Nota: Изоморфизм $E^n \to E'^n$ позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

Ex: $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ - арифметические векторы со скалярным произведением $(x,y) = \Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i$

$E'^n \in C_{[a;b]}$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_a^b f * g dx$

$\sqrt{\int_a^b (f*g)^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$

Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства E^n на подпространство G

Точка M - конец вектора x в пространстве E^n. Нужно найти M_0 (конец вектора x_0, проекции x на G)

$$x_0 + h = x$$

где $h \perp G$. Правда ли что, длина перпендикулярного вектора h - минимальная длина от точки M до G?

Th: $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \ne x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

$\square \|x - x'\| = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \overset{\text{по теореме Пифагора}}{====} \|x - x_0\| + \|x_0 - x'\| = \|h\| + \|x_0 - x'\| > \|x - x_0\|$

Nota: x_0 называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

Алгоритм: $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e2 + \dots + \lambda_k + e_k$, $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ - базис G (необязательно ортонормированный)

Дан вектор x, пространство G, нужно найти λ_i

$h = x - x_0$, $h \perp G \quad (h, e_i) \overset{h \perp e_i \ \forall i}{=} 0$

$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0$

$(x, e_i) = (x_0, e_i)$

Тогда $\forall i \quad (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_k (e_k, e_i)$ - (e_k, e_i) - числа, а λ_i - неизвестные

Получили СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \dots & (e_1,e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k,e_1) & (e_k,e_2) & \dots & (e_k,e_k) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \Gamma \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x,e_1) \\ \dots \\ (x,e_k) \end{vmatrix}$$

Nota: В матрице Γ нет нулевых строк, так как e_i - бизисная и по крайней мере $e_i^2 \ne 0$

Таким образом по теореме Крамера $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Def: Матрица $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1\dots k}$ называют матрицей Грама

$\Gamma = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$, если базис ортонормированный

Далее, I - единичная матрица Грама

Nota: Тогда $I \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$

Приложения задачи о перпендикуляре

1) Метод наименьших квадратов

В качестве простейшей модели зависимости $y = y(x)$ берем линейную функцию $y = \lambda x$

Ищем минимально отстоящую прямую от данных (x_i, y_i), то есть ищем λ

Определим расстояние (в этом методе) как $\sigma^2 = \Sigma_{i=1}^n (y_i - y_{0i})^2 = \Sigma_{i=1}^n (y_i - \lambda x_i)^2$ - минимизируем

Таким образом, ищем y_0 (ортог. проекция) такое, что $(y - y_0)^2 = \sigma^2$ - минимальное

Если $y_0 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$, где x_i - набор измерений для i-ой точки

Рассмотрим y_0 как разложение по базису $\{x_i\}$

2) Многочлен Фурье

$P(t) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 cost + b_1 sint + \dots a_n cosnt + b_n sinnt$ - линейная комбинация

Функции $1, cost, sint, \dots, cosnt, sinnt$ - ортогональны

Задача в том, чтобы для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$ найти минимально отстоящий многочлен $P(t)$ при том, что расстояние определяется как $\sigma^2 = \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$

Нужно найти a_i и b_i - обычные скалярные произведения $a_i = k \int_0^{2\pi} f(t) cos(it) dt$, $b_i = m \int_0^{2\pi} f(t) sin(it) dt$ (k, m - нормирующие множители)

2. Линейный оператор (линейное отображение, линейный функционал, линейное преображение)

2.1 Определение

Линейный оператор - это отображение $V^n \overset{\mathcal{A}}{\Longrightarrow} W^m$
(V^n, W^m - линейные пространства размерности $n \neq m$ в общем случае),
которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет один какой-либо $y \in W^m$ и
$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A} x_1 + \mu \mathcal{A} x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$

Nota: Заметим, что если 0 представим как $0 * x$, где $x \neq 0$, то

$\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 * x) = 0 * \mathcal{A}x \overset{0*y}{=} 0$

Nota: Если $V = W$, то $\mathcal{A}$ называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы $\mathcal{A}: \quad V \to V$, $\mathcal{A}: \quad V^n \to W^n$

Ex.1: $V = \mathbb{R}^2$ - пространство направленных отрезков

$\mathcal{A}: V \leftarrow V$
$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$ для таких $\mathcal{A}$ как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия
Ex.2: $V^n = W^m$, где $m < n$

$\mathcal{A}$ - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)
Ex.3: V^n - пространство числовых строк длины n

$\mathcal{A}: V^n \leftarrow V^n$
$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\mathcal{A}x = y : \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} x = y$$

2.2. Действия с операторами

Def: $\mathcal{A}\mathcal{B}: V \to W$

1) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \overset{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ - определение суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$

2) $(\lambda \mathcal{A})x \overset{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x)$ - $\lambda \mathcal{A} = \mathcal{D}$

Nota: Сформируем линейное пространство из операторов $\mathcal{A}: V \to W$

1) Ассоциативность сложения (очевидно)

2) Коммутативность (очевидно)

3) Нейтральный элемент $\mathcal{O}x = 0$

4) Противоположный: $-\mathcal{A} = (-1) * A$

5) $\ldots LAB$

Def: $\mathcal{I}$ - тождественный - $\forall x \in V \quad \mathcal{I}x = x$