Мет. Решаем задачу о перпендикуляре, ищем f_0 - наименьшую из проекций и минимально отстоящую от f

Координаты f_0 в выбранном ортонормированном базисе L' равны соответствующим координатам f в этом базисе

$f_0 = f_1e_1 + f_2e_2 + \dots + \underset{k=\dim L', n=\dim L}{f_k e_k} = (f, e_1)e_1 + (f, e_2)e_2 + \dots + (f, e_k)e_k$

$(f, e_1) = \int_a^b f(x)e_1(x)dx$

Nota. Итак, $\exists L \in C_{[-\pi,\pi]}, L' = l_{\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}}$

Тогда можно искать многочлен $P_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin x$, который наилучшим образом приближает $f(x)$

Если нормировать систему $\{\sin nx, \cos nx\}$, то коэффициентами многочлена $P_n(x)$ будут скалярные произведения $f(x)$ на функция ортонормированной системы.

Получим $\left\{\frac{1}{2\pi}, \frac{\sin x}{\pi}, \frac{\cos x}{\pi}, \dots, \frac{\sin nx}{\pi}, \frac{\cos nx}{\pi}\right\}$

Тогда, $\boxed{\begin{array}{l} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \end{array}}$ - коэффициенты Фурье

Nota. Если увеличивать степень n, то получим ряд Фурье. Запишем формально:

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ - сходится ли этот ряд и сходится ли к $f(x)$?

Ответ дает теорема (доказательство будет приведено позже)

Th. $f(x)$ - 2π-периодична, на $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ - кусочно монотонна и ограничена (то есть имеет конечное число конечных разрывов). Тогда в точках непрерывности $f(x)$ представляется рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x)$$

а в точках разрыва $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$

Сейчас только тригонометрический ряд Фурье, хотя подобное разложение возможно по различным ортогональным системам функций

Nota. В концах отрезках $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ может быть не определена, но в любом случае ограничена

$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$

<u>Разложение периодичных функций</u> (на $[-\pi, \pi]$)

1°: $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$, $f(x+2\pi) = f(x)$

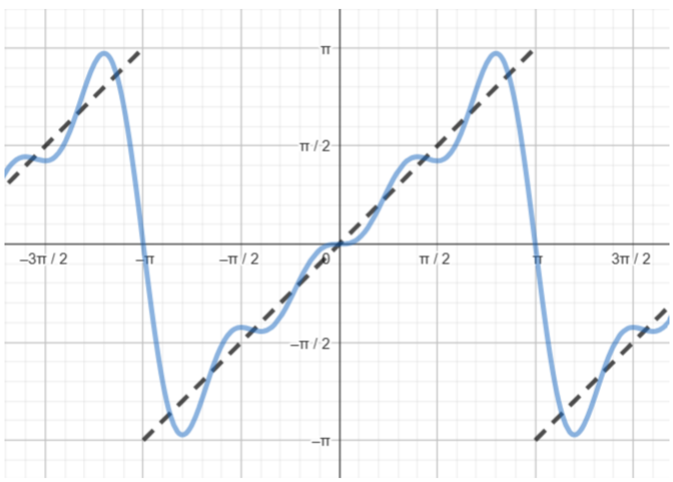
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{-2}{\pi n}\int_0^{\pi} x d\cos nx = -\frac{2}{\pi n}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi} - \cancelto{0}{\int_0^{\pi}\cos nx dx}\right) = -\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$-\frac{2}{n}\cos\pi n = \begin{bmatrix} \frac{-2}{n}, & n = 2m \\ \frac{2}{n}, & n = 2m+1 \end{bmatrix} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Итак $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n}\sin nx$



2°: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } [0, \pi] \\ -1 & \text{на } [-\pi, 0) \end{cases}$ на $[-\pi, \pi]$

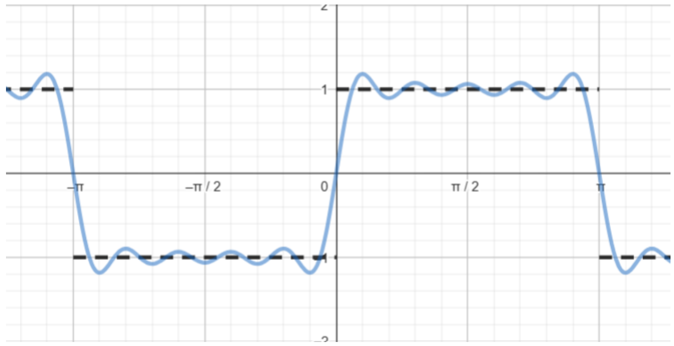
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx + \int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{1}{2n}\left(\int_{-\pi}^{0} d\cos nx - \int_0^{\pi} d\cos nx\right) =$$

$$\frac{1}{\pi n}\left(\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \cos nx\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi n}(1 - \cos\pi n - \cos\pi n + 1) = \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\pi n) = \frac{4}{\pi(2m-1)}$$

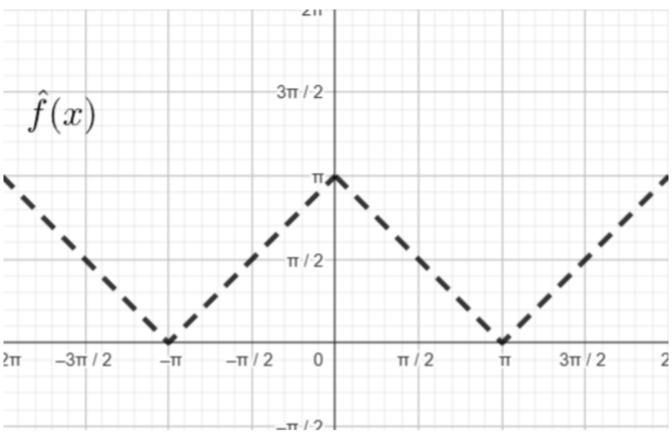
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m-1)}\sin(2m-1)x$$

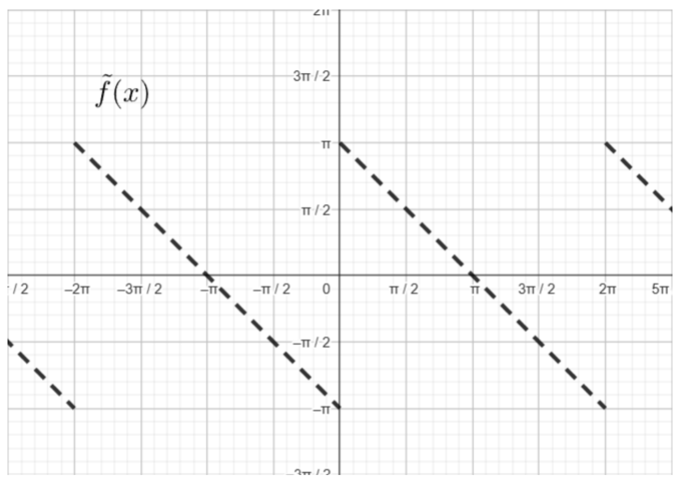


Nota. Заметим, что если $f(x)$ - четная, то $b_n = 0$, а если нечетная, то $a_n = 0$. Иногда в задаче требуется разложить $f(x)$, заданную только на отрезке $[0, \pi]$. Такую функцию можно продолжить четным или нечетным образом на $[-\pi, \pi]$. Говорят о разложении в ряд по косинусам и синусам соответственно

3°: $f(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$

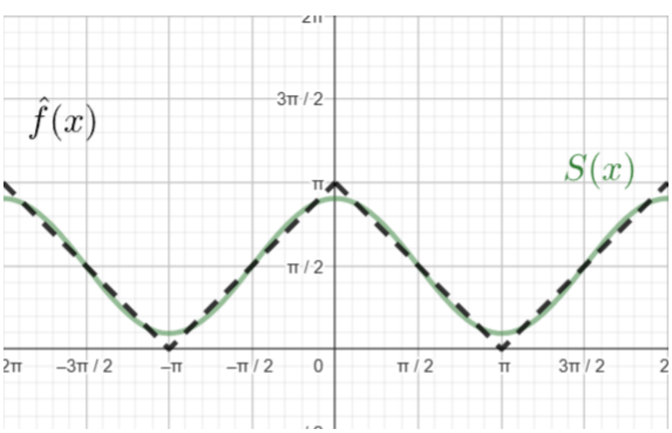
Дополним $f(x)$ двумя способами

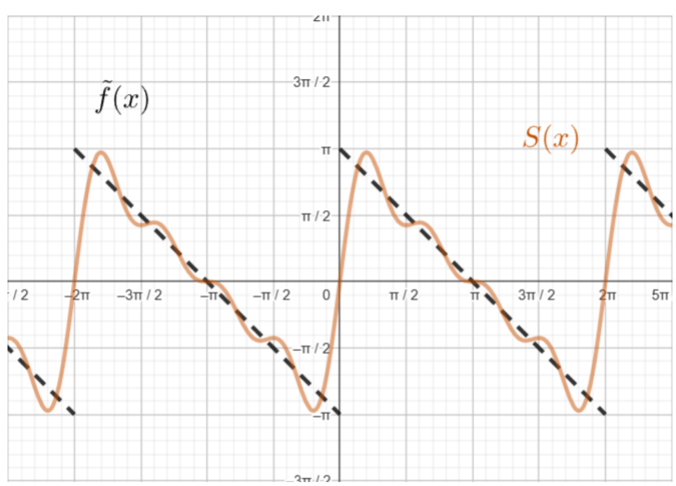




В ряд Фурье раскладывются периодические функции $\hat{f}, \tilde{f}$

<u>Lab.</u> $\hat{f}(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \tilde{f}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$





Заметим, что $\tilde{f}$ на $[0, 2\pi]$ имеет одно аналитическое задание (удобно интегрировать). Изменится ли ряд Фурье, если сдвинуть отрезок?

Th. о сдвиге. Сдвиг промежутка длиной 2π не меняет ряда Фурье

Th. о растяжении. Для $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ растяжение промежутка приводит к разложению:
$b - a = 2l = T$ - период
$a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx$
$a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{\pi n}{l}xdx$
$b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx$