

3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Далее $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - вспомогательный (уже исследован на сходимость),
для простоты $v_n, u_n > 0$ (для отрицательных доказывается аналогично)

Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)

- а) $0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\implies \sum u_n$ сходится
б) $0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\implies \sum u_n$ расходится

□

а) Строим частичные суммы:

$$\sum v_n \text{ сходится} \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

S_n, σ_n возрастают и обе ограничены числом σ

$$\text{Следовательно } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq \sigma$$

Аналогично пункт б)

□

Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \begin{cases} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{cases}$$

□

По определению предела

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \frac{u_n}{v_n} - q \mid < \varepsilon$$

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon \iff q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)v_n < u_n < (q + \varepsilon)v_n$$

а) Если $\sum v_n$ сходится, то из правой части неравенства: $0 < u_n < (q + \varepsilon)v_n$

По признаку сравнения $\sum u_n$ также сходится

б) Если $\sum v_n$ расходится, то из левой части неравенства: $0 < (q - \varepsilon)v_n < u_n$

Тогда по пункту б) **Th. 1.** $\sum u_n$ расходится
□

Nota. При $q = 0$ можем говорить, что u_n - бесконечно малая высшего порядка, чем v_n , а значит, если ряд v_n сходится, то u_n сходится

$$\begin{aligned} \text{Ex. 1. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится} \\ \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится по признаку сравнения} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex. 2. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится} \end{aligned}$$

Начиная с некоторого n_0 $n! > 2^n$. Тогда $u_n < v_n$ при $n > n_0$, по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится

$$\text{Ex. 3. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Nota. Члены рядов u_n и v_n - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если u_n и v_n одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$$u_n = \arcsin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

Th. 3. Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{исследуемый, } \exists \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{а) } 0 \leq \mathcal{D} < 1 \implies \sum u_n \text{ сходится}$$

$$\text{б) } \mathcal{D} > 1 \implies \sum u_n \text{ расходится}$$

$$\text{в) } \mathcal{D} = 1 \implies \text{ничего не следует, требуется другое исследование}$$

□

а) По определению предела $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $0 \leq \mathcal{D} < 1 \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \frac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D} < \varepsilon \iff \mathcal{D} - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$$

Так как $0 \leq \mathcal{D} < 1$, можно втиснуть число r между \mathcal{D} и 1: $\mathcal{D} < r < 1$

Положим $\varepsilon = r - \mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$ для $\forall n > n_0$, где $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $\varepsilon = r - \mathcal{D}$

$$u_{n_0+1} < r u_{n_0}$$

$$u_{n_0+2} < r u_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$$

$$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1}}_k + u_{n_0} + \dots = k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены $v_m < r^l u_{n_0}$; u_{n_0} - фикс. число, а $\sum_{l=1}^{\infty} r^l$ сходится как геометрический при $|r| < 1$

Итак ряд $\sum_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$ сходится и почленно превышает $\sum v_m = (\sum u_n) - k$

То есть $\sum u_n$ сходится

б) Lab. (взять r между \mathcal{D} и 1, $1 < r < \mathcal{D}$, $\mathcal{D} - r = \varepsilon$)

Сравнить $\sum u_n$ с $\sum r^l$ (расходящимся)

□

$$Ex. 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 - \text{сходится}$$

$$Ex. 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 - \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 - \text{сходится}$$

Th. 4. Радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad u_n \geq 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$$

а) $0 \leq K < 1 \implies \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \implies \sum u_n$ расходится

Nota. $K = 1$ - ничего не следует

□

а) По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \sqrt[n]{u_n} - K \mid < \varepsilon$

$\iff k - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon$ Положим $\varepsilon = r - K$, где $K < r < 1$

$\implies 0 \leq u_n < r^n$ - геом. ряд с $|r| < 1$, то есть $\sum r^n$ сходится

б) Аналогично

□

$$\text{Ex. 1. } \sum_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^n}$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ - необходимое условие не выполняется

$$\text{Ex. 2. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1} \right)^n} = e^{-1} < 1 - \text{сходится}$$

Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся

□

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx$$

$$\sum_{n=2}^b u_n = u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x) dx < u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n$$

$$\text{Обозначим } \sum_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}, \quad \sum_{n=2}^b u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$$

$$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x) dx < S_{b-1}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если \int сходится, то смотрим правую часть

Если \int расходится, то смотрим левую часть неравенства

□

4. Знакочередующиеся ряды

Def. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ ($u_n > 0$) - знакочередующийся ряд

Th. Признак Лейбница

Если для знакочередующегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ верно, что $u_n \rightarrow 0$ и $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$,

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится