_{D^+} \tilde{u}(x,y)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$

Ex. $S:\ x^2+y^2=z^2, z=0, z=1$

$u(x,y,z)=z$

$$\iint_S zd\sigma = \left[\begin{array}{c} S: z=\sqrt{x^2+y^2} \\ D: \text{круг}, x^2+y^2=1 \\ d\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}dxdy \end{array}\right] = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\rho}\rho\underbrace{\rho}_{|j|}d\rho =$$

$$\sqrt{2}2\pi\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

2* II рода. Задача. Поток

Будем говорить о потоке вектора $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$ через площадку S в направлении нормали $\overrightarrow{n^+}$ или $\overrightarrow{n^-}$

Если задано поле жидких скоростей, то потоком называют количество жидкости, протекающей через S за время Δt

В простой ситуации поток $\Pi = FS(\overrightarrow{F}\perp S, \overrightarrow{F}=const)$

В общем случаем $\overrightarrow{F}$ - переменная, S - искривленная и $\angle\overrightarrow{F}, S \neq \frac{\pi}{2}$

Переходим к вычислению элементарного потока $d\Pi$

$d\sigma$ - малый элемент поверхности (почти плоский)

В пределах $d\sigma$ $\overrightarrow{F}$ меняется мало, за среднее берем $\overrightarrow{F}=(P,Q,R)$, где $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R(x,y,z)$

Разберемся с наклоном: если площадка перпендикулярна, то $d\Pi = Fd\sigma$, но в нашем случае высота цилиндра равна пр.$_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{n},\overrightarrow{F}) = F\cos\varphi$, где $\overrightarrow{n}$ - единичный вектор нормали, φ - угол между нормалью и потоком, $d\Pi = (\overrightarrow{F},\overrightarrow{n})d\sigma = F_n d\sigma$

Пусть $\overrightarrow{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, тогда $d\Pi = (\overrightarrow{F},(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma))d\sigma = (P\cos\alpha, Q\cos\beta, R\cos\gamma)d\sigma$

Итак, $\Pi = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} d\Pi = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} F_n d\sigma = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} (\overrightarrow{F},\overrightarrow{n})d\sigma = \iint_{S^{\overrightarrow{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$

Но, еще нет координатной записи подынтегрального выражения

Спроектируем $d\sigma$ на координатные плоскости

Сначала разрежем поверхность S на элементы плоскостями $x=const, y=const$ (уточним форму $d\sigma$). Т. к. $d\sigma$ мал, то можно считать его плоским параллелограммом

Тогда $\cos\gamma d\sigma = \pm dxdy$ (γ - угол между нормалью и осью Oz)

Нашли последнее слагаемое $\iint_{S^{\overrightarrow{n}}} R\cos\gamma d\sigma$ в исходном интеграле (I рода, т. к. по участку $d\sigma$)

Найдем $\iint_{S^{\vec{n}}} Q\cos\beta d\sigma$, разобьем поверхность на участки $d\sigma$ плоскостями $x = const, y = const$
Аналогично $\cos\beta d\sigma = \pm dxdz$
Тогда в $\iint_{S^{\vec{n}}} P\cos\alpha d\sigma \quad \cos\alpha d\sigma = \pm dydz$
Окончательно, поток $\Pi = \iint_{S^{\vec{n}}} \pm Pdydz \pm Qdxdz \pm Rdxdy = \iint_{S^{\vec{n}}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma$ - связь интегралов I и II рода

Nota. Формулу интеграла можно получить еще так: $(\vec{F}, \vec{n})d\sigma = \vec{F}\vec{n}d\sigma = \vec{F}d\vec{\sigma}$, где $d\vec{\sigma} = (\pm dydz, \pm dxdz, \pm dxdy)$

Def. Математическое.
Определим $I = \iint_{S^{\vec{n}}} f(x,y,z)dxdy$
$I = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau=\max\Delta s_k\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta s_k$ - поверхностный интеграл второго рода ($\Delta s_k = \Delta x\Delta y$ - любого знака, согласованного с обходом)
Свойства: Меняет знак при смене обхода с $\vec{n}^+$ на $\vec{n}^-$
<u>Вычисление</u>
1) Параметризация S для $\iint Rdxdy \quad z = z(x,y)$, для $\iint Qdxdz \quad y = y(x,z)$,
для $\iint Pdydz \quad x = x(y,z)$
Пределы интегрирования $D_{xy} = \text{пр.}_{Oxy}S$ и т. д.
2) $dxdy \to \pm dxdy$, если обход D_{xy} в направлении против часовой стрелки
3) $R(x,y,z) = \tilde{R}(x,y,z(x,y)), \ldots$
Разберем пример поверхностного интеграла:
Ex. $S_1: \ x^2 + y^2 = 1, \quad S_2: z = 0, \quad S_3: z = 1$
$S = \bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ - цилиндр
$\vec{F} = (P,Q,R) = (x,y,z)$
$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$$
Так как проекции S_2 на Oxz и Oyz - отрезки, то $dxdz = 0$, $dydz = 0$
$$\iint_{S_2} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iint_{S_2} zdxdy = 0$$
$$\iint_{S_3} zdxdy \overset{z|_{S_3}=1}{=} \iint_{S_3} dxdy \overset{\text{с "+ так как } n_3\uparrow\uparrow Oz}{=} \iint_{D_{xy}} dxdy = \pi$$
$$\iint_{S_1} xdydz + ydxdz = \iint_{D^+_{yz}: x=\sqrt{1-y^2}} xdydz + \left(-\iint_{D^-_{yz}: x=-\sqrt{1-y^2}} xdydz\right) + \iint_{D^+_{xz}} ydxdz + \left(-\iint_{D^-_{xz}} ydxdz\right) =$$
$\ldots$

5.7. Связь поверхностных интегралов с другими

Th. Гаусса-Остроградского

$S_1\ :\ z=z_1(x,y),\ S_3\ :\ z=z_3(x,y),\ S_2\ :\ f(x,y)=0$ (проекция на Oxy - кривая)

$S=\bigcup\limits_{i=1}^{3} S_i$ - замкнута! и ограничивает тело T

$P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$ - непр. дифф., действуют в области $\Omega\supset T$

Тогда $\oiint_{S_{\text{внешн.}}} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

Мет. Формула Грина

$\oint_K Pdx+Qdy=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$

□

Вычислим почленно $\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$\iiint_T\left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z)\Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_3(x,y)}dxdy=\iint_{D_{xy}}(R(x,y,z_3(x,y))-R(x,y,z_1(x,y)))dxdy=$$
$$\underbrace{\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_3)dxdy}_{\text{двойной}}-\iint_{D_{xy}}R(x,y,z_1(x,y))dxdy=\underbrace{\iint_{S_3}R(x,y,z)dxdy}_{\text{поверхностный}}+\iint_{S_1}R(x,y,z)dxdy+\underbrace{\iint_{S_2}R(x,y,z)dxdy}_{\text{равен 0, т.к. } dxdy\ |_{S_2}=0}=$$
$$\iint_{S_{\text{внешн.}}}Rdxdy$$

Аналогично остальные члены:

$\iiint_T\frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz=\iint_{S_{\text{внешн.}}}Qdxdz,\ \iiint_T\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz=\iint_{S_{\text{внешн.}}}Pdxdz$

□

Nota. Если $\iint_{S_{\text{внутр}}}$, то $\iint_S=-\iiint_T$

Nota. С учетом связи поверхностных интегралов $\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dv$

Th. Стокса

Пусть $S:z=z(x,y)$ - незамкнутая поверхность, L - контур, на которую она опирается

$\text{пр}_{Oxy}L=K_{xy},\quad \text{пр}_{Oxy}S=D_{xy}$

В области $\Omega\supset S$ действуют функции P,Q,R - непр. дифф.

Тогда $\oint_{L^+}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{S^+}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)d\sigma$

□

Найдем слагаемое $\oint_L P(x,y,z)dx \overset{\text{на } L\ :\ z=z(x,y)}{=\!=\!=} \oint_{K^+_{xy}}\tilde{P}(x,y,z(x,y))dx=\oint_{K_{xy}}\tilde{P}dx+\tilde{Q}dy=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{P}}{\partial y}\right)dxdy=$

$$-\iint_{D_{xy}} \frac{\partial \tilde{P}(x,y)}{\partial y} dxdy = -\iint_{S^+} \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma + \frac{\partial P}{\partial z}(-\cos\beta)\right) d\sigma$$

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$$

Аналогично $\oint_L Qdy = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) d\sigma, \oint_L Rdz = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) d\sigma$

Остается сложить интегралы

□

Ex. 1. $(P,Q,R) = (x,y,z)$

В *Ex.* пункте 5.6. (вычисление поверхностного):

$$\iint_{S_{\text{внешн}} \text{ - замкнута!}} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dv = 3V_{\text{цил.}}$$

Ex. 2. Те же P,Q,R

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)}^{=0}\cos\alpha + 0 + 0\right) d\sigma$$

6. Теория поля

6.1. Определения

Def. 1. $\Omega \supset \mathbb{R}^n$ Функция $u\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ называется скалярным полем в Ω

Def. 2. Функция $\overrightarrow{F} = (F_1(\overrightarrow{x}), \dots, F_n(\overrightarrow{x})) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем

Nota. Далее будем рассматривать функции в $\mathbb{R}^3$, то есть $u = u(x, y, z)$ и $\overrightarrow{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

Nota. Функции u и $\overrightarrow{F}$ могут зависеть от вренмени t. Тогда эти поля называются нестационарными. В противном случае стационарными

6.2. Геометрические характеристики полей

$u = u(x, y, z)$: l - линии уровня $u = const$
$\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$: w - векторная линия, в каждой точке w вектор $\overrightarrow{F}$ - касательная к w
Векторная трубка - совокупность непересекающихся векторных линий

Nota. Отыскание векторных линий
Возьмем $\overrightarrow{\tau}$ - элементарный касательный вектор, $\overrightarrow{\tau} = (dx, dy, dz)$
Определение векторной линии: $\overrightarrow{\tau} || \overrightarrow{F}$ $\quad \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ - система ДУ

Ex. $\overrightarrow{F} = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}, M_0(1, 0)$ - ищем векторную линию $w \ni M_0$
Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xdx = -ydy \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -y^2 + C \\ y(1) = 0 \Longrightarrow C = +1 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 1$$

6.3. Дифференциальные характеристики

Мет. $\overrightarrow{\nabla} u = \overrightarrow{grad u} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ - градиент скалярного поля
$\overrightarrow{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ - набла-оператор

Nota. Для $\overrightarrow{\nabla}$ определены действия:
$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y} + \dfrac{\partial a_3}{\partial z}$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Причем $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle$ - лапласиан

$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} = 0$

Nota. $\triangle u = \underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{часть волнового уравнения матфизики}} = 0$ - уравнение, определяющее гармоническую функцию $u(x, y, z)$, уравнение Лапласа

Def. 1. Дивергенция поля (*divergence* - расхождение)

$div \overrightarrow{F} \overset{def}{=} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}$

Def. 2. Вихрь (ротор) поля

$rot \overrightarrow{F} \overset{def}{=} \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}$

Def. 3. Если $rot \overrightarrow{F} = 0$, то $\overrightarrow{F}$ называется безвихревым полем

Def. 4. Если $div \overrightarrow{F} = 0$, то $\overrightarrow{F}$ называется соленоидальным

Nota. Безвихревое поле имеет незамкнутые векторные линии, а вихревое - замкнутые

Th. 1. Свойство безвихревого поля

$rot \overrightarrow{F} = 0 \Longleftrightarrow \exists u(x, y, z) \mid \overrightarrow{\nabla} u = \overrightarrow{F}$

$\square$ $\boxed{\Longrightarrow}$

$$rot \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Рассмотрим $u = u(x, y, z) \mid \dfrac{\partial u}{\partial x} = P, \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial u}{\partial z} = R$ - удовлетворяет системе равенств

$\overrightarrow{F} = (P, Q, R) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \overrightarrow{\nabla} u$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} u$ - дана

$rot \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} u) = (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}) u = 0$

$\square$

Nota. Доказали, что если векторное поле является градиентом какого-то скалярного, то его вихрь равен нулю: $rot\overrightarrow{grad u} = 0$

Def. $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} u$ Поле $u(x, y, z)$ называется потенциалом поля $\overrightarrow{F}$
Таким образом, доказано, что безвихревое поле потенциально

Th. 2. Свойство соленоидального поля
$div(rot\overrightarrow{F}) = 0$
□
$div(rot\overrightarrow{F}) = div\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}) = (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}) \cdot \overrightarrow{F} = 0$
□

6.4. Интегральные характеристики. Теоремы теории поля

Мет. 1) Поток поля $\overrightarrow{F}$: $\Pi = \iint_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma}$

Def. 2) Циркуляция поля $\overrightarrow{F}$: $\Gamma = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$

Nota. Запишем **Th.** на векторном языке
1* **Гаусса-Остроградского**
$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$
$$\iint_S (P, Q, R)(dydx, dxdz, dxdy) = \iint_S (P, Q, R)(\cos\alpha d\sigma, \cos\beta d\sigma, \cos\gamma d\sigma) = \iint_S \overrightarrow{F}\overrightarrow{n} d\sigma = \iint_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma}$$
$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint_T (\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F}) = \iiint_T div\overrightarrow{F}$$
$$\boxed{\iint_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma} = \iiint_T div\overrightarrow{F}}$$

2* **Стокса**
$Pdx + Qdy + Rdz = \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l}$
$$\oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = \iint_S rot\overrightarrow{F}\overrightarrow{n} d\sigma = \iint_S rot\overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma}$$

3* **Th. о потенциале**
$\forall L \ \oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = 0 \Longleftrightarrow rot\overrightarrow{F} = 0 \Longleftrightarrow \exists u(x, y, z) \mid \overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{F}$
(см. **Th.** интеграла НЗП)

Ex. $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} + xy\overrightarrow{j}, L : x = y, x = -y, x = 1$

По формуле Грина (Стокса) $\oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D ydxdy \quad rot\overrightarrow{F} \neq 0$

$\oint_L xdx + xydy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \int_0^1 (x+x^2)dx + \int_{-1}^1 ydy - \int_0^1 (x+x^2)dx = \int_{-1}^1 ydy = 0$

6.5. Механический смысл

1* Дивергенция

Гаусс-Остроградский: $\iiint_T div\overrightarrow{F}dv = \Pi$

Th. о среднем: $\exists M_1 \in T \mid \iiint_T div\overrightarrow{F}dv = div\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} \cdot V_T = \Pi$

$div\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} = \frac{\Pi}{V_T}$, точка M_0, S и T выбраны произвольно

$\exists V_T \to 0$, тогда $div\overrightarrow{F}\Big|_{M_1 \to M_0} = \lim\limits_{V_T \to 0} \frac{\Pi}{V_T}$ - поток через границу бесконечно малого объема с центром M_0, отнесенный к V_T - мощность источника в M_0

Таким образом, дивергенция поля - мощность источников

Nota. Смысл утверждения $div(rot\overrightarrow{F}) = 0$ - поле вихря свободно от источников

Nota. Утверждение $rot(\overrightarrow{gradu}) = 0$ - поле потенциалов свободно от вихрей

2* Ротор

Стокс $\iint_S rot\overrightarrow{F}d\overrightarrow{\sigma} = \Gamma$

Th. о среднем: $\exists M_1 : \iint_S rot\overrightarrow{F}d\overrightarrow{\sigma} = rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} \cdot S = \Gamma$

$rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} = \frac{\Gamma}{S}$, будем стягивать S к точке $M_0 \Longrightarrow rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{S \to 0} \frac{\Gamma}{S}$ - циркуляция по б.м. контуру с центром M_0

Mem. Дифф. хар.: $div\overrightarrow{F} = \rightarrow \overrightarrow{F}, rot\overrightarrow{F} = \rightarrow \times \overrightarrow{F}$

Инт. хар.: $\Pi = \iint_S \overrightarrow{F}d\overrightarrow{\sigma}, \Gamma = \oint_L \overrightarrow{F}d\overrightarrow{l}$

Мех. смысл: 1) $div\overrightarrow{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{V \to 0} \frac{\Pi}{V}$ - мощность точечного источника

Г.-О.: поток через замкнутую поверхность равен суммарной мощности испочников внутри

2) $rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{S \to 0} \frac{\Gamma}{S}$ - циркуляция по б. м. контуру. Мех. смысл - ?

3) Поток Π - кол-во жидкости через площадку за единицу времени

4) Γ - ?

Nota. Выясним смысл ротора и циркуляции на примере конкретного поля

Ex. $\overrightarrow{F} = -\omega y \overrightarrow{i} + \omega x \overrightarrow{j}$ - поле линейных скоростей, вращающегося твердого тела, где $\overrightarrow{\omega} = const$ - угловая скорость

Выберем контур L, ограничивающий область S

Найдем $\Gamma_L = \oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = \oint_L (-\omega y)dx + \omega x dy \overset{\text{Стокс}}{=} \iint_S rot \overrightarrow{F} \overrightarrow{n} d\sigma = \iint_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) \cos\gamma d\sigma = \iint_S 2\omega \cos\gamma d\sigma$

Так как ротор сонаправлен оси Oz, получаем $\cos\gamma = 1$

$\iint_S 2\omega \cos\gamma d\sigma = 2\omega \iint_S d\sigma = 2\omega S$

Раньше в интеграле видно, что $rot \overrightarrow{F} \overrightarrow{n} \Longrightarrow |rot \overrightarrow{F}| = 2\omega$

То есть механический смысл ротора - удвоенная угловая скорость вращающегося тела (или диска)

Nota. Чтобы уточнить смысл Γ, рассмотрим такое же поле жидких скоростей (водоворот) $\overrightarrow{v} = -\omega y \overrightarrow{i} + \omega x \overrightarrow{j}$ и погруженное в него колесо с лопатками (водяная мельница)

В качестве контура L ерем обод колева, а его располагаем под углом γ к вектору $\overrightarrow{\omega}$

Все равно $\Gamma_L = \iint_S 2\omega \cos\gamma d\sigma = 2\omega \cos\gamma S$

Если $\gamma = 0$, то $\Gamma_L = 2\omega S$ - максимальная мощность вращения нашей мельницы

Если, например, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\Gamma_L = 0$ - колесо перпендикулярно полю, поэтому оно не вращается

6.6. Приложения к физике

1* Уравнение неразрывности (в гидромеханике)

Nota. Здесь потребуются формулы:

$\frac{du(x(t), y(t), z(t))}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \ldots$

$\overrightarrow{\nabla} \cdot (f\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{F} + f \cdot (\overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{F})$, где f - скалярное поле, $\overrightarrow{F}$ - векторное поле

Задача Дано $\overrightarrow{F} = \rho\overrightarrow{v}$ - поле скоростей жидкости с весом $\rho = \rho(x, y, z, t)$

Через площадку dS за время dt протекает $d\Pi = \rho v_n dt dS$ или за ед. времени $d\Pi = \rho v_n dS$

Приращение жидкости за единицу времени $|dm| = |\frac{\partial \rho}{\partial t} dV|$

Поток жидкости равен ее убыли в объеме V, то есть $\Pi = \oiint_S \rho v_n dS = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

Применяя Г.-О.: $\Pi = \iiint_V \div(\rho\overrightarrow{v})dV = -\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV \Longleftrightarrow \iiint_V (div(\rho\overrightarrow{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t})dV = 0 \quad \forall V$ (поэтому подынт. функ. $= 0$)

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\nabla}(\rho\overrightarrow{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Учтем: $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla}\rho\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{\nabla}(\rho\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\nabla}\rho \cdot \overrightarrow{v} + \rho\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{v} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\nabla}\rho\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\nabla}(\rho\overrightarrow{v}) - \rho\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{v}$

$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\overrightarrow{v} = 0$ - уравнение неразрывности (при несжимаемой жидкости $div\overrightarrow{v} = 0$)
2* Уравнения Максвелла
Экспериментально: 1) $\int_L \overrightarrow{H} d\overrightarrow{l} = \iint_S \overrightarrow{r} d\overrightarrow{\sigma}$ - закон Био-Савара
2) $\int_L \overrightarrow{E} d\overrightarrow{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \overrightarrow{B} d\overrightarrow{\sigma}$ - закон Фарадея
где $\overrightarrow{H}$ - магнитная сила, $\overrightarrow{r}$ - полный ток, $\overrightarrow{E}$ - электрическая сила, $\overrightarrow{B}$ - магнитная индукция
Максвелл: $\overrightarrow{r}$ = ток проводимости + ток смещения = $\lambda\overrightarrow{E} + \varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$
λ - коэффициент проводимости, ε, μ - проницаемость
1) $\oint_L \overrightarrow{H} d\overrightarrow{l} = \iint_S (\lambda\overrightarrow{E} + \varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}) d\overrightarrow{\sigma}$
Стокс: $\iint_S rot\overrightarrow{H} d\overrightarrow{\sigma} - \iint_S (\lambda\overrightarrow{E} + \varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}) d\overrightarrow{\sigma} = 0$
В векторной форме: $rot\overrightarrow{H} = (\lambda\overrightarrow{E} + \varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t})$ - источники магнитного поля - токи проводимости и смещения
2) $\oint_L \overrightarrow{E} d\overrightarrow{l} = \iint_S rot\,\overrightarrow{E} d\overrightarrow{\sigma} = -\iint_S \frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} d\overrightarrow{\sigma} \Longleftrightarrow rot\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ - изменение индукции дает эл. ток в соленоиде.
3) $\overrightarrow{\nabla}\varepsilon\overrightarrow{E} = \rho$
4) $\overrightarrow{\nabla}\mu\overrightarrow{H} = 0$