

Разберем пример поверхностного интеграла:

$$\text{Ex. } S_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad S_2 : z = 0, \quad S_3 : z = 1$$

$$S = \bigcup_{i=1}^3 S_i - \text{цилиндр}$$

$$\vec{F} = (P, Q, R) = (x, y, z)$$

$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} xdydz + ydxdz + zdx dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$$

Так как проекции  $S_2$  на  $Oxz$  и  $Oyz$  - отрезки, то  $dx dz = 0$ ,  $dy dz = 0$

$$\iint_{S_2} xdydz + ydxdz + zdx dy = \iint_{S_2} zdx dy = 0$$

$$\iint_{S_3} zdx dy \stackrel{z|_{S_3}=1}{=} \iint_{S_3} dx dy \stackrel{\text{с " + так как } n_3 \uparrow Oz}{=} \iint_{D_{xy}} dx dy = \pi$$

$$\iint_{S_1} xdydz + ydxdz = \iint_{D_{yz}^+ : x=\sqrt{1-y^2}} xdydz + \left( - \iint_{D_{yz}^- : x=-\sqrt{1-y^2}} xdydz \right) + \iint_{D_{xz}^+} ydxdz + \left( - \iint_{D_{xz}^-} ydxdz \right) =$$

...

## 5.7. Связь поверхностных интегралов с другими

**Th.** Гаусса-Остроградского

$$S_1 : z = z_1(x, y), \quad S_3 : z = z_3(x, y), \quad S_2 : f(x, y) = 0 \quad (\text{проекция на } Oxy - \text{кривая})$$

$$S = \bigcup_{i=1}^3 S_i - \text{замкнута! и ограничивает тело } T$$

$P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$  - непр. дифф., действуют в области  $\Omega \supset T$

$$\text{Тогда } \iint_{S_{\text{внешн.}}} Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

*Мет.* Формула Грина

$$\oint_K Pdx + Qdy = \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

□

$$\text{Вычислим почленно } \iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv$$

$$\iiint_T \left( \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z) \Big|_{z=z_1(x, y)}^{z=z_3(x, y)} dx dy = \iint_{D_{xy}} (R(x, y, z_3(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))) dx dy =$$

$$\iint_{D_{xy}} R(x, y, z_3) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy =$$

$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} Rdx dy$$

Аналогично остальные члены:

$$\iiint_T \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Qdxdz, \quad \iiint_T \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{S_{\text{внешн.}}} Pdx dz$$

□

*Nota.* Если  $\iint_{S_{\text{внутр}}}$ , то  $\iint_S = - \iiint_T$

*Nota.* С учетом связи поверхностных интегралов  $\iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dv$

### Th. Стокса

Пусть  $S : z = z(x, y)$  - незамкнутая поверхность,  $L$  - контур, на которую она опирается

$$\text{пр}_{Oxy} L = K_{xy}, \quad \text{пр}_{Oxy} S = D_{xy}$$

В области  $\Omega \supset S$  действуют функции  $P, Q, R$  - непр. дифф.

$$\text{Тогда } \oint_{L^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S^+} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma$$

□

$$\begin{aligned} \text{Найдем слагаемое } \oint_L P(x, y, z) dx &\stackrel{\text{на } L : z=z(x,y)}{=} \oint_{K_{xy}^+} \tilde{P}(x, y, z(x, y)) dx = \oint_{K_{xy}} \tilde{P} dx + \tilde{Q} dy = \iint_{D_{xy}} \left( \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial \tilde{P}(x, y)}{\partial y} dx dy = - \iint_{S^+} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dx dy = - \iint_{S^+} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_{S^+} \left( \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial z} (-\cos \beta) \right) d\sigma \end{aligned}$$

$$\vec{n} = \left( \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} \right)$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

$$\text{Аналогично } \oint_L Q dy = \iint_{S^+} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos \beta - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma, \quad \oint_L R dz = \iint_{S^+} \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma$$

Остается сложить интегралы

□

*Ex. 1.*  $(P, Q, R) = (x, y, z)$

В *Ex.* пункте 5.6. (вычисление поверхностного):

$$\iint_{S_{\text{внешн}} - \text{замкнута!}} x dy dz + y dx dz + z dx dy = \iiint_T \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dv = 3V_{\text{цил.}}$$

*Ex. 2.* Те же  $P, Q, R$

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left( \overbrace{\left( \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right)}^{=0} \cos \alpha + 0 + 0 \right) d\sigma$$

## 6. Теория поля

### 6.1. Определения

**Def. 1.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Функция  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется скалярным полем в  $\Omega$

**Def. 2.** Функция  $\vec{F} = (F_1(\vec{x}), \dots, F_n(\vec{x})) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  называется векторным полем

*Nota.* Далее будем рассматривать функции в  $\mathbb{R}^3$ , то есть  $u = u(x, y, z)$  и  $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

*Nota.* Функции  $u$  и  $\vec{F}$  могут зависеть от времени  $t$ . Тогда эти поля называются нестационарными. В противном случае стационарными

### 6.2. Геометрические характеристики полей

$u = u(x, y, z)$ :  $l$  - линии уровня  $u = \text{const}$

$\vec{F} = (P, Q, R)$ :  $w$  - векторная линия, в каждой точке  $w$  вектор  $\vec{F}$  - касательная к  $w$

Векторная трубка - совокупность непересекающихся векторных линий

*Nota.* Отыскание векторных линий

Возьмем  $\vec{\tau}$  - элементарный касательный вектор,  $\vec{\tau} = (dx, dy, dz)$

Определение векторной линии:  $\vec{\tau} \parallel \vec{F} \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$  - система ДУ

Ex.  $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ ,  $M_0(1, 0)$  - ищем векторную линию  $w \ni M_0$

Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xdx = -ydy \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -y^2 + C \\ y(1) = 0 \implies C = +1 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 1$$

### 6.3. Дифференциальные характеристики

Mem.  $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad} u} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  - градиент скалярного поля

$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$  - набла-оператор

*Nota.* Для  $\vec{\nabla}$  определены действия:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Причем  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$  - лапласиан

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} = 0$$

*Nota.*  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$  - уравнение, определяющее гармоническую функцию  $u(x, y, z)$ , уравнение Лапласа

часть волнового уравнения матфизики

**Def. 1.** Дивергенция поля (*divergence* - расхождение)

$$\text{div } \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

**Def. 2.** Вихрь (ротор) поля

$$\text{rot } \vec{F} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

**Def. 3.** Если  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , то  $\vec{F}$  называется безвихревым полем

**Def. 4.** Если  $\text{div } \vec{F} = 0$ , то  $\vec{F}$  называется соленоидальным

*Nota.* Безвихревое поле имеет незамкнутые векторные линии, а вихревое - замкнутые

**Th. 1.** Свойство безвихревого поля

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} u = \vec{F}$$

□  $\implies$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Рассмотрим  $u = u(x, y, z) \mid \frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \frac{\partial u}{\partial z} = R$  - удовлетворяет системе равенств

$$\vec{F} = (P, Q, R) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} u$$

$$\boxed{\Leftarrow} \vec{F} = \vec{\nabla} u - \text{дана}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) u = 0$$

□

*Nota.* Доказали, что если векторное поле является градиентом какого-то скалярного, то его вихрь равен нулю:  $\overrightarrow{\text{rot grad } u} = 0$

**Def.**  $\vec{F} = \vec{\nabla} u$  Поле  $u(x, y, z)$  называется потенциалом поля  $\vec{F}$

Таким образом, доказано, что безвихревое поле потенциально

**Th. 2.** Свойство соленоидального поля

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$$

□

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{F} = 0$$

□

## 6.4. Интегральные характеристики. Теоремы теории поля

*Mem.* 1) Поток поля  $\vec{F} : \Pi = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma}$

**Def.** 2) Циркуляция поля  $\vec{F} : \Gamma = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$

*Nota.* Запишем **Th.** на векторном языке

1\* **Гаусса-Остроградского**

$$\begin{aligned} \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy &= \iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \\ \iint_S (P, Q, R)(dydz, dxdz, dxdy) &= \iint_S (P, Q, R)(\cos \alpha d\sigma, \cos \beta d\sigma, \cos \gamma d\sigma) = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma} \\ \iiint_T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz &= \iiint_T (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \iiint_T \text{div } \vec{F} \\ \boxed{\iint_S \vec{F} d\vec{\sigma} = \iiint_T \text{div } \vec{F}} \end{aligned}$$

2\* **Стокса**

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy + Rdz &= \vec{F} d\vec{l} \\ \oint_L \vec{F} d\vec{l} &= \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S \text{rot } \vec{F} d\vec{\sigma} \end{aligned}$$

3\* **Th. о потенциале**

$$\forall L \oint_L \vec{F} d\vec{l} = 0 \iff \text{rot } \vec{F} = 0 \iff \exists u(x, y, z) \mid \vec{\nabla} = \vec{F}$$

(см. **Th.** интеграла НЗП)

$$\text{Ex. } \vec{F} = x\vec{i} + xy\vec{j}, L : x = y, x = -y, x = 1$$

По формуле Грина (Стокса)  $\oint_L \vec{F} d\vec{l} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D y dx dy \quad \text{rot } \vec{F} \neq 0$

$$\oint_L x dx + xy dy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \int_0^1 (x + x^2) dx + \int_{-1}^1 y dy - \int_0^1 (x + x^2) dx = \int_{-1}^1 y dy = 0$$

## 6.5. Механический смысл

1\* Дивергенция

Гаусс-Остроградский:  $\iiint_T \text{div } \vec{F} dv = \Pi$

**Th.** о среднем:  $\exists M_1 \in T \mid \iiint_T \text{div } \vec{F} dv = \text{div } \vec{F} \Big|_{M_1} \cdot V_T = \Pi$

$\text{div } \vec{F} \Big|_{M_1} = \frac{\Pi}{V_T}$ , точка  $M_0, S$  и  $T$  выбраны произвольно

$\square V_T \rightarrow 0$ , тогда  $\text{div } \vec{F} \Big|_{M_1 \rightarrow M_0} = \lim_{V_T \rightarrow 0} \frac{\Pi}{V_T}$  - поток через границу бесконечно малого объема с центром  $M_0$ , отнесенный к  $V_T$  - мощность источника в  $M_0$

Таким образом, дивергенция поля - мощность источников

*Nota.* Смысл утверждения  $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$  - поле вихря свободно от источников

*Nota.* Утверждение  $\text{rot}(\overrightarrow{\text{gradu}}) = 0$  - поле потенциалов свободно от вихрей

2\* Ротор

Стокс  $\iint_S \text{rot } \vec{F} d\vec{\sigma} = \Gamma$

**Th.** о среднем:  $\exists M_1 : \iint_S \text{rot } \vec{F} d\vec{\sigma} = \text{rot } \vec{F} \Big|_{M_1} \cdot S = \Gamma$

$\text{rot } \vec{F} \Big|_{M_1} = \frac{\Gamma}{S}$ , будем стягивать  $S$  к точке  $M_0 \implies \text{rot } \vec{F} \Big|_{M_0} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S}$  - циркуляция по б.м. контуру с центром  $M_0$