

## Содержание

<b>7. Комбинаторика</b>	<b>2</b>
<b>8. Рекуррентности и производящие функции</b>	<b>10</b>
<b>X. Программа экзамена в 2023/2024</b>	<b>15</b>

## 7. Комбинаторика

### Базовые понятия:

- **Алфавит** (Alphabet)  $\Sigma$  (или  $X$ , *Ex.*  $X = \{a, b, c\}$ ) - множество символов в нашей системе
- **Диапазон** (Range)  $[n] = \{1, \dots, n\}$  - конечное множество последовательных натуральных чисел

- **Расстановка** (Ordered arrangement) - последовательность каких-либо элементов (тоже самое, что кортеж), *Ex.*  $x = (a, b, c, d, b, b, c)$   $|x| = n$

Расстановку можно представить как функцию  $f: \underbrace{[n]}_{\text{domain}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{codomain}}$ , которая по порядковому номеру выдает символ

$$\text{ran}f = \{c \in \Sigma \mid \exists i \in [n] : f(i) = c\}$$

- **Перестановка** (Permutation) -  $\pi: [n] \rightarrow \Sigma$ , где  $n = |\Sigma|$

Расстановка  $\pi$  - биекция между  $[n]$  и  $\Sigma$

*Ex.*  $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

Одна из задач комбинаторики - посчитать количество различных расстановок или перестановок при заданных  $n$  и  $\Sigma$

- **$k$ -перестановка** ( $k$ -permutation) - расстановка из  $k$  различных элементов из  $\Sigma$

*Ex.*  $\underbrace{|31475|}_{5\text{-perm из } \Sigma=[7]} = 5$

$k$ -перестановка - инъекция  $\pi: [k] \rightarrow \Sigma$  ( $k \leq n = |\Sigma|$ )

- $P(n, k)$  - множество всех  $k$ -перестановок алфавита  $\Sigma = [n]$  (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и  $[n]$ )

$$P(n, k) = \{f \mid f: [k] \rightarrow [n]\}$$

Чаще интересует не само множество, а его размер, поэтому под обозначением  $P(n, k)$  подразумевается  $|P(n, k)|$

- $S_n = P_n = P(n, n)$  - множество всех перестановок. Также чаще всего нас будет интересовать не множество, а его размер  
 $|S_n| = n!$  - всего существует  $n!$  перестановок

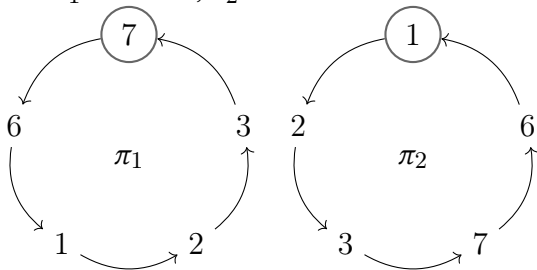
$$|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Циклические  $k$ -перестановки** (Circular  $k$ -permutations)

$\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$  - циклически эквивалентны тогда и только тогда:

$$\exists s \mid \forall i \pi_1((i+s) \% k) = \pi_2(i)$$

Ех.  $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$



$P_C(n, k)$  - множество всех циклических  $k$ -перестановок в  $\Sigma$

$$|P_C(n, k)| \cdot k = |P(n, k)|$$

$$|P_C(n, k)| = \frac{|P(n, k)|}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

- **Неупорядоченная расстановка  $k$  элементов** (Unordered arrangement of  $k$  elements) - мультимножество  $\Sigma^*$  размера  $k$

Ех.  $\Sigma^* = \{\Delta, \Delta, \square, \Delta, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \Delta, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$

Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:

$$r : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}, \quad r(x) - \text{кол-во повторений объекта } x$$

- **$k$ -сочетание** ( $k$ -combination) - неупорядоченная перестановка из  $k$  различных элементов из  $\Sigma$  (еще называют  $k$ -подмножеством,  $k$ -subset)

Соответственно  $C(n, k)$  - множество всех таких  $k$ -сочетаний

$$|C(n, k)| = C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$C(n, k) = \binom{\Sigma}{k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot k! = |P(n, k)|$$

$$|C(n, k)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Th.** Биномиальная теорема (Binomial theorem):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$  - биномиальный коэффициент

**Th.** Мультиномиальная теорема (Multinomial theorem)

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$  - мультиномиальный коэффициент

Ex. мультиномиальной теоремы:

$$(x+y+z)^4 = 1(x^4 + y^4 + z^4) + 4(xy^3 + xz^3 + x^3y + yz^3 + y^3z + yz^3) + 6(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) + 12(xyz^2 + xy^2z + x^2yz)$$

Доказательство:

□

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1 = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}, \text{ где } k_t - \text{ количество } x \text{ с индексом } t \text{ в одночлене}$$

$$(k_t = |\{j \in [n] | i_j = t\}|)$$

Получается мультиномиальный коэффициент  $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$  будет равен количеству способов поставить  $k_1$  единиц в индексы в  $x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1$ ,  $k_2$  двоек в индексы и так далее

У нас есть  $\binom{n}{k_1}$  способов поставить единицу в индексы в одночлен,  $\binom{n-k_1}{k_2}$  способов поставить

двойку и т. д., получаем:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = [n-k_1-\dots-k_r=0] = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)! k_2!(n-k_1-k_2)! \dots k_r!0!} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$$

□

- **Перестановка мультимножества**  $\Sigma^*$  (Permutations of a multiset  $\Sigma^*$ )

$$\Sigma^* = \{\Delta^1, \Delta^2, \square, \star\} = (\Sigma, r) \quad r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$$

Nota.  $\begin{cases} \Delta^1, \Delta^2, \square, \star \\ \Delta^2, \Delta^1, \square, \star \end{cases}$  считаются равными перестановками

$$|P^*(\Sigma^*, n)| = \frac{n!}{r_1! \dots r_s!} = \binom{n}{r_1, \dots, r_s} - \text{ количество перестановок мультимножества, где } r_i -$$

количество  $i$ -ого элемента в мультимножестве

- **$k$ -комбинация бесконечного мультимножества** ( $k$ -combinations of infinite multiset) - такое субмультимножество размера  $k$ , содержащее элементы из исходного мультимножества. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента  $r_i$  в исходном мультимножестве не больше размера комбинации  $k$

$$\Sigma^* = \{\infty \cdot \Delta, \infty \cdot \square, \infty \cdot \star, \infty \cdot \clubsuit\}^* \quad n = |\Sigma^*| = \infty$$

$$\Sigma = \{\Delta, \square, \star, \clubsuit\} \quad s = |\Sigma| = 4$$

Ех. 5-комбинация:  $\{\Delta, \star, \square, \star, \square\}$

Разделяем на группы по  $\Sigma$  палочками:

$$\Delta \mid \square \square \mid \star \star \mid$$

Заменяем элементы на точки - нам уже не так важен тип элемента, потому что мы знаем из разделения:

$$\bullet \mid \bullet \bullet \mid \bullet \bullet \mid$$

(другой Ех.  $\bullet \bullet \bullet \bullet \mid \mid \mid \bullet = \{4 \cdot \Delta, 1 \cdot \clubsuit\}$ )

Получается всего  $k$  точек и  $s - 1$  палочек, всего  $k + s - 1$  объектов. Получаем мультимножество  $\{k \cdot \bullet, (s - 1) \cdot \mid\}$  (*Star and Bars method*)

Получаем количество перестановок этого мультимножества:  $\frac{(k + s - 1)!}{k!(s - 1)!} = \binom{k + s - 1}{k, s - 1} =$

$$\binom{k + s - 1}{k} = \binom{k + s - 1}{s - 1}$$

что и является количеством возможных  $k$ -комбинаций бесконечного мультимножества

- **Слабая композиция** (Weak composition) неотрицательного целого числа  $n$  в  $k$  частей - это решение  $(b_1, \dots, b_k)$  уравнение  $b_1 + \dots + b_k = n$ , где  $b_i \geq 0$

$$|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n + k - 1}{n, k - 1}$$

Для решения воспользуемся аналогичным из доказательства мультиномиальной теоремы приемом:

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Поставим палочки:

$$n = 1 + 1 \mid 1 \mid \dots + 1$$

Получаем задачу поиска количеств  $k$ -комбинаций в мультимножестве:  $\{n \cdot 1, (k - 1) \cdot \mid\}$ ;

$$\text{получаем } \binom{n + k - 1}{n, k - 1}$$

- **Композиция** (Composition) - решение для  $b_1 + \dots + b_k = n$ , где  $b_i > 0$

$$|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$$

Мы знаем, что одну единичку получит каждая  $b_i$ , поэтому мы решаем это как слабую композицию для  $n-k$  в  $k$  частей

- **Число композиций  $n$  в некоторой число частей** (Number of all compositions into some number of positive parts)

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

Пусть  $t = k - 1$ , тогда  $\sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} = 2^{n-1}$

- **Разбиения множества** (Set partitions) - множество размера  $k$  непересекающихся непустых подмножеств

Ех.  $\{1, 2, 3, 4\}, n = 4, k = 2 \rightarrow [\text{разбиение в 2 части}] \rightarrow$

$$\begin{aligned} & \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \\ & \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \\ & \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \\ & \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\} \end{aligned}$$

$|\{\text{разбиение } n \text{ элементов в } k \text{ частей}\}| = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S_k^{II}(n) = S(n, k)$  - число Стирлинга второго рода

Для примера выше число Стирлинга  $S(4, 2) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$

Согласно Википедии [для формулы Стирлинга](#) есть формула:  $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n$

- **Формула Паскаля** (Pascal's formula)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга** (Recurrence relation for Stirling<sup>(2)</sup> number):

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

Возьмем какое-либо разбиение для  $n-1$  элементов на  $k$  частей, тогда возможны два случая:

1) В  $k$ -ое множество нет ни одного элемента, тогда мы обязаны в него положить наш

$n$ -ый элемент по определению, количество перестановок будет равно  $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} \cdot 1$

2) В  $k$ -ом множестве уже есть элементы, тогда все множества будут заполнены и у нас будет выбор из  $k$  множеств, куда положить  $k$ -ый элемент, то есть  $k \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$

Эти два случая независимы, поэтому получаем  $\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}$

- **Число Белла** (Bell number) - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера  $n$

Число Белла вычисляется по формуле:  $B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m)$

- **Целочисленное разбиение** (Integer partition) - решение для  $a_1 + \dots + a_k = n$ , где  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$

$p(n, k)$  - число целочисленных разбиений  $n$  в  $k$  частей

$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$  - число всех разбиений для  $n$

Ex.  $5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

- **Принцип включения/исключения** (Principle of Incusion/Exclusion (PIE))

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ex. есть  $n = 11$  объектов, нужно распределить их между  $k = 3$  группами  $A$ ,  $B$  и  $C$

Эту задачу можно решить с помощью *Stars and bars method*, тогда мы получим

$$\binom{n+k-1}{n, k-1} = \binom{13}{2} = 78$$

Введем ограничение: пусть мощность каждого множества будет не больше 4.

Посчитаем количество неподходящих вариантов:

$$|A| = |\{b_A \geq 5\}| = 1 \cdot \binom{11-5+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$|A \cap B| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5\}| = \binom{3}{2} = 3$$

$$|A \cap B \cap C| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5 \wedge b_C \geq 5\}| = 0$$

Итого получаем  $28 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 0 = 75$  вариантов.

Далее исключаем эти варианты из количества всех вариантов, а значит подходящих вариантов всего  $78 - 75 = 3$

- **Принцип включения/исключения** (Inclusion/Exclusion Principle (PIE))

—  $X$  - начальное множество элементов

- $P_1, \dots, P_m$  - свойства
- Пусть  $X_i = \{x \in X \mid P_i \text{ - свойство для } x\}$
- Пусть  $S \in [m]$  - множество свойств
- Пусть  $N(S) = \bigcap_{i \in S} X_i = \{x \in X \mid x \text{ имеет все свойства } P_1, \dots, P_m\}$

$$N(\emptyset) = X \quad |N(\emptyset)| = |X| = n$$

• **Теорема ПВ/И (Theorem PIE)**

$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)|$  - количество элементов множества  $X$ , не имеющих никакого из свойств

Доказательство:

Пусть  $x \in X$

Если  $x$  не имеет свойств  $P_1, \dots, P_m$ , то  $x \in N(\emptyset)$  и  $x \notin N(S) \forall S \neq \emptyset$

Поэтому  $x$  дает в общую сумму 1

Иначе, если  $x$  имеет  $k \geq 1$  свойств  $T \in \binom{[m]}{k}$ ,

то  $x \in N(S)$  тогда и только тогда, когда  $S \subseteq T$ .

Поэтому  $x$  дает в сумму  $\sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 0$

• **Следствие**

$$|\bigcup_{i \in [m]} X_i| = |X| - \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m], S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} |N(S)|$$

• **Приложения:**

- \* Определяете «плохие» свойства  $P_1, \dots, P_m$
- \* Посчитываете  $N(S)$
- \* Применяете ПВ/И

• **Количество сюръекций (правототальных функций)**

- \*  $X = \{\text{функция } f : [k] \rightarrow [n]\}$
- \* Плохое свойство  $P_i : X_i = \{f : [k] \rightarrow [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$
- \*  $|\{\text{сюръекции } f : [k] \rightarrow [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_m)| \stackrel{\text{PIE}}{=} \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} (n -$

$$|S|)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

• **Количество биекций**

$$n! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n$$

• **Число Стирлинга (опять)**



Заметим, что сюръекция = разбиение, тогда:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = n! S_n^I(k)$$

- **Беспорядки** (Derangements) - перестановка без фиксированных точек

Если  $f(i) = i$ , то  $i$  - фиксированная точка

\*  $X$  = все  $n!$  перестановок

\* Плохие свойства  $P_1, \dots, P_m : \pi \in X$  имеет свойство  $P_i \iff \pi(i) = i$

\* Посчитаем  $N(S) : N(S) = (n - |S|)!$

\* Применяем ПВ/И:  $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} N(S) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} (n - |S|)! =$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

## 8. Рекуррентности и производящие функции

### • Производящие функции (Generating Functions)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Функция выше задает последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\text{Ex. } 3 + 8x^2 + x^3 + \frac{1}{7}x^5 + 100x^6 + \dots \rightarrow (3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \dots)$$

$$\text{Ex. Последовательность } (1, 1, 1, \dots) \text{ задает функцию } 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Пусть  $S = 1 + x + x^2 + \dots$ , тогда  $xS = x + x^2 + \dots$ ,  $(1 - x)S = 1 \Rightarrow$

$$S = \frac{1}{1-x} \text{ задает последовательность } (1, 1, 1, \dots)$$

Ex.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n$$

$$(2, 4, 10, 28, 82, \dots) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) + (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2}{(1-x)(1-3x)}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \rightarrow (1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \rightarrow (0, 1, 0, 1, \dots)$$

Взятие производной:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \rightarrow (1, 2, 3, 4, \dots)$$

Ex. Найти ПФ для  $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

$$A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$$

$$xA = 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + \frac{2x}{1-x} \quad A = \frac{1 + \frac{2x}{1-x}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

Ex. Найти ПФ для  $(1, 4, 9, 16, \dots)$

$$A = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots \quad (1-x)A =$$

### • Подсчет, используя производящие функции

Найти число решений для  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ , где  $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

$$A_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$A_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$A_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \dots$$

Ответ - 18

### • Рекуррентные соотношения (Recurrence relations)

Решить рекуррентное соотношение - найти закрытую формулу

Ex. Арифметическая прогрессия

$$a_n = \begin{cases} a_0 = \text{const} & n = 0 \\ a_{n-1} + d, & n > 0 \end{cases}$$

Решение:  $a_n = a_0 + nd$  - анзац (Ansatz, догадка)

Проверка:  $a_n = a_0 + nd = a_{n-1} + d = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + nd$  - 🍌🍌

### • Метод характеристического уравнения

Рекуррентное соотношение  $\overset{a_n \rightarrow r^n}{\rightsquigarrow}$  Характеристическое уравнение  $\overset{\text{решение}}{\rightsquigarrow}$  Корни  $\overset{\text{магия}}{\rightsquigarrow}$  Решение  $\rightsquigarrow$  Проверка

Ex.  $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0$$

$$r_{1,2} = -2, 3$$

Если  $r_1 \neq r_2$ , то  $a_n = ar_1^n + br_2^n$  - общее решение

Если  $r_1 = r_2 = r$ , то  $a_n = ar^n + bnr^n$

$$a_n = a(-2)^n + b(3)^n$$

Пусть  $\begin{cases} a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 8 = -2a + 3b \end{cases}$

$$-5a = 5 \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \implies a_n = -(-2)^n + 2 \cdot 3^n$$

### • Разделяй и властвуй (Divide-and-Conquer)

$$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{работа рекурсии}} + \underbrace{\theta(n)}_{\text{работа разделения/слияния}}$$

### • Основная теорема о рекуррентных соотношениях (Master Theorem)

\*ТЫК\*

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Из этого,  $c_{crit} = \log_b a$

I случай: слияние < рекурсия

$f(n) \in O(n^c)$ , где  $c < c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$

$$f(n) \in O(n^c) \iff f(n) \in o(n^{c_{crit}})$$

II случай: слияние  $\approx$  рекурсия

$$f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^k n) \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^{k+1} n)$$

Здесь  $k \geq 0$ . В общем случае см. википедию

III случай: слияние  $>$  рекурсия

$$f(n) \in \Omega(n^c), \text{ где } c > c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(f(n))$$

- **Метод Аккра-Бацци** (Akra-Bazzi method)

\*ТЫК\*

$$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^k a_i T(b_i n + h_i(n)) \implies T(n) \in \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx\right)\right), \text{ где } p - \text{ решение для}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i^p = 1$$

$$\begin{cases} k = \text{const} \\ a_i > 0 \\ 0 < b_i < 1 \\ h_1(n) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right) - \text{малые возмущения} \end{cases}$$

Ex.  $T(n) = T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + n$  - асимптотика сортировки слиянием

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2} + O(1)\right) + T\left(\frac{n}{2} - O(1)\right) + \theta(n)$$

$$\text{Здесь } b_i = \frac{1}{2}, \quad h = \pm O(1) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$$

$$\text{Ex. } T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$a_1 = 1, b_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1$$

$$p = 1$$

$$\int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$$

$$T(n) \in \Theta(n \cdot (1 + \ln n))$$

$$T(n) \in \Theta(n \ln n)$$

- Решить рекуррентное соотношение  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ , где  $a_0 = 1, a_1 = 3$

Используем производящие функции:

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} \rightarrow 2^{n+1} - 1$$

- **Линейные рекуррентности** (Linear recurrences)

$$\underbrace{k_1 a_n + k_2 a_{n-1} + k_3 a_{n-2} + \dots}_{\text{линейная комб. рекуррентных членов}} = \underbrace{f(n)}_{\text{функция от } n}$$

Линейное рекуррентное соотношение -  $\begin{cases} f = 0 \implies \text{гомогенное (однородное)} \\ f \neq 0 \implies \text{негомогенное (неоднородное)} \end{cases}$

Ех. Последовательность Фибоначчи:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \end{cases}$$

$F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0$  - однородное

- Операторы:

Сумма:  $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$

Умножение на число:  $(\alpha \cdot f)(n) = \alpha f(n)$

Сдвиг:  $(Ef)(n) = f(n+1)$

Ех.  $E(f - 3(g - h)) = Ef + (-3)Eg + 3Eh$

Составные операторы:

$(E - 2)f = Ef + (-2)f = f(n+1) - 2f(n)$

$E^2 f = E(Ef) = f(n+2)$

Ех.  $f(n) = 2^n$

$2f = 2 \cdot 2^n$

$Ef = 2^{n+1}$

$(E^2 - 1)f(n) = E^2 f(n) - f(n) = 2^{n+2} - 2^n = 3 \cdot 2^n$

- Аннигилятор** (Annihilator) - оператор, который трансформирует  $f$  в функцию, тождественную 0

Ех. Оператор  $(E - 2)$  аннигилирует функцию  $f(n) = 2^n$

Ех.  $(E - c)$  аннигилирует  $c^n$

Ех.  $(E - 3)(E - 2)$  аннигилирует  $2^n + 3^n$

Ех.  $(E - c)^d$  аннигилирует любую функцию формы  $p(n) \cdot C^n$ , где  $p(n)$  - многочлен степени не больше  $d - 1$

*Nota.* Любой составной оператор аннигилирует класс функций

*Nota.* Любая функция, составленная из полинома и экспоненты, имеет свой единственный аннигилятор

Если  $X$  аннигилирует  $f$ , то  $X$  также аннигилирует  $Ef$

Если  $X$  аннигилирует  $f$  и  $Y$  аннигилирует  $g$ , то  $XY$  аннигилирует  $f \pm g$

- Аннигилирование рекуррентностей:

1. Запишите рекуррентное соотношение в форме операторов
2. Выделите аннигилятор для соотношения
3. Разложите на множители (если понадобится)
4. Выделите общее решение из аннигилятора
5. Найдите коэффициенты используя базовые случаи (если даны)

*Ex.*  $r(n) = 5r(n-1), r(0) = 3$

1.  $r(n+1) - 5r(n) = 0 \quad (E-5)r(n) = 0$

2.  $(E-5)$  аннигилирует  $r(n)$

3.  $(E-5)$  уже разложен

4.  $r(n) = \alpha \cdot 5^n$

5.  $r(0) = 3 \implies \alpha = 3$

*Ex.*  $T(n) = 2T(n-1) + 1, \quad T(0) = 0$

1.  $(E-2)T(n) = 1$

2.  $(E-2)$  не аннигилирует  $T(n)$ , остается 1. Тогда добавим аннигилятор  $(E-1)$ , получим, что  $(E-1)(E-2)$  аннигилирует  $T(n)$

3. Разложение не требуется

4.  $T(n) = \alpha \cdot 2^n + \beta$  - общее решение

5.  $T(0) = 0 = \alpha \cdot 2^0 + \beta$

$T(1) = 1 = \alpha \cdot 2^1 + \beta$

$\alpha = 1, \beta = -1$

- Псевдонелинейные уравнения (Pseudo-non-linear equations)

*Ex.*  $a_n = 3a_{n-1}^2, a_0 = 1$

$\log_2 a_n = \log_2(3a_{n-1}^2)$

Пусть  $b_n = \log_2 a_n$

$b_n = 2b_{n-1} + \log_2 3, b_0 = 0$

$b_n = (2^n - 1) \log_2 3$

$a_n = 2^{(2^n - 1) \log_2 3} = 3^{2^n - 1}$

## Х. Программа экзамена в 2023/2024

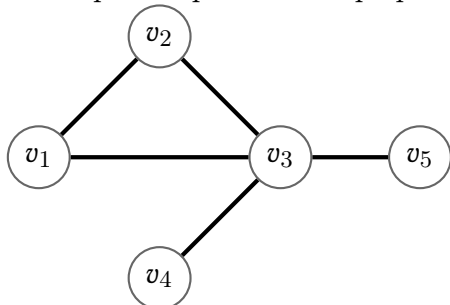
### 5. Теория графов.

#### 1. Ориентированные и неориентированные графы (*Directed and undirected graphs*)

Граф - множество вершин  $V$  и множество ребер  $E$  (в общем случае), соединяющие какие-либо две вершины:  $G(V, E)$

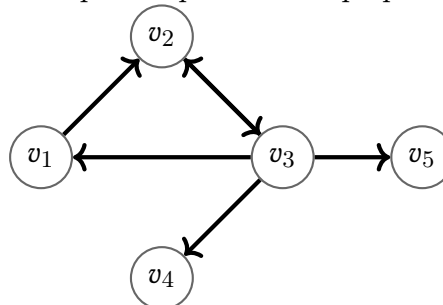
По виду ребер различают:

неориентированный граф



- ребра не имеют направлений

ориентированный граф

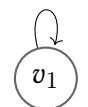


- ребра имеют направления

#### 2. Простые графы и псевдографы (*Simple graphs and pseudographs*)

Простой граф  $G(V, E)$  - граф, в котором

- $V \neq \emptyset$  - граф не пустой
- $E \subseteq V \times V$  - ребра представлены как множество пар вершин
- $\forall v \in V \langle v, v \rangle \notin E$  - граф не содержит петель - ребер, соединяющих одну вершину с собой же



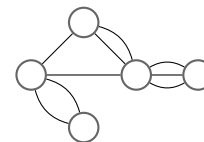
Петля

Псевдограф  $G(V, E)$  - простой граф, в котором разрешены петли

#### 3. Мультиребра и мультиграфы (*Multiedges and multigraphs*)

Мультиребра - ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин больше одного раза

Мультиграфы - графы, содержащие мультиребра. В этом случае  $E$  - мультимножество

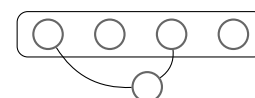


#### 4. Гиперграфы (*Hypergraphs*)

Гиперребро - ребро, соединяющее несколько вершин

Гиперграф - граф, содержащий гиперребро

гиперребро



#### 5. Нуль-граф, пустой граф и синглтон (*Null, empty, singleton graphs*)

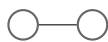
Нуль-граф - граф, не содержащий вершин (и ребер)

Пустой граф - граф, не содержащий ребер

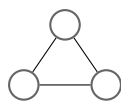
Синглтон - граф, содержащий из одной вершины

## 6. Полный граф (*Complete graph*)

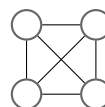
Полный граф  $K_n$  - простой граф из  $n$  вершин, в которой все вершин соединены друг с другом



$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$

## 7. Взвешенный граф (*Weighted graph*)

Взвешенный граф - граф, в котором ребра (и/или вершины) имеют числовой вес. Иначе говоря, определена функция  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

## 8. Планарный граф (*Planar graphs*)

Планарный граф - граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер. По теореме Понтрягина-Куратовского граф планарен *тогда и только тогда, когда* он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу из пяти вершин  $K_5$  или графу «домики и колодцы»  $K_{3,3}$

## 9. Подграф (*Subgraph*)

Подграф графа  $G(V, E)$  - граф  $G'(V', E')$  такой, что  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$

## 10. Остовный подграф (*Spanning subgraph*)

Остовный подграф графа  $G(V, E)$  - такой подграф  $G'(V, E')$ , содержащий все вершины исходного

## 11. Порожденный подграф (*Induced subgraph*)

Порожденный подграф  $G[S]$  графа  $G(V, E)$  - подграф  $G'(S, E')$ , который содержит все ребра, соединяющие вершины из  $S$  в исходном графе

## 12. Отношение смежности (*Adjacency relation*)

Отношение смежности - отношение  $A$  между вершинами, соединенными ребром:  $A = \{\langle u, v \rangle \mid \langle u, v \rangle \in E\}$

## 13. Матрица смежности (*Adjacency matrix*)

Матрица смежности - матрица  $A_V$ , выражающее отношение смежности

## 14. Отношение инцидентности (*Incidence relation*)

Отношение инцидентности - отношение  $B$  между вершиной и соединяющей ее ребром:

$$B = \{\langle u, e \rangle \mid u \in V \wedge e \in E \wedge \exists v \in V \mid (\langle u, v \rangle \in E \vee \langle v, u \rangle \in E)\}$$

## 15. Матрица инцидентности (*Incidence matrix*)

Матрица инцидентности - матрица  $A_V$ , выражающее отношение инцидентности

## 16. Степень вершины (*Vertex degree*)

Степень  $\deg(v)$  вершины  $v$  - количество и ребер из этой вершины (петли считаются дважды)

## 17. Регулярный граф (*Regular graph*)



$r$ -регулярный граф - граф, все степени вершин которого равны  $r$  -  $\forall v \in V \deg(v) = r$

18. **Лемма о рукопожатиях** (*Handshaking lemma*)

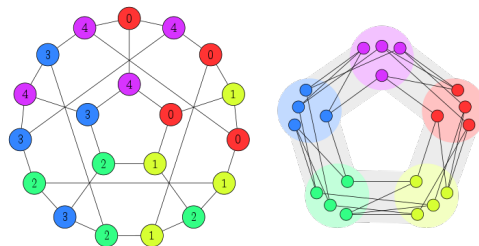
$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$  - сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству ребер

19. **Изоморфизм графов** (*Graph isomorphism*)

Графы  $G(V, E)$  и  $H(U, F)$  называются изоморфными, если существует биекция  $f: V \rightarrow U$  такая, что если вершины  $v$  и  $u$  графа  $G$  смежны, то и вершины  $f(v)$  и  $f(u)$  графа  $H$  тоже смежны

20. **Гомоморфизм графов** (*Graph homomorphism*)

Гомоморфизм графов - отображение вершин графа  $G$  в вершины графа  $H$  такое, что смежные вершины графа  $G$  отображаются в смежные вершины графа  $H$



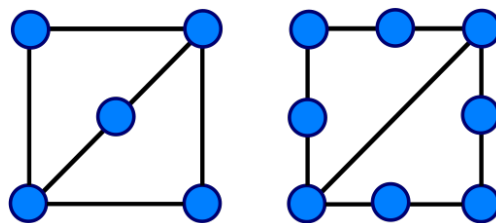
Гомоморфизм

21. **Гомеоморфизм графов** (*Graph homeomorphism*)

Деление (Subdivision) ребра  $\langle u, v \rangle$  - операция, добавляющее вершину  $w$ , ребра  $\langle u, w \rangle$  и  $\langle w, v \rangle$  и удаляющее ребро  $\langle u, v \rangle$

Исключение (Smoothing) вершины  $w$  (степени 2) - операция, обратная делению - исключение вершины  $w$  и ребер  $\langle u, w \rangle$  и  $\langle w, v \rangle$  и добавление ребра  $\langle u, v \rangle$

Графы  $G$  и  $H$  гомеоморфны, если граф  $H$  можно получить в результате деления или исключения графа  $G$



Гомеоморфизм

22. **Пути и циклы** (*Walks, paths, trails, cycles*)

Путь (Walk) - последовательность из вершин и ребер, соединяющих соседние вершины:

$$l = (v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n)$$

Цепь (Trail) - путь (walk), все ребра которого различны

Простая цепь (Path) - путь (walk), все вершины (и соответственно ребра) которого различны

Замкнутый путь (Closed walk) - путь (walk), начальная вершина которого является конечной

Контур (Circuit) - цепь (trail), являющаяся замкнутой

Цикл (Cycle) - простая цепь (path), являющаяся замкнутой (\*терминология из Википедии)

23. **Эйлеровы путь, цикл, граф** (*Eulerian path, cycle, graph*)

Эйлеров путь - путь, содержащий все ребра графа

Эйлеров цикл - замкнутый путь, содержащий все ребра графа

Граф называют эйлеровым, если в нем есть эйлеров цикл. Граф называют полуэйлеровым,

если в ней есть эйлеров путь.

24. **Теорема Эйлера для графов** (*Euler's theorem for graphs*)

Граф эйлеров, если все степени вершин четные, а ребра принадлежат одной компоненте связности

Граф полуэйлеров, если ровно 2 вершины имеют нечетную степень, а ребра принадлежат одной компоненте связности

25. **Гамильтоновы путь, цикл, граф** (*Hamiltonian path, cycle, graph*)

Гамильтонов путь - путь, содержащий все вершины графа

Гамильтонов цикл - замкнутый путь, содержащий все вершины графа

Граф называют гамильтоновым, если в нем есть гамильтонов цикл. Граф называют полугамильтоновым, если в ней есть гамильтонов путь.

26. **Теорема Оре** (*Ore's theorem*)

Теорема Оре - достаточное условие существования гамильтонова цикла: если в графе  $G(V, E)$  для любых  $u, v \in V$   $\deg u + \deg v \geq |V|$ , то граф  $G$  гамильтонов

27. **Теорема Дирака** (*Dirac's theorem*)

Теорема Дирака - достаточное условие существования гамильтонова цикла: если в графе  $G(V, E)$  для любой  $u \in V$   $\deg u \geq \frac{|V|}{2}$ , то граф  $G$  гамильтонов

28. **Эксцентриситет вершины** (*Eccentricity of a vertex*)

Расстояние  $\text{dist}(u, v)$  - длина (количество ребер) кратчайшего пути между  $u$  и  $v$

Эксцентриситет  $\varepsilon(v)$  - наибольшая длина кратчайшего пути от этой вершины до другой в этом графе:  $\varepsilon(v) = \max_{u \in V} \text{dist}(v, u)$

29. **Радиус и диаметр графа** (*Radius and diameter of a graph*)

Радиус графа  $\text{rad}(G)$  - наименьший эксцентриситет вершины из графа:  $\text{rad}(G) = \min_{v \in V} \varepsilon(v)$

Диаметр графа  $\text{diam}(G)$  - наибольший эксцентриситет вершины из графа:  $\text{diam}(G) = \max_{v \in V} \varepsilon(v)$

30. **Центр графа** (*Center of a graph*)

Центр графа - вершина (вершины), эксцентриситет которой равен радиусу графа:

$$\text{center}(G) = \{v \in V \mid \varepsilon(v) = \text{rad}(G)\}$$

31. **Центроид дерева** (*Centroid of a tree*)

Центроид дерева - вершина (или 2 вершины), удаление которой приведет к распаду на поддеревья, каждое из которых имеет не больше  $\frac{|V|}{2}$  вершин

Очевидно, что только деревья, состоящие из четного количества вершин, могут иметь 2 центроида

32. (*Clique*)

33. (*Independent set*)

34. (*Matching*)

35. (*Perfect matching*)

36. (*Vertex cover*)
37. (*Edge cover*)
38. (*Tree*)
39. (*Forest*)
40. (*Minimum spanning tree*)
41. (*Prüfer code*)
42. (*Bipartite graph*)
43. (*Theorem on the balance of regular bipartite graphs*)
44. (*Theorem on the existence of a perfect matching in a regular bipartite graph*)
45. (*Hall's theorem (on the existence of an  $X$ -perfect matching in a bipartite graph)*)
46. (*Connectivity in undirected graphs*)
47. (*Strong and weak connectivity in directed graphs*)
48. (*Condensation of a directed graph*)
49. (*Vertex connectivity*)
50. (*Edge connectivity*)
51. (*Whitney's theorem*)
52. ( *$k$ -connected graph*)
53. (*Menger's theorem*)
54. (*Biconnectivity*)
55. (*Articulation point*)
56. (*Bridge*)
57. (*Blocks*)
58. (*Block-cut tree*)

## 6. Теория автоматов.

1. (*Deterministic Finite Automaton (DFA)*)
2. (*Non-deterministic Finite Automaton (NFA)*)
3. (*Formal languages*)
4. (*Operations on formal languages (concat, union, Kleene closure)*)
5. (*Regular languages*)
6. (*Regular expression*)
7. (*Kleene's theorem*)
8. (*Powerset construction (DFA from NFA)*)
9. ( $\epsilon$ -NFA)
10. (*NFA construction from  $\epsilon$ -NFA*)
11. (*Thompson's construction ( $\epsilon$ -NFA from regular expression)*)
12. (*Kleene's algorithm*)
13. (*Pumping lemma for regular languages*)

14. (*Closure properties of regular languages*)
15. (*Mealy machine*)
16. (*Moore machine*)
17. (*Emptiness of finite automaton language*)
18. (*Finiteness of finite automaton language*)
19. (*Equivalence of finite automata*)
20. (*Myhill-Nerode theorem*)

## 7. Комбинаторика.

1. (*Ordered arrangements*)
2. (*Permutations*)
3. (*k-permutations*)
4. (*Cyclic permutations*)
5. (*Unordered arrangements*)
6. (*k-combinations*)
7. (*Multisets*)
8. (*Permutations of multisets*)
9. (*Combinations of infinite multisets*)
10. (*Compositions*)
11. (*Set partitions*)
12. (*Stirling numbers of the second kind*)
13. (*Integer partitions*)
14. (*Principle of Inclusion-Exclusion*)

## 8. Рекуррентности и производящие функции.

1. (*Recurrence relations*)
2. (*Solving recurrence relations using characteristic equations*)
3. (*Generating functions*)
4. (*Power series*)
5. (*Solving linear recurrences using generating functions*)
6. (*Solving combinatorial problems using generating functions*)
7. (*Operators and annihilators*)
8. (*Solving linear recurrences using annihilators*)
9. (*Catalan numbers*)
10. (*Divide-and-Conquer algorithms analysis using recursion trees*)
11. (*Master theorem*)
12. (*Akra-Bazzi method*)