Формула: $f(x) \in C^{\infty}_{U_0(x_0)}$ и $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ между x и x_0

Th. Если $R_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - ряд Тейлора

Nota. Если $x_0 = 0$, то ряд Маклорена

Стандартные разложения элементарных функций

1° $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dots$

Nota. $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dots \qquad e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

2° $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots$

Nota. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

3° $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots$

Nota. $1 - \cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

4° $\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x$ **Def.** $\mathrm{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Сложим и вычтем ряды для e^x и e^{-x}

Причем $e^{-x} \underset{x,t\in u(0)}{\overset{t=-x}{=\!=\!=}} e^t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dots$

Из этого получаем:

$\mathrm{sh}x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$

$\mathrm{ch}x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{(2n)}}{(2n)!}$

<u>Формула Эйлера</u>

$e^{ix} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{ix^3}{3!} + \dots = (1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dots) + i(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots) = \cos x + i\sin x$

$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$

5° Биномиальный ряд

$f(x) = (1+x)^m, n \in \mathbb{Q}$

Заметим, что $f'(x) = m(1+x)^{m-1}$

$(1+x)f'(x) = m(1+x)^m = mf(x)$

Получаем дифференциальное уравнение: $(1+x)f'(x) = mf(x)$

Nota. Если дополнить ДУ начальными условиями, то задача Коши будет решаться единственным образом, то есть, найдя ряд $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ как единственное решение, получим, что $S(x) = f(x)$ и не надо исследовать остаток R_n на убывание к нулю

Задача Коши:

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = mf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда $S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots$

$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots$

$(1+x)S'(x) = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^3 + \dots + (ka_k + (k+1)a_{k+1})x^k + \dots$

$mS(x) = ma_0 + ma_1 x + ma_2 x^2 + \dots + ma_k x^k + \dots$

Начальные условия: $a_0 = 1$. Тогда приравниваем коэффициенты: $a_1 = m, a_2 = \dfrac{m(m-1)}{2}, a_3 = \dfrac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$

Выявили закономерность: $a_k = \dfrac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}$

Таким образом: $(1+x)^m = \sum\limits_{k=0}^{\infty} C_m^k x^k$

При $m \in \mathbb{N}$ ряд - конечная сумма, при остальных - бесконечная

<u>Lab.</u> $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} = (\arcsin x)'$ $\qquad \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t$

6° $\ln(1+x)$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n) dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Интервал сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x^{n+1} n}{(n+1)x^n}\right| = |x| < 1 \quad D = (-1, 1)$

При $x = 1 \quad \ln(1+x) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$ - сходится $\quad D = (-1, 1]$

Nota. Сходимость остатка требует исследования

Nota. Заметим, если $x = \dfrac{1}{k}$, где $k \in \mathbb{N}$, то $\ln(1 + \dfrac{1}{k}) = \ln \dfrac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$ - рекуррентная формула логарифмов натуральных чисел

7° $\mathrm{arctg} x$ - <u>Lab.</u> $((\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2})$

Приложения

Ex. 1. $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ $\quad x = \frac{1}{2} \in u(0)$

$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$

$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots) dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{1}{32 \cdot 5 \cdot 120} - \cdot$

Ряд знакопеременный - можем найти такой u_n, который будет меньше заданной точности вычисления ε

Ex. 2. $\int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a (1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2!} + \dots) dx = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{10} + \dots \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{5} + \frac{a^5}{10} - \dots$

Отсюда были вычислены таблицы для функции Лапласа $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Ex. 3. Вычисление пределов

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \text{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

4. Ряды Фурье

Мет. Линейное функциональное пространство со скалярным произведением

$f(x) \in C_{[a,b]}$

Скалярное произведение $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$

Из этого норма $\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$

Главное приложение евклидовых пространств - задача о перпендикуляре: найти перпендикуляр h из конца вектора f на подпространство L'. Иначе: ищем расстояние $\|f - h\|$ (метрика) или ортогональную проекция f_0 вектора f на L', такую, что $f_0 + h = f$

Будем искать f_0, задав подпространство L' множеством функций $\{\sin mx, \cos mx\}$

Тригонометрические функции полезны для описания периодических явлений

Раньше рассматривали тригонометрический многочлен

$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \dots + b_m \sin mx + a_m \cos mx$

Дальше стоит задача: при каких a_i, b_i многочлен $T_m(x)$ будет наименее отстоящим от данной $f(x)$