

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Общие понятия

1* Постановка задачи

Pr. 1. Скорость распада радия в текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q . Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось Q_0

Коэффициент пропорциональности k найден эмпирически.

Решение. Скорость распада.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ \quad - \text{ ищем } Q(t)$$

$$dQ(t) = kQ dt$$

$$\frac{dQ(t)}{Q} = \frac{k dt}{\text{содержит только } t} \quad - \text{ «разделение переменных»}$$

содержит только Q

Внесем все в дифференциал:

$$d \ln Q = k dt = k t$$

$$d(\ln Q - kt) = 0$$

Нашли семейство первообразных:

$$\ln Q - kt = \tilde{C}$$

$$\ln Q = \tilde{C} + kt$$

$$Q = e^{\tilde{C} + kt} \stackrel{e^{\tilde{C}} = C}{=} C e^{kt}$$

По смыслу $k < 0$, так как Q уменьшается. Обозначим $n = -k, n > 0$

Тогда $\boxed{Q(t) = C e^{-nt}}$

Получили вид закона распада. Выбор константы C определен Н.У. (начальными условиями):

$$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$$

Тогда, закон - $\boxed{Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}}$

Nota. Оба закона: общий $Q(t) = C e^{-nt}$ и частный $Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}$ - являются решением дифференциального уравнения:

$$Q'(t) = kQ \quad (\text{явный вид})$$

$$d \ln Q(t) - k dt = 0 \quad (\text{в дифференциалах})$$

Pr. 2 Тело массой m брошено вверх с начальной скоростью v_0 . Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

По II закону Ньютона:

$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$a = \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = -g} - \text{ДУ}$$

Решение. $y''(t) = -g$

$$(y'(t))' = -g$$

$$y'(t) = - \int g dt = -gt + C_1$$

$$y(t) = \int (-gt + C_1) dt = \boxed{-\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t)} - \text{общий закон}$$

$C_{1,2}$ ищем из Н.У.

В задаче нет условия для $y(t_0)$. Возьмем $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

Таким образом,
$$\begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Найдем C_1 : $y'(t_0) = y'(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$

Найдем C_2 : $y(t_0) = y(0) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = C_2 = 0$

Частный закон:
$$\boxed{y^*(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

2* Основные определения

Def. 1. Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ n -ого порядка (*)

Ex. $Q' + nQ = 0$ и $y'' + g = 0$

Def. 2. Решением ДУ (*) называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает (*) в тождество

Def. 2'. Если $y(x)$ имеет неявное задание $\Phi(x, y(x)) = 0$, то $\Phi(x, y)$ называется интегралом уравнения (*)

Nota. Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

Def. 3. Кривая с уравнением $y = y(x)$ или $\Phi(x, y(x)) = 0$ называют интегральной кривой

Def. 4.
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} - \text{система начальных условий (**)}$$

Тогда
$$\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases} - \text{задача Коши (ЗК)}$$

Nota. Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

Th. $y' = f(x, y)$ - ДУ

$M_0(x_0, y_0) \in D$ - точка, принадлежащая ОДЗ

Если $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в M_0 , то ЗК

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $\varphi(x, y) = 0$, удовлетворяющее Н.У. (без док-ва)

Nota. Преобразуем ДУ: $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$

См. определения обыкн. и особых точек

Def. 5. Точки, в которых нарушаются условия теоремы называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

Def. 6. Общим решением ДУ (*) называется $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

Nota. $\Phi(x, y(x), C_1, \dots, C_n) = 0$ - общий интеграл

Def. 7. Решением (*) с определенными значениями C_1^*, \dots, C_n^* называется частным

Nota. Форма записи:

Разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$

Сведем к виду: $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \implies -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \implies$

$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ - форма в дифференциалах