

4.2 ДУ первого порядка (ДУ₁)

Nota. Среди ДУ₁ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ

- 1) Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
- 2) Однородное уравнение (ОУ)
- 3) Уравнение полных дифференциалов (УПД)
- 4) Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ₁)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

1* УРП

Def. $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

Решение : $N(y)M(x) \neq 0$

$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0$ $y = y(x)$ - неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$$\left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = 0$$

Интегрируем по dx :

$$\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = \text{const}$$

По свойствам интеграла:

$$\int \frac{m(x)}{M(x)} dx + \int \frac{n(y)}{N(y)} dy = \text{const}$$

или:
$$\int \frac{m(x)}{M(x)} dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)} dy$$

Ex. $xdy - ydx = 0$

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \tilde{C} = \ln |\tilde{C}x|$$

$$|y| = |\tilde{C}x|$$

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

Заметим, $x = y = 0$ - решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$$\underbrace{m(a)N(b)}_{=0}dx + \underbrace{n(b)M(a)}_{=0}dy = 0$$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

2* ОУ

Def. 1. Однородная функция n -ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$, $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Ex. $f = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$, $\cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ - нулевой порядок однородности

$f = \sqrt{x^2 + y^2}$ - первый порядок

Def. 2. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y), Q(x, y)$ - однородные функции одного порядка - ОУ

Решение $P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$$Q(x, y) = x^k Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Тогда, $P\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)dy = 0$.

Обозначим $\frac{y}{x} = t$, $y' = \frac{dy}{dx} \stackrel{y=tx}{=} t'_x x + t = t'_x x + t$

$$P(1, t) + Q(1, t)y' = P(1, t) + Q(1, t)(t'_x x + t) = 0$$

$$t'_x x + t = -\frac{P(1, t)}{Q(1, t)} \stackrel{\text{обозн}}{=} f(t)$$

$$t'_x x = f(t) - t$$

$$\frac{dt}{dx}x = f(t) - t \neq 0$$

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} = \ln |Cx|$$

$Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x, y)$ - общий интеграл

Если $f(t) - t = 0$, то пусть $t = k$ - корень, тогда $k = \frac{y}{x} \rightarrow y = kx$ - тоже решение

$$\text{Ex. } (x+y)dx + (x-y)dy = 0$$

$$\frac{y}{x} = t \quad y' = t'_x x + t$$

$$y = tx \quad dy = (t'_x x + t)dx$$

$$(x+tx)dx + (x-tx)(t'_x x + t)dx = 0$$

$$(1+t) + (1-t)(t'_x x + t) = 0$$

$$t'(1-t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$$

$$t'(1-t)x = t^2 - 2t - 1$$

$$\frac{(1-t)dx}{t^2 - 2t - 1} = \frac{dx}{x} - \text{УРП}$$

$$\frac{(1-t)dt}{(1-t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \frac{d((1-t)^2) - 2}{(1-t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \ln |(1-t)^2 - 2| = \ln \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 - 2}} = \ln |Cx|$$

$$\tilde{C}x = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 - 2}} \iff Cx^2 = \frac{1}{(1-t)^2 - 2} \iff Cx^2((1-t)^2 - 2) = 1$$

$$C((y-x)^2 - 2x^2) = 1$$

$$C(y^2 - 2xy - x^2) = 1$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = C - \text{гиперболы}$$

$$(t-1)^2 - 2 = 0 \quad \frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \quad y = (1 \pm \sqrt{2})x - \text{асимптоты}$$

3* Уравнение в полных дифференциалах

Def. $\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ - УПД

Решение *Мет.* **Th.** об интеграле НЗП $\exists \Phi(x, y) \mid d\Phi = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

Ex. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,0)}^{(x,0)} xdx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y)dy = \frac{x^2}{2} \Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{x^2}{2} +$$

$$xy - \frac{y^2}{2} + C - \text{общий интеграл}$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

4* ЛДУ

Def. $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ - ЛДУ₁

$$p, q \in C_{[a,b]}$$

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Принцип: если удалось найти частное решение ДУ_{однор} (обозначим y_0), то общее решение

ДУ_{неод} можно искать в виде $y = C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y' + p(x)y = 0$

Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y' + p(x)y = q(x)$

Ex. $y(x) = x^2 e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ

А $y_0 = x e^{-x}$, тогда $y = x x e^{-x} = C(x) x e^{-x}$

То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y = y(x)$

Решение а) $y' + p(x)y = 0$

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ - УРП

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln |\tilde{C}y| = - \int p(x)dx$$

$$\bar{y} = C e^{-\int p(x)dx} = C y_0$$

б) $y' + p(x)y = q(x)$

Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

$$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$$

$$C'(x)y_0 + C(x)\underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$$

$$C'(x) = \frac{q(x)}{y_0} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int \frac{q(x)}{y_0} e^{\int p(x)dx} dx$$