

Nota. Если $\iint_{S_{\text{внутр}}}$, то $\iint_S = - \iiint_T$

Nota. С учетом связи поверхностных интегралов $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dv$

Th. Стокса

Пусть $S: z = z(x, y)$ - незамкнутая поверхность, L - контур, на которую она опирается

$\text{пр}_{Oxy} L = K_{xy}$, $\text{пр}_{Oxy} S = D_{xy}$

В области $\Omega \supset S$ действуют функции P, Q, R - непр. дифф.

Тогда $\oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S^+} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma$

□

Найдем слагаемое $\oint_L P(x, y, z) dx \stackrel{\text{на } L: z=z(x,y)}{=} \oint_{K_{xy}^+} \tilde{P}(x, y, z(x, y)) dx = \oint_{K_{xy}} \tilde{P} dx + \tilde{Q} dy =$

$$\iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial \tilde{P}(x, y)}{\partial y} dx dy = - \iint_{S^+} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dx dy = - \iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$- \iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial z} (-\cos \beta) \right) d\sigma$$

$$\vec{n} = \left(\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} \right)$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

$$\text{Аналогично } \oint_L Q dy = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \beta - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma, \oint_L R dz = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma$$

Остается сложить интегралы

□

Ex. 1. $(P, Q, R) = (x, y, z)$

В *Ex.* пункте 5.6. (вычисление поверхностного):

$$\iint_{S_{\text{внешн}} - \text{замкнута!}} x dy dz + y dx dz + z dx dy = \iiint_T \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv = 3V_{\text{цил.}}$$

Ex. 2. Те же P, Q, R

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right)}^{=0} \cos \alpha + 0 + 0 d\sigma$$

6. Теория поля

6.1. Определения

Def. 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется скалярным полем в Ω

Def. 2. Функция $\vec{F} = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x})) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется векторным полем

Nota. Далее будем рассматривать функции в \mathbb{R}^3 , то есть $u = u(x, y, z)$ и $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

Nota. Функции u и \vec{F} могут зависеть от времени t . Тогда эти поля называются нестационарными. В противном случае стационарными

6.2. Геометрические характеристики полей

$u = u(x, y, z)$: l - линии уровня $u = \text{const}$

$\vec{F} = (P, Q, R)$: w - векторная линия, в каждой точке w вектор \vec{F} - касательная к w
Векторная трубка - совокупность непересекающихся векторных линий

Nota. Отыскание векторных линий

Возьмем $\vec{\tau}$ - элементарный касательный вектор, $\vec{\tau} = (dx, dy, dz)$

Определение векторной линии: $\vec{\tau} \parallel \vec{F} \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ - система ДУ

Ex. $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$, $M_0(1, 0)$ - ищем векторную линию $w \ni M_0$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xdx = -ydy \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -y^2 + C \\ y(1) = 0 \implies C = +1 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 1$$

6.3. Дифференциальные характеристики

Mem. $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ - градиент скалярного поля

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$ - набла-оператор

Nota. Для $\vec{\nabla}$ определены действия:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Причем $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$ - лапласиан

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$$

Nota. $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ - уравнение, определяющее гармоническую

часть волнового уравнения матфизики
функцию $u(x, y, z)$, уравнение Лапласа

Def. 1. Дивергенция поля (*divergence* - расхождение)

$$\operatorname{div} \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Def. 2. Вихрь (ротатор) поля

$$\operatorname{rot} \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Def. 3. Если $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, то \vec{F} называется безвихревым полем

Def. 4. Если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, то \vec{F} называется соленоидальным

Nota. Безвихревое поле имеет незамкнутые векторные линии, а вихревое - замкнутые

Th. 1. Свойство безвихревого поля

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} u = \vec{F}$$

□ \implies

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Рассмотрим $u = u(x, y, z) \mid \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$ - удовлетворяет системе равенств

$$\vec{F} = (P, Q, R) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} u$$

$$\boxed{\impliedby} \vec{F} = \vec{\nabla} u - \text{дана}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) u = 0$$

□

Nota. Доказали, что если векторное поле является градиентом какого-то скалярного, то его вихрь равен нулю: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0$

Def. $\vec{F} = \vec{\nabla} u$ Поле $u(x, y, z)$ называется потенциалом поля \vec{F}

Таким образом, доказано, что безвихревое поле потенциально

Th. 2. Свойство соленоидального поля

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

□

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{F} = 0$$

□

6.4. Интегральные характеристики. Теоремы теории поля

Мет. 1) Поток поля $\vec{F} : \Pi = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma}$

Def. 2) Циркуляция поля $\vec{F} : \Gamma = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$

Nota. Запишем **Th.** -мы на векторном языке

1* **Гаусса-Остроградского**

$$\begin{aligned} \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rxdy &= \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\ \iint_S (P, Q, R)(dydz, dxdz, dxdy) &= \iint_S (P, Q, R)(\cos \alpha d\sigma, \cos \beta d\sigma, \cos \gamma d\sigma) = \iint_S \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma} \\ \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz &= \iiint_T (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \\ \boxed{\iint_S \vec{F} d\vec{\sigma} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{F}} \end{aligned}$$

2* **Стокса**

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy + Rdz &= \vec{F} d\vec{l} \\ \oint_L \vec{F} d\vec{l} &= \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

3* **Th. о потенциале**

$$\forall L \oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0 \iff \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} = \vec{F}$$

(см. **Th.** интеграла НЗП)

Ex. $\vec{F} = x\vec{i} + xy\vec{j}, L : x = y, x = -y, x = 1$

По формуле Грина (Стокса) $\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D y dxdy \quad \operatorname{rot} \vec{F} \neq 0$

$$\oint_L xdx + xydy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \int_0^1 (x + x^2)dx + \int_{-1}^1 ydy - \int_0^1 (x + x^2)dx = \int_{-1}^1 ydy = 0$$

6.5. Механический смысл

1* **Дивергенция**

Гаусс-Остроградский: $\iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dv = \Pi$

Th. о среднем: $\exists M_1 \in T \mid \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} dv = \operatorname{div} \vec{F} \Big|_{M_1} \cdot V_T = \Pi$

$\operatorname{div} \vec{F} \Big|_{M_1} = \frac{\Pi}{V_T}$, точка M_0, S и T выбраны произвольно

$\square V_T \rightarrow 0$, тогда $\operatorname{div} \vec{F} \Big|_{M_1 \rightarrow M_0} = \lim_{V_T \rightarrow 0} \frac{\Pi}{V_T}$ - поток через границу бесконечно малого объема с центром M_0 , отнесенный к V_T - мощность источника в M_0

Таким образом, дивергенция поля - мощность источников

Nota. Смысл утверждения $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$ - поле вихря свободно от источников

Nota. Утверждение $\operatorname{rot}(\overrightarrow{\operatorname{grad} u}) = 0$ - поле потенциалов свободно от вихрей

2* Ротор

Стокс $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{\sigma} = \Gamma$

Th. о среднем: $\exists M_1 : \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} d\vec{\sigma} = \operatorname{rot} \vec{F} \Big|_{M_1} \cdot S = \Gamma$

$\operatorname{rot} \vec{F} \Big|_{M_1} = \frac{\Gamma}{S}$, будем стягивать S к точке $M_0 \implies \operatorname{rot} \vec{F} \Big|_{M_0} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S}$ - циркуляция по б.м. контуру с центром M_0