Случайные величины

Примеры случайных величин:

Ex. 1. Бросаем кость, может выпасть 6 граней, здесь случайная величина ξ - число выпавших очков
Ex. 2. ξ - время работы микросхемы, в этом случае время может быть:
а) дискретным - $\xi \in \{0, 1, 2, \dots\}$
б) непрерывным - $\xi \in [0; \infty)$
Ex. 3. Температура за окном: $\xi \in (-50, +50)$

Def. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ функция $\xi \ : \ \Omega \to \mathbb{R}$ называется $\mathcal{F}$-измеримой, если $\forall x \in \mathbb{R} \ \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$ (то есть $\xi^{-1}(y) \in \mathcal{F}$, где $y \in (-\infty; x)$)

Def. Случайной величиной, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, называется $\mathcal{F}$-измеримая функция $\xi \ : \Omega \to \mathbb{R}$, которая сопоставляет каждому элементарному исходу некоторое вещественное число

Nota. Не все функции являются $\mathcal{F}$-измеримыми
Ex. Кость: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$
Пусть $\xi(\omega) = i$ - число выпавших очков. Тогда при $x = 4 : \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < 4\} = \{1, 2, 3\} \notin \mathcal{F} \Longrightarrow$ случайная величина не является $\mathcal{F}$-измеримой
В данном случае следует сделать ξ таким, что $\xi(2) = \xi(4) = \xi(6) = 1$, $\xi(1) = \xi(3) = \xi(5) = 0$

Nota. Смысл измеримости: если задана случайная величина ξ, то мы можем задать вероятность попадания случайной величины в интервал $(-\infty; x)$: $p(\xi \in (-\infty; x)) = p(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\})$
А из интервалов $(-\infty; x)$ с помощью операций пересечения, объединения и дополнения можно получить все другие интервалы (включая точки) и также приписать им вероятности
Из матанализа известно, что мера из интервалов однозначно продолжается до меры на всей Борелевской σ-алгебры на $\mathbb{R}$ и, таким образом, с помощью случайной величины каждому Борелевскому множеству B также приписывается вероятность $p(\xi \in B)$
Итак, пусть ξ задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, с помощью нее получаем новой вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), p_\xi)$
Получая новое вероятностное пространство, мы упрощаем и формализуем работу, так как можем не учитывать природу и структуру исходного пространства

Def. Функция $p(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ставящая в соответствие каждому Борелевскому множеству вероятность, называется распределением случайной величины ξ

Основные типы распределения

a) Дискретное
b) Абсолютно непрерывное
c) Сингулярное
d) Смешанное

Дискретная случайная величина

Def. Случайная величина ξ имеет дискретное рапределение, если она принимает не более, чем счетное число значений. То есть существует конечный или счетный набор чисел $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ такой, что $p(\xi = x_i) = p_i > 0$ и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

Таким образом, дискретная случайная величина (ДСВ) задается законом распределения:

доска

ξ	x_1	x_1	$\dots$	x_n	$\dots$
p	p_1	p_1	$\dots$	p_n	$\dots$

- значения случайной величины
- вероятности этих значений

($\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ - условие нормировки)

Ex. 1. кость, $\xi(\omega) = i$ - число выпавших очков

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ex. 2. все распределения из предыдущих лекций (биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассона)

Ex. 3. индикатор события A: $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \notin A \text{ - событие } A \text{ не происходит} \\ 1, & \omega \in A \text{ - событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

I. Математическое ожидание (среднее значение, полезность)

Def. Математическим ожиданием $E\xi$ случайной величины ξ называется число

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

при условии, что данный ряд сходится абсолютно

Nota. Если $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \infty$, то говорят, что матожидание не существует
При условной сходимости ряда при перестановке членов сумма изменяется, поэтому необходима абсолютная

Физический смысл: Среднее значение - число, вокруг которого группируются значения случайной величины, центр тяжести точек x_i с весами p_i

Статистический смысл: среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины при большом числе реальных экспериментов

II. Дисперсия

Def. Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называют среднее квадратов ее отклонения от математического ожидания:
$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ или $D\xi = \sum_{i=0}^{\infty}(x_i - E\xi)^2 p_i$ при условии, что данный ряд сходится
В противном случае говорится, что дисперсии не существует

Nota. Дисперсию обычно удобно считать по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E\xi^2$

Смысл - квадрат среднего разброса (рассеивания) значения случайной величины относительно ее математического ожидания

III. Среднее квадратическое отклонение

Def. Среднее квадратическое отклонение (СКО) σ_ξ называется величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$
Смысл - средний разброс

Ex. 1. Кость

ξ	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E\xi = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 3.5$ (в данном случае ср. арифм.)

$$D\xi = \sum_{i=1}^{6}(x_i - E\xi)^2 p_i = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3.5^2 = \frac{35}{12}$$

$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx 1.79$

Ex. 2. Индикатор события A: $I_A(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin A \text{ - событие } A \text{ не происходит} \\ 1, \omega \in A \text{ - событие } A \text{ происходит} \end{cases}$

ξ	0	1
p	$1 - P(A)$	$P(A)$

$E\xi = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A)$

$D\xi = 0^2 \cdot (1 - P(A)) + 1^2 P(A) - P(A)^2 = P(A)(1 - P(A)) = pq$
$\sigma_\xi = \sqrt{pq}$

Свойства матожидания и дисперсии

Th. 1. Случайная величина ξ имеет вырожденное распределение, если $\xi(\omega) = \text{const} \quad \forall \omega \in \Omega$

ξ	C
p	1

$E\xi = C \qquad D\xi = 0$

Th. 2. Свойство сдвига: $E(\xi + C) = E\xi + C; D(\xi + C) = D\xi$

Th. 3. Свойство растяжения:

$E(C\xi) = CE\xi$

$D(C\xi) = C^2 D\xi$

Lab. 2-3 доказать

Th. 4. $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$ (из третьего свойства матожидание - линейная функция)

$\square$

$\sqsupset x_i, y_i$ - значения случайных величин ξ, η, а p_i и q_i - их соответствующие вероятности
$E(\xi + \eta) = \sum\limits_{i,j} (x_i + y_j) p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum\limits_i x_i \sum\limits_j p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) + \sum\limits_j y_j \sum\limits_i p(\xi = x_i \text{ и } \eta = y_j) = \sum\limits_i x_i p(\xi = x_i) + \sum\limits_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi + E\eta$

$\square$

Def. Дискретные случайные величины ξ и η независимы, если $p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_i) \ \forall i, j$

То есть случайные величины принимают свои величины независимо друг от друга

Th. 5. Если случайные свойства ξ и η независимы, то $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$; обратное неверно

$\square$

$E(\xi\eta) = \sum\limits_{i,j} x_i y_i p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum\limits_i x_i \sum\limits_j y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum\limits_i x_i \sum\limits_j y_j p(\xi = x_i) p(\eta = y_j) = \sum\limits_i x_i p(\xi = x_i) \sum\limits_j y_j p(\eta = y_j) = E\xi \cdot E\eta$

$\square$

Th. 6. $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$

$\square$

$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + E((E\xi)^2) = E\xi^2 - 2(E\xi)^2 + (E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

□

Def. 7. $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta = 2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$, где $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$ - ковариация случайных величин (равна 0 при независимых величинах) - индикатор наличия связи между случайными величинами

□

$D(\xi+\eta) = E(\xi+\eta)^2 - (E(\xi+\eta))^2 = E\xi^2 + 2E\xi E\eta + E\eta^2 - (E\xi+E\eta)^2 = E\xi^2 + E\eta^2 + 2E(\xi\eta) - (E\xi)^2 - (E\eta)^2 - 2E\xi E\eta = D\xi + D\eta + 2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$

□

Th. 8. Если случайные величины ξ и η независимы, то $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$

□

Если ξ и η независимы, то $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$ и $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$

□

Th. 9. Общая формула дисперсии суммы: $D(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum\limits_{i,j(i\neq j)} \mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j)$

Другие числовые характеристики

Моменты старших порядков
а) $m_k = E\xi^k$ - момент k-ого порядка случайной величины ξ
б) $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$ - центральный момент k-ого порядка
$E\xi = m_1$ - момент первого порядка
$E\xi^2 = m_2$ - момент второго порядка
$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ - центральный момент второго порядка

Nota. Центральные моменты можно выразить через обычный момент:
$\mu^2 = D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = m_2^2 - m_1^2$
$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m^3$
$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_2 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$

Ex. Разберем задачу Бюффона с точки зрения матожидания: пусть $p(A)$ - пересечет стык, $\xi = I_A$ - число пересечений. Тогда матожидание $E\xi = EI_A = P(A)$
Заметим, что при изменении длины иглы с l до $2l$ матожидание пересекаемых стыков увеличивается в два раза. Помимо этого можно составить из k игл ломаную, матожидание стыков которой будет равно $kE\xi$

Заметим, что такое работает и в обратную сторону: при уменьшении иглы в k раз матожидание равно $\dfrac{E\xi}{k}$
Теперь сделаем замкнутый многоугольник из игл, получим, что матожидание в таком случае $P\dfrac{E\xi}{l}$, где P - периметр
В пределе строим круг диаметра l - он всегда пересечет линии стыка 2 раза, значит матожидание $E_o = P_o\dfrac{E\xi}{l} = 2$
Длина окружность $P_o = \pi l$, получаем $E\xi = \dfrac{2l}{P_o} = \dfrac{2l}{\pi l} = \dfrac{2}{\pi}$