Th. 1. о сдвиге:

Ряд Фурье не изменится, если $[-\pi, \pi]$ заменить на $[a; a+2\pi]$

Докажем, что если $\varphi(t)$ - 2π-периодична, то $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = \int_{a}^{a+2\pi} \varphi(t)dt$

У нас $f(x)$ с периодом $[-\pi, \pi]$, обозначим $x = t - 2\pi$ $(t = x + 2\pi)$.

Рассмотрим $\int_b^a f(x)dx = \int_{b+2\pi}^{a+2\pi} f(t-2\pi)dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(t)dt = \int_{b+2\pi}^{c+2\pi} f(x)dx$

Пусть $b = -\pi, c = a$, тогда $\int_b^c f(x)dx = \int_{-\pi}^{a} f(x)dx = \int_{-\pi+2\pi}^{a+2\pi} f(x)dx = \int_a^{\pi} f(x)dx$

$\int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_a^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi}^{a+2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

Th. 2. о растяжении:

$f(x)$ - $2l$-периодична: $(T \ : \ [-l, l])$

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$

$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}xdx$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}xdx$

Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$

$f(x)$ - $2l$-периодична: $(T \ : \ [-l, l])$

Обозначим $x = \frac{lt}{\pi} \quad t\Big\uparrow_{-\pi}^{\pi} \quad x\Big\uparrow_{-l}^{l}$

$f(\frac{lt}{\pi}) = \varphi(t)$ - 2π-периодична

Ряд Фурье для $\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$, где

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ktdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ktdt =$$
$$= \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ktd\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}xdx$$

Аналогично b_k.

Ex. 1. $f(x) = x \qquad x \in [-1, 1]$

$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x\cos\frac{k\pi x}{d}x = \int_{-1}^{1} x\cos k\pi xdx = \frac{1}{k\pi}\left(x\sin k\pi x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\sin k\pi xdx\right) = -\frac{1}{k\pi}\cdot 0 = 0$

$b_k = \int_{-1}^{1} x\sin k\pi x dx = -\frac{1}{k\pi}\left(x\cos k\pi x\Big|_{-1}^{1} - \int_0^1 \cos k\pi x dx\right) = -\frac{2}{k\pi}\left((-1)^k - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1\right) = \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k\pi}$

$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cdot 2}{k\pi}\sin k\pi x$

4.2. Оценка коэффициентов Фурье

Nota. Вернемся к приближению $f(x)$ тригонометрическим многочленом $T_n(x)$. Ранее говорилось, что из всех многчленов типа $\sum_{m=0}^{n} a_m\cos mx + b_m\sin mx$ минимально отстоящим будет многочлен Фурье, то есть с a_m и b_m, равными коэффициентам Фурье.

Зададим расстояние δ_n между $f(x)$ и многочленом $T_n(x)$ формулой

$\delta_n^2 = \|f - T_n\|^2 = (f - T_n, f - T_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x) - T_n(x))^2\, dx = \Big[[a,b] = [-\pi,\pi]\Big] =$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{m=1}^{n} a_m\cos mx + b_m\sin mx\right)^2 dx$

Далее, честно интегрируя, можно убедиться, что δ будет наименьшим, если a_m и b_m - коэффициенты Фурье

Преобразуем $\|f - f_0\|^2$:

$\delta_n^2 = \|f - \sum_{m=0}^{n}(f,e_m)e_m\|^2 = \|f\|^2 - 2\left(f, \sum_{m=0}^{n}(f,e_m)e_m\right) + \left\|\sum_{m=0}^{n}(f,e_m)e_m\right\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{m=0}^{n}(f,e_m)^2 + \sum_{m=0}^{n}(f,e_m)^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=0}^{n}(f,e_m)^2$ - квадраты коэффициентов разложения

Тогда $\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(a_m^2 + b_m^2)$

Так как $\delta_n^2 \geq 0$, то $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{k}(a_m^2 + b_m^2)$

Так как $\sum_{m=1}^{n}$ растет и ограничена, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty}$ сходитсяя

Можем записать: $\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2 + b_m^2)}$ - неравенство Бесселя

Можем усилить неравенство, если доказать, что при $n \to \infty$ $\delta_n^2 \to 0$. В этом случае $f(x)$ раскладывается по полной системе функций $\{\cos mx, \sin mx\}$

Def. Система $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ называется полной, если $\forall f(x) \notin \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0 \Longrightarrow f(x) = 0$

$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m^2 + b_m^2)}$ - равенство Парсеваля

Заметим, что из оценки ранее $\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{n}(f,e_m)^2 = \sum_{m=1}^{n} f_m^2$

В ∞-мерном пространстве $\|f\|^2 = \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m^2$ - «теорема Пифагора»

Nota. Эти утверждения верны для любых ортогональных систем функций, а не только для тригонометрических

4.3. Интеграл Фурье

$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = I \in \mathbb{R}$
$\exists$ ряд Фурье для $f(x)$ на $[-l, l]\ \forall l > 0$, то есть

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\frac{m\pi x}{l} + b_m \sin\frac{m\pi x}{l} = \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{m\pi t}{l}dt\right)\cos\frac{m\pi x}{l} + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{m\pi t}{l}dt\right)\sin\frac{m\pi x}{l} + \right] = \\
&= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\frac{m\pi}{l}(t-x)dt
\end{aligned}
$$

Исследуем при $l \to \infty$:
$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt \le \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(t)|dt \le \frac{I}{2l} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$
Обозначим $\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \ldots, \alpha_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \Delta a_m = \frac{\pi}{l}$
Рассмотрим $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{m\pi(t-x)}{l}dt}_{\text{функция переменной } l} = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\alpha_m(t-x)dt\right)\Delta\alpha_m$
Рассмотрим переменную $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha_m = \alpha(m), \Delta\alpha_m = \Delta\alpha$ - дифференциальное
Имеем аналог интегральной суммы $\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_m)\Delta\alpha_m, n \to \infty$
Тогда $\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha}$ - интеграл Фурье

Nota. От дискретного спектра частот $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ перешли к непрерывному спектру α
Nota. В точках разрыва $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)dt\right)d\alpha$

Преобразуем интеграл:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\alpha t\cos\alpha x + \sin\alpha t\sin\alpha x)dt\right)d\alpha = \\
&= \int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha t\cos\alpha x dt + \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha t\sin\alpha x dt\right)d\alpha
\end{aligned}
$$

Если $f(x)$ - четная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt = 2\int_0^{+\infty}\ldots;\quad \int_{-\infty}^{\infty}\sin\alpha t dt = 0$

Если $f(x)$ - нечетная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt = 2\int_0^{+\infty}\ldots;\quad \int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha t dt = 0$

Обозначим $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt \qquad \Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt$

Тогда $f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\alpha)\cos\alpha x d\alpha}_{\text{косинус-преобразование Фурье}},\quad f(x) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \Phi(\alpha)\sin\alpha x d\alpha}_{\text{синус-преобразование Фурье}}$

Ex. $f(x) = e^{-\beta x}, \quad (\beta > 0, x \geq 0)$ Lab.

$F(\alpha) =?\ \Phi(\alpha) =? \qquad e^{-\beta x} = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{\beta^2+\alpha^2}d\alpha$