

- **Рекуррентные соотношения** (Recurrence relations)

Решить рекуррентное соотношение - найти закрытую формулу

Ex. Арифметическая прогрессия

$$a_n = \begin{cases} a_0 = \text{const} & n = 0 \\ a_{n-1} + d, & n > 0 \end{cases}$$

Решение:  $a_n = a_0 + nd$  - анзац (Ansatz, догадка)

Проверка:  $a_n = a_0 + nd = a_{n-1} + d = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + nd$  - 👍👍

- **Метод характеристического уравнения**

Рекуррентное соотношение  $\xrightarrow{a_n \rightarrow r^n}$  Характеристическое уравнение  $\xrightarrow{\text{решение}}$  Корни  $\xrightarrow{\text{магия}}$  Решение  $\rightsquigarrow$  Проверка

Ex.  $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0$$

$$r_{1,2} = -2, 3$$

Если  $r_1 \neq r_2$ , то  $a_n = ar_1^n + br_2^n$  - общее решение  
 Если  $r_1 = r_2 = r$ , то  $a_n = ar^n + bnr^n$

$$a_n = a(-2)^n + b(3)^n$$

Пусть  $\begin{cases} a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 8 = -2a + 3b \end{cases}$

$$-5a = 5 \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \implies a_n = -(-2)^n + 2 \cdot 3^n$$

- **Разделяй и властвуй** (Divide-and-Conquer)

$$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{работа рекурсии}} + \underbrace{\theta(n)}_{\text{работа разделения/слияния}}$$

- **Основная теорема о рекуррентных соотношениях** (Master Theorem)

\*ТЫК\*

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Из этого,  $c_{crit} = \log_b a$

I случай: слияние < рекурсия

$$\overline{f(n) \in O(n^c)}, \text{ где } c < c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$$

$$f(n) \in O(n^c) \iff f(n) \in o(n^{c_{crit}})$$

II случай: слияние  $\approx$  рекурсия

$$\overline{f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^k n)} \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^{k+1} n)$$

Здесь  $k \geq 0$ . В общем случае см. википедию

III случай: слияние > рекурсия

$$\overline{f(n) \in \Omega(n^c)}, \text{ где } c > c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(f(n))$$

- **Метод Аккра-Бацци** (Akra-Bazzi method)

\*ТЫК\*

$$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^k a_i T(b_i n + h_i(n)) \implies T(n) \in \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx\right)\right), \text{ где } p - \text{решение для}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i^p = 1$$

$$\begin{cases} k = \text{const} \\ a_i > 0 \\ 0 < b_i < 1 \\ h_1(n) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right) - \text{малые возмущения} \end{cases}$$

Ex.  $T(n) = T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + n$  - асимптотика сортировки слиянием

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2} + O(1)\right) + T\left(\frac{n}{2} - O(1)\right) + \theta(n)$$

$$\text{Здесь } b_i = \frac{1}{2}, \quad h = \pm O(1) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$$

$$\text{Ex. } T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$a_1 = 1, b_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1$$

$$p = 1$$

$$\int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$$

$$T(n) \in \Theta(n \cdot (1 + \ln n))$$

$$T(n) \in \Theta(n \ln n)$$

- Решить рекуррентное соотношение  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ , где  $a_0 = 1, a_1 = 3$

Используем производящие функции:

$$A(x) = \frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} \rightarrow 2^{n+1} - 1$$