

7 Комбинаторика

- **Алфавит** Σ (или X , *Ex.* $X = \{a, b, c\}$) - множество символов
- **Диапазон** $[n] = \{1, \dots, n\}$ - конечное множество последовательных натуральных чисел
- **Расстановка** - последовательность каких-либо элементов (кортеж) *ТЫК*

Ex. $x = (a, b, c, d, b, b, c) \quad |x| = n$

Расстановку можно представить как функцию $f : [n] \rightarrow \Sigma$

- **Перестановка** - $\pi : [n] \rightarrow \Sigma$, где $n = |\Sigma|$ *ТЫК*

Расстановка π - биекция между $[n]$ и Σ

Ex. $\pi = 2713546$

| | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $\pi(i)$ | 2 | 7 | 1 | 3 | 5 | 4 | 6 |

- **k -перестановка** - расстановка из k различных элементов из Σ

Ex. 5-перестановка из $\Sigma = [7]$ - $|31475| = 5$

k -перестановка - это инъекция $\pi : [k] \rightarrow \Sigma$ ($k \leq n = |\Sigma|$)

- $P(n, k)$ - множество всех k -перестановок алфавита $\Sigma = [n]$ (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и $[n]$)

$P(n, k) = \{f \mid f : [k] \rightarrow [n]\}$

- $S_n = P_n = P(n, n)$ - множество всех перестановок.

$|S_n| = n!$ - всего существует $n!$ перестановок

$$|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Циклические k -перестановки** *ТЫК*

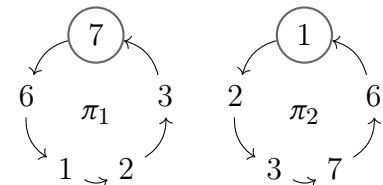
$\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$ - циклически эквивалентны тогда и только тогда:

$$\exists s \mid \forall i \pi_1((i+s) \% k) = \pi_2(i)$$

$P_C(n, k)$ - множество всех циклических k -перестановок в Σ

$$|P_C(n, k)| \cdot k = |P(n, k)|$$

$$|P_C(n, k)| = \frac{|P(n, k)|}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$



Ex. $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$

- **Неупорядоченная расстановка k элементов** - мультимножество Σ^* размера k

Ex. $\Sigma^* = \{\Delta, \Delta, \square, \Delta, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \Delta, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$

Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:

$r : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, $r(x)$ - кол-во повторений объекта x

- **k -сочетание** - неупорядоченная перестановка из k различных элементов из Σ (еще называют k -подмножеством, k -subset) *ТЫК*

Соответственно $C(n, k)$ - множество всех таких k -сочетаний

$$|C(n, k)| = C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad |P(n, k)| = C(n, k) \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k!$$

- **Th. Биномиальная теорема:**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

где $\binom{n}{k}$ - биномиальный коэффициент *ТЫК*

- **Th. Мультиномиальная теорема:**

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

где $\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$ - мультиномиальный коэффициент

ТЫК

- **Перестановка мультимножества Σ^***

ТЫК

$$\Sigma^* = \{\Delta^1, \Delta^2, \square, \star\} = (\Sigma, r) \quad r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$$

Nota. $\begin{cases} \Delta^1, \Delta^2, \square, \star \\ \Delta^2, \Delta^1, \square, \star \end{cases}$ считаются равными перестановками

$|P^*(\Sigma^*, n)| = \frac{n!}{r_1! \dots r_s!} = \binom{n}{r_1, \dots, r_s}$ - количество перестановок мультимножества, где r_i - количество i -ого элемента в мультимножестве

- **k -сочетание бесконечного мультимножества** - такое подмультимножество размера k , содержащее элементы из исходного мультимножества Σ^* . При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента r_i в исходном мультимножестве не больше размера сочетания k

ТЫК

$$\frac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} = \binom{k+s-1}{k, s-1} = \binom{k+s-1}{k} = \binom{k+s-1}{s-1},$$

где k - размер сочетания, $s = |\Sigma|$ - количество уникальных элементов в множестве

- **Слабая композиция** неотрицательного целого числа n в k частей - это решение (b_1, \dots, b_k) уравнение $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i \geq 0$

$$|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n+k-1}{n, k-1}$$

- **Композиция** - решение для $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i > 0$

$$|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$$

- **Число всех композиций n в некоторой число частей:**

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

- **Разбиения множества** - множество размера k непересекающихся непустых подмножеств

ТЫК

$|\{\text{разбиение } n \text{ элементов в } k \text{ частей}\}| = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S_k^{II}(n) = S(n, k)$ - число Стирлинга второго рода

ТЫК

- **Формула Паскаля:**

ТЫК

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга:**

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

- **Число Белла** - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера n

ТЫК

Число Белла вычисляется по формуле: $B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m)$

- **Целочисленное разбиение** - решение для $a_1 + \dots + a_k = n$, где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$
 $p(n, k)$ - число целочисленных разбиений n в k частей

$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$ - число всех разбиений для n

Ex. $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

- **Принцип включений/исключений:**

ТЫК

- X - начальное множество элементов
- P_1, \dots, P_m - свойства
- Пусть $X_i = \{x \in X \mid P_i \text{ - свойство для } x\}$
- Пусть $S \in [m]$ - множество свойств
- Пусть $N(S) = \bigcap_{i \in S} X_i = \{x \in X \mid x \text{ имеет все свойства } P_1, \dots, P_m\}$

Ex. $N(\emptyset) = X \quad |N(\emptyset)| = |X| = n$

- **Формула включений/исключений:**

ТЫК

$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)|$ - количество элементов множества X , не имеющих никакого из свойств

- **Следствие:**

$$\left| \bigcup_{i \in [m]} X_i \right| = |X| - \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m], S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} |N(S)|$$

- **Приложения:**

- * Определяем «плохие» свойства P_1, \dots, P_m
- * Посчитываем $N(S)$
- * Применяем ПВ/И

- **Количество сюръекций (правототальных функций):**

- * $X = \{\text{функция } f : [k] \rightarrow [n]\}$
- * Плохое свойство $P_i : X_i = \{f : [k] \rightarrow [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$
- * $|\{\text{сюръекции } f : [k] \rightarrow [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| =$

$$\sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} (n - |S|)^k = \boxed{\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k - i)^n} = n! S_n^{(II)}(k) \text{ - число Стирлинга второго рода}$$

- **Количество биекций:**

$$n! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)^n$$

- **Беспорядки** - перестановка без фиксированных точек

ТЫК

Если $f(i) = i$, то i - фиксированная точка

- * X = все $n!$ перестановок
- * Плохие свойства $P_1, \dots, P_m : \pi \in X$ имеет свойство $P_i \iff \pi(i) = i$
- * Посчитаем $N(S) : N(S) = (n - |S|)!$
- * Применяем ПВ/И: $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} N(S) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} (n - |S|)! =$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)!$$