

Содержание

7. Комбинаторика	2
8. Рекуррентности и производящие функции	10
X. Программа экзамена в 2023/2024	15

7. Комбинаторика

Базовые понятия:

- **Алфавит** (Alphabet) Σ (или X , *Ex.* $X = \{a, b, c\}$) - множество символов в нашей системе
- **Диапазон** (Range) $[n] = \{1, \dots, n\}$ - конечное множество последовательных натуральных чисел

- **Расстановка** (Ordered arrangement) - последовательность каких-либо элементов (тоже самое, что кортеж), *Ex.* $x = (a, b, c, d, b, b, c)$ $|x| = n$

Расстановку можно представить как функцию $f: \underbrace{[n]}_{\text{domain}} \rightarrow \underbrace{\Sigma}_{\text{codomain}}$, которая по порядковому номеру выдает символ

$$\text{ran} f = \{c \in \Sigma \mid \exists i \in [n] : f(i) = c\}$$

- **Перестановка** (Permutation) - $\pi: [n] \rightarrow \Sigma$, где $n = |\Sigma|$

Расстановка π - биекция между $[n]$ и Σ

Ex. $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

Одна из задач комбинаторики - посчитать количество различных расстановок или перестановок при заданных n и Σ

- **k -перестановка** (k -permutation) - расстановка из k различных элементов из Σ

Ex. $\underbrace{|31475|}_{5\text{-perm из } \Sigma=[7]} = 5$

k -перестановка - инъекция $\pi: [k] \rightarrow \Sigma$ ($k \leq n = |\Sigma|$)

- $P(n, k)$ - множество всех k -перестановок алфавита $\Sigma = [n]$ (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и $[n]$)

$$P(n, k) = \{f \mid f: [k] \rightarrow [n]\}$$

Чаще интересует не само множество, а его размер, поэтому под обозначением $P(n, k)$ подразумевается $|P(n, k)|$

- $S_n = P_n = P(n, n)$ - множество всех перестановок. Также чаще всего нас будет интересовать не множество, а его размер
 $|S_n| = n!$ - всего существует $n!$ перестановок

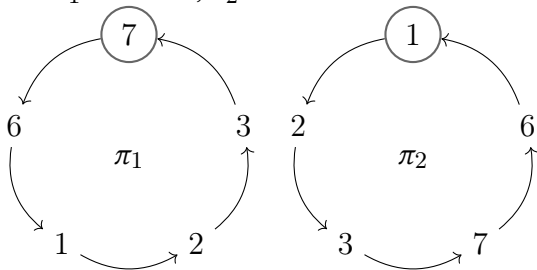
$$|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

• **Циклические k -перестановки** (Circular k -permutations)

$\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$ - циклически эквивалентны тогда и только тогда:

$$\exists s \mid \forall i \pi_1((i+s) \% k) = \pi_2(i)$$

Ех. $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$



$P_C(n, k)$ - множество всех циклических k -перестановок в Σ

$$|P_C(n, k)| \cdot k = |P(n, k)|$$

$$|P_C(n, k)| = \frac{|P(n, k)|}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

• **Неупорядоченная расстановка k элементов** (Unordered arrangement of k elements) - мультимножество Σ^* размера k

$$\text{Ех. } \Sigma^* = \{\Delta, \Delta, \square, \Delta, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \Delta, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$$

Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:

$$r : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}, \quad r(x) - \text{кол-во повторений объекта } x$$

• **k -сочетание** (k -combination) - неупорядоченная перестановка из k различных элементов из Σ (еще называют k -подмножеством, k -subset)

Соответственно $C(n, k)$ - множество всех таких k -сочетаний

$$|C(n, k)| = C_n^k = \binom{n}{k}$$

$$C(n, k) = \binom{\Sigma}{k}$$

$$\binom{n}{k} \cdot k! = |P(n, k)|$$

$$|C(n, k)| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Th. Биномиальная теорема (Binomial theorem):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ - биномиальный коэффициент

Th. Мультиномиальная теорема (Multinomial theorem)

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \dots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$$

$\binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!}$ - мультиномиальный коэффициент

Ex. мультиномиальной теоремы:

$$(x+y+z)^4 = 1(x^4 + y^4 + z^4) + 4(xy^3 + xz^3 + x^3y + yz^3 + y^3z + yz^3) + 6(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) + 12(xyz^2 + xy^2z + x^2yz)$$

Доказательство:

□

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1 = \sum_{\substack{i_j \in [r] \\ j \in [n]}} x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}, \text{ где } k_t - \text{ количество } x \text{ с индексом } t \text{ в одночлене}$$

$$(k_t = |\{j \in [n] | i_j = t\}|)$$

Получается мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ будет равен количеству способов поставить k_1 единиц в индексы в $x_{i_1}^1 \dots x_{i_n}^1$, k_2 двоек в индексы и так далее

У нас есть $\binom{n}{k_1}$ способов поставить единицу в индексы в одночлен, $\binom{n-k_1}{k_2}$ способов поставить

двойку и т. д., получаем:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} &= \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = [n-k_1-\dots-k_r=0] = \\ &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \frac{1}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \dots \frac{1}{k_r!0!} = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \end{aligned}$$

□

- **Перестановка мультимножества** Σ^* (Permutations of a multiset Σ^*)

$$\Sigma^* = \{\Delta^1, \Delta^2, \square, \star\} = (\Sigma, r) \quad r: \Sigma \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$$

Nota. $\begin{cases} \Delta^1, \Delta^2, \square, \star \\ \Delta^2, \Delta^1, \square, \star \end{cases}$ считаются равными перестановками

$$|P^*(\Sigma^*, n)| = \frac{n!}{r_1! \dots r_s!} = \binom{n}{r_1, \dots, r_s} - \text{ количество перестановок мультимножества, где } r_i -$$

количество i -ого элемента в мультимножестве

- **k -комбинация бесконечного мультимножества** (k -combinations of infinite multiset) - такое субмультимножество размера k , содержащее элементы из исходного мультимножества. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента r_i в исходном мультимножестве не больше размера комбинации k

$$\Sigma^* = \{\infty \cdot \Delta, \infty \cdot \square, \infty \cdot \star, \infty \cdot \clubsuit\}^* \quad n = |\Sigma^*| = \infty$$

$$\Sigma = \{\Delta, \square, \star, \clubsuit\} \quad s = |\Sigma| = 4$$

Ех. 5-комбинация: $\{\Delta, \star, \square, \star, \square\}$

Разделяем на группы по Σ палочками:

$$\Delta \mid \square \square \mid \star \star \mid$$

Заменяем элементы на точки - нам уже не так важен тип элемента, потому что мы знаем из разделения:

$$\bullet \mid \bullet \bullet \mid \bullet \bullet \mid$$

(другой Ех. $\bullet \bullet \bullet \bullet \mid \mid \mid \bullet = \{4 \cdot \Delta, 1 \cdot \clubsuit\}$)

Получается всего k точек и $s - 1$ палочек, всего $k + s - 1$ объектов. Получаем мультимножество $\{k \cdot \bullet, (s - 1) \cdot \mid\}$ (*Star and Bars method*)

Получаем количество перестановок этого мультимножества: $\frac{(k + s - 1)!}{k!(s - 1)!} = \binom{k + s - 1}{k, s - 1} =$

$$\binom{k + s - 1}{k} = \binom{k + s - 1}{s - 1}$$

что и является количеством возможных k -комбинаций бесконечного мультимножества

- **Слабая композиция** (Weak composition) неотрицательного целого числа n в k частей - это решение (b_1, \dots, b_k) уравнение $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i \geq 0$

$$|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n + k - 1}{n, k - 1}$$

Для решения воспользуемся аналогичным из доказательства мультиномиальной теоремы приемом:

$$n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

Поставим палочки:

$$n = 1 + 1 \mid 1 \mid \dots + 1$$

Получаем задачу поиска количеств k -комбинаций в мультимножестве: $\{n \cdot 1, (k - 1) \cdot \mid\}$;

$$\text{получаем } \binom{n + k - 1}{n, k - 1}$$

- **Композиция** (Composition) - решение для $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i > 0$

$$|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$$

Мы знаем, что одну единичку получит каждая b_i , поэтому мы решаем это как слабую композицию для $n-k$ в k частей

- **Число композиций n в некоторой число частей** (Number of all compositions into some number of positive parts)

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

Пусть $t = k - 1$, тогда $\sum_{t=0}^{n-1} \binom{n-1}{t} = 2^{n-1}$

- **Разбиения множества** (Set partitions) - множество размера k непересекающихся непустых подмножеств

Ех. $\{1, 2, 3, 4\}, n = 4, k = 2 \rightarrow [\text{разбиение в 2 части}] \rightarrow$

$$\begin{aligned} & \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}, \\ & \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}, \\ & \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}, \\ & \{\{3\}, \{1, 2, 4\}\} \end{aligned}$$

$|\{\text{разбиение } n \text{ элементов в } k \text{ частей}\}| = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = S_k^{II}(n) = S(n, k)$ - число Стирлинга второго рода

Для примера выше число Стирлинга $S(4, 2) = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$

Согласно Википедии [для формулы Стирлинга](#) есть формула: $S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n$

- **Формула Паскаля** (Pascal's formula)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга** (Recurrence relation for Stirling⁽²⁾ number):

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

Возьмем какое-либо разбиение для $n-1$ элементов на k частей, тогда возможны два случая:

1) В k -ое множество нет ни одного элемента, тогда мы обязаны в него положить наш

n -ый элемент по определению, количество перестановок будет равно $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} \cdot 1$

2) В k -ом множестве уже есть элементы, тогда все множества будут заполнены и у нас будет выбор из k множеств, куда положить k -ый элемент, то есть $k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$

Эти два случая независимы, поэтому получаем $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$

- **Число Белла** (Bell number) - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера n

Число Белла вычисляется по формуле: $B_n = \sum_{m=0}^n S(n, m)$

- **Целочисленное разбиение** (Integer partition) - решение для $a_1 + \dots + a_k = n$, где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$

$p(n, k)$ - число целочисленных разбиений n в k частей

$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$ - число всех разбиений для n

Ex. $5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

- **Принцип включения/исключения** (Principle of Incusion/Exclusion (PIE))

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ex. есть $n = 11$ объектов, нужно распределить их между $k = 3$ группами A , B и C

Эту задачу можно решить с помощью *Stars and bars method*, тогда мы получим

$$\binom{n+k-1}{n, k-1} = \binom{13}{2} = 78$$

Введем ограничение: пусть мощность каждого множества будет не больше 4.

Посчитаем количество неподходящих вариантов:

$$|A| = |\{b_A \geq 5\}| = 1 \cdot \binom{11-5+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$|A \cap B| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5\}| = \binom{3}{2} = 3$$

$$|A \cap B \cap C| = |\{b_A \geq 5 \wedge b_B \geq 5 \wedge b_C \geq 5\}| = 0$$

Итого получаем $28 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 0 = 75$ вариантов.

Далее исключаем эти варианты из количества всех вариантов, а значит подходящих вариантов всего $78 - 75 = 3$

- **Принцип включения/исключения** (Inclusion/Exclusion Principle (PIE))

— X - начальное множество элементов

- P_1, \dots, P_m - свойства
- Пусть $X_i = \{x \in X \mid P_i \text{ - свойство для } x\}$
- Пусть $S \in [m]$ - множество свойств
- Пусть $N(S) = \bigcap_{i \in S} X_i = \{x \in X \mid x \text{ имеет все свойства } P_1, \dots, P_m\}$

$$N(\emptyset) = X \quad |N(\emptyset)| = |X| = n$$

• **Теорема ПВ/И (Theorem PIE)**

$|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)|$ - количество элементов множества X , не имеющих никакого из свойств

Доказательство:

Пусть $x \in X$

Если x не имеет свойств P_1, \dots, P_m , то $x \in N(\emptyset)$ и $x \notin N(S) \forall S \neq \emptyset$

Поэтому x дает в общую сумму 1

Иначе, если x имеет $k \geq 1$ свойств $T \in \binom{[m]}{k}$,
то $x \in N(S)$ тогда и только тогда, когда $S \subseteq T$.

Поэтому x дает в сумму $\sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i = 0$

• **Следствие**

$$|\bigcup_{i \in [m]} X_i| = |X| - \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m], S \neq \emptyset} (-1)^{|S|-1} |N(S)|$$

• **Приложения:**

- * Определяете «плохие» свойства P_1, \dots, P_m
- * Посчитываете $N(S)$
- * Применяете ПВ/И

• **Количество сюръекций (правототальных функций)**

- * $X = \{\text{функция } f : [k] \rightarrow [n]\}$
- * Плохое свойство $P_i : X_i = \{f : [k] \rightarrow [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$
- * $|\{\text{сюръекции } f : [k] \rightarrow [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_m)| \stackrel{\text{PIE}}{=} \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} (n -$

$$|S|)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

• **Количество биекций**

$$n! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n$$

• **Число Стирлинга (опять)**

Заметим, что сюръекция = разбиение, тогда:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = n! S_n^I(k)$$

- **Беспорядки** (Derangements) - перестановка без фиксированных точек

Если $f(i) = i$, то i - фиксированная точка

* X = все $n!$ перестановок

* Плохие свойства $P_1, \dots, P_m : \pi \in X$ имеет свойство $P_i \iff \pi(i) = i$

* Посчитаем $N(S) : N(S) = (n - |S|)!$

* Применяем ПВ/И: $X \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_n) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} N(S) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} (n - |S|)! =$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$$

8. Рекуррентности и производящие функции

- **Производящие функции** (Generating Functions)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Функция выше задает последовательность a_0, a_1, a_2, \dots

Ex. $3 + 8x^2 + x^3 + \frac{1}{7}x^5 + 100x^6 + \dots \rightarrow (3, 0, 8, 1, 0, \frac{1}{7}, 100, \dots)$

Ex. Последовательность $(1, 1, 1, \dots)$ задает функцию $1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Пусть $S = 1 + x + x^2 + \dots$, тогда $xS = x + x^2 + \dots$, $(1 - x)S = 1 \Rightarrow$

$S = \frac{1}{1-x}$ задает последовательность $(1, 1, 1, \dots)$

Ex.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$\frac{2}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n$$

$$(2, 4, 10, 28, 82, \dots) = (1, 1, 1, 1, 1, \dots) + (1, 3, 9, 27, 81, \dots)$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2}{(1-x)(1-3x)}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \rightarrow (1, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x + x^3 + x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \rightarrow (0, 1, 0, 1, \dots)$$

Взятие производной:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + \dots) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \rightarrow (1, 2, 3, 4, \dots)$$

Ex. Найти ПФ для $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$

$$A(x) = 1 + 3x + 5x^2 + \dots$$

$$xA = 0 + x + 3x^2 + 5x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$$

$$(1-x)A = 1 + \frac{2x}{1-x} \quad A = \frac{1 + \frac{2x}{1-x}}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$$

Ex. Найти ПФ для $(1, 4, 9, 16, \dots)$

$$A = 1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots \quad (1-x)A =$$

- **Подсчет, используя производящие функции**

Найти число решений для $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, где $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

$$A_1(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$A_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$A_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

$$A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \dots$$

Ответ - 18

• Рекуррентные соотношения (Recurrence relations)

Решить рекуррентное соотношение - найти закрытую формулу

Ex. Арифметическая прогрессия

$$a_n = \begin{cases} a_0 = \text{const} & n = 0 \\ a_{n-1} + d, & n > 0 \end{cases}$$

Решение: $a_n = a_0 + nd$ - анзац (Ansatz, догадка)

Проверка: $a_n = a_0 + nd = a_{n-1} + d = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + nd$ - 👍👍

• Метод характеристического уравнения

Рекуррентное соотношение $\overset{a_n \rightarrow r^n}{\rightsquigarrow}$ Характеристическое уравнение $\overset{\text{решение}}{\rightsquigarrow}$ Корни $\overset{\text{магия}}{\rightsquigarrow}$ Решение \rightsquigarrow Проверка

Ex. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

$$r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0$$

$$r^{n-2}(r^2 - r - 6) = 0$$

$$r_{1,2} = -2, 3$$

Если $r_1 \neq r_2$, то $a_n = ar_1^n + br_2^n$ - общее решение

Если $r_1 = r_2 = r$, то $a_n = ar^n + bnr^n$

$$a_n = a(-2)^n + b(3)^n$$

Пусть $\begin{cases} a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 8 = -2a + 3b \end{cases}$

$$-5a = 5 \implies \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \implies a_n = -(-2)^n + 2 \cdot 3^n$$

• Разделяй и властвуй (Divide-and-Conquer)

$$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{работа рекурсии}} + \underbrace{\theta(n)}_{\text{работа разделения/слияния}}$$

• Основная теорема о рекуррентных соотношениях (Master Theorem)

ТЫК

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Из этого, $c_{crit} = \log_b a$

I случай: слияние < рекурсия

$$f(n) \in O(n^c), \text{ где } c < c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$$

$$f(n) \in O(n^c) \iff f(n) \in o(n^{c_{crit}})$$

II случай: слияние \approx рекурсия

$$f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^k n) \implies T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^{k+1} n)$$

Здесь $k \geq 0$. В общем случае см. википедию

III случай: слияние $>$ рекурсия

$$f(n) \in \Omega(n^c), \text{ где } c > c_{crit} \implies T(n) \in \Theta(f(n))$$

- **Метод Аккра-Бацци** (Akra-Bazzi method)

ТЫК

$$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^k a_i T(b_i n + h_i(n)) \implies T(n) \in \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx\right)\right), \text{ где } p - \text{ решение для}$$

$$\sum_{i=1}^k a_i b_i^p = 1$$

$$\begin{cases} k = \text{const} \\ a_i > 0 \\ 0 < b_i < 1 \\ h_1(n) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right) - \text{малые возмущения} \end{cases}$$

Ex. $T(n) = T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + n$ - асимптотика сортировки слиянием

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2} + O(1)\right) + T\left(\frac{n}{2} - O(1)\right) + \theta(n)$$

$$\text{Здесь } b_i = \frac{1}{2}, \quad h = \pm O(1) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$$

$$\text{Ex. } T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$a_1 = 1, b_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1$$

$$p = 1$$

$$\int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$$

$$T(n) \in \Theta(n \cdot (1 + \ln n))$$

$$T(n) \in \Theta(n \ln n)$$

- Решить рекуррентное соотношение $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, где $a_0 = 1, a_1 = 3$

Используем производящие функции:

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} \rightarrow 2^{n+1} - 1$$

- **Линейные рекуррентности** (Linear recurrences)

$$\underbrace{k_1 a_n + k_2 a_{n-1} + k_3 a_{n-2} + \dots}_{\text{линейная комб. рекуррентных членов}} = \underbrace{f(n)}_{\text{функция от } n}$$

Линейное рекуррентное соотношение - $\begin{cases} f = 0 \implies \text{гомогенное (однородное)} \\ f \neq 0 \implies \text{негомогенное (неоднородное)} \end{cases}$

Ех. Последовательность Фибоначчи:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & \end{cases}$$

$F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0$ - однородное

- Операторы:

Сумма: $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$

Умножение на число: $(\alpha \cdot f)(n) = \alpha f(n)$

Сдвиг: $(Ef)(n) = f(n+1)$

Ех. $E(f - 3(g - h)) = Ef + (-3)Eg + 3Eh$

Составные операторы:

$(E - 2)f = Ef + (-2)f = f(n+1) - 2f(n)$

$E^2 f = E(Ef) = f(n+2)$

Ех. $f(n) = 2^n$

$2f = 2 \cdot 2^n$

$Ef = 2^{n+1}$

$(E^2 - 1)f(n) = E^2 f(n) - f(n) = 2^{n+2} - 2^n = 3 \cdot 2^n$

- Аннигилятор** (Annihilator) - оператор, который трансформирует f в функцию, тождественную 0

Ех. Оператор $(E - 2)$ аннигилирует функцию $f(n) = 2^n$

Ех. $(E - c)$ аннигилирует c^n

Ех. $(E - 3)(E - 2)$ аннигилирует $2^n + 3^n$

Ех. $(E - c)^d$ аннигилирует любую функцию формы $p(n) \cdot C^n$, где $p(n)$ - многочлен степени не больше $d - 1$

Nota. Любой составной оператор аннигилирует класс функций

Nota. Любая функция, составленная из полинома и экспоненты, имеет свой единственный аннигилятор

Если X аннигилирует f , то X также аннигилирует Ef

Если X аннигилирует f и Y аннигилирует g , то XY аннигилирует $f \pm g$

- Аннигилирование рекуррентностей:

1. Запишите рекуррентное соотношение в форме операторов
2. Выделите аннигилятор для соотношения
3. Разложите на множители (если понадобится)
4. Выделите общее решение из аннигилятора
5. Найдите коэффициенты используя базовые случаи (если даны)

Ex. $r(n) = 5r(n-1), r(0) = 3$

1. $r(n+1) - 5r(n) = 0 \quad (E-5)r(n) = 0$

2. $(E-5)$ аннигилирует $r(n)$

3. $(E-5)$ уже разложен

4. $r(n) = \alpha \cdot 5^n$

5. $r(0) = 3 \implies \alpha = 3$

Ex. $T(n) = 2T(n-1) + 1, \quad T(0) = 0$

1. $(E-2)T(n) = 1$

2. $(E-2)$ не аннигилирует $T(n)$, остается 1. Тогда добавим аннигилятор $(E-1)$, получим, что $(E-1)(E-2)$ аннигилирует $T(n)$

3. Разложение не требуется

4. $T(n) = \alpha \cdot 2^n + \beta$ - общее решение

5. $T(0) = 0 = \alpha \cdot 2^0 + \beta$

$T(1) = 1 = \alpha \cdot 2^1 + \beta$

$\alpha = 1, \beta = -1$

- Псевдонелинейные уравнения (Pseudo-non-linear equations)

Ex. $a_n = 3a_{n-1}^2, a_0 = 1$

$\log_2 a_n = \log_2(3a_{n-1}^2)$

Пусть $b_n = \log_2 a_n$

$b_n = 2b_{n-1} + \log_2 3, b_0 = 0$

$b_n = (2^n - 1) \log_2 3$

$a_n = 2^{(2^n - 1) \log_2 3} = 3^{2^n - 1}$

Х. Программа экзамена в 2023/2024

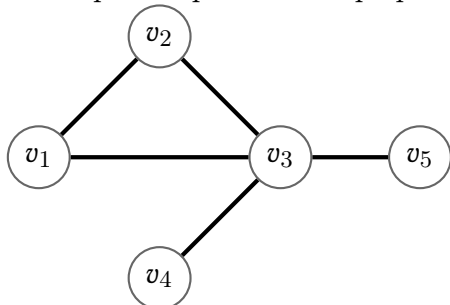
5. Теория графов.

1. Ориентированные и неориентированные графы (*Directed and undirected graphs*)

Граф - множество вершин V и множество ребер E (в общем случае), соединяющие какие-либо две вершины: $G(V, E)$

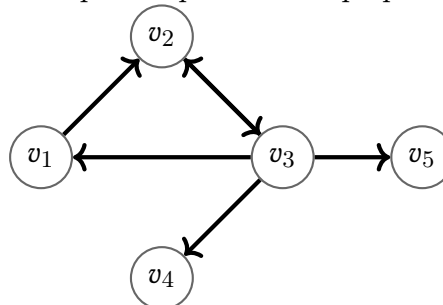
По виду ребер различают:

неориентированный граф



- ребра не имеют направлений

ориентированный граф

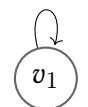


- ребра имеют направления

2. Простые графы и псевдографы (*Simple graphs and pseudographs*)

Простой граф $G(V, E)$ - граф, в котором

- $V \neq \emptyset$ - граф не пустой
- $E \subseteq V \times V$ - ребра представлены как множество пар вершин
- $\forall v \in V \langle v, v \rangle \notin E$ - граф не содержит петель - ребер, соединяющих одну вершину с собой же



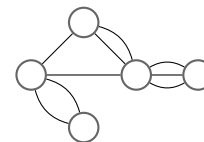
Петля

Псевдограф $G(V, E)$ - простой граф, в котором разрешены петли

3. Мультиребра и мультиграфы (*Multiedges and multigraphs*)

Мультиребра - ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин больше одного раза

Мультиграфы - графы, содержащие мультиребра. В этом случае E - мультимножество

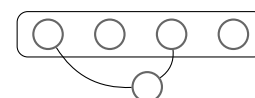


4. Гиперграфы (*Hypergraphs*)

Гиперребро - ребро, соединяющее несколько вершин

Гиперграф - граф, содержащий гиперребро

гиперребро



5. Нуль-граф, пустой граф и синглтон (*Null, empty, singleton graphs*)

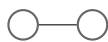
Нуль-граф - граф, не содержащий вершин (и ребер)

Пустой граф - граф, не содержащий ребер

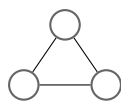
Синглтон - граф, содержащий из одной вершины

6. Полный граф (*Complete graph*)

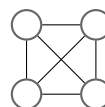
Полный граф K_n - простой граф из n вершин, в которой все вершин соединены друг с другом



$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$

7. Взвешенный граф (*Weighted graph*)

Взвешенный граф - граф, в котором ребра (и/или вершины) имеют числовой вес. Иначе говоря, определена функция $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

8. Планарный граф (*Planar graphs*)

Планарный граф - граф, который можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер. По теореме Понтрягина-Куратовского граф планарен *тогда и только тогда, когда* он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу из пяти вершин K_5 или графу «домики и колодцы» $K_{3,3}$

9. Подграф (*Subgraph*)

Подграф графа $G(V, E)$ - граф $G'(V', E')$ такой, что $V' \subseteq V, E' \subseteq E$

10. Остовный подграф (*Spanning subgraph*)

Остовный подграф графа $G(V, E)$ - такой подграф $G'(V, E')$, содержащий все вершины исходного

11. Порожденный подграф (*Induced subgraph*)

Порожденный подграф $G[S]$ графа $G(V, E)$ - подграф $G'(S, E')$, который содержит все ребра, соединяющие вершины из S в исходном графе

12. Отношение смежности (*Adjacency relation*)

Отношение смежности - отношение A между вершинами, соединенными ребром: $A = \{\langle u, v \rangle \mid \langle u, v \rangle \in E\}$

13. Матрица смежности (*Adjacency matrix*)

Матрица смежности - матрица A_V , выражающее отношение смежности

14. Отношение инцидентности (*Incidence relation*)

Отношение инцидентности - отношение B между вершиной и соединяющей ее ребром:

$$B = \{\langle u, e \rangle \mid u \in V \wedge e \in E \wedge \exists v \in V \mid (\langle u, v \rangle \in E \vee \langle v, u \rangle \in E)\}$$

15. Матрица инцидентности (*Incidence matrix*)

Матрица инцидентности - матрица A_V , выражающее отношение инцидентности

16. Степень вершины (*Vertex degree*)

Степень $\deg(v)$ вершины v - количество и ребер из этой вершины (петли считаются дважды)

17. Регулярный граф (*Regular graph*)

r -регулярный граф - граф, все степени вершин которого равны r - $\forall v \in V \deg(v) = r$

18. **Лемма о рукопожатиях** (*Handshaking lemma*)

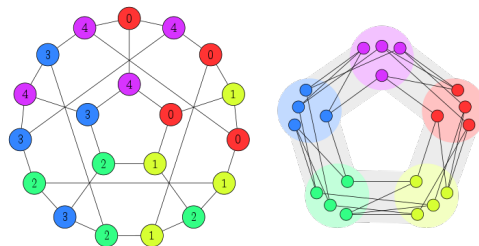
$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ - сумма степеней всех вершин равна удвоенному количеству ребер

19. **Изоморфизм графов** (*Graph isomorphism*)

Графы $G(V, E)$ и $H(U, F)$ называются изоморфными, если существует биекция $f: V \rightarrow U$ такая, что если вершины v и u графа G смежны, то и вершины $f(v)$ и $f(u)$ графа H тоже смежны

20. **Гомоморфизм графов** (*Graph homomorphism*)

Гомоморфизм графов - отображение вершин графа G в вершины графа H такое, что смежные вершины графа G отображаются в смежные вершины графа H



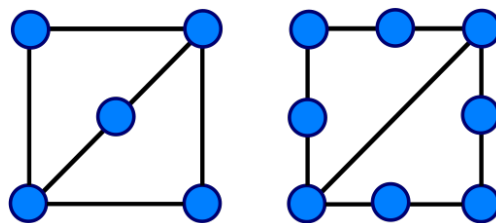
Гомоморфизм

21. **Гомеоморфизм графов** (*Graph homeomorphism*)

Деление (Subdivision) ребра $\langle u, v \rangle$ - операция, добавляющее вершину w , ребра $\langle u, w \rangle$ и $\langle w, v \rangle$ и удаляющее ребро $\langle u, v \rangle$

Исключение (Smoothing) вершины w (степени 2) - операция, обратная делению - исключение вершины w и ребер $\langle u, w \rangle$ и $\langle w, v \rangle$ и добавление ребра $\langle u, v \rangle$

Графы G и H гомеоморфны, если граф H можно получить в результате деления или исключения графа G



Гомеоморфизм

22. **Пути и циклы** (*Walks, paths, trails, cycles*)

Путь (Walk) - последовательность из вершин и ребер, соединяющих соседние вершины:

$$l = (v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_{n-1}, v_n)$$

Цепь (Trail) - путь (walk), все ребра которого различны

Простая цепь (Path) - путь (walk), все вершины (и соответственно ребра) которого различны

Замкнутый путь (Closed walk) - путь (walk), начальная вершина которого является конечной

Контур (Circuit) - цепь (trail), являющаяся замкнутой

Цикл (Cycle) - простая цепь (path), являющаяся замкнутой (*терминология из Википедии)

23. **Эйлеровы путь, цикл, граф** (*Eulerian path, cycle, graph*)

Эйлеров путь - путь, содержащий все ребра графа

Эйлеров цикл - замкнутый путь, содержащий все ребра графа

Граф называют эйлеровым, если в нем есть эйлеров цикл. Граф называют полуэйлеровым,

если в ней есть эйлеров путь.

24. **Теорема Эйлера для графов** (*Euler's theorem for graphs*)

Граф эйлеров, если все степени вершин четные, а ребра принадлежат одной компоненте связности

Граф полуэйлеров, если ровно 2 вершины имеют нечетную степень, а ребра принадлежат одной компоненте связности

25. **Гамильтоновы путь, цикл, граф** (*Hamiltonian path, cycle, graph*)

Гамильтонов путь - путь, содержащий все вершины графа

Гамильтонов цикл - замкнутый путь, содержащий все вершины графа

Граф называют гамильтоновым, если в нем есть гамильтонов цикл. Граф называют полугамильтоновым, если в ней есть гамильтонов путь.

26. **Теорема Оре** (*Ore's theorem*)

Теорема Оре - достаточное условие существования гамильтонова цикла: если в графе $G(V, E)$ для любых $u, v \in V$ $\deg u + \deg v \geq |V|$, то граф G гамильтонов

27. **Теорема Дирака** (*Dirac's theorem*)

Теорема Дирака - достаточное условие существования гамильтонова цикла: если в графе $G(V, E)$ для любой $u \in V$ $\deg u \geq \frac{|V|}{2}$, то граф G гамильтонов

28. **Эксцентриситет вершины** (*Eccentricity of a vertex*)

Расстояние $\text{dist}(u, v)$ - длина (количество ребер) кратчайшего пути между u и v

Эксцентриситет $\varepsilon(v)$ - наибольшая длина кратчайшего пути от этой вершины до другой в этом графе: $\varepsilon(v) = \max_{u \in V} \text{dist}(v, u)$

29. **Радиус и диаметр графа** (*Radius and diameter of a graph*)

Радиус графа $\text{rad}(G)$ - наименьший эксцентриситет вершины из графа: $\text{rad}(G) = \min_{v \in V} \varepsilon(v)$

Диаметр графа $\text{diam}(G)$ - наибольший эксцентриситет вершины из графа: $\text{diam}(G) = \max_{v \in V} \varepsilon(v)$

30. **Центр графа** (*Center of a graph*)

Центр графа - вершина (вершины), эксцентриситет которой равен радиусу графа:

$$\text{center}(G) = \{v \in V \mid \varepsilon(v) = \text{rad}(G)\}$$

31. **Центроид дерева** (*Centroid of a tree*)

Центроид дерева - вершина (или 2 вершины), удаление которой приведет к распаду на поддеревья, каждое из которых имеет не больше $\frac{|V|}{2}$ вершин

Очевидно, что только деревья, состоящие из четного количества вершин, могут иметь 2 центроида

32. **Клика** (*Clique*)

Клика графа - порожденный подграф, который является полным графом. 1-клика - вершина, 2-клика - 2 вершины и ребро, 3-клика - треугольник, n -клика - граф K_n

33. **Независимое (стабильное множество)** (*Independent set*)

Независимое (стабильное) множество - множество вершин, каждая из которых не соединена ребром с другой вершиной из множества

34. **Паросочетание** (*Matching*)

Паросочетание (независимое множество ребер) - множество ребер, каждые из которых не соединяют одну и ту же вершину

35. **Идеальное паросочетание** (*Perfect matching*)

Идеальное паросочетание - паросочетание, ребра которого инцидентны ко всем вершинам графа (то есть паросочетание, являющееся реберным покрытием)

36. **Вершинное покрытие** (*Vertex cover*)

Вершинное покрытие - множество вершин, к которым инцидентны все ребра графа

37. **Реберное покрытие** (*Edge cover*)

Реберное покрытие - множество ребер, которые инцидентны ко всем вершинам

38. **Дерево** (*Tree*)

Дерево - связный ациклический граф

39. **Лес** (*Forest*)

Лес - несвязный граф, каждая компонента которого не имеет циклов (граф, состоящий из деревьев)

40. **Минимальное остовное дерево** (*Minimum spanning tree*)

Минимальное остовное дерево взвешенного графа $G(V, E, w)$ - дерево $T(V, E')$, сумма весов ребер которого имеет наименьшее значение

41. **Код Прюфера** (*Prüfer code*)

Код Прюфера - алгоритм кодировки маркированного дерева размера n в последовательность чисел

Кодировка:

1. Делаем биекцию между названиями вершин и числа из диапазона $[1; n]$ (если необходимо)
2. Берем лист с наименьшим значением, удаляем его, записываем в последовательность номер его родителя
3. Повторяем 2. до тех пор, пока не останется 2 вершины - их кодировка тривиальна и не нуждается в хранении

Декодировка:

1. Создаем n вершин, и множество вершин W , которых нет в последовательности
2. Читаем номер вершины из последовательности
3. Соединяем эту вершину с вершиной из W с минимальным номером, удалив ее
4. Добавляем вершину из последовательности в W
5. Повторяем 2.-4.
6. Соединяем 2 оставшиеся вершины из W

42. **Двудольный граф** (*Bipartite graph*)

Двудольный граф $K_{n,m}$ - граф, вершины которого можно разбить на две части размеров n и m таким образом, что вершины из одной части не смежны друг с другом

43. **Теорема баланса регулярных двудольных графов** (*Theorem on the balance of regular bipartite graphs*)

Если двудольный граф $K_{n,m}$ регулярный, то $n = m$

□ Граф регулярный $\implies \forall v \in V \text{ deg } v = r \in \mathbb{N} \implies$ левая доля имеет nr исходящих ребер, а правая доля имеет mr входящих ребер, но так как вершины в долях не соединены ребрами, $nr = mr$ □

44. **Теорема существования идеального паросочетания регулярного двудольного графа** (*Theorem on the existence of a perfect matching in a regular bipartite graph*)

45. (*Hall's theorem (on the existence of an X -perfect matching in a bipartite graph)*)

46. (*Connectivity in undirected graphs*)

47. (*Strong and weak connectivity in directed graphs*)

48. (*Condensation of a directed graph*)

49. (*Vertex connectivity*)

50. (*Edge connectivity*)

51. (*Whitney's theorem*)

52. (*k -connected graph*)

53. (*Menger's theorem*)

54. (*Biconnectivity*)

55. (*Articulation point*)

56. (*Bridge*)

57. (*Blocks*)

58. (*Block-cut tree*)

6. Теория автоматов.

1. (*Deterministic Finite Automaton (DFA)*)
2. (*Non-deterministic Finite Automaton (NFA)*)
3. (*Formal languages*)
4. (*Operations on formal languages (concat, union, Kleene closure)*)
5. (*Regular languages*)
6. (*Regular expression*)
7. (*Kleene's theorem*)
8. (*Powerset construction (DFA from NFA)*)
9. (ϵ -NFA)
10. (*NFA construction from ϵ -NFA*)
11. (*Thompson's construction (ϵ -NFA from regular expression)*)
12. (*Kleene's algorithm*)

13. (*Pumping lemma for regular languages*)
14. (*Closure properties of regular languages*)
15. (*Mealy machine*)
16. (*Moore machine*)
17. (*Emptiness of finite automaton language*)
18. (*Finiteness of finite automaton language*)
19. (*Equivalence of finite automata*)
20. (*Myhill-Nerode theorem*)

7. Комбинаторика.

1. (*Ordered arrangements*)
2. (*Permutations*)
3. (*k-permutations*)
4. (*Cyclic permutations*)
5. (*Unordered arrangements*)
6. (*k-combinations*)
7. (*Multisets*)
8. (*Permutations of multisets*)
9. (*Combinations of infinite multisets*)
10. (*Compositions*)
11. (*Set partitions*)
12. (*Stirling numbers of the second kind*)
13. (*Integer partitions*)
14. (*Principle of Inclusion-Exclusion*)

8. Рекуррентности и производящие функции.

1. (*Recurrence relations*)
2. (*Solving recurrence relations using characteristic equations*)
3. (*Generating functions*)
4. (*Power series*)
5. (*Solving linear recurrences using generating functions*)
6. (*Solving combinatorial problems using generating functions*)
7. (*Operators and annihilators*)
8. (*Solving linear recurrences using annihilators*)
9. (*Catalan numbers*)
10. (*Divide-and-Conquer algorithms analysis using recursion trees*)
11. (*Master theorem*)
12. (*Akra-Bazzi method*)