

## Содержание

7. Комбинаторика	2
8. Рекуррентности и производящие функции	9

## 7. Комбинаторика

### Базовые понятия:

- **Алфавит** (Alphabet)  $\Sigma$  (или  $X$ , *Ex.*  $X = \{a, b, c\}$ ) - множество символов в нашей системе
- **Диапазон** (Range)  $[n] = \{1, \dots, n\}$  - конечное множество последовательных натуральных чисел
- **Расстановка** (Ordered arrangement) - последовательность каких-либо элементов (тоже самое, что кортеж), *Ex.*  $x = (a, b, c, d, b, b, c) \quad |x| = n$   
 Расстановку можно представить как функцию  $f: \underbrace{[n]}_{\text{domain}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{codomain}}$ , которая по порядковому номеру выдает символ  
 $\text{ran } f = \{c \in \Sigma \mid \exists i \in [n] : f(i) = c\}$
- **Перестановка** (Permutation) -  $\pi: [n] \rightarrow \Sigma$ , где  $n = |\Sigma|$   
 Расстановка  $\pi$  - биекция между  $[n]$  и  $\Sigma$

*Ex.*  $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

Одна из задач комбинаторики - посчитать количество различных расстановок или перестановок при заданных  $n$  и  $\Sigma$

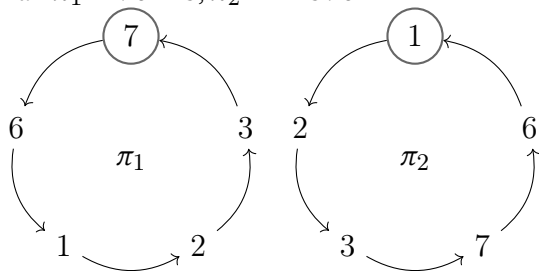
- **$k$ -перестановка** ( $k$ -permutation) - расстановка из  $k$  различных элементов из  $\Sigma$

*Ex.*  $\underbrace{[31475]}_{5\text{-perm из } \Sigma=[7]} = 5$

$k$ -перестановка - инъекция  $\pi: [k] \rightarrow \Sigma$  ( $k \leq n = |\Sigma|$ )

- $P(n, k)$  - множество всех  $k$ -перестановок алфавита  $\Sigma = [n]$  (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и  $[n]$ )  
 $P(n, k) = \{f \mid f: [k] \rightarrow [n]\}$   
 Чаще интересует не само множество, а его размер, поэтому под обозначением  $P(n, k)$  подразумевается  $|P(n, k)|$
- $S_n = P_n = P(n, n)$  - множество всех перестановок. Также чаще всего нас будет интересовать не множество, а его размер  
 $|S_n| = n!$  - всего существует  $n!$  перестановок  
 $|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
- **Циклические  $k$ -перестановки** (Circular  $k$ -permutations)  
 $\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$  - циклически эквивалентны тогда и только тогда:  
 $\exists s \mid \forall i \pi_1((i+s) \% k) = \pi_2(i)$

Ex.  $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$



$P_C(n, k)$  - множество всех циклических  $k$ -перестановок в  $\Sigma$

$$|P_C(n, k)| \cdot k = |P(n, k)|$$

$$|P_C(n, k)| = \frac{|P(n, k)|}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

- **Неупорядоченная расстановка  $k$  элементов** (Unordered arrangement of  $k$  elements) - мультимножество  $\Sigma^*$  размера  $k$

Ex.  $\Sigma^* = \{\Delta, \Delta, \square, \Delta, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \Delta, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$

Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:

$r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $r(x)$  - кол-во повторений объекта  $x$

- **$k$ -сочетание** ( $k$ -combination) - неупорядоченная перестановка из  $k$  различных элементов из  $\Sigma$  (еще называют  $k$ -подмножеством,  $k$ -subset)

Соответственно  $C(n, k)$  - множество всех таких  $k$ -сочетаний

$$|C(n, k)| = C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$C(n, k) = \binom{\Sigma}{k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot k! = |P(n, k)|$$

$$|C(n, k)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Th.** Биномиальная теорема (Binomial theorem):

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$  - биномиальный коэффициент

**Th.** Мультиномиальная теорема (Multinomial theorem)

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$  - мультиномиальный коэффициент

Ex. мультиномиальной теоремы:

$$(x+y+z)^4 = 1(x^4+y^4+z^4) + 4(xy^3+xz^3+x^3y+yz^3+y^3z+yz^3) + 6(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2) + 12(xyz^2+xy^2z+x^2yz)$$

Доказательство:

□

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1 = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}, \text{ где } k_t - \text{ количество } x \text{ с индексом } t \text{ в}$$

одночлене ( $k_t = |\{j \in [n] | i_j = t\}|$ )

Получается мультиномиальный коэффициент  $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$  будет равен количеству способов поставить  $k_1$  единиц в индексы в  $x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1$ ,  $k_2$  двоек в индексы и так далее

У нас есть  $\binom{n}{k_1}$  способов поставить единицу в индексы в одночлен,  $\binom{n-k_1}{k_2}$  способов поставить двойку и т. д., получаем:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = [n-k_1-\dots-k_r=0] = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)! k_2!(n-k_1-k_2)! \dots k_r!0!} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$$

- **Перестановка мультимножества**  $\Sigma^*$  (Permutations of a multiset  $\Sigma^*$ )

$$\Sigma^* = \{\Delta^1, \Delta^2, \square, \star\} = (\Sigma, r) \quad r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$$

Nota.  $\begin{cases} \Delta^1, \Delta^2, \square, \star \\ \Delta^2, \Delta^1, \square, \star \end{cases}$  считаются равными перестановками

$$|P^*(\Sigma^*, n)| = \frac{n!}{r_1! \dots r_s!} = \binom{n}{r_1, \dots, r_s} - \text{ количество перестановок мультимножества, где } r_i - \text{ количество } i\text{-ого элемента в мультимножестве}$$

- **k-комбинация бесконечного мультимножества** ( $k$ -combinations of infinite multiset) - такое субмультимножество размера  $k$ , содержащее элементы из исходного мультимножества. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента  $r_i$  в исходном мультимножестве не больше размера комбинации  $k$

$$\Sigma^* = \{\infty \cdot \Delta, \infty \cdot \square, \infty \cdot \star, \infty \cdot \bullet\}^* \quad n = |\Sigma^*| = \infty$$

$$\Sigma = \{\Delta, \square, \star, \bullet\} \quad s = |\Sigma| = 4$$

Ex. 5-комбинация:  $\{\Delta, \star, \square, \star, \square\}$

Разделяем на группы по  $\Sigma$  палочками:

$$\Delta | \square \square | \star \star |$$

Заменяем элементы на точки - нам уже не так важен тип элемента, потому что мы знаем из разделения:

$$\bullet | \bullet \bullet | \bullet \bullet |$$

$$(\text{другой Ex. } \bullet \bullet \bullet \bullet | | | | \bullet = \{4 \cdot \Delta, 1 \cdot \bullet\})$$

Получается всего  $k$  точек и  $s-1$  палочек, всего  $k+s-1$  объектов. Получаем мультимножество  $\{k \cdot \bullet, (s-1) \cdot | \}$  (*Star and Bars method*)

Получаем количество перестановок этого мультимножества:  $\frac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} = \binom{k+s-1}{k, s-1} =$

$$\binom{k+s-1}{k} = \binom{k+s-1}{s-1}$$

что и является количеством возможных  $k$ -комбинаций бесконечного мультимножества

- **Слабая композиция** (Weak composition) неотрицательного целого числа  $n$  в  $k$  частей - это решение  $(b_1, \dots, b_k)$  уравнение  $b_1 + \dots + b_k = n$ , где  $b_i \geq 0$

$$|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n+k-1}{n, k-1}$$

Для решения воспользуемся аналогичным из доказательства мультиномиальной теоремы приемом:

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Поставим палочки:

$$n = 1 + 1 \left| 1 \right| \dots + 1$$

Получаем задачу поиска количеств  $k$ -комбинаций в мультимножестве:  $\{n \cdot 1, (k-1) \cdot \left| \right|\};$

$$\text{получаем } \binom{n+k-1}{n, k-1}$$

- **Композиция** (Composition) - решение для  $b_1 + \dots + b_k = n$ , где  $b_i > 0$

$$|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$$

Мы знаем, что одну единичку получит каждая  $b_i$ , поэтому мы решаем это как слабую композицию для  $n-k$  в  $k$  частей

- **Число композиций  $n$  в некоторой число частей** (Number of all compositions into some number of positive parts)

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

$$\text{Пусть } t = k-1, \text{ тогда } \sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} = 2^{n-1}$$

- **Разбиения множества** (Set partitions) - множество размера  $k$  непересекающихся непустых подмножеств

$$\begin{aligned} \text{Ех. } \{1, 2, 3, 4\}, n=4, k=2 \rightarrow [\text{разбиение в 2 части}] \rightarrow & \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \\ & \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \\ & \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \\ & \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\} \end{aligned}$$

$|\{\text{разбиение } n \text{ элементов в } k \text{ частей}\}| = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S_k^{II}(n) = S(n, k)$  - число Стирлинга второго рода

$$\text{Для примера выше число Стирлинга } S(4, 2) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$$

Согласно Википедии [для формулы Стирлинга](#) есть формула:  $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n$

- **Формула Паскаля** (Pascal's formula)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга** (Recurrence relation for Stirling<sup>(2)</sup> number):

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

Возьмем какое-либо разбиение для  $n-1$  элементов на  $k$  частей, тогда возможны два случая:

1) В  $k$ -ое множество нет ни одного элемента, тогда мы обязаны в него положить наш  $n$ -ый элемент по определению, количество перестановок будет равно  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \cdot 1$

2) В  $k$ -ом множестве уже есть элементы, тогда все множества будут заполнены и у нас будет выбор из  $k$  множеств, куда положить  $k$ -ый элемент, то есть  $k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$

Эти два случая независимы, поэтому получаем  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$

- **Число Белла** (Bell number) - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера  $n$

Число Белла вычисляется по формуле:  $B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m)$

- **Целочисленное разбиение** (Integer partition) - решение для  $a_1 + \dots + a_k = n$ , где  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$

$p(n, k)$  - число целочисленных разбиений  $n$  в  $k$  частей

$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$  - число всех разбиений для  $n$

Ex.  $5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

- **Принцип включения/исключения** (Principle of Incusion/Exclusion (PIE))

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ex. есть  $n = 11$  объектов, нужно распределить их между  $k = 3$  группами  $A$ ,  $B$  и  $C$

Эту задачу можно решить с помощью *Stars and bars method*, тогда мы получим

$$\binom{n+k-1}{n, k-1} = \binom{13}{2} = 78$$

Введем ограничение: пусть мощность каждого множества будет не больше 4.

Посчитаем количество неподходящих вариантов:

$$|A| = |\{b_A \geq 5\}| = 1 \cdot \binom{11-5+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$|A \cap B| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5\}| = \binom{3}{2} = 3$$

$$|A \cap B \cap C| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5 \wedge b_C \geq 5\}| = 0$$

Итого получаем  $28 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 0 = 75$  вариантов.

Далее исключаем эти варианты из количества всех вариантов, а значит подходящих вариантов всего  $78 - 75 = 3$

• **Принцип включения/исключения** (Inclusion/Exclusion Principle (PIE))

- $X$  - начальное множество элементов
- $P_1, \dots, P_m$  - свойства
- Пусть  $X_i = \{x \in X \mid P_i \text{ - свойство для } x\}$
- Пусть  $S \in [m]$  - множество свойств
- Пусть  $N(S) = \bigcap_{i \in S} X_i = \{x \in X \mid x \text{ имеет все свойства } P_1, \dots, P_m\}$

$$N(\emptyset) = X \quad |N(\emptyset)| = |X| = n$$

• **Теорема ПВ/И** (Theorem PIE)

$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)|$  - количество элементов множества  $X$ , не имеющих никакого из свойств

Доказательство:

Пусть  $x \in X$

Если  $x$  не имеет свойств  $P_1, \dots, P_m$ , то  $x \in N(\emptyset)$  и  $x \notin N(S) \forall S \neq \emptyset$

Поэтому  $x$  дает в общую сумму 1

Иначе, если  $x$  имеет  $k \geq 1$  свойств  $T \in \binom{[m]}{k}$ ,

то  $x \in N(S)$  тогда и только тогда, когда  $S \subseteq T$ .

Поэтому  $x$  дает в сумму  $\sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 0$

• **Следствие**

$$|\bigcup_{i \in [m]} X_i| = |X| - \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m], S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} |N(S)|$$

• **Приложения:**

- \* Определяете «плохие» свойства  $P_1, \dots, P_m$
- \* Посчитываете  $N(S)$
- \* Применяете ПВ/И

• **Количество сюръекций (правототальных функций)**

\*  $X = \{\text{функция } f : [k] \rightarrow [n]\}$

\* Плохое свойство  $P_i : X_i = \{f : [k] \rightarrow [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$

\*  $|\{\text{сюръекции } f : [k] \rightarrow [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_m)| \stackrel{\text{PIE}}{=} \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} (n -$

$$|S|)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

- **Количество биекций**

$$n! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n$$

- **Число Стирлинга** (опять)

Заметим, что сюръекция = разбиение, тогда:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = n! S_n^{II}(k)$$

- **Беспорядки** (Derangements) - перестановка без фиксированных точек

Если  $f(i) = i$ , то  $i$  - фиксированная точка

\*  $X$  = все  $n!$  перестановок

\* Плохие свойства  $P_1, \dots, P_m : \pi \in X$  имеет свойство  $P_i \iff \pi(i) = i$

\* Посчитаем  $N(S) : N(S) = (n - |S|)!$

\* Применяем ПВ/И:  $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} N(S) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} (n - |S|)! =$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$



## 8. Рекуррентности и производящие функции

- **Производящие функции** (Generating Functions)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Функция выше задает последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\text{Ex. } 3 + 8x^2 + x^3 + \frac{1}{7}x^5 + 100x^6 + \dots \rightarrow (3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \dots)$$

$$\text{Ex. Последовательность } (1, 1, 1, \dots) \text{ задает функцию } 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Пусть  $S = 1 + x + x^2 + \dots$ , тогда  $xS = x + x^2 + \dots$ ,  $(1 - x)S = 1 \Rightarrow$

$$S = \frac{1}{1-x} \text{ задает последовательность } (1, 1, 1, \dots)$$

Ex.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n$$

$$(2, 4, 10, 28, 82, \dots) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) + (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2-4x}{(1-x)(1-3x)}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \rightarrow (1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \rightarrow (0, 1, 0, 1, \dots)$$

**Взятие производной:**

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \rightarrow (1, 2, 3, 4, \dots)$$

Ex. Найти ПФ для  $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

$$A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$$

$$xA = 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + \frac{2x}{1-x} \quad A = \frac{1 + \frac{2x}{1-x}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

Ex. Найти ПФ для  $(1, 4, 9, 16, \dots)$

$$A = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots \quad (1-x)A =$$

- **Подсчет, используя производящие функции**

Найти число решений для  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ , где  $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

$$A_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$A_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$A_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \dots$$

Ответ - 18

### • Рекуррентные соотношения (Recurrence relations)

Решить рекуррентное соотношение - найти закрытую формулу

Ех. Арифметическая прогрессия

$$a_n = \begin{cases} a_0 = \text{const} & n = 0 \\ a_{n-1} + d, & n > 0 \end{cases}$$

Решение:  $a_n = a_0 + nd$  - анзац (Ansatz, догадка)

Проверка:  $a_n = a_0 + nd = a_{n-1} + d = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + nd$  - 👍👍

### • Метод характеристического уравнения

Рекуррентное соотношение  $\overset{a_n \rightarrow r^n}{\rightsquigarrow}$  Характеристическое уравнение  $\overset{\text{решение}}{\rightsquigarrow}$  Корни  $\overset{\text{магия}}{\rightsquigarrow}$  Решение  $\rightsquigarrow$  Проверка

Ех.  $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0$$

$$r_{1,2} = -2, 3$$

Если  $r_1 \neq r_2$ , то  $a_n = ar_1^n + br_2^n$  - общее решение  
 Если  $r_1 = r_2 = r$ , то  $a_n = ar^n + bnr^n$

$$a_n = a(-2)^n + b(3)^n$$

Пусть  $\begin{cases} a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 8 = -2a + 3b \end{cases}$

$$-5a = 5 \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \implies a_n = -(-2)^n + 2 \cdot 3^n$$

### • Разделяй и властвуй (Divide-and-Conquer)

$$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{работа рекурсии}} + \underbrace{\theta(n)}_{\text{работа разделения/слияния}}$$

### • Основная теорема о рекуррентных соотношениях (Master Theorem)

\*ТЫК\*

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Из этого,  $c_{crit} = \log_b a$

I случай: слияние < рекурсия

$$\overline{f(n) \in O(n^c)}, \text{ где } c < c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$$

$$f(n) \in O(n^c) \iff f(n) \in o(n^{c_{crit}})$$

II случай: слияние  $\approx$  рекурсия

$$\overline{f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^k n)} \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^{k+1} n)$$

Здесь  $k \geq 0$ . В общем случае см. википедию

III случай: слияние > рекурсия

$$\overline{f(n) \in \Omega(n^c)}, \text{ где } c > c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(f(n))$$

- **Метод Акра-Бацци** (Akra-Bazzi method)

\*ТЫК\*

$$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^k a_i T(b_i n + h_i(n)) \implies T(n) \in \Theta \left( n^p \cdot \left( 1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx \right) \right), \text{ где } p - \text{ решение для}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i^p = 1$$

$$\begin{cases} k = \text{const} \\ a_i > 0 \\ 0 < b_i < 1 \\ h_1(n) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right) - \text{малые возмущения} \end{cases}$$

Ex.  $T(n) = T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + n$  - асимптотика сортировки слиянием

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2} + O(1)\right) + T\left(\frac{n}{2} - O(1)\right) + \theta(n)$$

$$\text{Здесь } b_i = \frac{1}{2}, \quad h = \pm O(1) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$$

$$\text{Ex. } T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$a_1 = 1, b_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1$$

$$p = 1$$

$$\int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$$

$$T(n) \in \Theta(n \cdot (1 + \ln n))$$

$$T(n) \in \Theta(n \ln n)$$

- Решить рекуррентное соотношение  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ , где  $a_0 = 1, a_1 = 3$

Используем производящие функции:

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} \rightarrow 2^{n+1} - 1$$

- **Линейные рекуррентности** (Linear recurrences)

$$\underbrace{k_1 a_n + k_2 a_{n-1} + k_3 a_{n-2} + \dots}_{\text{линейная комб. рекуррентных членов}} = \underbrace{f(n)}_{\text{функция от } n}$$

$$\text{Линейное рекуррентное соотношение} - \begin{cases} f = 0 \implies \text{гомогенное (однородное)} \\ f \neq 0 \implies \text{негомогенное (неоднородное)} \end{cases}$$

Ex. Последовательность Фибоначчи:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

$$F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0 - \text{однородное}$$

- Операторы:

Сумма:  $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$

Умножение на число:  $(\alpha \cdot f)(n) = \alpha f(n)$

Сдвиг:  $(Ef)(n) = f(n+1)$

Ex.  $E(f - 3(g - h)) = Ef + (-3)Eg + 3Eh$

Составные операторы:

$(E - 2)f = Ef + (-2)f = f(n+1) - 2f(n)$

$E^2f = E(Ef) = f(n+2)$

Ex.  $f(n) = 2^n$

$2f = 2 \cdot 2^n$

$Ef = 2^{n+1}$

$(E^2 - 1)f(n) = E^2f(n) - f(n) = 2^{n+2} - 2^n = 3 \cdot 2^n$

- **Аннигилятор** (Annihilator) - оператор, который трансформирует  $f$  в функцию, тождественную 0

Ex. Оператор  $(E - 2)$  аннигилирует функцию  $f(n) = 2^n$

Ex.  $(E - c)$  аннигилирует  $c^n$

Ex.  $(E - 3)(E - 2)$  аннигилирует  $2^n + 3^n$

Ex.  $(E - c)^d$  аннигилирует любую функцию формы  $p(n) \cdot C^n$ , где  $p(n)$  - многочлен степени не больше  $d - 1$

Nota. Любой составной оператор аннигилирует класс функций

Nota. Любая функция, составленная из полинома и экспоненты, имеет свой единственный аннигилятор

Если  $X$  аннигилирует  $f$ , то  $X$  также аннигилирует  $Ef$

Если  $X$  аннигилирует  $f$  и  $Y$  аннигилирует  $g$ , то  $XY$  аннигилирует  $f \pm g$

- Аннигилирование рекуррентностей:
  1. Запишите рекуррентное соотношение в форме операторов
  2. Выделите аннигилятор для соотношения
  3. Разложите на множители (если понадобится)
  4. Выделите общее решение из аннигилятора
  5. Найдите коэффициенты используя базовые случаи (если даны)

Ex.  $r(n) = 5r(n-1), r(0) = 3$

1.  $r(n+1) - 5r(n) = 0 \quad (E - 5)r(n) = 0$

2.  $(E - 5)$  аннигилирует  $r(n)$

3.  $(E - 5)$  уже разложен

4.  $r(n) = \alpha \cdot 5^n$

5.  $r(0) = 3 \implies \alpha = 3$

Ex.  $T(n) = 2T(n-1) + 1, \quad T(0) = 0$

1.  $(E - 2)T(n) = 1$

2.  $(E - 2)$  не аннигилирует  $T(n)$ , остается 1. Тогда добавим аннигилятор  $(E - 1)$ , получим, что  $(E - 1)(E - 2)$  аннигилирует  $T(n)$

- 3. Разложение не требуется
- 4.  $T(n) = \alpha \cdot 2^n + \beta$  - общее решение
- 5.  $T(0) = 0 = \alpha \cdot 2^0 + \beta$   
 $T(1) = 1 = \alpha \cdot 2^1 + \beta$   
 $\alpha = 1, \beta = -1$

- **Псевдонелинейные уравнения** (Pseudo-non-linear equations)

Ex.  $a_n = 3a_{n-1}^2, a_0 = 1$   
 $\log_2 a_n = \log_2(3a_{n-1}^2)$   
Пусть  $b_n = \log_2 a_n$   
 $b_n = 2b_{n-1} + \log_2 3, b_0 = 0$   
 $b_n = (2^n - 1) \log_2 3$   
 $a_n = 2^{(2^n - 1) \log_2 3} = 3^{2^n - 1}$