

Содержание

1. Статистическое определение вероятности	2
Пространство элементарных исходов. Случайные события	2
Вероятность	3
Построение модели случайных явлений	4
Свойства вероятности	5
Аксиома непрерывности	6
Условная вероятность	8
Полная группа событий	9

В теории вероятности обычно изучают случайные события

Обычно наука занимается закономерностями, но так как в случайных экспериментах нет закономерностей, теория вероятности занимается поиском закономерности в сериях случайных экспериментах

Итак, в XVI веке начали с экспериментов бросков монеты:

число бросков	число гербов	частота
4040	2048	0.5069
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Как можно видеть, частота стремится к 0.5 - появляется статистическая закономерность

1. Статистическое определение вероятности

Пусть проводится n реальных экспериментов, при которых событие A появилось n_A раз

Отношение $\frac{n_A}{n}$ называется частотой события A

Эксперименты показывают, что при увеличении числа n частота стабилизируется у некоторого числа, при котором мы понимаем статистическую вероятность: $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$ при $n \rightarrow \infty$

Пространство элементарных исходов. Случайные события

Def. Пространством элементарных исходов Ω называется множество, содержащее все возможные исходы экспериментов, из которых при испытании происходит ровно один. Элементы этого множества называются элементарными исходами и обозначаются ω

Def. Случайными событиями называется подмножество $A \subset \Omega$. События A наступают, если произошел один из элементарных исходов из множества A

Ex. 1. Бросок монеты: $\Omega = \{\Gamma, P\}$, $A = \{\Gamma\}$ - выпал герб

Ex. 2. Игральная кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{\text{выпало четное число}\} = \{2, 4, 6\}$

Ex. 3. Монета бросается дважды.

а) Учитываем порядок: $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, P\Gamma, \Gamma P\}$

а) Не учитываем порядок: $\Omega = \{\Gamma\Gamma, PP, P\Gamma\}$

Ex. 4. Кубик дважды: $\Omega = \{\langle i, j \rangle \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$

$A = \{\text{разность} \leq 3\} = \{\langle 1, 4 \rangle; \langle 4, 1 \rangle; \langle 2, 5 \rangle; \langle 5, 2 \rangle; \dots\}$

Ex. 5. Монета бросается до первого герба: $\Omega = \{\Gamma, P\Gamma, PP\Gamma, \dots\}$ - счетно-бесконечное множество

Ех. 6. Монета бросается на плоскость: $\Omega = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{R}, \langle x, y \rangle - \text{центр монеты}\}$ - бесконечное число исходов

Операции над событиями

Ω - достоверные события (наступают всегда)

\emptyset - невозможное события (никогда не наступает, так как не содержит ни одного элем. исхода)

Введем операции:

Def. 1. Суммой $A + B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A или события B (хотя бы одно из них)

Def. 2. Произведением $A \cdot B$ называется событие, состоящее в том, что произошло события A и события B (оба из них)

Nota. $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ - произошло хотя бы одно из этих событий

$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots$ - произошли все эти события

Def. 3. Противоположным A событием называется событие \bar{A} , состоящее в том, что события A не произошло

Nota. $\bar{\bar{A}} = A$

Def. 4. Дополнение (разность) $A \setminus B$ называется событие $A \cdot \bar{B}$

Def. 5. События A и B называются несовместными, если их произведение - пустое множество (не могут произойти одновременно при одной эксперименте)

Def. 6. События A влечет события B , если $A \subset B$ (если наступает A , то наступит B)

Вероятность

Мы хотим присвоить какую-то числовую характеристику к каждому событию, отражающее его частоту наступления: $0 \leq P(A) \leq 1$ - вероятность наступления события A

Классическое определение вероятности

Пусть пространство случайных событий Ω содержит конечное число равновозможных исходов, тогда применимо классическое определение вероятности

Def. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$, где n - число всех возможных исходов, m - число благоприятных исходов

В частности, если $\Omega = n$ и A_i - элем. исх., то $P(A_i) = \frac{1}{n}$

Свойства:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

$$2) P(A) = 1 \quad (m = n)$$

$$3) P(\emptyset) = 0 \quad (m = 0)$$

$$4) \text{ Если события } A \text{ и } B \text{ несовместны, то } P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Геометрическое определение вероятности (граф де Бюффон)

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутая ограниченная область

$\mu(\Omega)$ - мера Ω в \mathbb{R}^n (например, длина отрезка, площадь области на плоскости, объем тела в пространстве)

В эту область наугад бросаем точку. «Наугад» означает, что вероятность попадания в A зависит только от меры A и не зависит от ее расположения

В этом случае применимо геометрическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Ех. 1. Монета диаметром в 6 см бросается на пол, вымощенной квадратной плиткой со стороной 20 см, какова вероятность, что монета окажется целиком внутри одной плитки

$$\mu(\Omega) = 20^2 = 400$$

$$\mu(A) = (20 - 3 - 3)^2 = 196$$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{196}{400} = 0.49$$

Ех. 2. Задача Бюффона об игле: пусть пол вымощен ламинатом, $2l$ - ширина доски, на пол бросается игла длины, равной ширине доски, найти вероятность того, что игла пересечет стык доски

Определим положение иглы координатами центра и углом, между иглой и стыком доски, причем можно считать, что эти величины независимы

$x \in [0; 1]$ - расстояние от центра до ближайшего края, $\varphi \in [0; \pi]$ - угол

$$\Omega = [0; 1] \times [0; \pi]$$

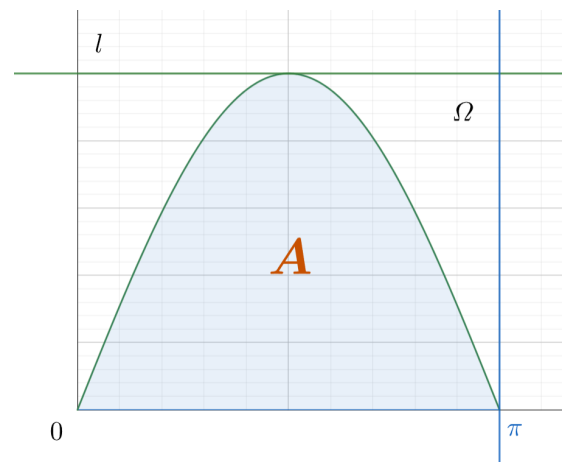
Событие A (пересечет стык) наступает, если $x \leq l \sin \varphi$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

$$S(\Omega) = \pi l$$

$$S(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = -l(-1 - 1) = 2l$$

$$P(A) = \frac{2l}{\pi l} = \frac{2}{\pi}$$



Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов Ω

2. **Def.** Система \mathcal{F} подмножеств Ω называется σ -алгеброй событий, если:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) $A \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$;
- 3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Свойства:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$, так как $\Omega \in \mathcal{F} \implies \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
- (b) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \implies \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

- (c) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A, B \in \mathcal{F} \implies A, \bar{B} \in \mathcal{F} \implies A \setminus B = A \cdot \bar{B} \in \mathcal{F} \quad \square$$

Ex. 1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Ex. 2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$

Ex. 3. **Def.** Борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - минимальная σ -алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.** Ω - пространство элементарных исходов, \mathcal{F} - его σ -алгебра событий. Вероятностью на (Ω, \mathcal{F}) называется функция $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

- (a) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность)
- (b) Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ - несовместное, то $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (свойство счетной аддитивности)
- (c) $P(\Omega) = 1$ (условие нормированности)

Def. Из этого тройка (Ω, \mathcal{F}, P) называется вероятностным пространством

Свойства вероятности

1. Так как \emptyset и Ω - несовместные, то $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = 0$
2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\square \quad A \text{ и } \bar{A} \text{ - несовместные и } A + \bar{A} = \Omega \implies P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad \square$$

3. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

При непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $P(A)$ также должна изменяться непрерывно

Th. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

□

Ясно, что $A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$

$\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1}$ и так как эти события

несовместны, то по свойству счетной аддитивности $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$ - это остаток

(хвост) сходящегося ряда

$P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n)$ и $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ по необходимому признаку сходимости

□

Nota. Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности: $A \cdot (B + C) = AB + AC$
2. Формула сложения: если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$
3. Формула сложения вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

$A + B = A\bar{B} + AB + \bar{A}B$ - несовместные события $\implies P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) = (P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

□

Ex. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика, $P(Д + П) = P(Д) + P(П) - P(ДП) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Формула сложения при $N = 3$: $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 A_2 \dots A_n)$ - формула включения и исключения

Ex. n писем случайно раскладывается по n конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

$\square A_i$ - i -ое письмо в своем конверте

$$P(A_i) = \frac{1}{n}; P(A_i A_j) = \frac{1}{A_n^2}; P(A_i A_j A_k) = \frac{1}{A_n^3}; P(A_1 A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

Слагаемых вида A_i - n штук; $A_i A_j$ - C_n^2 ; $A_i A_j A_k$ - C_n^3 ; $A_1 A_2 \dots A_n$ - 1 штука

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{A_n^2} + C_n^3 \frac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Так как $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots$, то при $n \rightarrow \infty$ $P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-1} \approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$$\square |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов $\Omega \times \Omega$ и $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$$P(AB) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \frac{m_1 m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$$

Def. События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab. $\square P(A), P(B) \neq 0$, доказать, что если A и B несовместны, то они зависимы

Свойство: Если A и B независимы, то независимы \bar{A} и \bar{B} , A и \bar{B} , \bar{A} и B

Доказательство: $A = A \cdot (B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$ - несовместные события $\implies P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \implies P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \implies$ независимы

Def. События A_1, A_2, \dots, A_n - независимы в совокупности, если для любого набора i_1, i_2, \dots, i_k ($2 \leq k \leq n$) $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Nota. Из независимости в совокупности при $k = 2$ получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ex. (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр, $\square A$ - грань, которая содержит красный цвет, B - синий, C - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Так как $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$

$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$ - попарная независимость

$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$ - но вот независимость в совокупности не соблюдается

Ех. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма, ≈ 1650 г.)

Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка

A_1 - при первом броске шестерка, A_2 - при втором, A_3 - при третьем, A_4 - при четвертом

B - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ - совместные события, но независимые

Найдем обратную вероятность: \bar{B} - ни разу не выпала шестерка

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{B} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 0.52$$

Условная вероятность

Условная вероятность $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) - вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Ех. Бросается кость один раз, известно, что выпало больше 3 очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков

A - выпало четное число очков

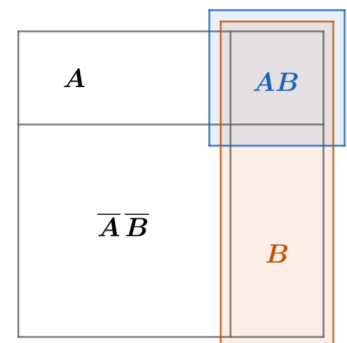
B - выпало больше трех очков

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6; A = \{2, 4, 6\}; B = \{4, 5, 6\}$$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Интерпретация с помощью геометрической вероятности:

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{\frac{S_{AB}}{S_{\Omega}}}{\frac{S_B}{S_{\Omega}}}$$



Def. Условной вероятностью события A при условии, что имело место событие B , называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Ех. Известно, что среди населения 1% воров. В комнате, где находилось 10 гостей, у хозяина пропал кошелек. Какова вероятность того, что произвольный гость является вором.

A - гость является вором $P(A) = 0.01$

B - пропал кошелек (хотя бы один вор среди гостей есть)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(\bar{B})} = \frac{P(A)}{1 - 0.99^{10}} = \frac{0.01}{1 - 0.99^{10}} = 0.105$$

Формула умножения:

В качестве следствия условной вероятности получаем:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \implies P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Общий случай:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

База индукции $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Шаг индукции: пусть верно при $n-1$:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2})$$

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$

$$P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

Ех. Студент выучил 1 билет из n , в группе n студентов. Каким по очереди ему нужно зайти, чтобы вероятность сдать экзамен была наибольшей

Пусть A_i - билет, вытянутый на i -ом шаге ($1 \leq i \leq n$)

A - студент сдал экзамен

$$P(A) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{i-1} \cdot A_i) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \cdot \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$$

Полная группа событий

Def. События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$$

Следствие: $\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

Th. Формула полной вероятности. $\exists H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ - полная группа событий. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) P(A|H_i)$$

□

$$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + H_2 + H_3 + \dots)A) = P(H_1A + H_2A + H_3A + \dots) = [H_i \cdot A \cdot H_j \cdot A = \emptyset \cdot A] = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

□

Th. Формула Байеса. $\square H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий, и известно, что событие A уже произошло

Тогда
$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

□

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

□

Ex. 1. В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили 2 шара, затем из второй коробки достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым

$\square H_1$ - переложили 2 белых H_2 - 2 черных

H_3 - разного цвета

A - из второй коробки достали белый шар

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{75} + \frac{1}{75} + \frac{16}{75} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}$$

Ex. 2. Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.9, а второго 0.3. Наугад вызванный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это бы первый стрелок?

H_1 - вызван первый стрелок

H_2 - вызван второй стрелок

A - стрелок попал

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = 0.9 \quad P(A|H_2) = 0.3$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.9}{\frac{1}{2} \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 0.3} = \frac{9}{9+3} = 0.75$$

Ех. 3. По статистике раком болеет 1% населения. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительный. Найти вероятность того, что человек болен.

H_1 - человек болен

H_2 - человек здоров

A - анализ положительный

$$P(H_1) = 0.01$$

$$P(H_2) = 0.99$$

$$P(A|H_1) = 0.99$$

$$P(A|H_2) = 0.01$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0.01 + 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01} = \frac{1}{2} = 0.5$$




Допустим, что второй независимый с первым анализ также оказался положительным. Найти вероятность того, что человек болен.

$$P(H_1) = 0.01 \quad P(H_2) = 0.99$$

$$P(AA|H_1) = 0.99^2 \quad P(AA|H_2) = 0.01^2$$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.01 + 0.99^2}{0.01 \cdot 0.99^2 + 0.99 \cdot 0.01^2} = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Интуитивно вероятность $\frac{1}{2}$ может поддаваться непониманию, однако можно рассуждать так: пусть в городе живут 10000 человек, из них 100 болеют, а у 99 из них положительный анализ; у других 9900 положительный анализ всего лишь у 99, отсюда выходит $\frac{1}{2}$

Ех. 4. В телевизионной студии 3 двери , за одной из них приз . Игрок выбрал наугад одну из 3 дверей, после чего ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей и показывает, что там приза нет . После чего предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?

H_1 - игрок угадал

H_2 - игрок не угадал

A - ведущий открыл дверь без приза

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(A|H_1) = 1 \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Но это неправильно, так как действия ведущего неслучайны - он всегда откроет дверь без приза

В этом случае, если мы гипотетически выберем 300 дверей, в 100 случаях мы отгадаем, ведущий откроет любую дверь без приза; но в 200 случаях мы не отгадаем, ведущий откроет вторую дверь без приза, и в этом случае мы сможем поменяться на дверь с призом, отсюда шанс $\frac{2}{3}$, если мы меняем свой выбор

Ех. 5. Вероятность того, что в семье с детьми ровно k детей, равна $\frac{1}{s^k}$, $k = 1, 2, \dots$. Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.

H_i - в семье i детей ($1 \leq i < \infty$)

$$P(H_i) = \frac{1}{2^i}$$

A - в семье нет девочки

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|H_i) = \frac{1}{2^i}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4} = 0.75$$