

*Nota.* Особое значение имеют симметричные билинейные формы

Если рассмотреть матрицы симм. Б. Ф. как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица Б. Ф. диагонализируется

Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

## 3.2. Квадратичные формы

**Def.** Квадратичной формой, порожденной Б. Ф.  $\mathcal{B}(u, v)$ , называется форма  $\mathcal{B}(u, u)$

*Ex.* Поверхность

$$u = (x, y), v = (x, y, z)$$

$$\mathcal{B}(u, u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$$

$$\mathcal{B}(v, v) = \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2$$

*Met.* Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$$

*Nota.* Заметим, что здесь коэфф.  $a_{ij}$  соответствуют матрице симметричной Б. Ф.:

$$B(v, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Если диагонализировать  $B(v, v)$ , то приведем уравнение поверхности к каноническому виду:

$$\mathcal{B}(v, v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

**Def.** Положительно определенная форма

*Nota.* Можно говорить о положительно определенном операторе  $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

1) Оператор  $\mathcal{A}$  называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$$

2)  $\mathcal{A}$  называется положительным, если

$$\forall x \in V, x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$$

**Th.** 1), 2)  $\iff \forall \lambda_i$  - с. число  $\mathcal{A}$ ,  $\lambda_i > 0$

$\square \implies \lambda_i$  - с. число,  $e_i$  - соответствующий им с. вектора

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left( \sum_{i=1}^n c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum_{i=1}^n c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$$

Если  $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$ , то  $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$$\iff 1) \iff \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V \text{ в том числе } x = e_i \neq 0$$

$$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i(e_i, e_i) = \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

□

*Nota.*  $\det A$  инвариантен при замене базиса,  $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$ . Тогда  $\exists \mathcal{A}^{-1}$

**Th.** Критерий Сильвестра

$$\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n - \text{положительно определен} \iff \forall k = 1..n \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

□  $\implies \mathcal{A}$  - пол. опред.

$\mathcal{A}$  диагонализуется в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  собственных векторов. Тогда,  $\mathcal{A}$  диагонализуется в базисе  $\{e_1, \dots, e_k\}$ ,  $k \leq n$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \stackrel{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$$

$\Leftarrow$  ММИ

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$

1) Для  $k = 1$   $\mathcal{A}$  - пол. опр.

2)  $\mathcal{A}_{n-1}$  - пол. опр.  $\implies \mathcal{A}_n$  - пол. опр.

1)  $\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \implies \mathcal{A}$  - пол. опр.

$$2) \mathcal{A} \text{ диагон.} \quad \mathcal{A}_e x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n \quad \text{Для } i \leq n-1 \text{ все } \lambda_i > 0$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2 + \lambda_n c_n^2 - \text{знак зависит от } \lambda_n$$

$$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \implies \lambda_n > 0 \implies (\mathcal{A}x, x) > 0$$

□

*Ex.* Поверхность:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathcal{B}(u, u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \quad \forall k$$

Положительная определенность - наличие экстремума

**Def.** Оператор  $\mathcal{A}$  называется отрицательно определенным, если  $-\mathcal{A}$  - положительно определенный

$$\text{Nota. Для } -\mathcal{A} \text{ работает критерий Сильвестра: } \Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$$

Таким образом,  $\mathcal{A}$  - отриц. опред.  $\iff \Delta_k$  чередует знаки

*Nota.* Аналогично операторы определяются положительно или отрицательно билинейные формы

$\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j \stackrel{?}{=} \dots$  через оператор

Так как  $\mathcal{B}(u, v)$  и  $\mathcal{B}(u, u)$  - числа, то  $\mathcal{B}$  - называется пол. опред., если  $\mathcal{B}(u, u) > 0$

*Nota.* После приведения  $\mathcal{B}(u, v)$  к каноническому виду, получаем

$$\mathcal{B}(u, u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

В общем случае  $\lambda_i$  любого знака

Но можно доказать, что количества  $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$  постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (т. н. закон инерции квадратичной формы)