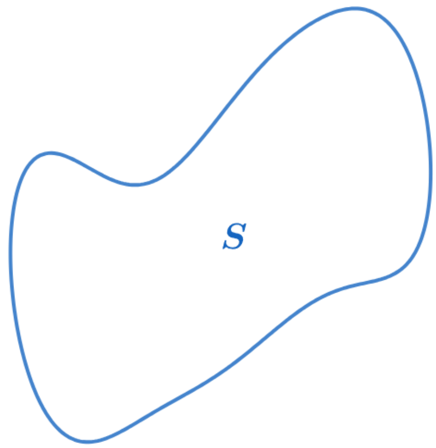
1. Определенный интеграл

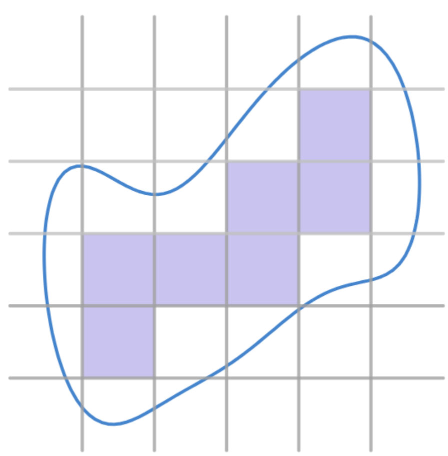
1.1. Задача и определение

Задача. Дана криволинейная фигура:



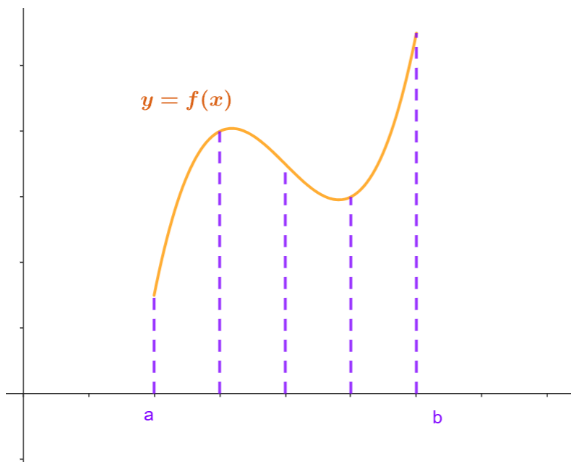
Надо найти ее площадь S

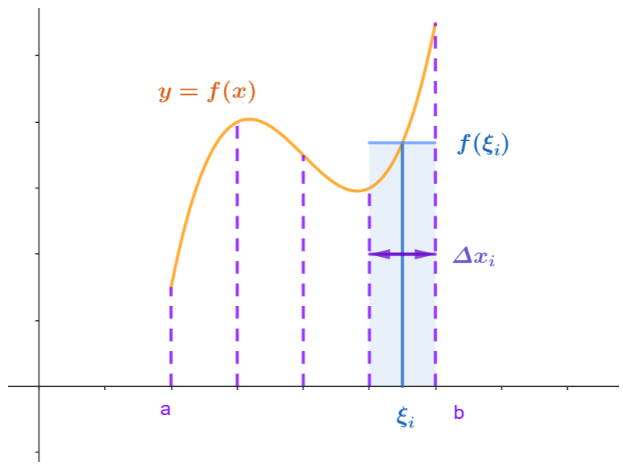
Произведем ее дробление на маленькие элементарные фигуры, площадь которых мы можем посчитать:



Уменьшаем дробление, чтобы свести погрешность к 0 (погрешность между истинной площадью и суммарной площадью прямоугольников)

Сведем задачу к простейшей в ДПСК:





1. Вводим разбиение отрезка $[a; b]$ $(a < b)$ точками $a < x_0 < \dots < x_n < b$
   $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$
2. Выбираем средние точки на частичных отрезках $[x_{i-1}, x_i]_{i=1}^{n}$
   $\{\xi_i\}_{i=1}^{n}$ - набор средних точек
   $\Delta x_i \overset{\text{обозн.}}{=} x_i - x_{i-1}$ - длина отрезка
3. Строим элементарные прямоугольники
4. Составляем сумму площадей всех таких прямоугольников:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i)$$

   - интегральная сумма Римана
5. Заменяя разбиение, выбор ξ_i при каждом n, получаем последовательность $\{\sigma_n\}$
   При этом следим, чтобы ранг разбиения $\tau = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$ при $n \to \infty$
   Иначе получим неуничтожаемую погрешность

6. **Def.** Если существует конечный предел интегральной суммы и он не зависит от типа, ранга дробления и выбора средних точек, то он называется определенным интегралом

$$\lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sigma_n = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i f(\xi_i) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx$$

Nota. Независимость от дробления и выбора средних точек существенна

Ex. $\mathcal{D} = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1], x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

Сумма Римана для этой функции неопределенна, так как все зависит от выбора средних точек:

- если средние точки иррациональные, то сумма равна единице
- иначе сумма равна нулю

В обозначении определенного интеграла a и b называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно

Дифференциал dx имеет смысл Δx, понимается как б. м., то есть:

$f(x)dx$ - площадь элементарных прямоугольников, тогда

$\int_a^b f(x)dx$ - сумма этих прямоугольников

1. $\int_a^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=} 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Можно доказать, что определенный интеграл существует для всякой непрерывной на отрезке функции

Геом. смысл. Заметим в определении площадь подграфика функции ($f(x) \geq 0$)

Заметим, что для $f(x) \leq 0 \quad \int_a^b f(x)dx = -S$

1.2. Свойства

1. Линейность пределов $\Longrightarrow$ линейность пределов
   $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$
2. Аддитивность (часто для кусочно-непрерывных функций с конечным числом точек разбивается на участки непрерывности)
   $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
   Доказательства строятся на свойствах конечных сумм и пределов
3. Оценка определенного интеграла
   $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ (имеет наимен. (m) и наибол. (M) значения). Тогда:
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
   □ Док-во:
   По теореме Вейерштрасса 2 $f(x)$ принимает наименьшее и наибольшее значения и для всякого x из $[a; b]$: $m <= f(x) <= M$
   Так как все средние точки принадлежат $[a; b]$, то
   $m \leq f(\xi_i) \leq M \quad \forall \xi_i$
   $m\Delta_i \leq f(\xi_i)\Delta_i \leq M\Delta_i$
   $m\sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq f(\xi_i)\sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq M\sum_{i=1}^n \Delta x_i$
   Предельный переход:
   $\lim\limits_{n\to\infty,\ \tau\to 0} m\sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq \lim\limits_{n\to\infty,\ \tau\to 0} M\sum_{i=1}^n \Delta x_i$
   $m\lim\limits_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\lim\limits_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i$
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
   □
4. **Th.** Лагранжа о среднем (в интегральной форме)

$f(x) \in C'_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Тогда найдется такая средняя точка, что

$f(x) \in C_{[a,b]} \Longrightarrow \exists \xi \in (a,b)\ f(\xi)(b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$

□

$m \leq \underbrace{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx}_{\text{некоторое число}} \leq M$ по свойству выше

По теореме Больцано-Коши $f(x)$ непрерывна, поэтому пробегает все значения от m до M

Значит найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

□

5. Сравнение интегралов

   $f(x), g(x) \in C_{[a,b]} \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x)$

   Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

   □

   $$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(f(\xi_i)-g(\xi_i))}_{\geq 0}\underbrace{\Delta x_i}_{\geq 0} \geq 0$$

   □

6. Интеграл и модуль

   $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leq \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

   □

   $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

   $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$

   Докажем, что $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim_{n\to\infty} \sigma_n|$

   Так как определен $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = S \in \mathbb{R}$, то можно рассмотреть случаи

   $S > 0: \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n > 0$ (вблизи S)

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim_{n\to\infty} \sigma_n|$

   $S > 0: \quad \exists n_0\ \forall n > n_0\ \sigma_n < 0$ (вблизи S)

   $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = -\lim_{n\to\infty} \sigma_n = |\lim_{n\to\infty} \sigma_n|$

   $S = 0: \displaystyle\lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = |\lim_{n\to\infty} \sigma_n| = 0$

   $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| = |\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sigma_n| = \lim_{n\to\infty} |\sigma_n| = \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \lim_{n\to\infty,\ \tau\to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|\Delta x_i$ (модуль суммы меньше или равен сумме модулей)

   □

Nota. Интеграл и разрыв

Изъятие из отрезка не более, чем счетного числа точек, не меняет значение интеграла, что позволяет считать интеграл на интервале

Nota. Сходимость интеграла - в определении интеграла подчеркивается, что это число. Если предел интегральных сумм не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится

Nota. Вычисления

Определение дает способ вычисления и его можно упростить:

$\forall i \ \Delta x_i = \Delta x, \quad \xi_i = \left[\begin{array}{l} x_{i-1} \\ x_i \end{array}\right.$ - концы отрезка

Так вычисляют «неберущиеся интегралы»

Для функций, у которых первообразные выражаются в элементарных функциях используется не этот метод, а формула Ньютона-Лейбница

1.3. Вычисление определенного интеграла