

Лекция 7

Стандартное дискретное распределение

I. Распределение Бернулли

Распределение Бернулли B_p (с параметром $0 < p < 1$)

ξ - число успехов при одном испытании, p - вероятность успеха при одном испытании

ξ	0	1
p	$1 - P(A)$	$P(A)$

Матожидание: $E\xi = p$

Дисперсия: $D\xi = p(1 - p) = pq$

Ех. Индикатор события $I_A \in B_p$ как раз имеет распределение Бернулли, где $p = P(A)$

II. Биномиальное распределение

Биномиальное распределение $B_{n,p}$ (с параметрами n, p)

ξ - число успехов в серии из n испытаний, p - вероятность успеха при одном испытании

$p(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n \iff \xi \in B_{n,p}$

ξ	0	1	...	k	...	n
p	q^n	$nq^{n-1}p$...	$C_n^k p^k q^{n-k}$...	p^n

Заметим, что $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, где $\xi_i \in B_p$ - число успехов при i -ой испытании

$E\xi_i = p$; $D\xi = pq$

$E\xi = E\xi_1 + \dots + E\xi_n = p + \dots + p = \boxed{np}$

$D\xi = D\xi_1 + \dots + D\xi_n = pq + \dots + pq = \boxed{npq}$

III. Геометрическое распределение

Геометрическое распределение G_p (с параметром p)

ξ - номер 1-ого успешного испытания в бесконечной серии

$p(\xi = k) = q^{k-1}p$, $k = 1, 2, 3, \dots \iff \xi \in G_p$

ξ	1	2	...	k	...	n
p	p	qp	...	$q^{k-1}p$...	p^n

Матожидание $E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} (q^k)' = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} (q^k) \right)' = p \left(\frac{1}{1-q} \right)' =$

$$\frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$\begin{aligned}
E\xi^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q_{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-1} = pq \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) q^{k-2} + E\xi = pq \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)'' + \frac{1}{p} = pq \left(\frac{1}{1-q} \right)'' + \frac{1}{p} = \\
&= 2pq \frac{1}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = 2pq \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} \\
D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}
\end{aligned}$$

IV. Распределение Пуассона

Распределение Пуассона Π_λ (с параметром $\lambda > 0$)

Def. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если $p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

ξ	0	1	...	k	...	n
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$...	p_n

Покажем корректность определения - докажем, что сумма нижней строки равна 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\text{ряд Тейлора для } e^\lambda} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1$$

$$\begin{aligned}
E\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda = np \\
E\xi^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^\lambda + \\
&\lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda^2 + \lambda \\
D\xi &= E\xi^2 - (E\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

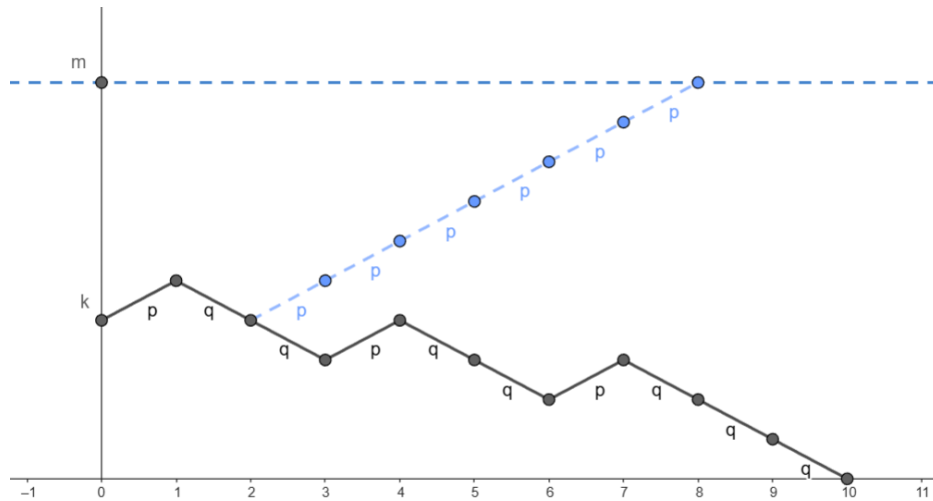
Задача о разорении игрока

Постановка задачи: играют 2 игрока, вероятность выигрыша первого игрока в одной игре равна p , $q = 1 - p$ - вероятность его проигрыша (выигрыш второго)

В каждой игре разыгрывается 1 биткоин. Капитал первого игрока - k биткоинов, $m - k$ биткоинов - капитал второго

Найти вероятность разорения первого игрока

Траектория капитала первого игрока будет выглядеть как-то так:



Пусть r_k - интересующая нас вероятность разорения игрока при капитале k (то есть достижения оси абсцисс на графике)

$$r_k = p \cdot r_{k+1} + q r_{k-1}$$

$$p r_{k+1} - r_k + (1-p) r_{k-1} = 0, \quad r_0 = 1, r_m = 0$$

$$p \lambda^2 - \lambda + (1-p) = 0$$

$$D = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}; \quad \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = \frac{2-2p}{2p} = \frac{q}{p}$$

$$\text{Обозначим } \lambda = \frac{q}{p}$$

Рассмотрим два случая:

- $p \neq \frac{1}{2}$

Тогда общее решение: $r_k = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k = C_1 + C_2 \lambda^k$

Найдем частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 + C_2 \lambda^m \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 1 - C_2 + C_2 \lambda^m = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2(1 - \lambda^m) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = 1 - \frac{1}{1 - \lambda^m} = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} \\ C_2 = \frac{1}{1 - \lambda^m} \end{cases}$$

$$r_k = \frac{-\lambda^m}{1 - \lambda^m} + \frac{1}{1 - \lambda^m} \lambda^k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m}$$

Посмотрим, что будет происходить при бесконечной игре (то есть когда $m \rightarrow \infty$ - капитал неограничен)

1) $p < q$, то есть $\lambda > 1$. Тогда $\lambda^m \rightarrow \infty$, $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} = \frac{\frac{\lambda^k}{\lambda^m} - 1}{\frac{1}{\lambda^m} - 1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$ - то есть первый игрок гарантированно разорится

2) $p > q$, то есть $\lambda < 1$. Тогда $\lambda^m \rightarrow 0$, $r_k = \frac{\lambda^k - \lambda^m}{1 - \lambda^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \lambda^k$ - то есть $r_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$

- $p = \frac{1}{2} \implies D = 0$

Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Общее решение: $r_k = C_1 \lambda^k + C_2 k \lambda_k = C_1 + C_2 k$

Частное решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 0 = C_1 + C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ -1 = C_2 m \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = C_1 \\ C_2 = -\frac{1}{m} \end{cases}$$

$$r_k = 1 - \frac{k}{m}$$

При бесконечной игре:

$$r_k = 1 - \frac{k}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 \text{ - то есть при равной игре игрок неминуемо разорится}$$

Случайное блуждание на прямой

Пусть в начальный момент времени находимся в начале координат. С вероятностью p идем на единицу вправо, с вероятностью q - влево

При $p = \frac{1}{2}$ мы рано или поздно попадем в любую точку числовой прямой

Можно привести аналогию с орлянкой: рано или поздно каждый игрок будет при сколь угодно большом выигрыше

Посмотрим на орлянку как на распределение Бернулли:

ξ	-1	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E\xi = 0; \quad D\xi = 1$$

Пусть ξ - выигрыш первого после n игр.

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = 0$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^n D\xi_i = n$$

$\sigma_\xi = \sqrt{n}$ - среднее квадратическое отклонение

Это означает, что при большом n СКО поглотит всю числовую прямую

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow E\xi$$

Закон больших чисел в этой ситуации говорит, что точка останется у 0, однако в то же время она может оказаться на любой точке на числовой прямой

Ex. По n конвертам случайным образом раскладывается m писем. Случайная величина ξ - число писем в своих конвертах

$$\square A_i - \text{число } i \text{ письма в своем конверте, } \xi_i = I_A = \begin{cases} 0, & i\text{-ое письмо в не своем конверте} \\ 1, & i\text{-ое письмо в своем конверте} \end{cases}$$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$E\xi_i = P(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$D\xi_i = pq = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}$$

$$E\xi = \sum_{i=1}^n E\xi_i = 1 \frac{1}{n} = 1 - \text{в среднем будет одно письмо в своем конверте}$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = \sum_{i=1}^n D\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Найдем ковариацию:

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E\xi_i \xi_j - E\xi_i E\xi_j = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

$$\text{Заметим, что для любых } i, j, i < j: \xi_i \xi_j = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы одно не в своем} \\ 1, & \text{если оба в своем} \end{cases}$$

$$\text{То есть } \xi_i \xi_j \in B_p \text{ и } E\xi_i \xi_j = P(\text{оба письма в своих}) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\text{Получаем: } D\xi = n \frac{n-1}{n^2} + 2 \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$