

## Содержание

<b>0. Вводная лекция</b>	<b>2</b>
<b>1. Современная физическая картина мира. Кинематика материальной точки</b>	<b>2</b>
<b>2. Кинематика материальной точки</b>	<b>4</b>
<b>3. Кинематика вращательного движения. Динамика материальной точки</b>	<b>6</b>
Движение по окружности . . . . .	6
Законы Ньютона . . . . .	9
<b>4. Импульс. Закон сохранения импульса.</b>	<b>9</b>
Силы в механике. Сила гравитационного взаимодействия . . . . .	10
Вес тела . . . . .	11
Силы трения . . . . .	11
Как можно измерить массу тел? . . . . .	11
<b>5. Вращательное движение. Моменты силы и импульса</b>	<b>12</b>
<b>6. Гироскоп. Механическая работа.</b>	<b>15</b>
Гироскоп . . . . .	16
Механическая работа . . . . .	16

## 0. Вводная лекция

Задается вопрос: зачем обучающимся программистам нужна физика в учебном плане?

Приводятся цитаты Л. Богуславского, одного из крупнейших IT инвесторов, и Б. Страуструпа, которые считают, что такие фундаментальные дисциплины, как математика, физика, иностранный язык, способствуют развитию мышления человека

Такие компании, как Bell Labs и IBM создали прорывные изобретения в области физики, на основе которых построены компьютерные технологии

В 3-ем семестре курс физики будет состоять из классической механики и основ электричества

В 4-ом семестре будут темы магнетизма, колебаний, волн и волновых процессов

В 5-ом семестре будут рассматриваться оптика, основы квантовой физики и квантовые вычисления

Занятия состоят из лекций, практических и лабораторных занятий. Всего в 3-ем семестре будут 5 лабораторных работ

## 1. Современная физическая картина мира. Кинематика материальной точки

### План лекции

- Историческая справка
- Методы и модели в физике
- Изучаемые объекты
- Физика и другие науки
- Фундаментальные взаимодействия
- Кинематика материальной точки. Начало

**Физика** - раздел естествознания, изучающий свойства и формы движения материи. Под материей понимают вещество и поля.

Научный метод: сначала проводятся наблюдения и эксперименты, из которых выдвигается гипотеза и ищется адекватная математическая модель, эта гипотеза проверяется, и если она подтверждается, то формируется *теория*

Пример - открытие Нептуна: в 1781-1845 годах наблюдались аномалии в движении Урана, в 1845 проведение расчетов координат новой планеты, а в 1846 обнаружилась новая планета

Принцип соответствия (Н. Бор, 1923 г.) - каждая новая теория должна включать предыдущую как частный случай

Изучаемые объекты: вселенная, галактики, звездные системы и планеты, экосистемы, макротела, молекулы, атомы, ядра, элементарные частицы

Всего в физике существуют 4 фундаментальных взаимодействия:

Взаимодействие	Квант поля	Область взаимодействия
Гравитационное	гравитон	масса
Электромагнитное	фотон	все заряженные частицы, атомы, электротехника
Слабое	бозон	радиоактивный распад
Сильное	глюон	атомные ядра, фундаментальные частицы

Механика - раздел физики, изучающий механическое движение, то есть движение тел в пространстве и времени. Механическое движение тел **ОТНОСИТЕЛЬНО**.

	$\ll 3 \cdot 10^8$ м/с	$\approx 3 \cdot 10^8$ м/с
$\gg 1$ нм	Классическая	Релятивистская
$\ll 1$ нм	Квантовая	Квантовая теория поля

Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи

Абсолютно твердое тело (АТТ) - система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения (деформации в процессе движения пренебрежимо малы)

Тело отсчета - тело, относительно которого определяется положение других тел в пространстве

Система отсчета - совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и синхронизированных между собой часов

Степени свободы - число независимых скалярных величин, однозначно определяющих положение тела в пространстве

Материальная точка: 3 степени свободы

Система N материальных точек:  $3N$  степени свободы

АТТ: 6 степеней свободы

Система единиц (le System International d'unités), 1960

$[t] = \text{с}$      $[S, l] = \text{м}$

7 основных единиц:

$[S] = \text{м}$      $[T] = \text{К}$

$[m] = \text{кг}$      $[v] = \text{моль}$

$[t] = \text{с}$      $[l] = \text{Кд}$

$[q] = \text{Кл}$

Изначально все физические единицы основывались на материальных предметах, из-за которых точности единиц была низкой, но недавно все единицы были переопределены на основе физических констант.

В природе нет абсолютно точных вычислений. Измерение любой физической величины без погрешности не имеет смысла!

## 2. Кинематика материальной точки

### План лекции

- Основные способы описания движения
- Основные понятия кинематики
- Кинематика поступательного и вращательного движения
- Прямая и обратная задачи кинематики
- Численные методы при решении задач

**Def.** Кинематика - раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причин, вызывающих это движение.

**Def.** Траектория - линия, по которой движется материальная точка в пространстве

**Def.** Путь - длина траектории

**Def.** Перемещение - вектор, проведенный из начальной точки в конечную

### Способы описания движения

Векторный способ

Координатный способ

Естественный (траекторный) способ

Положение точки может быть однозначно определено с помощью радиус-вектора

Положение точки может быть однозначно определено с помощью трех скалярных координат

Положение точки определяется дуговой координатой

### Векторный способ

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$  - радиус-векторы, определяющие положения материальной точки в 1 и 2

$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  - перемещение материальной точки

**Def.** Скорость - векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки

Средняя скорость -  $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

Мгновенная скорость -  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Средняя путевая скорость -  $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

**Def.** Ускорение - векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости материальной точки

Среднее ускорение -  $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$

Мгновенное ускорение -  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

### Координатный способ

В координатном способе положение точки описано 3 координатами  $x, y, z$  (в данном случае в ДПСК)

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Прямая задача:

$$\vec{r}(t), x(t), y(t), z(t) \longrightarrow \vec{v}(t), \vec{a}(t), v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z$$

Решением является дифференцирование

Обратная задача:

$$\vec{a}(t), a_x, a_y, a_z \longrightarrow \vec{v}(t), \vec{r}(t), x(t), y(t), z(t)$$

Для обратной задачи решением является интегрирование

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad d\vec{r} = \vec{v}dt \quad \Delta \vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}dt$$

Аналогично для ускорения

Численное решение ОДУ (обыкновенного дифференциального уравнения)  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  на отрезке  $[x_0, x_n]$  при условии  $y(x_0) = y_0$

Разбиваем отрезок  $[x_0, x_n]$  на конечное число частей введением узловых точек

$$\text{Шаг разбиения: } h = \frac{x_N - x_0}{N}$$

По определению производной  $\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ , из этого:

$$\text{Формула Эйлера: } y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$dy = f(x, y)dx$$

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx$$

**Естественный (траекторный) способ**

Если траектория точки заранее известна, то положение точки задается дуговой координатой  $l(t)$

$$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} \quad v_\tau \frac{dl}{dt} |\vec{\tau}| = 1$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v_\tau \quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} v_\tau$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} v_\tau^2$$

$$d\tau = \tau d\alpha$$

$$dl = R d\alpha \quad d\vec{\tau} \uparrow \uparrow \vec{n}$$

$R$  - радиус кривизны траектории

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt} \vec{\tau} + \frac{1}{R} v_\tau^2 \vec{n} \quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости, направлено по касательной к траектории движения

Нормальное ускорение отвечает за изменение направления вектора скорости, направлено к центру кривизны траектории

### 3. Кинематика вращательного движения. Динамика материальной точки

#### План лекции

- Угловые величины: угол поворота, угловая скорость
- Взаимосвязь между линейными и угловыми величинами
- Плоское движение
- Динамика материальной точки
- Законы Ньютона. Силы в механике
- Принципы работы акселерометра

#### Движение по окружности

Возьмем точку  $A$ , положение которое определим через  $\vec{r}$ . Точка  $A$  движется по окружности вокруг неподвижной оси  $OO'$

Тогда  $d\vec{r}$  - перемещение,  $d\vec{\varphi}$  - элементарный угол поворота (вектор определяет в какую сторону, по часовой или против, обращается по окружности тело; вектор направлен перпендикулярно окружности)

$$|d\vec{r}| = R d\varphi = r \cdot \sin \alpha d\varphi$$

$$R = r \cdot \sin \alpha$$

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \vec{r}]$$

здесь и далее  $[\vec{x} \vec{y}]$  - векторное произведение

Угловая скорость - векторная величина, показывающая как меняется угол поворота тела со временем:  $\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$   $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

Направление совпадает с направлением угла поворота  $d\vec{\varphi}$ :  $\vec{\omega} \uparrow \uparrow d\vec{\varphi}$

Угловое ускорение - векторная величина, показывающая как меняется угловая скорость тела со временем

$$\langle \beta \rangle = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$$

Направление совпадает с направлением вектора изменения скорости  $\Delta \vec{\omega}$ :  $\vec{\beta} \uparrow \uparrow d\vec{\omega}$

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \vec{r}]$$

$$dr = d\varphi \cdot r \cdot \sin \alpha = d\varphi \cdot R$$

$$\text{Выразим скорость } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \vec{r} \right] = [\vec{\omega} \vec{r}]$$

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega \cdot R$$

$$\text{Выразим ускорение: } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\beta} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{v}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_\tau$  называют тангенциальным ускорением (направленным по касательной),  $\vec{a}_n$  - нормальным (направленным к центру)

$$a_\tau = \beta \cdot r \cdot \sin \alpha = \beta \cdot R$$

Перемещение, путь, скорость:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \vec{\rho}] (\vec{\rho} - \text{вектор радиуса окружности}) \quad \vec{v} = [\vec{\omega} \vec{\rho}]$$

$$dr = d\varphi \cdot R \quad v = \omega \cdot R$$

$$S = \varphi \cdot R$$

$$\text{Ускорение: } \vec{a} = [\vec{\beta} \vec{r}] + [\vec{\omega} \vec{v}]$$

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \vec{r}]$$

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \vec{v}] = [\vec{\omega} [\vec{\omega} \vec{\rho}]]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} - \text{период}$$

$$a_\tau = \beta \cdot R$$

$$a_n = \omega^2 R = \frac{1}{R} v^2$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} - \text{частота}$$

Плоское движение - движение твердого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной в данной системе отсчета плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' = d\vec{r}_0 + [d\vec{\varphi} \vec{r}']$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \vec{r}']$$

$\vec{v}_C$  - скорость центра колеса относительно точки отсчета

$\vec{v}_{вр}$  - скорость точек колеса относительно его центра

**Def.** Динамика - раздел механики, изучающий причины, вызывающие движение тел

1687 г. - законы Ньютона, основа классической механики (механики Ньютона), обобщение большего количества опытов (Г. Галилей)

Классическая механика - частный случай 1) СТО при скоростях много меньших скорости света  $v \ll c$ ; 2) квантовой механики при массах, много больших массы атома

В динамике существуют различия между системами отсчета и преимущества одних СО над другими.

Существуют такие системы отсчета, относительно которых свободное тело (тело, на которое не действуют другие тела) движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя. Такие системы называются инерциальными (ИСО)

### Принцип относительности Галилея:

Любая СО, движущаяся с постоянной скоростью относительно ИСО, также является ИСО. Тогда справедливо любое из этих утверждений:

1. все ИСО эквивалентны друг другу по своим механическим свойствам
2. во всех ИСО свойства пространства и времени одинаковы
3. законы механики одинаковы во всех ИСО

Преобразования Галилея - преобразования координат при переходе от одной ИСО к другой  $K, K'$  - ИСО

$\vec{V}$  - скорость, с которой движется СО  $K'$  относительно  $K$   $t = t'$

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$$

$$\vec{c} = \vec{c}' + \vec{V}$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

**Def.** Сила - физическая величина, определяющая количественную характеристику и направление воздействия, оказываемого на данное тело со стороны других тел.

Силы условно можно разделить на силы, возникающие при непосредственном контакте (силы трения, давления) и на силы, возникающие через поля (электрические, гравитационные).

**Def.** Инертная масса - мера инертности тела, то есть способности тела сохранять свою скорость при движении

**Def.** Гравитационная масса - мера гравитационного взаимодействия, величина, определяющая вес тел.

$m_{\text{ин}} = m_{\text{гр}}$  с точностью до  $10^{-13}$  кг

В классической механике 1) масса - величина аддитивная ( $m_1 + m_2 + \dots = m$ ); 2)  $m = \text{const}$



## Законы Ньютона

### I закон Ньютона

Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

### II закон Ньютона

Ускорение тела пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально его массе  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

Под равнодействующей всех сил понимают векторную сумму всех сил, действующих на тело (принцип суперпозиции)

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  - II закон в импульсной (дифференциальной) форме

### III закон Ньютона

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга равны по модулю и направлены в противоположные стороны  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Закон Гука:  $F = k|\Delta l|$  - сила упругости пропорциональна изменению длины тела

Акселерометр - прибор, измеряющий ускорение, точнее проекцию кажущегося ускорения.

Акселерометр использует II закон Ньютона ( $mg - k\Delta l = ma$ ) во всех трех осях, что позволяет измерение ускорения в трех направлениях. Акселерометр используется в автомобилях, авиации, телефонах, игровых контроллерах, компьютерах (защита жесткого диска). Сейчас акселерометры изготавливаются в размерах от 20 мкм до 1 мм из кремния

## 4. Импульс. Закон сохранения импульса.

### План лекции

- Силы в механике
- Универсальные законы природы - законы сохранения
- Импульс материальной точки
- Закон сохранения импульса
- Центр масс. Ц-система

## Силы в механике. Сила гравитационного взаимодействия

Все силы в механике относятся к гравитационным и электромагнитным фундаментальным воздействиям. Это можно заметить на примере законов всемирного тяготения и Кулона:

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

Закон всемирного тяготения

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

Закон Кулона

Запишем закон всемирного тяготения для тела  $m$  на расстоянии  $r$  от Земли (радиуса  $R$  и массы  $M_3$ ):

$$|\vec{F}| = G \frac{mM_3}{(R+r)^2}$$

С другой стороны, любое тело вблизи поверхности Земли движется с ускорением свободного падения  $\vec{g}$ , следовательно, сила, действующая на тело, равна:

$$F = G \frac{mM_3}{R^2} = mg$$

Одинаково ли ускорение свободного падения на поверхности Земли?

Пусть  $k$  - ИСО,  $k'$  - НИСО (неинерциальная СО), а  $\vec{a}', \vec{v}'$  - ускорение и скорость в системе  $k'$ , а сама система  $k'$  движется с ускорением  $\vec{a}_0$  и вокруг оси с угловой скоростью  $|\vec{\omega}| = \text{const}$

Тогда получаем ускорение в НИСО:  $\vec{a}' = \vec{a} + \omega^2 \vec{\rho} + 2[\vec{v}' \vec{\omega}] - \vec{a}_0$

$\vec{a}$  - ускорение тела в системе  $k'$

$\omega^2 \vec{\rho}$  - центробежное ускорение

$2[\vec{v}' \vec{\omega}]$  - ускорение Кориолиса

$\vec{a}_0$  - поступательное ускорение (системы отсчета  $k'$  для  $k$ )

$m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\Sigma \vec{F}} + \underbrace{m\omega^2 \vec{\rho} + 2m[\vec{v}' \vec{\omega}] - m\vec{a}_0}_{\text{силы инерции (т. н. фиктивные)}} - \text{основное уравнение динамики в НИСО}$

$m\omega^2 \vec{\rho}$  - центробежная сила

$2m[\vec{v}' \vec{\omega}]$  - сила Кориолиса

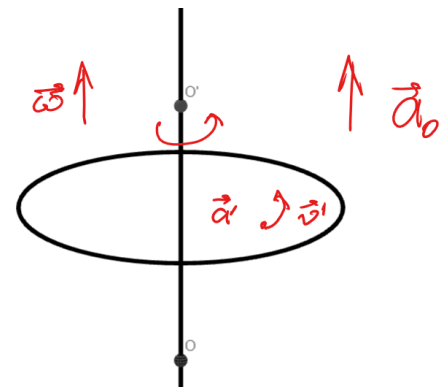
$m\vec{a}_0$  - поступательная сила инерции

В НИСО возникают так называемые силы инерции (фиктивные), центробежная и Кориолиса связаны с вращением

Сила Кориолиса будет действовать только на те тела, которые движутся

Из закона всемирного тяготения можно вывести ускорение свободного падения гравитационное:

$$g_{\text{грав}} = G \frac{M_3}{R^2} = 9.81 \dots 9.83 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$



Из этого получить ускорение эффективное:  $g_{\text{эфф}} = g_{\text{грав}} + a_{\text{цб}} = 9.78 \dots 9.83$  (ускорение свободного падения уменьшается на 3 сотых из-за вращения)

## Вес тела

**Def.** Вес тела - сила, с которой тело действует на неподвижную относительно него опору

В случае опоры  $|P| = |N|$  ( $N$  - сила реакции опоры)

Рассмотрим случай, когда тело находится в неподвижном состоянии на поверхности:

$$m\vec{g} + \vec{N} = 0 \quad N - mg = 0 \quad P = mg$$

Вес тела равен силе тяжести только при  $\vec{a} = 0$  системы отсчета

## Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друг друга. Различают сухое и вязкое трение. К сухому трению относится трение покоя, трение скольжения и трение качения

**Сила трения покоя** применима не телам, которые покоятся; она не может превышать некоторого максимального значения:  $0 \leq F_{\text{тр.}} \leq \mu_0 N$  (где  $\mu_0$  - коэффициент трения покоя)

**Сила трения скольжения** возникает при движении соприкасающихся тел. В общем случае сила трения скольжения зависит от скорости движения, но для широкого класса тел равна максимальной силе трения покоя и подчиняется закону Амонтона-Кулона:  $F_{\text{тр}} = \mu N$

В задачах принимается, что  $\mu_0 = \mu$ , тогда во время покоя сила трения растет линейно, пока не достигнет  $\mu N$ , тогда тело начинает движение, и применяется сила трения скольжения

## Как можно измерить массу тел?

Для измерения массы необходимо сравнить ее с другой, принятой за эталон. Сравним массы  $m_1$  и  $m_2$

Опыт показывает, что в замкнутой системе - системе, в которой можно пренебречь взаимодействием с другими телами, выполняется соотношение:

$$\frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta \vec{v}_2} = \frac{m_2}{m_1} \quad \Delta \vec{v}_1 \uparrow \downarrow \Delta \vec{v}_2 \quad v \ll c$$

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = -m_2 \Delta \vec{v}_2 \quad \text{или} \quad m_1 \Delta \vec{v}_1 + m_2 \Delta \vec{v}_2 = 0$$

Импульс (количество движения) - векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость:  $\vec{p} = m\vec{v}$   $[p] = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$

Определение справедливо для материальной точки и для поступательного движения твердого тела

Импульс системы материальных точек:  $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$

Для системы  $N$  материальных точек ( $\vec{F}_i$  - внешние силы)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i \quad \vec{P} = const$$

Закон сохранения импульса - импульс замкнутой системы остается постоянным

При изменении состояния системы всегда существуют такие величины, которые сохраняются с течением времени. Среди этих величин наиболее важное значение имеют импульс, энергия и момент импульса.

Эти величины обладают свойством аддитивности – значение величин для системы, состоящей из частей, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности.

Законы сохранения – универсальные законы природы, связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени.

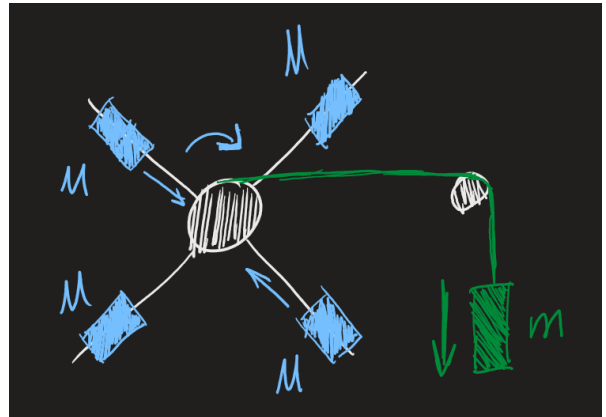
Закон сохранения импульса – однородность пространства

Закон сохранения энергии – однородность времени

Закон сохранения момента импульса – изотропность пространства

## 5. Вращательное движение. Моменты силы и импульса

Одной из лабораторных работ в курсе механики является работа с маятником Обербека (представлен на рисунке). Принцип его работы таков: к вращающемуся колесу с грузиками на спицах привязана нить, другой конец которой привязан к грузу через блок, груз падает, вращает колесо. В ходе эксперимента можно заметить, что при приближении грузиков к центру колесо начинает раскручиваться быстрее.



Рассмотрим величины, действующие при вращательном движении:

1. Момент силы  $M$

$$M = F \cdot l$$

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] \quad M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = l \cdot F$$

Так как момент силы - векторное произведение, то вектор момента силы направлен перпендикулярно к плоскости радиус-вектора и вектора силы

$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Аналогично рассмотрим момент силы для противоположных сил:

2. Момент пары сил

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1 \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \vec{F}_{21}] = [(\vec{r}_2 + \vec{r}_{21}) \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \vec{F}_{21}] = [\vec{r}_2 \vec{F}_{12}] + \\ &[\vec{r}_{21} \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \vec{F}_{21}] \\ \vec{M} &= [\vec{r}_{21} \vec{F}_{12}] = [\vec{r}_{12} \vec{F}_{21}] \end{aligned}$$

Момент пары сил равен произведению вектора силы на радиус-вектор между точками приложения сил

3. Момент импульса  $L$

Аналогично моменту силы можем определить момент импульса:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot l$$

$$[L] = \text{кг} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$$

4. Уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \vec{p} \right] + \left[ \vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v}\vec{p}] + [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}$$

$$[\vec{v}\vec{p}] \stackrel{0}{\leftarrow} \vec{v} \uparrow \vec{p}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \implies \vec{F}_{\text{внешн}} = 0 \implies \vec{p} = \text{const} - \text{закон сохранения импульса}$$

5. Закон сохранения момента импульса

Пусть дана система материальных точек. На них действуют силы, которые мы можем разделить на внутренние и внешние

В замкнутой системе внешние силы сведены к 0:

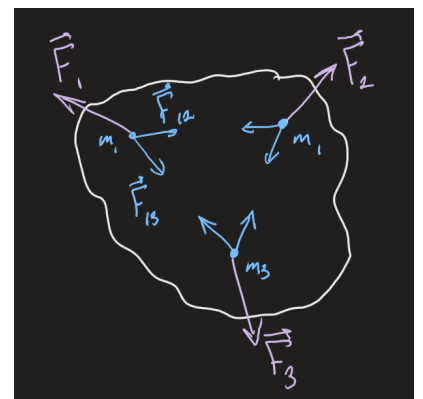
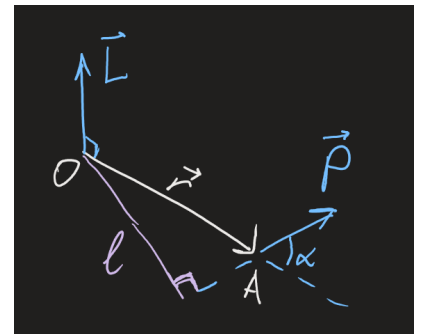
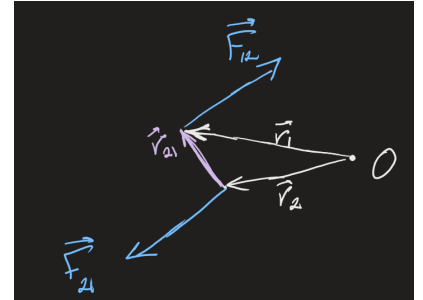
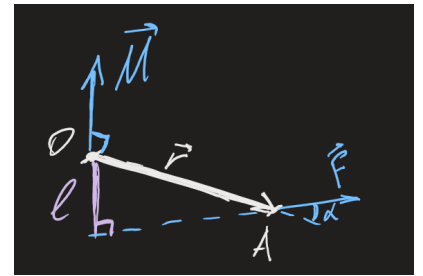
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_{\text{внешн}} + \vec{M}_{\text{внутр}} \stackrel{0}{\leftarrow}$$

Поэтому:

$$\vec{M}_{\text{внешн}} = 0 \implies \vec{L} = \text{const} - \text{закон сохранения момента импульса}$$

6. Основное уравнение динамики вращательного движения

$$L_i = m_i v_i \cdot r_i = m_i \omega \cdot r_i^2 = \omega m_i r_i^2$$



$$L = \sum L_i = \omega \sum m_i r_i^2$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad L_z = I\omega_z$$

$$I = \sum m_i r_i^2 - \text{момент инерции системы материальных точек, } [I] = \text{с} \cdot \text{м}^2$$

$$\text{В интегральной форме: } I = \int r^2 dm$$

Здесь же выделим различное распределение массы

а) Линейное:  $\tau = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{l}$

б) Поверхностное:  $\sigma = \frac{m}{s} = \frac{dm}{ds}$

в) Объемное:  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}$

$$L_z = I\omega_z$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega_z}{dt} = I\beta_z$$

$$\boxed{M_z = I\beta_z} - \text{основное уравнение динамики вращательного движения}$$

## 7. Расчет моментов инерции твердых тел

Рассмотрим моменты инерции для твердых тел разной формы:

### (а) Стержень

$$I = \int r^2 dm$$

$$I_{\text{м.т.}} = mr^2$$

$$dI = r^2 dm$$

$$I = \sum_i dI_i = \int_0^l dI = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l r^2 \tau dl = \int_0^l r^2 \tau dr = \tau \frac{r^3}{3} \Big|_0^l = \tau \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$\boxed{I_{\text{стерж}} = \frac{ml^2}{3}}$$

### (б) Кольцо

Для кольца тривиально:  $\boxed{I_{\text{кольц}} = r^2 m}$

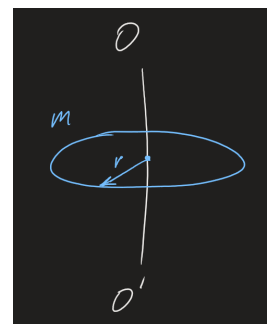
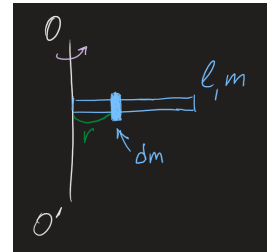
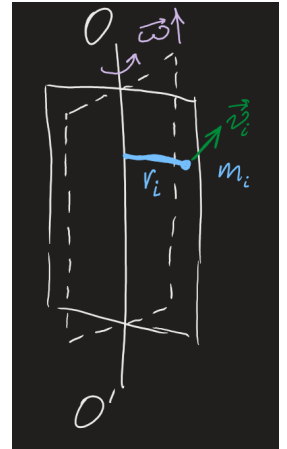
### (в) Диск

Разбиваем диск на кольца с радиусом  $r$  толщиной  $dr$

$$dI = dmr^2 = \sigma ds r^2 = \sigma 2\pi r dr r^2 = \sigma ds r^2$$

$$I = \int \sigma 2\pi r^3 dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\boxed{I_{\text{диск}} = \frac{mR^2}{2}}$$

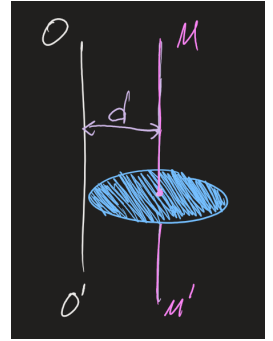


(d) **Теорема Штейнера**

Теорема Штейнера гласит, что момент инерции тела для неподвижной оси равен сумме момента инерции для оси тела, проходящей через центр масс и параллельной исходной и произведению квадрата расстояния и массы

$$I = I_0 + md^2$$

Пример: кольцо вращается вокруг оси, расположенной на торце кольца, зная момент импульса в центральной оси кольца и расстояние между осями, можем узнать момент импульса для кольца



## 6. Гироскоп. Механическая работа.

Повторим то, что было на прошлой лекции. Рассмотрим два типа движения:

### Поступательное движение

$$d\vec{r}; x, y, z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p} = \text{const} \text{ при } \vec{F}_{\text{вн.}} = 0 \text{ (ЗСИ)}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

### Вращательное движение

$$d\vec{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$I \quad I_{\text{м.т.}} = mr^2, \quad I = \int r^2 dm$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \text{const} \text{ при } \vec{M}_{\text{вн}} = 0 \text{ (ЗСМИ)}$$

$$M_z = I\beta_z$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}\vec{F}]$$

Теорема Штейнера: момент инерции  $I$  тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого тела  $I_0$  относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:

$$I = I_0 + md^2$$

Также мы рассмотрели моменты инерции для разных тел

## Гироскоп

Рассмотрим вращающийся волчок: вращаясь, он постепенно теряет энергию из-за трения и сопротивления воздуха, из-за чего его вращение замедляется, и его ось начинает вращаться по другой оси.

Обозначим за  $\vec{L}_\omega$  момент инерции волчка и за  $\vec{L}'$  момент инерции оси. Тогда:

$$\vec{L} = \vec{L}_\omega + \vec{L}'$$

$$\vec{L}_\omega = I\vec{\omega}$$

Заметим, что в опыте скорость вращения волчка намного больше скорости вращения оси  $\omega \gg \omega'$

$$\text{Из этого } d\vec{L} = L \sin \theta \cdot \omega' dt$$

Или в векторной форме:

$$d\vec{L} = [\vec{\omega} \vec{L}] dt$$

$$\vec{M} = [\vec{\omega} \vec{L}]$$

Также заметим, что  $L_\omega \gg L'$

Способность сохранять положение вращающегося волчка используется в таком приборе, как гироскоп. Гироскоп применяется для определения положения аппарата (например, самолет, космического корабля) в авионике.

## Механическая работа

$d\vec{r}$  - элементарное перемещение, в пределах которого сила  $\vec{F}$  постоянна









$F_s$  - проекция силы на направление перемещения

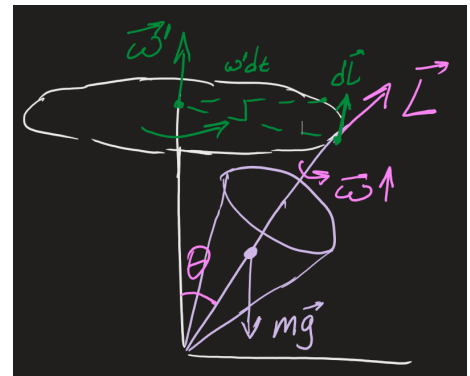
$$d\vec{r} = ds$$

Элементарная работа силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F \cdot ds \cos \alpha = F_s ds$$

$$A = \sum dA = \int dA$$

Thin hoop, radius $R$	Through center		$MR^2$
Thin hoop, radius $R$ width $w$	Through central diameter		$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
Solid cylinder, radius $R$	Through center		$\frac{1}{2}MR^2$
Hollow cylinder, inner radius $R_1$ outer radius $R_2$	Through center		$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Uniform sphere, radius $R$	Through center		$\frac{2}{5}MR^2$
Long uniform rod, length $\ell$	Through center		$\frac{1}{12}M\ell^2$
Long uniform rod, length $\ell$	Through end		$\frac{1}{3}M\ell^2$
Rectangular thin plate, length $\ell$ , width $w$	Through center		$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$





$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$$

Допустим на тело действует несколько сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) d\vec{r}$$

Мощность - скалярная величина, равная работе силы, совершаемой за единицу времени.

Характеризует скорость, с которой совершается работа

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}$$

$$A = \int N dt$$

$$\text{Работа силы упругости: } A = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

$$\text{Работа силы тяжести: } A = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r} = mgh_1 - mgh_2$$

$$\text{Работа силы тяготения: } A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr = -\frac{Gm_1m_2}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{Gm_1m_2}{r_1} - \frac{Gm_1m_2}{r_2}$$

Силы, чья работа не зависит от траектории пути, будут называть *консервативными* (потенциальными)

Тогда из этого мы можем вывести потенциальную энергию:

$$\text{Потенциальная энергия для силы упругости: } U = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Потенциальная энергия для силы тяжести: } U = mgh$$

$$\text{Потенциальная энергия для силы тяготения: } U = \frac{Gm_1m_2}{r}$$

В общем виде получаем  $A = U_1 - U_2$

$$dA = -dU \quad \vec{F} d\vec{r} = -dU$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\text{grad } U = -\nabla U$$