8 Рекуррентности и Производящие функции

- **Производящие функции** (Generating Functions) *тык*

  $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

  Функция выше задает последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$

  Ex. Последовательность $(1, 1, 1, \dots)$ задает функцию $1 + x + x^2 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

  Пусть $S = 1 + x + x^2 + \dots$, тогда $xS = x + x^2 + \dots$, $(1 - x)S = 1 \Longrightarrow$

  $S = \dfrac{1}{1-x}$ задает последовательность $(1, 1, 1, \dots)$

Что?	Куда?
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	$(1, -1, 1, -1, \dots)$
$\dfrac{1}{1-kx} = 1 + kx + k^2x^2 + k^3x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} k^n x^n$	$(1, k, k^2, k^3, \dots)$
$\dfrac{1}{1-kx} + \dfrac{1}{1-mx} = 1 + (k+m)x + (k+m)^2x^2 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (k+m)^n x^n$	$(1, k+m, (k+m)^2, (k+m)^3, \dots)$
$\dfrac{k}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2x^n$	$(k, k, k, k, \dots)$
$\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$	$(1, 0, 1, 0, \dots)$
$\dfrac{x}{1-x} = x + x^2 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$	$(0, 1, 1, 1, \dots)$
$\dfrac{1-x^k}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{k-1} = \sum\limits_{n=0}^{k-1} x^n$	$(\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{k \text{ раз}})$
$\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^n$	$(1, 2, 3, 4, \dots)$

- **Подсчет, используя производящие функции**

  Найти число решений для $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, где $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

  Пусть $A_1(x) = 1 + x + \dots + x^4$, $A_2(x) = 1 + x + \dots + x^3$, $A_3(x) = 1 + x + \dots + x^5$

  Тогда: $A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \dots$

  Ответ - 18

- **Рекуррентные соотношения** (Recurrence relations) *тык*

  Решить рекуррентное соотношение - найти закрытую формулу

  Ex. Арифметическая прогрессия $a_n = a_{n-1} + d, a_0 = const$

  Решение: $a_n = a_0 + nd$ - анзац (Ansatz, догадка)

  Проверка: $a_n = a_0 + nd = a_{n-1} + d = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + nd$ - 👍👍👍

- **Решение при помощи производящих функций**

  Решить рекуррентное соотношение $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-1}$, где $a_0 = 1, a_1 = 3$

  Используем производящие функции:

$$\begin{array}{rcl}
\underline{A(x) = a_0 + a_1x + \quad a_2x^2 + a_3x^3 + \dots} & = & A(x) \\
3x(a_1x + a_2x^2 + \dots) & = & 3x(A(x) - a_0) \\
-2x^2(a_0 + a_1x + \dots) & = & -2x^2A(x) \\
a_0 + a_1x & = & a_0 + a_1x
\end{array}$$

$A(x) = a_0 + a_1x + 3x(A(x) - a_0) - 2x^2A(x) = 1 + 3x + 3xA(x) - 3x - 2x^2A(x)$

$A(x)(2x^2 - 3x + 1) = 1 \Longrightarrow A(x) = \dfrac{1}{1 - 3x + 2x^2} = \dfrac{-1}{1-x} + \dfrac{2}{1-2x} \Longrightarrow a_n = 2^{n+1} - 1$

- **Метод характеристического уравнения**

Рекуррентное соотношение $\overset{a_n \to r^n}{\rightsquigarrow}$ Характеристическое уравнение $\overset{\text{решение}}{\rightsquigarrow}$ Корни $\overset{\text{магия}}{\rightsquigarrow}$ Решение $\rightsquigarrow$ Проверка

Ex. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \quad a_0 = 1, a_1 = 8$
ХрУ: $r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0 \Longrightarrow r_{1,2} = -2, 3$

Если $r_1 \neq r_2$, то $a_n = ar_1^n + br_2^n$ - общее решение
Если $r_1 = r_2 = r$, то $a_n = ar^n + bnr^n$

$$\begin{cases} a_n = a(-2)^n + b(3)^n \\ a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 8 = -2a + 3b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ a_n = -(-2)^n + 2 \cdot 3^n \text{ - решение} \end{cases}$$

- **Разделяй и властвуй** (Divide-and-Conquer)

$$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{работа рекурсии}} + \underbrace{\theta(n)}_{\text{работа разделения/слияния}}$$

- **Основная теорема о рекуррентных соотношениях** (Master Theorem) *тык*

Пусть асимптотика алгоритма - $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, из этого, $c_{crit} = \log_b a$, тогда:

Что?	Когда?	Что делать?
I случай: слияние < рекурсия	$f(n) \in O(n^c)$, где $c < c_{crit}$	$T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$
II случай: слияние ≈ рекурсия	$f(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^k n)$	
	II.a случай - $k \geq 0$	$T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^{k+1} n)$
	II.b случай - $k = -1$	$T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log \log n)$
	II.c случай - $k < -1$	$T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$
III случай: слияние > рекурсия	$f(n) \in \Omega(n^c)$, где $c > c_{crit}$	$T(n) \in \Theta(f(n))$

- **Метод Акра-Бацци** (Akra-Bazzi method) *тык*

Пусть асимптотика алгоритма - $T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i T(b_i n + h_i(n))$,

где $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $k = const$, $h_i(n) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ - малые возмущения

Тогда $T(n) \in \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx\right)\right)$, где p - решение для $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i^p = 1$

Ex. $T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

$a_1 = a_2 = 1, b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1 \Longrightarrow p = 1$

$\int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$
$T(n) \in \Theta(n \cdot (1 + \ln n)) \quad T(n) \in \Theta(n \ln n)$

- **Линейные рекуррентности** (Linear recurrences) *тык*

$$\underbrace{k_1 a_n + k_2 a_{n-1} + k_3 a_{n-2} + \dots}_{\text{линейная комб. рекуррентных членов}} = \underbrace{f(n)}_{\text{функция от } n}$$

Линейное рекуррентное соотношение - $\begin{cases} f = 0 \Longrightarrow \text{гомогенное (однородное)} \\ f \neq 0 \Longrightarrow \text{негомогенное (неоднородное)} \end{cases}$

Ex. Последовательность Фибоначчи:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

$F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0$ - однородное

- **Операторы**:

Что?	Как?
Сумма	$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$
Умножение на число	$(\alpha \cdot f)(n) = \alpha f(n)$
Сдвиг	$Ef(n) = f(n+1)$
Сдвиг на k	$E^k f(n) = f(n+k)$
Композиция	$(X+Y)f(n) = Xf(n) + Yf(n)$ $(XY)f(n) = X(Yf(n)) = Y(Xf(n))$

- **Аннигилятор** (Annihilator) - оператор, который трансформирует f в функцию, тождественную 0
  Nota. Любой составной оператор аннигилирует класс функций
  Nota. Любая функция, составленная из полинома и экспоненты, имеет свой единственный аннигилятор
  Если X аннигилирует f, то X также аннигилирует Ef
  Если X аннигилирует f и Y аннигилирует g, то XY аннигилирует $f \pm g$

Что?	Что аннигилирует?
$(E-1)$	α
$(E-c)$	c^n
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$
$(E-c)^d$	$P_{d-1}(n) \cdot c^n$

- **Аннигилирование рекуррентностей**:
  1. Запишите рекуррентное соотношение в форме операторов
  2. Выделите аннигилятор для соотношения
  3. Разложите на множители (если понадобится)
  4. Выделите общее решение из аннигилятора
  5. Найдите коэффициенты используя базовые случаи (если даны)

  Ex. $r(n) = 5r(n-1), r(0) = 3$
  1. $r(n+1) - 5r(n) = 0 \quad (E-5)r(n) = 0$
  2. $(E-5)$ аннигилирует $r(n)$
  3. $(E-5)$ уже разложен
  4. $r(n) = \alpha \cdot 5^n$
  5. $r(0) = 3 \Longrightarrow \alpha = 3$

- **Псевдонелинейные уравнения** (Pseudo-non-linear equations)
  Ex. $a_n = 3a_{n-1}^2, a_0 = 1$
  $\log_2 a_n = \log_2(3a_{n-1}^2)$
  Пусть $b_n = \log_2 a_n$
  $b_n = 2b_{n-1} + \log_2 3, b_0 = 0$
  $b_n = (2^n - 1)\log_2 3$
  $a_n = 2^{(2^n-1)\log_2 3} = 3^{2^n-1}$