

## §1. Ряды

### 1. Числовые ряды. Определения

*Mem.* Числовая последовательность:  $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$

*Ex. 1.* Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:  $u_n = bq^n$ ,  $\frac{1}{2^n} \stackrel{n=0,1,\dots}{=} \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$

*Ex. 2.*  $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

**Def.**  $\{u_n\}$  - последовательность

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  называется числовым рядом

*Nota.* Начальное значение  $n$  произвольно (целое)

*Ex.*  $u_n = \frac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$

$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$

*Nota.*  $u_n$  называется общим членом ряда

*Nota.* Существует ли сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и в каком смысле?

*Ex. 3.*  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$  - существует, но бесконечная

*Ex. 4.*  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{cases} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{cases}$

*Ex. 5.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

**Def.** Частичная сумма ряда  $S_n \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^n u_k$

*Nota.* Последовательность частичных сумм -  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

*Ex.*  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \frac{3}{2} \quad S_3 = \frac{7}{4} \quad S_4 = \frac{15}{8}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$ , но проблема заключается в том, что бы найти формулу для  $S_n$

**Def.** Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называют сходящимся, а  $S$  называют суммой ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

*Nota.* В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

*Ex.* Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

*Nota.* При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

*Ex.* Геометрический ряд (эталонный):  $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^n bq^k = b(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Исследуем предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ :

$$|q| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1}) = \frac{b}{1 - q}$$

$$|q| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \quad (q^n \rightarrow \infty)$$

$$|q| = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b \frac{0}{0} ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$$

$$q = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} b(-1)^n - \text{расходится (из четвертого примера)}$$

Lab. Доказать при  $q = -1$  по def ( $S_n = ?$ )

## 2. Свойства числовых рядов

*Nota.* Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

**Th. 1.** Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \text{ одновременно сходятся или расходятся}$$

□

$$S_n^u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$

$$S_n^v = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \quad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$$

$$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v$$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

**Th. 2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда  $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

**Th. 3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$  - сходится

□ По свойству пределов  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm \sigma$  □

*Nota.* Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

*Ex.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ , но:  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , а  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  расходятся

*Nota.* Докажем расходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

*Ex.* Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как  $u_n \geq v_n$ , то  $S_n \geq \sigma_n$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \rightarrow \infty \implies S_n \rightarrow \infty$$

**Th. 4.** Если ряд сходится к числу  $S$ , то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна  $S$

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = S$ , где  $S_n^{(k)}$  - подпоследовательность  $S_n$

□

$$Ex. \text{ Было } \sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \text{ так как ряд расходится}$$

*Nota.* В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2} S \quad ?!$$

*Nota.* Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

*Nota.* Сходящиеся ряды допускают умножение, но почленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

$$\text{Тогда } \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$$

### 3. Условия сходимости рядов

#### 3.1. Необходимое

$$\text{Th. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

□

*Nota.* Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

$$\text{Ex. } \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \neq 0$$

#### 3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

*Мет.* Критерий Коши для последовательности:

$$\{x_n\} \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

**Th.** (без док-ва)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad \begin{matrix} |u_{n+1} + \dots + u_m| < \varepsilon \\ |S_m - S_n| < \varepsilon \end{matrix}$$

*Nota.* Хвост ряда попадает в  $\varepsilon$ -трубу

*Nota.* Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличие от признаков