

Содержание

2. Линейный оператор (линейное отображение, линейный функционал, линейное преобразование)	4
2.1. Определение	4
2.2. Действия с операторами	4
2.3. Обратимость оператора	5
2.4. Матрица ЛО	6
2.5. Ядро и образ оператора	7
2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису	8
2.7. Собственные векторы и значения оператора	10
2.8. Самосопряженные операторы	12
2.9. Ортогональный оператор	15
3. Билинейные и квадратичные формы	17
3.1. Билинейные формы	17
3.2. Квадратичные формы	18
4. Дифференциальные уравнения	20
4.1. Общие понятия	20
4.2 ДУ первого порядка ($ДУ_1$)	22

Nota. Изоморфизм $E^n \rightarrow E^n$ позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

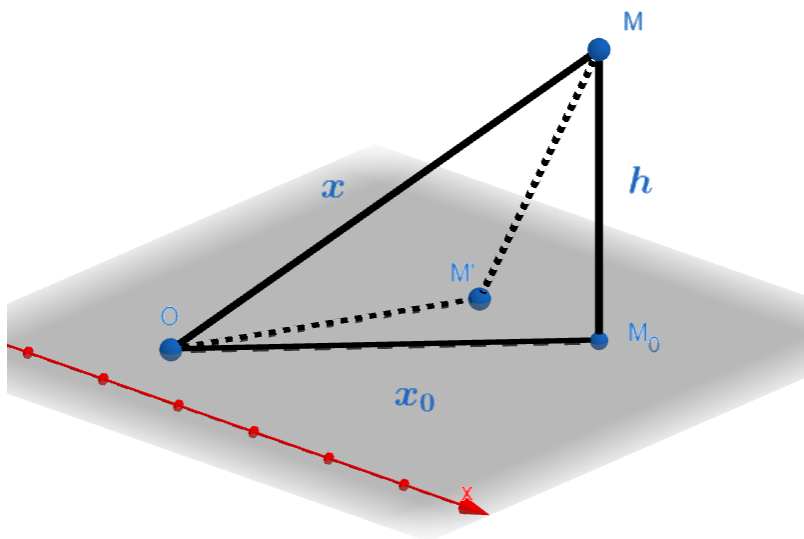
Ex: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - арифметические векторы со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$E^n \in C_{[a;b]}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f * g dx$

$$\sqrt{\int_a^b (f * g)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства E^n на подпространство G



Точка M - конец вектора x в пространстве E^n . Нужно найти M_0 (конец вектора x_0 , проекции x на G)

$$x_0 + h = x$$

где $h \perp G$. Правда ли что, длина перпендикулярного вектора h - минимальная длина от точки M до G ?

Th. $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

$$\square \|x - x'\| = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \stackrel{\text{по теореме Пифагора}}{=} \|x - x_0\| + \|x_0 - x'\| = \|h\| + \|x_0 - x'\| > \|x - x_0\|$$

Nota. x_0 называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

Алгоритм: $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k$, $\{e_i\}_{i=1}^k$ - базис G (необязательно ортонормированный)
Дан вектор x , пространство G , нужно найти λ_i

$$h = x - x_0, h \perp G \quad (h, e_i) \stackrel{h \perp e_i}{=} 0 \quad \forall i$$

$$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0$$

$$(x, e_i) = (x_0, e_i)$$

Тогда $\forall i \quad (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_k (e_k, e_i) - (e_k, e_i)$ - числа, а λ_i - неизвестные

Получили СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \dots & (e_k, e_k) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \Gamma \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$$

Nota. В матрице Γ нет нулевых строк, так как e_i - базисная и по крайней мере $e_i^2 \neq 0$
Таким образом по теореме Крамера $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Def. Матрица $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1\dots k}$ называют матрицей Грама

$$\Gamma = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}, \text{ если базис ортонормированный}$$

Далее, I - единичная матрица Грама

$$\text{Nota. Тогда } I \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$$

Приложения задачи о перпендикуляре

1) Метод наименьших квадратов

В качестве простейшей модели зависимости $y = y(x)$ берем линейную функцию $y = \lambda x$

Ищем минимально отстоящую прямую от данных (x_i, y_i) , то есть ищем λ

Определим расстояние (в этом методе) как $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{0i})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda x_i)^2$ - минимизируем

Таким образом, ищем y_0 (ортог. проекция) такое, что $(y - y_0)^2 = \sigma^2$ - минимальное

Если $y_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$, где x_i - набор измерений для i -ой точки

Рассмотрим y_0 как разложение по базису $\{x_i\}$

2) Многочлен Фурье

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt - \text{линейная комбинация}$$

Функции $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$ - ортогональны

Задача в том, чтобы для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$ найти минимально отстоящий многочлен $P(t)$ при том, что расстояние определяется как $\sigma^2 = \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$

Нужно найти a_i и b_i - обычные скалярные произведения $a_i = k \int_0^{2\pi} f(t) \cos(it) dt$, $b_i = m \int_0^{2\pi} f(t) \sin(it) dt$ (k, m - нормирующие множители)

2. Линейный оператор (линейное отображение, линейный функционал, линейное преобразование)

2.1. Определение

Линейный оператор - это отображение $V^n \xrightarrow{\mathcal{A}} W^m$
(V^n, W^m - линейные пространства размерности $n \neq m$ в общем случае),
которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет один какой-либо $y \in W^m$ и
 $\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A}x_1 + \mu \mathcal{A}x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$

Nota. Заметим, что если 0 представим как $0 * x$, где $x \neq 0$, то
 $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 * x) = 0 * \mathcal{A}x \stackrel{0*y}{=} 0$

Nota. Если $V = W$, то \mathcal{A} называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы $\mathcal{A}: V \rightarrow V$, $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^n$

Ex. 1. $V = \mathbb{R}^2$ - пространство направленных отрезков

$\mathcal{A}: V \leftarrow V$

$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$ для таких \mathcal{A} как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия

Ex. 2. $V^n = W^m$, где $m < n$

\mathcal{A} - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)

Ex. 3. V^n - пространство числовых строк длины n

$\mathcal{A}: V^n \leftarrow V^n$

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\mathcal{A}x = y : \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} x = y$$

2.2. Действия с операторами

Def. $\mathcal{A}\mathcal{B}: V \rightarrow W$

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \stackrel{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ - определение суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$
2. $(\lambda \mathcal{A})x \stackrel{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x) = \lambda \mathcal{A} = \mathcal{D}$

Nota. Сформируем линейное пространство из операторов $\mathcal{A}: V \rightarrow W$

1. Ассоциативность сложения (очевидно)
2. Коммутативность (очевидно)
3. Нейтральный элемент $\mathcal{O}x = 0$
4. Противоположный: $-\mathcal{A} = (-1) * \mathcal{A}$
5. ... LAB

Def: I - тождественный - $\forall x \in V \quad Ix = x$

Def. Произведение операторов (композиция)

$\mathcal{A}\mathcal{B}$ - произведение, $\mathcal{A} : V \rightarrow W$; $\mathcal{B} : U \rightarrow V$

$(\mathcal{A}\mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$; $x \in U$

Свойства: Lab доказать

1* $\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$

2* $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$

3* $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$

4* $\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}) = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C}$

Nota. Можно обобщить 4* на n равных \mathcal{A}

Def. $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \dots \mathcal{A}$ - n раз, степень оператора

Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

2.3. Обратимость оператора

Def: $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V) \quad \begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$

Тогда \mathcal{A} называется взаимно-однозначно действующим

Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

Th. $\{x_i\}$ - линейно независима $\xrightarrow{\mathcal{A}x=y} \{y_i\}$ - линейно независима

В обратную сторону, если \mathcal{A} - взаимно-однозначен

$\square \square \mathcal{A} : V \rightarrow W$ и $0_V, 0_W$ - нули V и W соответственно

1. $\mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^k 0 \cdot e_i) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$

2. Докажем, что если $x_i \subset V$ - лин. нез., то $y_i \subset W$ - лин. нез.

Составим $\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0_W$ (От противного) $\square \{y_i\}$ - лин. зав., тогда $\exists \lambda_k \neq 0$

При этом $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. \mathcal{A} - вз.-однозн., то $n' = m'$: кол-во x_i и y_i равно)

$\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A}x_j \stackrel{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}(\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j) = 0_W$

Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то 0_W - образ $x = 0_V$, но так как \mathcal{A} - вз.-однозн., то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит $\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{x_j\}$ - лин. зав. - противоречие

3. \square теперь $\{y_i\}$ - л. нез., а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - лин. зав.

$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \stackrel{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$

$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A}x_i = 0_W$

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{y_i\}$ - лин. зав. - противоречие

Следствие: $\dim V = \dim W \iff \mathcal{A}$ - лин. изоморфизм

Def: $\mathcal{B} : W \rightarrow V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \rightarrow W$

если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = I$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

Следствие: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x = x$

Th. $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$

$\square \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \implies x = 0$

Th. Н. и Д. условия существования \mathcal{A}^{-1}

$\exists \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

$\square \implies \exists \mathcal{A}^{-1}$, но $\square \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}x_1 -$

$\mathcal{A}x_2 = 0 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \xRightarrow{\exists \mathcal{A}^{-1}} x = 0_V \iff x_1 = x_2$ - противоречие

\iff Так как \mathcal{A} - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists \mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязат. линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}' : W \rightarrow V$ - линейный оператор

? $\mathcal{A}'(\sum \lambda_i y_i) = \sum \lambda_i \mathcal{A}' y_i = \sum \lambda_i x_i$

\mathcal{A} - вз.-однозн. $\iff \forall x_i \longleftrightarrow y_i \mid \cdot \lambda_i, \Sigma$

$\mathcal{A}(\sum \lambda_i x_i) = \mathcal{A}x = y = \sum \lambda_i y_i$ и y имеет только один прообраз x

Применим \mathcal{A}' к $y = \sum \lambda_i y_i$ $\mathcal{A}' y = x = \sum \lambda_i x_i$ - единственный прообраз y

Таким образом, \mathcal{A}' переводит лин. комбинацию в такую же лин. комбинацию прообразов, то есть \mathcal{A}' - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

2.4. Матрица ЛО

$\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^n c_j e_j) = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j$

$\mathcal{A}e_j$ образ базисного вектора e_j - базис W^m $\sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$

$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} f_i$

Иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Def: Матрица $A = a_{ij, i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства V^n

Вопросы:

- 1) $\forall ? \mathcal{A} \exists A$
- 2) $\forall ? A \exists \mathcal{A}$
- 3) если $\exists A$ для \mathcal{A} , то единственная?
- 4) если $\exists \mathcal{A}$ для A , то единственная?

Ответы:

- 1) При выбранном базисе $\{e_j\} \forall \mathcal{A} \exists A$ (алгоритм выше)
- 3) такая A единственная \implies в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A} \quad A_e \neq A_{e'}$
- 2) $\forall A_{m \times n}$ можно взять пару ЛП V^n, W^m и определить $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W_n$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$
- 4) Lab.

Nota: Далее будем решать две задачи

- 1) преобразование координат как действие оператора
- 2) поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

2.5. Ядро и образ оператора

Def. Ядро оператора - $\text{Ker} \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

Def. Образ оператора - $\text{Im} \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

Nota. $\text{Ker} \mathcal{A}$ и $\text{Im} \mathcal{A}$ - подпространства

Nota. $\text{Ker} \mathcal{A}$ и $\text{Im} \mathcal{A}$ - подпространства V ($\mathcal{A} : V \rightarrow V$)

Вообще-то $\text{Ker} \mathcal{A} \subset V, \text{Im} \mathcal{A} \subset W$ ($\mathcal{A} : V \rightarrow W$)

$\dim W \leq \dim V$, тогда можно считать, что $W \subset V'$ и рассмотрим $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$ (где V' изоморфен V)

$\text{Ker} \mathcal{A}$ - подпространство, то есть $\text{Ker} \mathcal{A} \subset V$ и $\sum c_i x_i \in \mathcal{A}$, если $\forall x_i \in \text{Ker} \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(\sum c_i x_i) = \sum c_i \mathcal{A}x_i \stackrel{x_i \in \mathcal{A}}{=} \sum c_i 0 = 0$$

Следствие: $\text{Ker} \mathcal{A} = 0 \implies \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

□ От противного:

□ \mathcal{A} - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \in \text{Ker} \mathcal{A}$ - противоречие

Nota. Обратное также верно:

\mathcal{A} - вз.-однозн. $\iff y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$, так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 = 0$

Тогда 0 является образом только 0-вектора $\implies \text{Ker} \mathcal{A} = 0$

Nota. Также очевидно, что

$$\text{Ker} \mathcal{A} = 0 \iff \text{Im} \mathcal{A} = V$$

$$\text{Ker} \mathcal{A} = V \implies \text{Im} \mathcal{A} = 0 \text{ и } \mathcal{A} = 0$$

Th. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, тогда $\dim \text{Ker} \mathcal{A} + \dim \text{Im} \mathcal{A} = \dim V$

□ Так как $\text{Ker} \mathcal{A}$ - подпространство V , то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса V : $e_1^k, \dots, e_m^k, e_{m+1}^k, \dots, e_n^k$)

Обозначим дополнение W , тогда $\text{Ker} \mathcal{A} \oplus W = V \implies \dim \text{Ker} \mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что W и $\text{Im} \mathcal{A}$ - изоморфны

$$\mathcal{A} : W \rightarrow \text{Im} \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} : \text{Ker} \mathcal{A} \rightarrow 0$$

Докажем, что \mathcal{A} действует из W в $\text{Im} \mathcal{A}$ взаимно-однозначно

□ \mathcal{A} невз.-однозн., тогда $\exists x_1, x_2 \in W (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in \text{Im} \mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \stackrel{\text{обозн.}}{=} x \in \text{Ker} \mathcal{A}$, но $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$

Но для прямой суммы $W \cup \text{Ker} \mathcal{A} = 0, x \in W \cup \text{Ker} \mathcal{A} \implies$ предположение неверно

$\implies \mathcal{A}$ - лин. вз.-однозн. $\implies \dim W = \dim \text{Im} \mathcal{A}$

$V = W_1 \oplus W_2$ найдется ЛО $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$W_1 = \text{Ker} \mathcal{A}, W_2 = \text{Im} \mathcal{A}$$

Def. Рангом оператора \mathcal{A} называется $\dim \text{Im} \mathcal{A}$: $\text{rang} \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im} \mathcal{A} (= r(\mathcal{A}) = \text{rank} \mathcal{A})$

Nota. Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$$

A - матрица \mathcal{A} , $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$

$$\mathcal{A}x = y \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e'_i$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Здесь } \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T - \text{это матрица } (e_1 \dots e_n) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$$

Nota. Поиск матрицы \mathcal{A} можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. позже)

Тогда $\text{Ker } \mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему

$$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \text{ФСР} = n - \text{rang } A) \text{ и при этом } \dim K = n - \dim \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A = \dim \text{Im } \mathcal{A}$$

Следствия (без док-в)

$$1) \text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \text{rang}(\mathcal{A}) \text{ (или } \text{rang } \mathcal{B})$$

$$2) \text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq \text{rang}(\mathcal{A}) + \text{rang}(\mathcal{B}) - \dim V$$

Nota. Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \rightarrow V^n$ (переход из системы $Ox_i \rightarrow Ox'_i$, $i = 1..n$)

$$\dim \text{Im } T = n, \dim \text{Ker } T = 0 \implies T - \text{вз.-однозн.}$$

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e \rightarrow e'}$

2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

Th. $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

$\{e_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e$ и $\{e'_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства V

$\mathcal{T} : V^n \rightarrow V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e'_i$

$\square A, A'$ - матрицы \mathcal{A} в базисах e и e'

Тогда $A' = TAT^{-1}$ ($A'_{e'} = T_{e \rightarrow e'} A T_{e \rightarrow e'}^{-1}$)

$\square \square y = \mathcal{A}x$, где x, y - векторы в базисе e ($x_e = x'_{e'}$ - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$, где x', y' - векторы в базисе e'

$$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$$

$$y = Ax, y' = A'x', \text{ тогда } Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}Ty &= (T^{-1}A'T)x \\ Ax &= y = (T^{-1}A'T)x \\ A &= T^{-1}A'T \implies A' = TAT^{-1} \end{aligned}$$

Th. $A' = T_{e \rightarrow e'} AT_{e \rightarrow e'}^{-1}$

Nota. $C = A + \lambda B$

Следствия:

- 1) $TCT^{-1} = T(A + \lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$
- 2) $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$
- 3) $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

Nota. То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании T

Def. Матрица A называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall i \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij} = (A_i, A_i) = 1 \quad \forall i, j (i \neq j) \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$$

$$\text{В общем } (A_i, A_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Def. Оператор \mathcal{A} называется ортогональным, если его матрица ортогональна
? A ортогональна в каком-либо базисе или во всех?

Свойство. \mathcal{A} - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \det(A)^2 = \det(I) = 1$)

Th. $T_{e \rightarrow e'}$ - преобразование координат в V^n . Тогда T - ортогональный оператор

Базис e - ортонормированный базис

□ □ в базисе e матрица $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ - неортогональна

Тогда $e'_1 = \sum_{i=1}^n \tau_{1i}e_i \quad \Big| \cdot e'_1$

$1 = (e'_1, e'_1) = (\sum_{i=1}^n \tau_{1i}e_i)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11}e_1\tau_{12}e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1$ - то есть строка - единичный вектор

$0 = (e'_1, e'_2) = (\tau_{11}e_1 + \tau_{12}e_2 + \dots) \cdot (\tau_{21}e_1 + \tau_{22}e_2 + \dots) =$ произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны

Таким образом, матрица T - ортогональна

Nota. Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

2.7. Собственные векторы и значения оператора

Def. Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ - это $U = \{x \in V_1 \in V | \mathcal{A}x \in V_1\}$

Ex. $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\leq n$ на $[a; b]$, $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$

Nota. $\text{Ker} \mathcal{A}, \text{Im} \mathcal{A}$ - инвариантные ($A : V \rightarrow V$)

Def. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ ($\mathcal{A}x = Ax$, A - матрица в некоем базисе)

$$\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Nota. Матрица $A - \lambda I$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Nota. Уравнение $\xi(\lambda) = 0$ называется вековым

Def. Собственным вектором оператора \mathcal{A} , отвечающим собственному значению λ , называется $x \neq 0 \mid \mathcal{A}x = \lambda x$

Def. Собственное подпространство оператора \mathcal{A} , отвечающее числу λ_i ,
 $U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

Def. $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность число λ_i

Th. $\mathcal{A}x = \lambda x \iff \det(A - \lambda I) = 0$, $A : V^n \rightarrow V^n$

$$\square \iff |A - \lambda I| = 0 \iff \text{rang}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Im}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Ker}(A - \lambda I) \geq 1$$

$$\exists x \in \text{Ker}(A - \lambda I), x \neq 0 \mid (A - \lambda I)x = 0 \iff Ax - \lambda Ix = 0 \iff Ax = \lambda x$$

Nota. По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет n корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

Def. Кратность корня λ_i называется алгебраической кратностью

Th. $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \implies x_1, x_2$ - линейно независимы

$$\square \text{ Составим комбинацию: } c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \Bigg| \cdot \mathcal{A}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \square \lambda_2 \neq 0$$

$$c_1 \mathcal{A}x_1 + c_2 \mathcal{A}x_2 = 0 \iff c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

$$\text{Умножим } c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \text{ на } \lambda_2: c_1 \lambda_2 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

$$c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 - c_1 \lambda_2 x_1 - c_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

$$c_1 x_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1 = 0$, а комбинация линейно независима

Если $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$: $c_2 \lambda_2 x_2 = 0 \implies c_2 = 0$

Nota. Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для k -ой системы собственных векторов для попарно различных k чисел λ

Th. $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ - различные собственные значения $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, им соответствуют U_{λ_i} - собственные подпространства V для λ_i

$\square e^{(1)} = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}\}, e^{(2)} = \{e_1^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}\}, \dots$ - базисы $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots$

Составим систему $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ (*)

Тогда система e - линейно независима

\square Составим линейную комбинацию:

$$1) \square \overbrace{\alpha_1 e_1^{(1)} + \dots + \alpha_{k_1} e_{k_1}^{(1)}}^{x_1 \in U_{\lambda_1}} + \dots + \overbrace{\gamma_1 e_1^{(p)} + \dots + \gamma_{k_p} e_{k_p}^{(p)}}^{x_p \in U_{\lambda_p}} = 0$$

Тогда $\sum_{i=1}^p x_i = 0$ (x_i - линейно независимы, так как λ_i - различны) - этого не может быть, так как $\forall i \ x_i \neq 0$ (как собственный вектор)

2) В $\forall U_{\lambda_i}$ содержится 0-вектор. Тогда $\sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff \forall x_i = 0$

Но $x_j = \sum_{i=1}^{k_j} c_i e_i^{(j)} = 0$ ($e_i^{(j)}$ - базисные, т. е. л/нез) $\implies \forall c_j = 0$ (комбинация должна быть тривиальна)

\square

Nota. Таким образом объединение базисов собственных подпространств U_{λ_i} образует линейно независимую систему в V^n

Что можно сказать о размерности системы e (*) ?

Обозначим $S = \sum_{i=1}^p \dim U_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^p \beta_i$, β_i - геометрическая кратность λ_i

Очевидно, $S \leq n$

Th. $S = n \iff \exists$ базис V^n , составленный из собственных векторов

\square Система $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ состоит из собственных векторов

Если $S = n$, получаем n собственных векторов, линейно независимых - базис V^n

Если \exists базис из n лин. незав. собственных векторов, тогда $\dim e = S = n$

\square

Nota. Условие Th равносильно: $V^n = \sum_{i=1}^p U_{\lambda_i} (\lambda_i \neq \lambda_j)$

Действительно: $\dim V^n = \sum_{i=1}^p \dim U_{\lambda_i}$ и $\forall i, j \ U_{\lambda_i} U_{\lambda_j} = 0$

Ex. Если $\exists n$ различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\dim U_{\lambda_i} = 1 \forall i$

Def. Оператор \mathcal{A} диагонализированный, если существует базис $e \mid A_e$ - диагональна

Th. \mathcal{A} - диаг.-ем $\iff \exists$ базис из собственных векторов

$\square \iff e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис собственных векторов

Собственный вектор (def): $\exists \lambda_i \mid \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{k \neq 1} 0 \cdot e_k \\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2 + \sum_{k \neq 2} 0 \cdot e_k \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdots e_i = \mathcal{A}e_i$$

$\implies \exists f$ - базис, в котором A_f - диагональная (по -äèäã. - àì)

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{Применим } \mathcal{A} \text{ к } f_i \in f$$

$$\mathcal{A}f_i = A_f f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} f_i = \alpha_i f_i \implies \alpha_i - \text{собственное число (по def), а } f_i - \text{собственный}$$

вектор

□

Nota. О связи алгебраической и геометрической кратностей (α - алг., β - геом.)

1) α, β не зависят от выбора базиса

□ β_i по определению $\dim U_{\lambda_i}$ и не связана с базисом

Для α : строим вековое уравнение $|A_f - \lambda I| = 0 \implies \lambda_i$ с кратностью α_i , $\alpha = \sum \alpha_i$

□ A_g - матрица \mathcal{A} в базисе g

Но $A_g = T_{f \rightarrow g} A_f T_{g \rightarrow f}$ или для оператора

$$A_g - \lambda I = T_{f \rightarrow g} (A_f - \lambda I) T_{g \rightarrow f} = \overbrace{T_{f \rightarrow g} A_f T_{g \rightarrow f}}^{=A_g} - \overbrace{\lambda T_{f \rightarrow g} I T_{g \rightarrow f}}^{=\lambda I} = A_g - \lambda I$$

Таким образом, матрицы $A_g - \lambda I$, $A_f - \lambda I$ - подобные

Def. Подобные матрицы - матрицы, получаемые при помощи преобразования координат
Тогда $\det(A_f - \lambda I) = \det(A_g - \lambda I)$ (инвариант) \implies одинаковая кратность

□

2) Геометрическая кратность не превышает алгебраической. У диагоналируемого оператора $\alpha = \beta$

2.8. Самосопряженные операторы

1* Сопряженные операторы

!!! Далее будем рассматривать операторы только в евклидовом пространстве над вещественным полем

Пространство со скалярным произведением над комплексным полем называется унитарным

Мет. Скалярное произведение

$$(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$1) (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$2) (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$3) (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \implies x = 0$$

$$4) (x, y) = (y, x) \text{ в } \mathbb{R}. \text{ Но в комплексном множестве: } (x, y) = \overline{(y, x)}. \text{ Тогда } (x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)}$$

Мет. (x, y) в \mathbb{R}

$$(x, y) = (y, x)$$

Но. (x, y) в комплексном множестве

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

Важно: линейность по первому аргументу - везде

$$(\lambda x, y) \stackrel{\mathbb{R}, \mathbb{C}}{=} \lambda(x, y)$$

Но:

$$(x, \lambda y) = \lambda(x, y) \text{ в } \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \text{ в } \mathbb{C}$$

Def. 1. Оператор \mathcal{A}^* называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

Def. 2. \mathcal{A}^* сопряженный для \mathcal{A} , если $A^* = A^T$ в любой ортонормированном базисе

Def. 1. \iff Def. 2.

$$(\mathcal{A}x, y) \stackrel{\text{на языке матриц}}{=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y$$

$$(x, \mathcal{A}^*y) \stackrel{\parallel}{=} X^T \cdot (A^*Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \implies A^* = A^T$$

Lab. Очевидно существование $\mathcal{A}^* \forall \mathcal{A}$ (определяется в ортонормированном базисе действиям \mathcal{A}^T)

Доказать единственность \mathcal{A}^* рассмотреть от противного $(x, \mathcal{A}_1^*y) \neq (x, \mathcal{A}_2^*y)$

Свойства:

$$1) \mathcal{I} = \mathcal{I}^* \quad \square (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy) \quad \square$$

$$2) (\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$$

$$3) (\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \mathcal{A}^*$$

$$4) (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

$$5) (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^* \text{ (св-во транспонирования матриц)}$$

$$\text{или } ((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*y)$$

$$6) \mathcal{A}^* - \text{линейный оператор } (\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \implies \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y')$$

$$\text{Можно использовать линейные свойства умножения матриц } A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathcal{A}^*X + \mu \mathcal{A}^*Y$$

2* Самосопряженный оператор

Def. \mathcal{A} называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие. $A^T = A \implies$ матрица A симметричная

Свойства самосопряженных операторов:

$$1) \mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \lambda : \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0). \text{ Тогда, } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\square (\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad (x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) \stackrel{\mathbb{B}, \mathbb{C}}{=} \overline{\lambda}(x, y)$$

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \implies \lambda(x, y) = \overline{\lambda}(x, y) \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

\square

$$2) \mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2 \text{ и } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Тогда $x_1 \perp x_2$

\square Хотим доказать, что $(x_1, x_2) = 0$, при том, что $x_{1,2} \neq 0$

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$$

$$\text{Так как } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ то } (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \implies (x_1, x_2) = 0 \quad \square$$

Th. Лемма. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, e - собственный вектор ($l_{\{e\}}$ - линейная оболочка e - инвариантное подпространство для \mathcal{A})

$$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$$

Тогда V_1 - инвариантное для \mathcal{A}

□ Нужно доказать, что $\forall x \in V_1 \mathcal{A}x \in V_1$ и так как $x \in V_1 \mid x \perp e$, то покажем, что $\mathcal{A}x \perp e$
 $(\mathcal{A}x, e) = (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \stackrel{x \perp e}{=} 0$

□

Th. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$), тогда $\exists e_1, \dots, e_n$ - набор собственных векторов \mathcal{A} и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

(другими словами: \mathcal{A} - диагонализируем)

Наводящие соображения.

$$Ex. 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$Ix = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

Здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ - базис из собственных векторов, ортонормированный

$$Ex. 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$Ox = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$$

И здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, так как $0 \in U_\lambda$ и $\forall x \quad Ox = 0 \in U_\lambda$

$$Ex. 3. \text{ Поворот } \mathbb{R}^2 \text{ на } \frac{\pi}{4}$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2} = 0 - \text{ вещественных корней нет}$$

□ □ e_1 - какой-либо собственный вектор \mathcal{A} ...

Th. $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n, \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \implies \exists \{e_i\}_{i=1}^n, e_1$ - собственные вектора \mathcal{A} и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

□ e_1 - собственный вектор \mathcal{A}

e_1 найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиального решение $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0 \stackrel{\mathcal{A} - \text{самосопр.}}{\implies} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора e_1 строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве V_1 \mathcal{A} действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$. Для e_2 строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, V_3, V_4, V_5, \dots , в котором, найдя e_i , ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из e_i , который можно нормировать

□

Nota. Чтобы упорядочить построение базиса, в котором V_i может брать $\max \lambda_i$

Nota. Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализуется: Σ алг. крат. = n (степень уравнения), а Σ геом. крат. = $\dim\{e_1, \dots, e_n\} = n$

Разложение самосопряж. оператора в спектр:

$x \in V^n$ $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов \mathcal{A} (ортонорм.)

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x, e_1) e_1 + \dots + (x, e_n) e_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

Def. Оператор $P_i x = (x, e_i) e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

Свойства:

1) $P_i^2 = P_i$ (более того $P_i^m = P_i$)

2) $P_i P_j = 0$

3) $P_i = P_i^*$ $((P_i x, y) \stackrel{?}{=} (x, P_i y)) \iff (P_i x, y) = ((x, e_i) e_i, y) = (x, e_i)(e_i, y) = (x, (y, e_i) e_i) = (x, P_i y)$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов \mathcal{A} , то

$$x = \sum_{i=1}^n P_i x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

$$\mathcal{A} x \stackrel{y=\sum (y, e_i) e_i}{=} \sum_{i=1}^n (\mathcal{A} x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \mathcal{A} e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \lambda_i e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i x$$

$$\iff \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i \text{ - спектральное разложение } \mathcal{A}, \text{ спектр} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_n\}$$

Ex.

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1) e_1 + (y, e_2) e_2 = (\mathcal{A} x, e_1) e_1 + (\mathcal{A} x, e_2) e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$$

2.9. Ортогональный оператор

Mem. Орт. оператор $T : V^n \rightarrow V^n \stackrel{def}{\iff} \forall$ о/н базиса матрица T - ортогональная $T^{-1} = T^T$

Nota. Иначе, T - ортогональный оператор $\iff T^{-1} = T^* \implies T T^* = I$

Def. T - ортог. оператор, если $(T_x, T_y) = (x, y)$

Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

Nota. Ранее в теореме об изменении матрицы A при преобразовании координат T - ортогональный оператор

Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (док-во теоремы позволяет)

Диагонализация самосопряженного оператора:

Дана матрица A_f

1) Находим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

2) Находим e_1, \dots, e_n - ортогональный базис собственных векторов

3) Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса

4) Находим $T_{e \rightarrow f} A_f T_{f \rightarrow e} = A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного \mathcal{A} - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлениям

3. Билинейные и квадратичные формы

3.1. Билинейные формы

Def. $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B} : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

- 1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z) + \mu \mathcal{B}(y, z)$
- 2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x, y) + \mu \mathcal{B}(x, z)$

Ex.

- 1) $\mathcal{B}(x, y) \stackrel{\text{в } E^n}{=} (x, y)$
- 2) $\mathcal{B}(x, y) = P_y x$ - проектор x на y

Матрица Б.Ф.

Th. $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис V_n , $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\square \begin{aligned} & \begin{matrix} u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n \\ v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \end{matrix} \quad \mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}\left(e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)\right) \stackrel{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i, e_j) = b_{ij}}{=} \\ & \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b_{ij} \end{aligned}$$

□

Nota. Составим матрицу из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Def. Если

- 1) $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$, то \mathcal{B} - симметричная
- 2) $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$, то \mathcal{B} - антисимметричная
- 3) $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$, то \mathcal{B} - кососимметричная (в \mathbb{C})

Def. $\text{rang} \mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rang} B$

Nota.

- 1) \mathcal{B} называется невырожденной, если $\text{rang} \mathcal{B} = n$
- 2) $\text{rang} \mathcal{B}_e = \text{rang} \mathcal{B}_{e'}$ (e, e' - различные базисы V^n), то есть $\text{rang} \mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \rightarrow e'$

Ex. $\mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{ск. пр.}}{=} (u, v)$

$$\begin{aligned} u &= u_1 e_1 + u_2 e_2, \text{ тогда } \mathcal{B}(e_i, e_j) \stackrel{\text{об}}{=} b_{ij} = (e_i, e_j) \\ v &= v_1 e_1 + v_2 e_2 \end{aligned}$$

Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

$$\text{Ex. } \begin{aligned} u(t) &= 1 + 3t \\ v(t) &= 2 - t \end{aligned}, \{e_i\} = (1, t), \mathcal{B}(u, v) = (u, v) = \int_{-1}^1 uv dt$$

$$\text{Тогда, } B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 dt & \int_{-1}^1 t dt \\ \int_{-1}^1 t dt & \int_{-1}^1 t^2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Nota. Особое значение имеют симметричные билинейные формы

Если рассмотреть матрицы симм. Б. Ф. как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица Б. Ф. диагонализируется

Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

3.2. Квадратичные формы

Def. Квадратичной формой, порожденной Б. Ф. $\mathcal{B}(u, v)$, называется форма $\mathcal{B}(u, u)$

Ex. Поверхность

$$u = (x, y), v = (x, y, z)$$

$$\mathcal{B}(u, u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$$

$$\mathcal{B}(v, v) = \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2$$

Met. Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$$

Nota. Заметим, что здесь коэфф. a_{ij} соответствуют матрице симметричной Б. Ф.:

$$B(v, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Если диагонализировать $B(v, v)$, то приведем уравнение поверхности к каноническому виду:

$$\mathcal{B}(v, v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

Def. Положительно определенная форма

Nota. Можно говорить о положительно определенном операторе $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

1) Оператор \mathcal{A} называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$$

2) \mathcal{A} называется положительным, если

$$\forall x \in V, x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$$

Th. 1), 2) $\iff \forall \lambda_i$ - с. число \mathcal{A} , $\lambda_i > 0$

$\square \implies \lambda_i$ - с. число, e_i - соответствующий им с. вектора

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum_{i=1}^n c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$$

Если $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$\iff 1) \iff \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V$ в том числе $x = e_i \neq 0$

$$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

□

Nota. $\det A$ инвариантен при замене базиса, $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0$. Тогда $\exists \mathcal{A}^{-1}$

Th. Критерий Сильвестра

$$\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n - \text{положительно определен} \iff \forall k = 1..n \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□ $\implies \mathcal{A}$ - пол. опред.

\mathcal{A} диагонализуется в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ собственных векторов. Тогда, \mathcal{A} диагонализуется в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}, k \leq n$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \stackrel{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$$

\iff ММИ

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$

1) Для $k = 1$ \mathcal{A} - пол. опр.

2) \mathcal{A}_{n-1} - пол. опр. $\implies \mathcal{A}_n$ - пол. опр.

1) $\mathcal{A}x = a_{11}x \mid a_{11} > 0 \implies \mathcal{A}$ - пол. опр.

$$2) \mathcal{A} \text{ диагон.} \quad \mathcal{A}e_x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n \quad \text{Для } i \leq n-1 \text{ все } \lambda_i > 0$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2 + \lambda_n c_n^2 - \text{знак зависит от } \lambda_n$$

$$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \implies \lambda_n > 0 \implies (\mathcal{A}x, x) > 0$$

□

Ex. Поверхность: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathcal{B}(u, u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \quad \forall k$$

Положительная определенность - наличие экстремума

Def. Оператор \mathcal{A} называется отрицательно определенным, если $-\mathcal{A}$ - положительно определенный

$$\text{Nota. Для } -\mathcal{A} \text{ работает критерий Сильвестра: } \Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$$

Таким образом, \mathcal{A} - отриц. опред. $\iff \Delta_k$ чередует знаки

Nota. Аналогично операторы определяются положительно или отрицательно билинейные формы

$$\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j \stackrel{?}{=} \dots \text{ через оператор}$$

Так как $\mathcal{B}(u, v)$ и $\mathcal{B}(u, u)$ - числа, то \mathcal{B} - называется пол. опред., если $\mathcal{B}(u, u) > 0$

Nota. После приведения $\mathcal{B}(u, v)$ к каноническому виду, получаем

$$\mathcal{B}(u, u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

В общем случае λ_i любого знака

Но можно доказать, что количества $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$ постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (т. н. закон инерции квадратичной формы)

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Общие понятия

1* Постановка задачи

Пр. 1. Скорость распада радия в текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q . Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось Q_0

Коэффициент пропорциональности k найден эмпирически.

Решение. Скорость распада.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ \quad - \text{ ищем } Q(t)$$

$$dQ(t) = kQ dt$$

$$\frac{dQ(t)}{Q} = \frac{k dt}{\text{содержит только } t} \quad - \text{ «разделение переменных»}$$

содержит только Q

Внесем все в дифференциал:

$$d \ln Q = k dt = dk t$$

$$d(\ln Q - kt) = 0$$

Нашли семейство первообразных:

$$\ln Q - kt = \tilde{C}$$

$$\ln Q = \tilde{C} + kt$$

$$Q = e^{\tilde{C} + kt} \stackrel{e^{\tilde{C}} = C}{=} C e^{kt}$$

По смыслу $k < 0$, так как Q уменьшается. Обозначим $n = -k, n > 0$

Тогда $\boxed{Q(t) = C e^{-nt}}$

Получили вид закона распада. Выбор константы C определен Н.У. (начальными условиями):

$$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$$

Тогда, закон - $Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}$

Nota. Оба закона: общий $Q(t) = Ce^{-nt}$ и частный $Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}$ - являются решением дифференциального уравнения:

$$Q'(t) = kQ \text{ (явный вид)}$$

$$d \ln Q(t) - k dt = 0 \text{ (в дифференциалах)}$$

Pr. 2 Тело массой m брошено вверх с начальной скоростью v_0 . Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

По II закону Ньютона:

$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$a = \left[\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \right] - \text{ДУ}$$

$$\text{Решение. } y''(t) = -g$$

$$(y'(t))' = -g$$

$$y'(t) = - \int g dt = -gt + C_1$$

$$y(t) = \int (-gt + C_1) dt = \left[-\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t) \right] - \text{общий закон}$$

$C_{1,2}$ ищем из Н.У.

В задаче нет условия для $y(t_0)$. Возьмем $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

$$\text{Таким образом, } \begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

$$\text{Найдем } C_1: y'(t_0) = y'(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$$

$$\text{Найдем } C_2: y(t_0) = y(0) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = C_2 = 0$$

$$\text{Частный закон: } y^*(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

2* Основные определения

Def. 1. Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ n -ого порядка (*)

$$\text{Ex. } Q' + nQ = 0 \quad \text{и} \quad y'' + g = 0$$

Def. 2. Решением ДУ (*) называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает (*) в тождество

Def. 2'. Если $y(x)$ имеет неявное задание $\Phi(x, y(x)) = 0$, то $\Phi(x, y)$ называется интегралом уравнения (*)

Nota. Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

Def. 3. Кривая с уравнением $y = y(x)$ или $\Phi(x, y(x)) = 0$ называют интегральной кривой

Def. 4.
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad - \text{система начальных условий (**)}$$

Тогда $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases} \quad - \text{задача Коши (ЗК)}$

Nota. Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

Th. $y' = f(x, y)$ - ДУ

$M_0(x_0, y_0) \in D$ - точка, принадлежащая ОДЗ

Если $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в M_0 , то ЗК

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $\varphi(x, y) = 0$, удовлетворяющее Н.У. (без док-ва)

Nota. Преобразуем ДУ: $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$

См. определения обыкн. и особых точек

Def. 5. Точки, в которых нарушаются условия теоремы называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

Def. 6. Общим решением ДУ (*) называется $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

Nota. $\Phi(x, y(x), C_1, \dots, C_n) = 0$ - общий интеграл

Def. 7. Решением (*) с определенными значениями C_1^*, \dots, C_n^* называется частным

Nota. Форма записи:

Разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$

Сведем к виду: $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \implies -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \implies$

$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ - форма в дифференциалах

4.2 ДУ первого порядка (ДУ₁)

Nota. Среди ДУ₁ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ

1) Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)

- 2) Однородное уравнение (ОУ)
- 3) Уравнение полных дифференциалов (УПД)
- 4) Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ₁)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

1* УРП

Def. $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

Решение : $N(y)M(x) \neq 0$

$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0$ $y = y(x)$ - неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$$\left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = 0$$

Интегрируем по dx :

$$\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = \text{const}$$

По свойствам интеграла:

$$\int \frac{m(x)}{M(x)} dx + \int \frac{n(y)}{N(y)} dy = \text{const}$$

или: $\int \frac{m(x)}{M(x)} dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)} dy$

Ex. $xdy - ydx = 0$

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \tilde{C} = \ln |\tilde{C}x|$$

$$|y| = |\tilde{C}x|$$

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

Заметим, $x = y = 0$ - решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$$\underbrace{m(a)N(b)}_{=0}dx + \underbrace{n(b)M(a)}_{=0}dy = 0$$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

2* ОУ

Def. 1. Однородная функция n -ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Ex. $f = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$, $\cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ - нулевой порядок однородности

$f = \sqrt{x^2 + y^2}$ - первый порядок

Def. 2. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y), Q(x, y)$ - однородные функции одного порядка

- ОУ

Решение $P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$$Q(x, y) = x^k Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Тогда, $P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0$.

Обозначим $\frac{y}{x} = t, \quad y' = \frac{dy}{dx} \stackrel{y=tx}{=} t'_x x + t x'_x = t'_x x + t$

$$P(1, t) + Q(1, t)y' = P(1, t) + Q(1, t)(t'_x x + t) = 0$$

$$t'_x x + t = -\frac{P(1, t)}{Q(1, t)} \stackrel{\text{обозн}}{=} f(t)$$

$$t'_x x = f(t) - t$$

$$\frac{dt}{dx}x = f(t) - t \neq 0$$

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} = \ln |Cx|$$

$$Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x, y) \text{ - общий интеграл}$$

Если $f(t) - t = 0$, то пусть $t = k$ - корень, тогда $k = \frac{y}{x} \rightarrow y = kx$ - тоже решение

Ex. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$

$$\frac{y}{x} = t \quad y' = t'_x x + t$$

$$y = tx \quad dy = (t'_x x + t)dx$$

$$(x + tx)dx + (x - tx)(t'_x x + t)dx = 0$$

$$(1 + t) + (1 - t)(t'_x x + t) = 0$$

$$t'(1 - t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$$

$$t'(1 - t)x = t^2 - 2t - 1$$

$$\frac{(1 - t)dx}{t^2 - 2t - 1} = \frac{dx}{x} \text{ - УРП}$$

$$\frac{(1 - t)dt}{(1 - t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \frac{d((1 - t)^2) - 2}{(1 - t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \ln |(1 - t)^2 - 2| = \ln \frac{1}{\sqrt{(1 - t)^2 - 2}} = \ln |Cx|$$

$$\tilde{C}x = \frac{1}{\sqrt{(1 - t)^2 - 2}} \iff Cx^2 = \frac{1}{(1 - t)^2 - 2} \iff Cx^2((1 - t)^2 - 2) = 1$$

$$C((y - x)^2 - 2x^2) = 1$$

$$C(y^2 - 2xy - x^2) = 1$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = C \text{ - гиперболы}$$

$$(t - 1)^2 - 2 = 0 \quad \frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \quad y = (1 \pm \sqrt{2})x \text{ - асимптоты}$$

3* Уравнение в полных дифференциалах

Def. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ - УПД

Решение *Мет. Тн.* об интеграле НЗП $\exists \Phi(x, y) \mid d\Phi = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

$$Ex. (x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,0)}^{(x,0)} xdx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y)dy = \frac{x^2}{2} \Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{(x,0)}^{(x,y)} =$$

$$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C - \text{общий интеграл}$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

4* ЛДУ

Def. $y' + p(x)y = q(x)$ - ЛДУ₁
 $p, q \in C_{[a,b]}$

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Принцип: если удалось найти частное решение ДУ_{однор} (обозначим y_0), то общее решение ДУ_{неод} можно искать в виде $y = C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y' + p(x)y = 0$

Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y' + p(x)y = q(x)$

Ex. $y(x) = x^2 e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ

А $y_0 = x e^{-x}$, тогда $y = x x e^{-x} = C(x) x e^{-x}$

То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y = y(x)$

Решение а) $y' + p(x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 - \text{УРП}$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln |\tilde{C}y| = - \int p(x)dx$$

$$\bar{y} = C e^{-\int p(x)dx} = C y_0$$

$$\text{б) } y' + p(x)y = q(x)$$

Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

$$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$$

$$C'(x)y_0 + C(x) \underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$$

$$C'(x) = \frac{q(x)}{y_0} = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$