В теории вероятности обычно изучают случайные события
Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поисков закономерности в сериях случайных экспериментах
Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

число бросков	число гербов	частота
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

1. Статистическое определение вероятности

Пусть проводится n реальных экспериментов, при которых событие A появилось n_A раз
Отношение $\dfrac{n_A}{n}$ называется частотой события A
Эксперименты показывают, что при увеличении числа n частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность: $P(A) \approx \dfrac{n_A}{n}$ при $n \to \infty$

Пространство элементарных исходов. Случайные события

Def. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω

Def. Случайными событиями называется подмножество $A \subset \Omega$. События A наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества A

Ex. 1. Бросок монеты: $\Omega = \{\text{Г}, \text{Р}\}$, $A = \{\text{Г}\}$ - выпал герб

Ex. 2. Игральная кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

Ex. 3. Монета бросается дважды.
а) Учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{РГ}, \text{ГР}\}$
а) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\text{ГГ}, \text{РР}, \text{ГР}\}$

Ex. 4. Кубик дважды: $\Omega = \{\langle i, j\rangle \mid 1 \le i, j \le 6\}$
$A = \{\text{разность} \;\vdots\; 3\} = \{\langle 1, 4\rangle; \langle 4, 1\rangle; \langle 2, 5\rangle; \langle 5, 2\rangle; \dots\}$

Ex. 5. Монета бросается до первого герба: $\Omega = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}, \dots\}$ - счетно-бесконечное множество

Ex. 6. Монета бросается на плоскость: $\Omega = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y\rangle$ - центр монеты$\}$ - несчетное число исходов

Операции над событиями

Ω - достоверные события (наступают всегда)

$\varnothing$ - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

Def. 1. Суммой $A + B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A или событие B (хотя бы одно из них)

Def. 2. Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло событие A и событие B (оба из них)

Nota. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$ - произошли все эти события

Def. 3. Противоположным A событием называется событие $\overline{A}$, состоящее в том, что событие A не произошло

Nota. $\overline{A} = A$

Def. 4. Дополнение (разность) $A \setminus B$ называется событие $A \cdot \overline{B}$

Def. 5. События A и B называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одной эксперименте)

Def. 6. События A влечет события B, если $A \subset B$ (если наступает A, то наступит B)

Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления: $0 \le P(A) \le 1$ - вероятность наступления события A

Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

Def. $\boxed{P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{m}{n}}$, где n - число всех возможных исходов, m - число благоприятных исходов

В частности, если $\Omega = n$ и A_i - элем. исх., то $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$

Свойства:

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(A) = 1 \quad (m = n)$

3) $P(\varnothing) = 0 \quad (m = 0)$

4) Если события A и B несовместны, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффон)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$ - мера Ω в $\mathbb{R}^n$ (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в A зависит только от меры A и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Ex. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$

$\mu(A) = (20 - 3 - 3)^2 = 196$

$P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \dfrac{196}{400} = 0.49$

Ex. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом, $2l$ - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$\exists x \in [0;1]$ - расстояние от центра до ближайшего края, $\varphi \in [0;\pi]$ - угол

$\Omega = [0;1] \times [0;\pi]$

Событие A (пересечет стык) наступает, если $x \le l \sin\varphi$

$P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$

$S(\Omega) = \pi l$

$S(A) = \displaystyle\int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi\Big|_0^\pi = -l(-1-1) = 2l$

$P(A) = \dfrac{2l}{\pi l} = \dfrac{2}{\pi}$