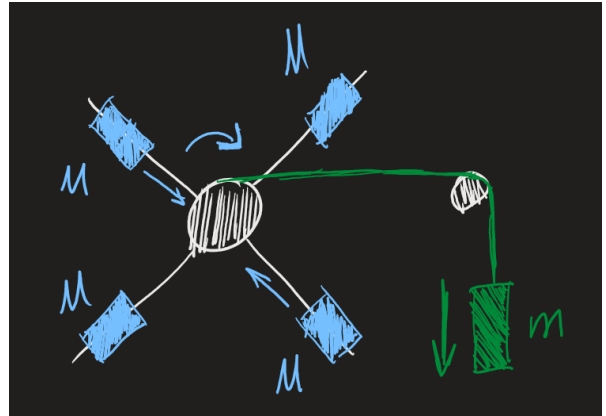


5. Вращательное движение. Моменты силы и импульса

Одной из лабораторных работ в курсе механики является работа с маятником Обербека (представлен на рисунке). Принцип его работы таков: к вращающемуся колесу с грузиками на спицах привязана нить, другой конец которой привязан к грузу через блок, груз падает, вращает колесо. В ходе эксперимента можно заметить, что при приближении грузиков к центру колесо начинает раскручиваться быстрее.



Рассмотрим величины, действующие при вращательном движении:

1. Момент силы M

$$M = F \cdot l$$

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] \quad M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = l \cdot F$$

Так как момент силы - векторное произведение, то вектор момента силы направлен перпендикулярно к плоскости радиус-вектора и вектора силы

$$[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$$

Аналогично рассмотрим момент силы для противоположных сил:

2. Момент пары сил

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1 \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \vec{F}_{21}] = [(\vec{r}_2 + \vec{r}_{21}) \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \vec{F}_{21}] = [\vec{r}_2 \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_{21} \vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2 \vec{F}_{21}]$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_{21} \vec{F}_{12}] = [\vec{r}_{12} \vec{F}_{21}]$$

Момент пары сил равен произведению вектора силы на радиус-вектор между точками приложения сил

3. Момент импульса L

Аналогично моменту силы можем определить момент импульса:

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$$

$$L = r \cdot p \cdot \sin \alpha = p \cdot l$$

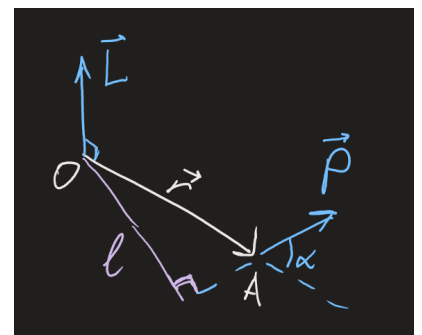
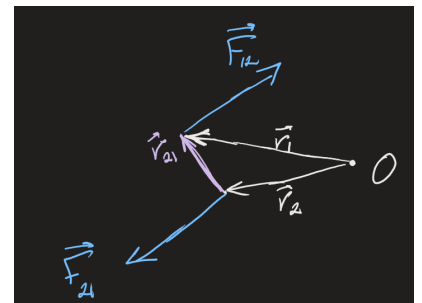
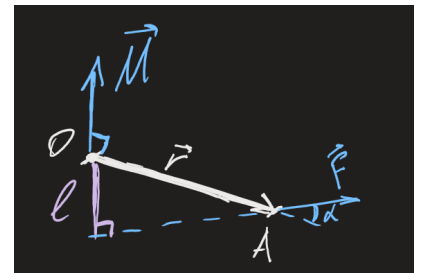
$$[L] = \text{кг} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$$

4. Уравнение моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{v}\vec{p}] + [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

$$[\vec{v}\vec{p}] \stackrel{0}{\leftarrow} \vec{v} \uparrow \vec{p}$$



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \implies \vec{F}_{\text{внешн}} = 0 \implies \vec{p} = \text{const} - \text{закон сохранения импульса}$$

5. Закон сохранения момента импульса

Пусть дана система материальных точек. На них действуют силы, которые мы можем разделить на внутренние и внешние

В замкнутой системе внешние силы сведены к 0:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_{\text{внешн}} + \vec{M}_{\text{внутр}} \xrightarrow{0}$$

Поэтому:

$$\vec{M}_{\text{внешн}} = 0 \implies \vec{L} = \text{const} - \text{закон сохранения момента импульса}$$

6. Основное уравнение динамики вращательного движения

$$L_i = m_i v_i \cdot r_i = m_i \omega \cdot r_i^2 = \omega m_i r_i^2$$

$$L = \sum L_i = \omega \sum m_i r_i^2$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad L_z = I\omega_z$$

$$I = \sum m_i r_i^2 - \text{момент инерции системы материальных точек, } [I] = \text{с} \cdot \text{м}^2$$

$$\text{В интегральной форме: } I = \int r^2 dm$$

Здесь же выделим различное распределение массы

$$\text{a) Линейное: } \tau = \frac{dm}{dl} = \frac{m}{l}$$

$$\text{b) Поверхностное: } \sigma = \frac{m}{s} = \frac{dm}{ds}$$

$$\text{c) Объемное: } \rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV}$$

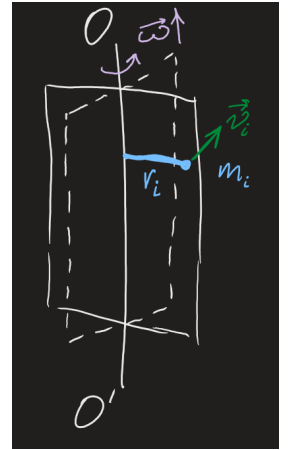
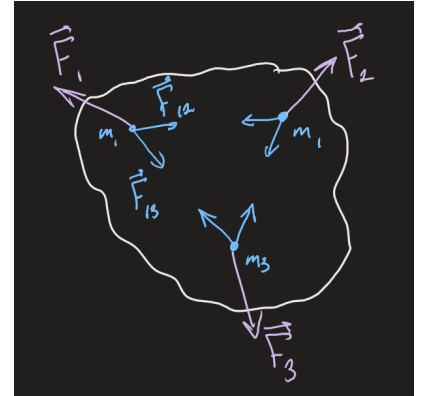
$$L_z = I\omega_z$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega_z}{dt} = I\beta_z$$

$$\boxed{M_z = I\beta_z} - \text{основное уравнение динамики вращательного движения}$$

7. Расчет моментов инерции твердых тел

Рассмотрим моменты инерции для твердых тел разной формы:



(a) **Стержень**

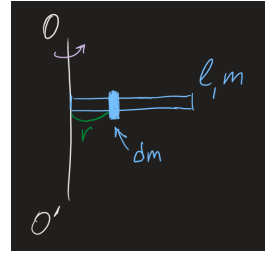
$$I = \int r^2 dm$$

$$I_{\text{м.т.}} = mr^2$$

$$dI = r^2 dm$$

$$I = \sum_i dI_i = \int_0^l dI = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l r^2 \tau dl = \int_0^l r^2 \tau dr = \tau \frac{r^3}{3} \Big|_0^l = \tau \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$I_{\text{стерж}} = \frac{ml^2}{3}$$



(b) **Кольцо**

Для кольца тривиально: $I_{\text{кольц}} = r^2 m$

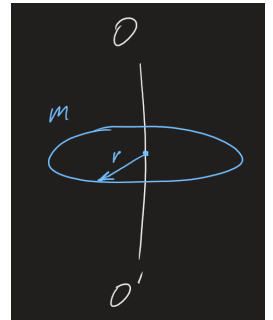
(c) **Диск**

Разбиваем диск на кольца с радиусом r толщиной dr

$$dI = dmr^2 = \sigma dsr^2 = \sigma 2\pi r dr r^2 = \sigma dsr^2$$

$$I = \int \sigma 2\pi r^3 dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$I_{\text{диск}} = \frac{mR^2}{2}$$



(d) **Теорема Штейнера**

Теорема Штейнера гласит, что момент инерции тела для неподвижной оси равен сумме момента инерции для оси тела, проходящей через центр масс и параллельной исходной и произведению квадрата расстояния и массы

$$I = I_0 + md^2$$

Пример: кольцо вращается вокруг оси, расположенной на торце кольца, зная момент импульса в центральной оси кольца и расстояние между осями, можем узнать момент импульса для кольца

