

8 Рекуррентности и Производящие функции

• Производящие функции (Generating Functions)

ТЫК

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Функция выше задает последовательность a_0, a_1, a_2, \dots

Ех. Последовательность $(1, 1, 1, \dots)$ задает функцию $1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Пусть $S = 1 + x + x^2 + \dots$, тогда $xS = x + x^2 + \dots$, $(1 - x)S = 1 \Rightarrow$

$S = \frac{1}{1-x}$ задает последовательность $(1, 1, 1, \dots)$

| Что? | Куда? |
|--|---|
| $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ $(1, -1, 1, -1, \dots)$ |
| $\frac{1}{1-kx} = 1 + kx + k^2 x^2 + k^3 x^3 + \dots$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} k^n x^n$ $(1, k, k^2, k^3, \dots)$ |
| $\frac{1}{1-kx} + \frac{1}{1-mx} = 1 + (k+m)x + (k+m)^2 x^2 + \dots$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} (k+m)^n x^n$ $(1, k+m, (k+m)^2, (k+m)^3, \dots)$ |
| $\frac{k}{1-x} = 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n$ (k, k, k, k, \dots) |
| $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ $(1, 0, 1, 0, \dots)$ |
| $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + \dots$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ $(0, 1, 1, 1, \dots)$ |
| $\frac{1-x^k}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{k-1}$ | $= \sum_{n=0}^{k-1} x^n$ $(1, 1, 1, \dots, 1)$ k раз |
| $\frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$ | $= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ $(1, 2, 3, 4, \dots)$ |

• Подсчет, используя производящие функции

Найти число решений для $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, где $x_i \geq 0, x_1 \leq 4, x_2 \leq 3, x_3 \leq 5$

Пусть $A_1(x) = 1 + x + \dots + x^4$, $A_2(x) = 1 + x + \dots + x^3$, $A_3(x) = 1 + x + \dots + x^5$

Тогда: $A(x) = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 14x^4 + 17x^5 + \underline{18x^6} + 17x^7 + \dots$

Ответ - 18

• Рекуррентные соотношения (Recurrence relations)

ТЫК

Решить рекуррентное соотношение - найти закрытую формулу

Ех. Арифметическая прогрессия $a_n = a_{n-1} + d, a_0 = \text{const}$

Решение: $a_n = a_0 + nd$ - анзац (Ansatz, догадка)

Проверка: $a_n = a_0 + nd = a_{n-1} + d = a_0 + (n-1)d + d = a_0 + nd$ - 👍👍👍

• Решение при помощи производящих функций

Решить рекуррентное соотношение $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, где $a_0 = 1, a_1 = 3$

Используем производящие функции:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = A(x)$$

$$3x(a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = 3x(A(x) - a_0)$$

$$-2x^2(a_0 + a_1 x + \dots) = -2x^2 A(x)$$

$$a_0 + a_1 x = a_0 + a_1 x$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + 3x(A(x) - a_0) - 2x^2 A(x) = 1 + 3x + 3xA(x) - 3x - 2x^2 A(x)$$

$$A(x)(2x^2 - 3x + 1) = 1 \Rightarrow A(x) = \frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{1-2x} \Rightarrow a_n = 2^{n+1} - 1$$

• Метод характеристического уравнения

Рекуррентное соотношение $a_n \rightsquigarrow r^n$ Характеристическое уравнение \rightsquigarrow Корни \rightsquigarrow Решение \rightsquigarrow Проверка

Ех. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 8$

ХрУ: $r^n - r^{n-1} - 6r^{n-2} = 0 \implies r_{1,2} = -2, 3$

Если $r_1 \neq r_2$, то $a_n = ar_1^n + br_2^n$ - общее решение
 Если $r_1 = r_2 = r$, то $a_n = ar^n + bnr^n$

$$\begin{cases} a_n = a(-2)^n + b(3)^n \\ a_0 = 1 = a + b \\ a_1 = 8 = -2a + 3b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ a_n = -(-2)^n + 2 \cdot 3^n \end{cases} \text{ - решение}$$

• Разделяй и властвуй (Divide-and-Conquer)

$$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{работа рекурсии}} + \underbrace{\theta(n)}_{\text{работа разделения/слияния}}$$

• Основная теорема о рекуррентных соотношениях (Master Theorem)

ТЫК

Пусть асимптотика алгоритма - $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$, из этого, $c_{crit} = \log_b a$, тогда:

| Что? | Когда? | Что делать? |
|---------------------------------------|---|--|
| I случай: слияние < рекурсия | $f(n) \in O(n^c)$, где $c < c_{crit}$ | $T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$ |
| II случай: слияние \approx рекурсия | $f(n) \in O(n^c) \iff f(n) \in o(n^{c_{crit}})$ | |
| | II.a случай - $k \geq 0$ | $T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log^{k+1} n)$ |
| | II.b случай - $k = -1$ | $T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log \log n)$ |
| | II.c случай - $k < -1$ | $T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}})$ |
| III случай: слияние > рекурсия | $f(n) \in \Omega(n^c)$, где $c > c_{crit}$ | $T(n) \in \Theta(f(n))$ |

• Метод Акра-Бацци (Akra-Bazzi method)

ТЫК

Пусть асимптотика алгоритма - $T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^k a_i T(b_i n + h_i(n))$,

где $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $k = const$, $h_i(n) \in O\left(\frac{n}{\log^2 n}\right)$ - малые возмущения

Тогда $T(n) \in \Theta\left(n^p \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}} dx\right)\right)$, где p - решение для $\sum_{i=1}^k a_i b_i^p = 1$

Ех. $T(n) = T\left(\frac{3n}{4}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

$$a_1 = a_2 = 1, b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = \frac{1}{4}, f(n) = n, \left(\frac{3}{4}\right)^p + \left(\frac{1}{4}\right)^p = 1 \implies p = 1$$

$$\int_1^n \frac{x}{x^{1+1}} dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^n = \ln n$$

$$T(n) \in \Theta(n \cdot (1 + \ln n)) \quad T(n) \in \Theta(n \ln n)$$

• Линейные рекуррентности (Linear recurrences)

ТЫК

$$\underbrace{k_1 a_n + k_2 a_{n-1} + k_3 a_{n-2} + \dots}_{\text{линейная комб. рекуррентных членов}} = \underbrace{f(n)}_{\text{функция от } n}$$

Линейное рекуррентное соотношение - $\begin{cases} f = 0 \implies \text{гомогенное (однородное)} \\ f \neq 0 \implies \text{негомогенное (неоднородное)} \end{cases}$

Ех. Последовательность Фибоначчи:

$$F(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) \end{cases}$$

$F(n) - F(n-1) - F(n-2) = 0$ - однородное

• **Операторы:**

| Что? | Как? |
|--------------------|---|
| Сумма | $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ |
| Умножение на число | $(\alpha \cdot f)(n) = \alpha f(n)$ |
| Сдвиг | $Ef(n) = f(n+1)$ |
| Сдвиг на k | $E^k f(n) = f(n+k)$ |
| Композиция | $(X+Y)f(n) = Xf(n) + Yf(n)$ $(XY)f(n) = X(Yf(n)) = Y(Xf(n))$ |

- **Аннигилятор** (Annihilator) - оператор, который трансформирует f в функцию, тождественную 0
Nota. Любой составной оператор аннигилирует класс функций

Nota. Любая функция, составленная из полинома и экспоненты, имеет свой единственный аннигилятор

Если X аннигилирует f , то X также аннигилирует Ef

Если X аннигилирует f и Y аннигилирует g , то XY аннигилирует $f \pm g$

| Что? | Что аннигилирует? |
|--------------|--------------------------|
| $(E-1)$ | α |
| $(E-c)$ | c^n |
| $(E-a)(E-b)$ | $\alpha a^n + \beta b^n$ |
| $(E-1)^2$ | $\alpha n + \beta$ |
| $(E-a)^2$ | $(\alpha n + \beta)a^n$ |
| $(E-c)^d$ | $P_{d-1}(n) \cdot c^n$ |

• **Аннигилирование рекуррентностей:**

1. Запишите рекуррентное соотношение в форме операторов
2. Выделите аннигилятор для соотношения
3. Разложите на множители (если понадобится)
4. Выделите общее решение из аннигилятора
5. Найдите коэффициенты используя базовые случаи (если даны)

Ех. $r(n) = 5r(n-1), r(0) = 3$

1. $r(n+1) - 5r(n) = 0 \quad (E-5)r(n) = 0$
2. $(E-5)$ аннигилирует $r(n)$
3. $(E-5)$ уже разложен
4. $r(n) = \alpha \cdot 5^n$
5. $r(0) = 3 \implies \alpha = 3$

• **Псевдонелинейные уравнения** (Pseudo-non-linear equations)

Ех. $a_n = 3a_{n-1}^2, a_0 = 1$

$$\log_2 a_n = \log_2 (3a_{n-1}^2)$$

Пусть $b_n = \log_2 a_n$

$$b_n = 2b_{n-1} + \log_2 3, b_0 = 0$$

$$b_n = (2^n - 1) \log_2 3$$

$$a_n = 2^{(2^n - 1) \log_2 3} = 3^{2^n - 1}$$