

Содержание

7. Комбинаторика

2

7. Комбинаторика

Базовые понятия:

- **Алфавит** (Alphabet) Σ (или X , *Ex.* $X = \{a, b, c\}$) - множество символов в нашей системе
- **Диапазон** (Range) $[n] = \{1, \dots, n\}$ - конечное множество последовательных натуральных чисел
- **Расстановка** (Ordered arrangement) - последовательность каких-либо элементов (тоже самое, что кортеж), *Ex.* $x = (a, b, c, d, b, b, c) \quad |x| = n$
 Расстановку можно представить как функцию $f: \underbrace{[n]}_{\text{domain}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{codomain}}$, которая по порядковому номеру выдает символ
 $\text{ran} f = \{c \in \Sigma \mid \exists i \in [n] : f(i) = c\}$
- **Перестановка** (Permutation) - $\pi: [n] \rightarrow \Sigma$, где $n = |\Sigma|$
 Расстановка π - биекция между $[n]$ и Σ

Ex. $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

Одна из задач комбинаторики - посчитать количество различных расстановок или перестановок при заданных n и Σ

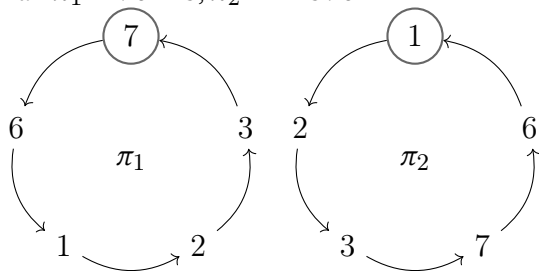
- **k -перестановка** (k -permutation) - расстановка из k различных элементов из Σ

Ex. $\underbrace{[31475]}_{5\text{-perm из } \Sigma=[7]} = 5$

k -перестановка - инъекция $\pi: [k] \rightarrow \Sigma$ ($k \leq n = |\Sigma|$)

- $P(n, k)$ - множество всех k -перестановок алфавита $\Sigma = [n]$ (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и $[n]$)
 $P(n, k) = \{f \mid f: [k] \rightarrow [n]\}$
 Чаще интересует не само множество, а его размер, поэтому под обозначением $P(n, k)$ подразумевается $|P(n, k)|$
- $S_n = P_n = P(n, n)$ - множество всех перестановок. Также чаще всего нас будет интересовать не множество, а его размер
 $|S_n| = n!$ - всего существует $n!$ перестановок
 $|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- **Циклические k -перестановки** (Circular k -permutations)
 $\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$ - циклические эквивалентны тогда и только тогда:
 $\exists s \mid \forall i \pi_1((i+s) \% k) = \pi_2(i)$

Ex. $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$



$P_C(n, k)$ - множество всех циклических k -перестановок в Σ

$$|P_C(n, k)| \cdot k = |P(n, k)|$$

$$|P_C(n, k)| = \frac{|P(n, k)|}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

- **Неупорядоченная расстановка k элементов** (Unordered arrangement of k elements) - мультимножество Σ^* размера k

Ex. $\Sigma^* = \{\Delta, \Delta, \square, \Delta, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \Delta, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$

Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:

$r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, $r(x)$ - кол-во повторений объекта x

- **k -сочетание** (k -combination) - неупорядоченная перестановка из k различных элементов из Σ (еще называют k -подмножеством, k -subset)

Соответственно $C(n, k)$ - множество всех таких k -сочетаний

$$|C(n, k)| = C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$C(n, k) = \binom{\Sigma}{k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot k! = |P(n, k)|$$

$$|C(n, k)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Th. Биномиальная теорема (Binomial theorem):

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ - биномиальный коэффициент

Th. Мультиномиальная теорема (Multinomial theorem)

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$ - мультиномиальный коэффициент

Ех. мультиномиальной теоремы:

$$(x+y+z)^4 = 1(x^4+y^4+z^4) + 4(xy^3+xz^3+x^3y+yz^3+y^3z+yz^3) + 6(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2) + 12(xyz^2+xy^2z+x^2yz)$$

Доказательство:

□

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1 = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}, \text{ где } k_t - \text{ количество } x \text{ с индексом } t \text{ в}$$

однотермине ($k_t = |\{j \in [n] | i_j = t\}|$)

Получается мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ будет равен количеству способов поставить k_1 единиц в индексы в $x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1$, k_2 двоек в индексы и так далее

У нас есть $\binom{n}{k_1}$ способов поставить единицу в индексы в однотермине, $\binom{n-k_1}{k_2}$ способов поставить двойку и т. д., получаем:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = [n-k_1-\dots-k_r=0] = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)! k_2!(n-k_1-k_2)! \dots k_r!0!} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$$

- **Перестановка мультимножества** Σ^* (Permutations of a multiset Σ^*)

$$\Sigma^* = \{\Delta^1, \Delta^2, \square, \star\} = (\Sigma, r) \quad r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$$

Nota. $\begin{cases} \Delta^1, \Delta^2, \square, \star \\ \Delta^2, \Delta^1, \square, \star \end{cases}$ считаются равными перестановками

$$|P^*(\Sigma^*, n)| = \frac{n!}{r_1! \dots r_s!} = \binom{n}{r_1, \dots, r_s} - \text{ количество перестановок мультимножества, где } r_i - \text{ количество } i\text{-ого элемента в мультимножестве}$$

- **k -комбинация бесконечного мультимножества** (k -combinations of infinite multiset) - такое субмультимножество размера k , содержащее элементы из исходного мультимножества. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента r_i в исходном мультимножестве не больше размера комбинации k

$$\Sigma^* = \{\infty \cdot \Delta, \infty \cdot \square, \infty \cdot \star, \infty \cdot \blacklozenge\}^* \quad n = |\Sigma^*| = \infty$$

$$\Sigma = \{\Delta, \square, \star, \blacklozenge\} \quad s = |\Sigma| = 4$$

Ех. 5-комбинация: $\{\Delta, \star, \square, \star, \square\}$

Разделяем на группы по Σ палочками:

$$\Delta | \square \square | \star \star |$$

Заменяем элементы на точки - нам уже не так важен тип элемента, потому что мы знаем из разделения:

$$\bullet | \bullet \bullet | \bullet \bullet |$$

$$(\text{другой Ех. } \bullet \bullet \bullet \bullet ||| \bullet = \{4 \cdot \Delta, 1 \cdot \blacklozenge\})$$

Получается всего k точек и $s-1$ палочек, всего $k+s-1$ объектов. Получаем мультимножество $\{k \cdot \bullet, (s-1) \cdot | \}$ (Star and Bars method)

Получаем количество перестановок этого мультимножества: $\frac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} = \binom{k+s-1}{k, s-1} =$

$$\binom{k+s-1}{k} = \binom{k+s-1}{s-1}$$

что и является количеством возможных k -комбинаций бесконечного мультимножества

- **Слабая композиция** (Weak composition) неотрицательного целого числа n в k частей - это решение (b_1, \dots, b_k) уравнение $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i \geq 0$

$$|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n+k-1}{n, k-1}$$

Для решения воспользуемся аналогичным из доказательства мультиномиальной теоремы приемом:

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Поставим палочки:

$$n = 1 + 1 \left| 1 \right| \dots + 1$$

Получаем задачу поиска количеств k -комбинаций в мультимножестве: $\{n \cdot 1, (k-1) \cdot \left| \right|\}$;

$$\text{получаем } \binom{n+k-1}{n, k-1}$$

- **Композиция** (Composition) - решение для $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i > 0$

$$|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$$

Мы знаем, что одну единичку получит каждая b_i , поэтому мы решаем это как слабую композицию для $n-k$ в k частей

- **Число композиций n в некоторой число частей** (Number of all compositions into some number of positive parts)

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

$$\text{Пусть } t = k-1, \text{ тогда } \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} = 2^{n-1}$$

- **Разбиения множества** (Set partitions) - множество размера k непересекающихся непустых подмножеств

$$\begin{aligned} \text{Ех. } \{1, 2, 3, 4\}, n=4, k=2 \rightarrow [\text{разбиение в 2 части}] \rightarrow & \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \\ & \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \\ & \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \\ & \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\} \end{aligned}$$

$|\{\text{разбиение } n \text{ элементов в } k \text{ частей}\}| = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S_k^{\text{II}}(n) = S(n, k)$ - число Стирлинга второго рода

$$\text{Для примера выше число Стирлинга } S(4, 2) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$$

Согласно Википедии [для формулы Стирлинга](#) есть формула: $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n$

- **Формула Паскаля** (Pascal's formula)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга** (Recurrence relation for Stirling⁽²⁾ number):

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

Возьмем какое-либо разбиение для $n-1$ элементов на k частей, тогда возможны два случая:

1) В k -ое множество нет ни одного элемента, тогда мы обязаны в него положить наш n -ый элемент по определению, количество перестановок будет равно $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \cdot 1$

2) В k -ом множестве уже есть элементы, тогда все множества будут заполнены и у нас будет выбор из k множеств, куда положить k -ый элемент, то есть $k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$

Эти два случая независимы, поэтому получаем $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$

- **Число Белла** (Bell number) - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера n

Число Белла вычисляется по формуле: $B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m)$

- **Целочисленное разбиение** (Integer partition) - решение для $a_1 + \dots + a_k = n$, где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$

$p(n, k)$ - число целочисленных разбиений n в k частей

$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$ - число всех разбиений для n