3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Далее $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - вспомогательный (уже исследован на сходимость), для простоты $v_n, u_n > 0$ (для отрицательных доказывается аналогично)

Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)
а) $\exists 0 < u_n \le v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\Longrightarrow \sum u_n$ сходится
б) $\exists 0 \le v_n \le u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\Longrightarrow \sum u_n$ расходится

$\square$
а) Строим частичные суммы:
$\sum v_n$ сходится $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$
S_n, σ_n возрастают и обе ограничены числом σ
Следовательно $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \le \sigma$
Аналогично пункт б)
$\square$

Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \left[\begin{array}{l} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{array}\right.$$

$\square$
По определению предела
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |\frac{u_n}{v_n} - q| < \varepsilon$
$|\frac{u_n}{v_n} - q| < \varepsilon \Longleftrightarrow q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$
$(q-\varepsilon)v_n < u_n < (q+\varepsilon)v_n$
а) Если $\sum v_n$ сходится, то из правой части неравенства: $0 < u_n < (q+\varepsilon)v_n$
По признаку сравнения $\sum u_n$ также сходится
б) Если $\sum v_n$ расходится, то из левой части неравенства: $0 < (q-\varepsilon)v_n < u_n$

Тогда по пункту б) **Th. 1.** $\sum u_n$ расходится

□

Nota. При $q = 0$ можем говорить, что u_n - бесконечно малая высшего порядка, чем v_n, а значит, если ряд v_n сходится, то u_n сходится

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится по признаку сравнения

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится

Начиная с некоторого n_0 $n! > 2^n$. Тогда $u_n < v_n$ при $n > n_0$, по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$

Nota. Члены рядов u_n и v_n - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если u_n и v_n одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$u_n = \arcsin \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

Th. 3. Признак Даламбера

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый, $\exists \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$

а) $0 \le \mathcal{D} < 1 \quad \Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $\mathcal{D} > 1 \quad \Longrightarrow \sum u_n$ расходится

в) $\mathcal{D} = 1 \quad \Longrightarrow$ ничего не следует, требуется другое исследование

$\square$

а) По определению предела $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $0 \le \mathcal{D} < 1 \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D}| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D} - \varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$

Так как $0 \le \mathcal{D} < 1$, можно втиснуть число r между $\mathcal{D}$ и 1: $\mathcal{D} < r < 1$

Положим $\varepsilon = r - \mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < r$ для $\forall n > n_0$, где $n_0 = n_0(\varepsilon), \varepsilon = r - \mathcal{D}$

$u_{n_0+1} < ru_{n_0}$

$u_{n_0+2} < ru_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$

$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1}}_{k} + u_{n_0} + \dots = k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены $v_m < r^l u_{n_0}$; u_{n_0} - фикс. число, а $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l$ сходится как геометрический при $|r| < 1$

Итак ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$ сходится и почленно превышает $\sum v_m = (\sum u_n) - k$

То есть $\sum u_n$ сходится

б) Lab. (взять r между $\mathcal{D}$ и 1, $1 < r < \mathcal{D}$, $\mathcal{D} - r = \varepsilon$)

Сравнить $\sum u_n$ с $\sum r^l$ (расходящимся)

$\square$

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \qquad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ - сходится

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \qquad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ - расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \qquad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ - сходится

Th. 4. Радикальный признак Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \qquad u_n \ge 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$

а) $0 \le K < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ расходится

Nota. $K = 1$ - ничего не следует

□

а) По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \; |\sqrt[n]{u_n} - K| < \varepsilon$

$\iff k - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon$ Положим $\varepsilon = r - K$, где $K < r < 1$

$\implies 0 \le u_n < r^n$ - геом. ряд с $|r| < 1$, то есть $\sum r^n$ сходится

б) Аналогично

□

Ex. 1. $\sum\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ - необходимое условие не выполняется

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-1} < 1$ - сходится

Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \to \mathbb{R}^+, f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

□

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$$

$$\sum_{n=2}^{b} u_n = u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x)dx < u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n$$

Обозначим $\sum\limits_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}, \quad \sum\limits_{n=2}^{b} u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x)dx < S_{b-1}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если $\int$ сходится, то смотрим правую часть

Если $\int$ расходится, то смотрим левую часть неравенства

□

4. Знакочередующиеся ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ $(u_n > 0)$ - знакочередующийся ряд

Th. Признак Лейбница

Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ верно, что $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ сходится