4. Дифференциальные уравнения

4.1 Общие понятия

1* Постановка задачи

Pr. 1. Скорость распада радия в текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q. Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось Q_0

Коэффициент пропорциональности k найден эмпирически.

Решение. Скорость распада.

$\dfrac{dQ(t)}{dt} = kQ$ - ищем $Q(t)$

$dQ(t) = kQdt$

$\underbrace{\dfrac{dQ(t)}{Q}}_{\text{содержит только } Q} = \underbrace{kdt}_{\text{содержит только } t}$ - «разделение переменных»

Внесем все в дифференциал:

$d\ln Q = kdt = dkt$

$d(\ln Q - kt) = 0$

Нашли семейство первообразных:

$\ln Q - kt = \tilde{C}$

$\ln Q = \tilde{C} + kt$

$Q = e^{\tilde{C}+kt} \overset{e^{\tilde{C}}=C}{=\!=\!=} Ce^{kt}$

По смыслу $k < 0$, так как Q уменьшается. Обозначим $n = -k, n > 0$

Тогда $\boxed{Q(t) = Ce^{-nt}}$

Получили вид закона распада. Выбор константы C определен Н.У. (начальными условиями):

$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$

Тогда, закон - $\boxed{Q^*(t) = Q_0e^{-nt}}$

Nota. Оба закона: общий $Q(t) = Ce^{-nt}$ и частный $Q^*(t) = Q_0e^{-nt}$ - являются решением дифференциального уравнения:

$Q'(t) = kQ$ (явный вид)

$d\ln Q(t) - kdt = 0$ (в дифференциалах)

Pr. 2 Тело массой m брошено вверх с начальной скоростью v_0. Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

По II закону Ньютона:

$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$

$a = \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -g}$ - ДУ

Решение. $y''(t) = -g$

$(y'(t))' = -g$

$y'(t) = -\int g dt = -gt + C_1$

$y(t) = \int (-gt + C_1)dt = \boxed{-\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t)}$ - общий закон

$C_{1,2}$ ищем из Н.У.

В задаче нет условия для $y(t_0)$. Возьмем $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

Таким образом, $\begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$

Найдем C_1: $y'(t_0) = y(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$

Найдем C_2: $y(t_0) = y(0) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = C_2 = 0$

Частный закон: $\boxed{y^*(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$

2* Основные определения

Def. 1. Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ n-ого порядка $(*)$

Ex. $Q' + nQ = 0$ и $y'' + g = 0$

Def. 2. Решением ДУ $(*)$ называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает $(*)$ в тождество

Def. 2'. Если $y(x)$ имеет неявное задание $\Phi(x, y(x)) = 0$, то $\Phi(x, y)$ называется интегралом уравнения $(*)$

Nota. Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

Def. 3. Кривая с уравнением $y = y(x)$ или $\Phi(x, y(x)) = 0$ называют интегральной кривой

Def. 4. $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ - система начальных условий $(**)$

Тогда $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases}$ - задача Коши (ЗК)

Nota. Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

Th. $y' = f(x, y)$ - ДУ
$M_0(x_0, y_0) \in D$ - точка, принадлежащая ОДЗ
Если $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в M_0, то ЗК
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
имеет единственное решение $\varphi(x, y) = 0$, удовлетворяющее Н.У. (без док-ва)

Nota. Преобразуем ДУ: $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$
См. определения обыкн. и особых точек

Def. 5. Точки, в которых нарушаются условия теоремы называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

Def. 6. Общим решением ДУ $(*)$ называется $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$

Nota. $\Phi(x, y(x), C_1, \ldots, C_n) = 0$ - общий интеграл

Def. 7. Решением $(*)$ с определенными значениями $C_1^*, \ldots, C_n^*$ называется частным

Nota. Форма записи:
Разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$
Сведем к виду: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \Longrightarrow -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \Longrightarrow$
$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ - форма в дифференциалах