Условная вероятность

Условная вероятность $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) - вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Ex. Бросается кость один раз, известно, что выпало больше 3 очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков

A - выпало четное число очков

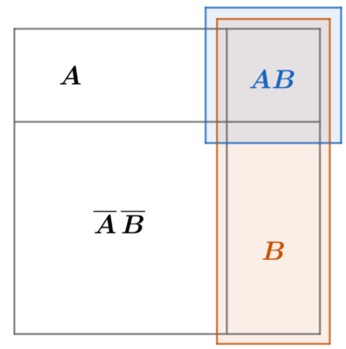
B - выпало больше трех очков

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}; |\Omega| = 6; A = \{2,4,6\}; B = \{4,5,6\}$

$P(A|B) = \dfrac{2}{3} = \dfrac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Интерпретация с помощью геометрической вероятности:

$P(A|B) = \dfrac{S_{AB}}{S_B} = \dfrac{\frac{S_{AB}}{S_\Omega}}{\frac{S_B}{S_\Omega}}$



Def. Условной вероятностью события A при условии, что имело место событие B, называется величина $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$

Ex. Известно, что среди населения 1% воров. В комнате, где находилось 10 гостей, у хозяина пропал кошелек. Какова вероятность того, что произвольный гость является вором.

A - гость является вором $P(A) = 0.01$

B - пропал кошелек (хотя бы один вор среди гостей есть)

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(AB)}{1 - P(\overline{B})} = \dfrac{P(A)}{1 - 0.99^{10}} = \dfrac{0.01}{1 - 0.99^{10}} = 0.105$

Формула умножения:

В качестве следствия условной вероятности получаем:

$P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \Longrightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Общий случай:

$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(P_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$

□

База индукции $P(AB) = P(B)P(A|B)$

Шаг индукции: пусть верно при $n-1$:

$P(A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(P_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-2})$

$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1}) =$

$P(A_1)P(A_2|A_1)P(P_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$

□

Ex. Студент выучил 1 билет из n, в группе n студентов. Каким по очереди ему нужно зайти, чтобы вероятность сдать экзамен была наибольшей

Пусть A_i - билет, вытянутый на i-ом шаге $(1 \le i \le n)$

A - студент сдал экзамен

$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i-1}} \cdot A_i) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \cdot \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$

Полная группа событий

Def. События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы

$H_i \cap H_j = \varnothing \ \forall i, j \qquad \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$

Следствие: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

Th. Формула полной вероятности. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ - полная группа событий. Тогда $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$

□

$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + H_2 + H_3 + \dots)A) = P(H_1A + H_2A + H_3A + \dots) = [H_i \cdot A \cdot H_j \cdot A = \varnothing \cdot A] = P(H_1A) + P(H_2A) + \dots = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$

□

Th. Формула Байеса. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий, и известно, что событие A уже произошло

Тогда $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

□

$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

□

Ex. 1. В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили 2 шара, затем из второй коробки достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым

$\sqsupset H_1$ - переложили 2 белых H_2 - 2 черных

H_3 - разного цвета

A - из второй коробки достали белый шар
$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$
$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$
$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{75} + \frac{1}{75} + \frac{16}{75} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}$

Ex. 2. Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.9, а второго 0.3. Наугад вызванный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это бы первый стрелок?

H_1 - вызван первый стрелок

H_2 - вызван второй стрелок

A - стрелок попал

$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

$P(A|H_1) = 0.9 \qquad P(A|H_2) = 0.3$

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)|P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2}0.9}{\frac{1}{2}0.9 + \frac{1}{2}0.3} = \frac{9}{9+3} = 0.75$

Ex. 3. По статистике раком болеет 1% населения. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительный. Найти вероятность того, что человек болен.

H_1 - человек болен

H_2 - человек здоров

A - анализ положительный

$P(H_1) = 0.01$

$P(H_2) = 0.99$

$P(A|H_1) = 0.99$

$P(A|H_2) = 0.01$

$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0.01 + 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01} = \frac{1}{2} = 0.5$

Допустим, что второй независимый с первым анализ также оказался положительным. Найти вероятность того, что человек болен.

$P(H_1) = 0.01 \qquad P(H_2) = 0.99$

$P(AA|H_1) = 0.99^2 \qquad P(AA|H_2) = 0.01^2$

$P(H_1|AA) = \frac{0.01 + 0.99^2}{0.01 \cdot 0.99^2 + 0.99 \cdot 0.01^2} = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$

Интуитивно вероятность $\frac{1}{2}$ может поддаваться непониманию, однако можно рассуждать так: пусть в городе живут 10000 человек, из них 100 болеют, а у 99 из них положительный анализ; у других 9900 положительный анализ всего лишь у 99, отсюда выходит $\frac{1}{2}$

Ex. 4. В телевизионной студии 3 двери 🚪🚪🚪, за одной из них приз 🚗. Игрок выбрал наугад одну из 3 дверей, после чего ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей и показывает, что там приза нет 🛴. После чего предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?

H_1 - игрок угадал

H_2 - игрок не угадал

A - ведущий открыл дверь без приза

$P(H_1) = \dfrac{1}{3} \qquad P(H_2) = \dfrac{2}{3}$

$P(A|H_1) = 1 \qquad P(A|H_2) = \dfrac{1}{2}$

$P(H_1|A) = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

Но это неправильно, так как действия ведущего неслучайны - он всегда откроет дверь без приза

В этом случае, если мы гипотетически выберем 300 дверей, в 100 случаях мы отгадаем, ведущий откроет любую дверь без приза; но в 200 случаях мы не отгадаем, ведущий откроет вторую дверь без приза, и в этом случае мы сможем поменяться на дверь с призом, отсюда шанс $\dfrac{2}{3}$, если мы поменяем свой выбор

Ex. 5. Вероятность того, что в семье с детьми ровно k детей, равна $\dfrac{1}{s^k}$, $k = 1, 2, \dots$ Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.

H_i - в семье i детей $(1 \le i < \infty)$

$P(H_i) = \dfrac{1}{2^i}$

A - в семье нет девочки

$P(A|H_1) = \dfrac{1}{2}$

$P(A|H_2) = \dfrac{1}{4}$

$P(A|H_i) = \dfrac{1}{2^i}$

$P(H_1|A) = \dfrac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i}} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = \dfrac{3}{4} = 0.75$