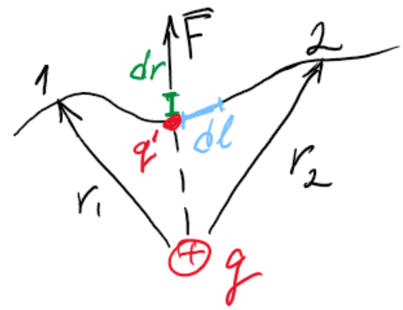
11. Теорема о циркуляции. Потенциальное векторное поле.



Со стороны заряд q на заряд q' действует сила F. Заряд q' движется по траектории, работа силы Кулона равна:

$A = \int \vec{F}d\vec{l} = \int Fdr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{kqq'}{r^2}dr$ $\qquad dr = dl\cos\alpha$

$A = -\frac{kqq'}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{kqq'}{r_1} - \frac{kqq'}{r_2} = W_1 - W_2$

$A = \int_1^2 q'\vec{E}d\vec{l} = q'\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}$

Из этого выходит, что работа по замкнутому контуру равна нулю: $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$ - теорема о циркуляции

Теорема о циркуляции является вторым рассмотренным нами уравнением Максвелла

Из теоремы о циркуляции следует то, что силовые линии электрического поля не могут быть замкнутыми, а линии однородного поля расположенны на одинаковом расстоянии друг от друга и параллельны друг другу

Теорема о циркуляции существует и в дифференциальной форме форме; по определению ротора $rot\vec{E} = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\oint \vec{E}d\vec{l}}{\Delta S}$:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

$A = W_1 - W_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ $\qquad W = q\varphi$

Потенциал точки поля численно равен работе по перемещению точечного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля

$A = q(\varphi - \varphi_\infty) = q\varphi \Longrightarrow \varphi = \frac{A}{q}$

Потенциал на бесконечности равен 0: $\varphi_\infty = 0$

$\int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2$

$\vec{E}d\vec{l} = E_l dl = -d\varphi$

$\vec{E} = -(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}) = -\mathrm{grad}\varphi = -\vec{\nabla}\varphi$

Потенциал измеряется в вольтах

Из этого можно получить данные преобразования:

$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

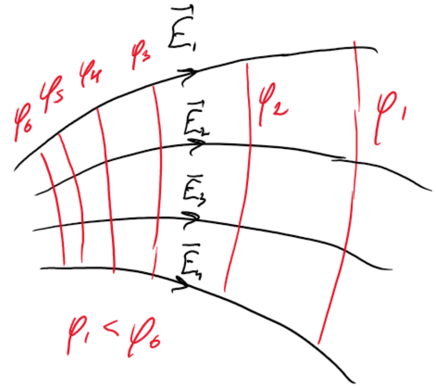
$\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$

$\mathrm{div}(-\mathrm{grad}\varphi) = -\Delta\varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ - и получить уравнение Пуассона

$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = El\cos\alpha$

В конденсаторе $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}$

Также электрическое поле изображают в виде эквипотенциальных поверхностей

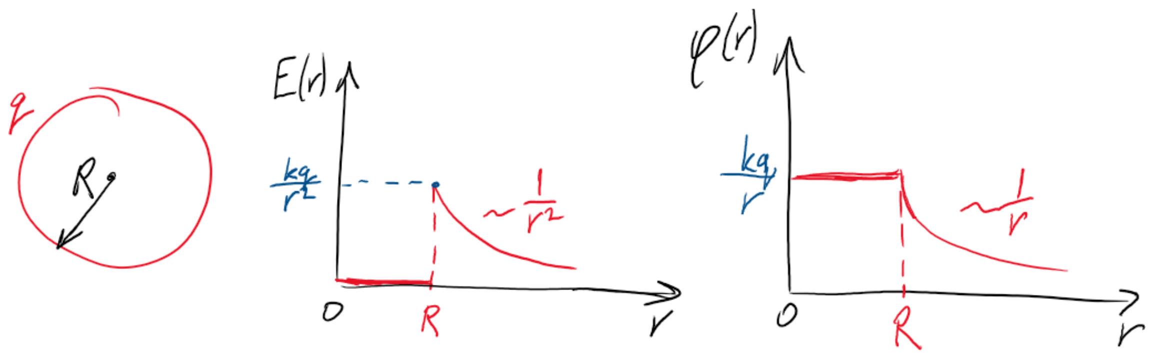


Эквипотенциальные поверхности проще линий напряженности тем, что они скалярные величины

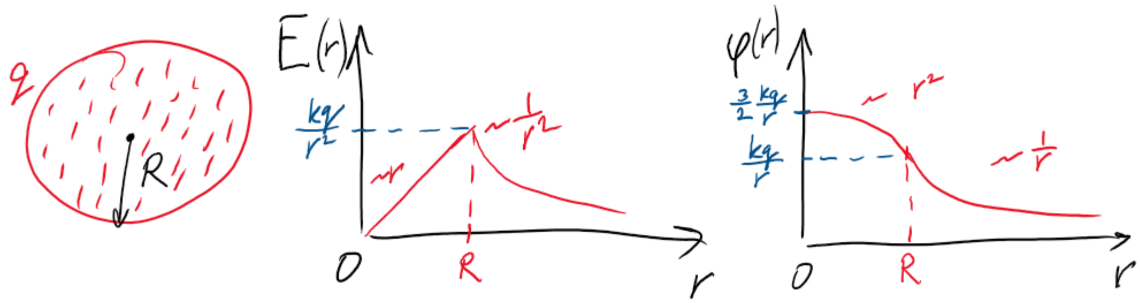
Ex. 1. Точечный заряд
$\varphi_1 - \varphi_\infty = \int_r^\infty \vec{E} d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = -\frac{kq}{r}\Big|_r^\infty = \frac{kq}{r}$

Ex. 2. Линия или цилиндр
$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2k\tau}{r} dl = 2k\tau \ln \frac{r_2}{r_1}$
Для линии, к сожалению, мы не можем найти потенциал в точке на бесконечности

Ex. 3. Сфера
Внутри сферы:
$\varphi_0 - \varphi_R = \int_0^R E dl = 0 \Longrightarrow \varphi_0 = \varphi_R$
Снаружи сферы:
$\varphi_r = \varphi_r - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}$

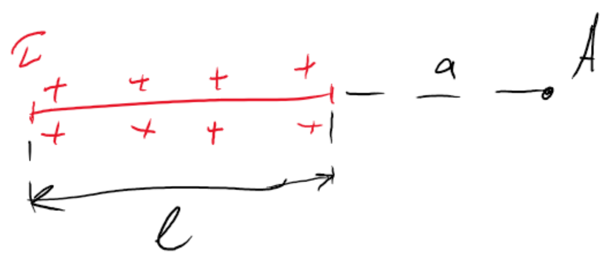


Ex. 4. Шар
Снаружи шара:
$\varphi_r - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}$
Внутри шара:
$E = \frac{kqr}{R^2}$
$\varphi_0 - \varphi_R = \int_0^R \frac{kqr}{R^3} dr = \frac{kqr^2}{2R^3}\Big|_0^R = \frac{kq}{2R}$
$\varphi_0 = \varphi_R + \frac{kq}{2R} = \frac{kq}{R} \cdot \frac{3}{2}$



Nota. Если шар сделан из диэлектрика, то не забываем про диэлектрическую проницаемость

Ex. 5. Распределение заряда



$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{kdq}{r} = \int_a^{a+l} \frac{k\tau dr}{r} = k\tau \ln \frac{a+l}{a}$

Принцип суперпозиции для потенциала:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n$$