Серия испытаний Бернулли

Схемой Бернулли - называется серия одинаковых независимых экспериментов, каждый из которых имеет 2 исхода: произошло интересующее нас событие или нет

$p = p(A)$ - вероятность успеха при одном испытании

$q = 1 - p$ - вероятность неудачи

v_n - число успехов в серии из n испытаний

$p(v_n = k) = p_n(k)$

Из этого получаем формулу Бернулли:

Th. Вероятность того, что при n испытаниях произойдет ровно k успехов, равна
$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

□

Рассмотрим один из элементарных исходов, благоприятных данному событию:

$A_n = \underbrace{\text{УУУ}\ldots\text{У}}_{k}\underbrace{\text{Н}\ldots\text{ННН}}_{n-k}$ - k успехов, $n-k$ неудачи

$p(\text{У}) = p, p(\text{Н}) = q$

Так как испытания независимы, то $p(A_n) = p^k q^{n-k}$

Остальные элементарные исходы имеют ту же вероятность, перебираем все расстановки исходов, получаем C_n^k, в итоге, получаем формулу Бернулли

□

Ex. Вероятность попадания стрелка при одном выстреле - 0.8. Какова вероятность того, что из пяти выстрелов точными будут три

$n = 5 \quad p = 0.8 \quad q = 1 - p = 0.2 \quad k = 3$

$p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0.2048$

Наиболее вероятное число успехов

Выясним, при каком значении k вероятность предшествующего числа успехов $k-1$ будет не более, чем вероятность k успехов

$p_n(k-1) \le p_n(k)$

$C_n^{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} \le C_n^k p^k q^{n-k}$

$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} q \le \frac{n!}{(k)!(n-k)!} p$

$\frac{q}{(k-1)!(n-k+1)!} \le \frac{p}{(k)!(n-k)!}$

$\frac{q}{n-k+1} \le \frac{p}{k}$

$k(1-p) \le p(n-k+1)$

$k \le np + p$

Отсюда $np + p - 1 \le k \le np + p$

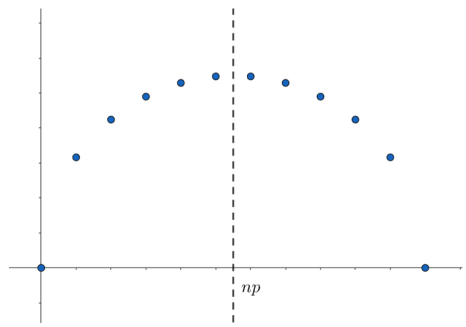
Рассмотрим 3 ситуации:

1) np - целое, тогда $np + p$ - нецелое, и $k = np$ - наиболее вероятное

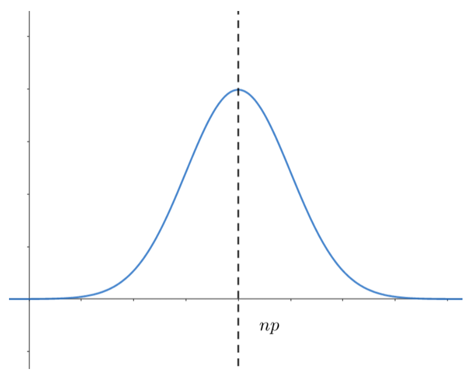
2) $np + p$ - нецелое, тогда $k = \lfloor np + p \rfloor$

3) $np + p$ - целое, тогда $np + p - 1$ - целое, и 2 наиболее вероятных числа успеха

Геометрическая интерпретация:



При увеличении числа n точки превращаются в кривую Гаусса



При увеличении числа испытаний n формула Бернулли вырождается в следующие асимптотические формы (применяем, если требуется найти вероятность точного числа успеха)

1) локальная формула Муавра-Лапласа

$p_n(k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция гаусса

$x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$

Свойства $\varphi(x)$:

1. $\varphi(x) = \varphi(-x)$ - функция четная

2. при $x > 5 \quad \varphi(x) \approx 0$

2) Интегральная формула Муавра-Лапласа (если требуется найти вероятность того, что число успехов в данном диапазоне)

$p_n(k_1 \le k \le k_2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция Лапласа

$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$ - отклонение от левой границы, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ - отклонение от правой

Свойства $\Phi(x)$

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ - функция нечетная

2. при $x > 5 \quad \Phi(x) \approx 0.5$

Nota. Эти формулы обычно можно применять при $n \geq 100$ и $0.1 \leq p \leq 0.9$

Nota. В некоторых источниках под функцией Лапласа подразумевают другую функцию: $F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - стандартное отклонение. Эта функция отличается от $F_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \Phi(x)$

Так как $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ - интеграл Пуасона

Ex. Вероятность попадания стрелка в цель 0.8, стрелок сделал 400 выстрелов. Найти вероятность того, что:

а) произошло ровно 330 попаданий

б) произошло от 312 до 336 попаданий

а) $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \dfrac{330 - 320}{8} = 1.25$

$p_{400}(330) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(1.25) = \dfrac{1}{8}\varphi(1.25) \approx \dfrac{1}{8} \cdot 0.1826 \approx 0.0228$

б) $x_1 = \dfrac{312 - 320}{8} = -1,\ x_2 = \dfrac{336 - 320}{8} = 2$

$p_{400}(312 \leq k \leq 336) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) \approx 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$

Статистическое понятие вероятности

Пусть проводим n реальных экспериментов, n_A - число появления события A, $\dfrac{n_A}{n}$ - относительная частота события A.

Эксперименты с монетой показали, что при больших n, $\dfrac{n_A}{n} \approx p(A)$ - явление стабилизации

Вероятность отклонения относительной частоты от вероятности события

n - число испытаний, $p = p(A)$, $\dfrac{n_A}{n}$ - экспериментальная частота

$p\left(|\dfrac{n_A}{n} - p| \leq \varepsilon\right) = p\left(-\varepsilon \leq \dfrac{n_A}{n} - p \leq \varepsilon\right) = p(-n\varepsilon \leq n_A - np \leq n\varepsilon) = p(np - n\varepsilon \leq n_A \leq n\varepsilon + np) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ [по интегральной формуле Лапласа] $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi\left(\dfrac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\dfrac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$

$= \Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right) - \Phi\left(-\dfrac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$

$= 2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$

Итак, получили, что нужная нам вероятность $p\left(|\frac{n_A}{n}-p|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sqrt{pq}}\right)$

Закон больших чисел Бернулли

Итак, $p\left(|\frac{n_A}{n}-p|\le\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right)$
при $n\to\infty, \sqrt{n}\to\infty, \frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\to\infty, \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right)\to 0.5, p\left(|\frac{n_A}{n}-p|\le\varepsilon\right)\to 2\cdot 0.5=1$ - закон больших чисел показывает, что вероятность попадания относительной частоты в ε-трубу вероятность события приближается к 1
$\lim\limits_{n\to\infty}p\left(|\frac{n_A}{n}-p|\le\varepsilon\right)=1$ или $\frac{n_A}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}p$ - сходимость по вероятности

Ex. Для оценки доли p курящих людей берется выборка объема n, и делается оценка доли курящих людей по формуле $p^*=\frac{n_A}{n}$. Каким должен быть объем n, чтобы с вероятностью $\gamma=0.95$ данная оценка отличалась от истинного значения не более, чем на $\varepsilon=0.01$
По формуле вероятности отклонения частоты от вероятности $p(|p^*-p|\le\varepsilon)=p\left(|\frac{n_A}{n}-p|\le\varepsilon\right)\approx$
$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right)=0.95$
$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}\right)=0.475$
$\frac{\varepsilon}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}=1.96$
$\frac{1}{\sqrt{pq}}\sqrt{n}=196$
$\frac{n}{pq}=38416$
$n\ge 38416pq$
В самое худшей ситуации $pq\le 0.5^2=\frac{1}{4}$
$n\ge\frac{38416}{4}=9604$