Разберем пример поверхностного интеграла:

Ex. $S_1: \ x^2+y^2=1, \quad S_2: z=0, \quad S_3: z=1$

$S=\bigcup_{i=1}^{3} S_i$ - цилиндр

$\overrightarrow{F}=(P,Q,R)=(x,y,z)$

$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} xdydz+ydxdz+zdxdy=\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}$$

Так как проекции S_2 на Oxz и Oyz - отрезки, то $dxdz=0$, $dydz=0$

$$\iint_{S_2} xdydz+ydxdz+zdxdy=\iint_{S_2} zdxdy=0$$

$$\iint_{S_3} zdxdy \overset{z|_{S_3}=1}{=} \iint_{S_3} dxdy \overset{\text{с "+ так как } n_3\uparrow\uparrow Oz}{=} \iint_{D_{xy}} dxdy=\pi$$

$$\iint_{S_1} xdydz+ydxdz=\iint_{D^+_{yz}:x=\sqrt{1-y^2}} xdydz+\left(-\iint_{D^-_{yz}:x=-\sqrt{1-y^2}} xdydz\right)+\iint_{D^+_{xz}} ydxdz+\left(-\iint_{D^-_{xz}} ydxdz\right)=$$
$\dots$

5.7. Связь поверхностных интегралов с другими

Th. Гаусса-Остроградского

$S_1 \ : \ z=z_1(x,y), \ S_3 \ : \ z=z_3(x,y), \ S_2 \ : \ f(x,y)=0$ (проекция на Oxy - кривая)

$S=\bigcup_{i=1}^{3} S_i$ - замкнута! и ограничивает тело T (S_2 - цилиндр, S_1 - шапочка, S_3 - шапочка снизу)

$P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$ - непр. дифф., действуют в области $\Omega\supset T$

Тогда $\displaystyle\oiint_{S_{\text{внешн.}}} Pdydz+Qdxdz+Rdxdy=\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

Рет. Формула Грина

$$\oint_K Pdx+Qdy=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$
□

Вычислим почленно $\displaystyle\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$

$$\iiint_T\left(\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dz\right)dxdy=\iint_{D_{xy}} R(x,y,z)\Big|_{z=z_1(x,y)}^{z=z_3(x,y)}dxdy=\iint_{D_{xy}}(R(x,y,z_3(x,y))-R(x,y,z_1(x,y)))dxdy=$$

$$\underbrace{\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_3)dxdy-\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))dxdy}_{\text{двойной}}=\underbrace{\iint_{S_3} R(x,y,z)dxdy+\iint_{S_1} R(x,y,z)dxdy}_{\text{поверхностный}}+\underbrace{\iint_{S_2} R(x,y,z)dxdy}_{\text{равен 0, т.к. } dxdy\ |_{S_2}=0}=$$

$$\iint_{S_{\text{внешн.}}} Rdxdy$$

Аналогично остальные члены:

$$\iiint_T\frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz=\iint_{S_{\text{внешн.}}} Qdxdz, \quad \iiint_T\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz=\iint_{S_{\text{внешн.}}} Pdxdz$$
□

Nota. Если $\iint_{S_{\text{внутр}}}$, то $\iint_S = -\iiint_T$

Nota. С учетом связи поверхностных интегралов $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dv$

Th. Стокса

Пусть $S : z = z(x, y)$ - незамкнутая поверхность, L - контур, на которую она опирается

$\text{пр}_{Oxy} L = K_{xy}, \quad \text{пр}_{Oxy} S = D_{xy}$

В области $\Omega \supset S$ действуют функции P, Q, R - непр. дифф.

Тогда $\oint_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) d\sigma$

□

Найдем слагаемое $\oint_L P(x, y, z)dx \overset{\text{на } L\ :\ z=z(x,y)}{=\!=\!=} \oint_{K_{xy}^+} \tilde{P}(x, y, z(x, y))dx = \oint_{K_{xy}} \tilde{P}dx + \tilde{Q}dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial \tilde{P}(x, y)}{\partial y} dxdy = -\iint_{S^+} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma + \frac{\partial P}{\partial z}(-\cos\beta)\right) d\sigma$

$$\vec{n} = \left(\frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

Аналогично $\oint_L Qdy = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right) d\sigma$, $\oint_L Rdz = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right) d\sigma$

Остается сложить интегралы

□

Ex. 1. $(P, Q, R) = (x, y, z)$

В *Ex.* пункте 5.6. (вычисление поверхностного):

$$\iint_{S_{\text{внешн}} \text{ - замкнута!}} xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dv = 3V_{\text{цил.}}$$

Ex. 2. Те же P, Q, R

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\overbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)}^{=0}\cos\alpha + 0 + 0\right) d\sigma$$

6. Теория поля

6.1. Определения

Def. 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ называется скалярным полем в Ω

Def. 2. Функция $\overrightarrow{F} = (F_1(\overrightarrow{x}), \dots, F_n(\overrightarrow{x})) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется векторным полем

Nota. Далее будем рассматривать функции в $\mathbb{R}^3$, то есть $u = u(x, y, z)$ и $\overrightarrow{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

Nota. Функции u и $\overrightarrow{F}$ могут зависеть от вренмени t. Тогда эти поля называются нестационарными. В противном случае стационарными

6.2. Геометрические характеристики полей

$u = u(x, y, z)$: l - линии уровня $u = const$
$\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$: w - векторная линия, в каждой точке w вектор $\overrightarrow{F}$ - касательная к w
Векторная трубка - совокупность непересекающихся векторных линий

Nota. Отыскание векторных линий
Возьмем $\overrightarrow{\tau}$ - элементарный касательный вектор, $\overrightarrow{\tau} = (dx, dy, dz)$
Определение векторной линии: $\overrightarrow{\tau} || \overrightarrow{F}$ $\quad \dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ - система ДУ

Ex. $\overrightarrow{F} = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}, M_0(1, 0)$ - ищем векторную линию $w \ni M_0$
Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xdx = -ydy \\ y(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = -y^2 + C \\ y(1) = 0 \Longrightarrow C = +1 \end{cases} \iff x^2 + y^2 = 1$$

6.3. Дифференциальные характеристики

Мет. $\overrightarrow{\nabla} u = \overrightarrow{grad u} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}; \dfrac{\partial u}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$ - градиент скалярного поля
$\overrightarrow{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ - набла-оператор

Nota. Для $\overrightarrow{\nabla}$ определены действия:
$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{a} = \dfrac{\partial a_1}{\partial x} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y} + \dfrac{\partial a_3}{\partial z}$

$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

Причем $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle$ - лапласиан

$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla} = 0$

Nota. $\triangle u = \underbrace{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{часть волнового уравнения матфизики}} = 0$ - уравнение, определяющее гармоническую функцию $u(x, y, z)$, уравнение Лапласа

Def. 1. Дивергенция поля (*divergence* - расхождение)
$div \overrightarrow{F} \overset{def}{=} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}$

Def. 2. Вихрь (ротор) поля
$rot \overrightarrow{F} \overset{def}{=} \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}$

Def. 3. Если $rot \overrightarrow{F} = 0$, то $\overrightarrow{F}$ называется безвихревым полем

Def. 4. Если $div \overrightarrow{F} = 0$, то $\overrightarrow{F}$ называется соленоидальным

Nota. Безвихревое поле имеет незамкнутые векторные линии, а вихревое - замкнутые

Th. 1. Свойство безвихревого поля
$rot \overrightarrow{F} = 0 \Longleftrightarrow \exists u(x, y, z) \mid \overrightarrow{\nabla} u = \overrightarrow{F}$

$\square$ $\boxed{\Longrightarrow}$

$rot \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = 0$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

Рассмотрим $u = u(x, y, z) \mid \dfrac{\partial u}{\partial x} = P, \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q, \dfrac{\partial u}{\partial z} = R$ - удовлетворяет системе равенств

$\overrightarrow{F} = (P, Q, R) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \overrightarrow{\nabla} u$

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} u$ - дана

$rot \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} u) = (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}) u = 0$

$\square$

Nota. Доказали, что если векторное поле является градиентом какого-то скалярного, то его вихрь равен нулю: $rot\overrightarrow{grad u} = 0$

Def. $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} u$ Поле $u(x, y, z)$ называется потенциалом поля $\overrightarrow{F}$
Таким образом, доказано, что безвихревое поле потенциально

Th. 2. Свойство соленоидального поля
$div(rot\overrightarrow{F}) = 0$

□

$div(rot\overrightarrow{F}) = div\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}) = (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\nabla}) \cdot \overrightarrow{F} = 0$

□

6.4. Интегральные характеристики. Теоремы теории поля

Мет. 1) Поток поля $\overrightarrow{F}$: $\Pi = \iint_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma}$

Def. 2) Циркуляция поля $\overrightarrow{F}$: $\Gamma = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$

Nota. Запишем **Th.** на векторном языке
1* **Гаусса-Остроградского**
$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$
$$\iint_S (P, Q, R)(dydz, dxdz, dxdy) = \iint_S (P, Q, R)(\cos\alpha d\sigma, \cos\beta d\sigma, \cos\gamma d\sigma) = \iint_S \overrightarrow{F}\overrightarrow{n} d\sigma = \iint_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma}$$
$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iiint_T (\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{F}) = \iiint_T div\overrightarrow{F}$$
$$\boxed{\iint_S \overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma} = \iiint_T div\overrightarrow{F}}$$

2* **Стокса**
$Pdx + Qdy + Rdz = \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l}$
$$\oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = \iint_S rot\overrightarrow{F}\overrightarrow{n} d\sigma = \iint_S rot\overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma}$$

3* **Th. о потенциале**
$$\forall L \ \oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = 0 \Longleftrightarrow rot\overrightarrow{F} = 0 \Longleftrightarrow \exists u(x, y, z) \mid \overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{F}$$
(см. **Th.** интеграла НЗП)

Ex. $\overrightarrow{F} = x\overrightarrow{i} + xy\overrightarrow{j}, L : x = y, x = -y, x = 1$

По формуле Грина (Стокса) $\oint_L \overrightarrow{F} d\overrightarrow{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D ydxdy \quad rot\overrightarrow{F} \neq 0$

$\oint_L xdx + xydy = \int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} = \int_0^1 (x+x^2)dx + \int_{-1}^1 ydy - \int_0^1 (x+x^2)dx = \int_{-1}^1 ydy = 0$

6.5. Механический смысл

1* Дивергенция

Гаусс-Остроградский: $\iiint_T div\overrightarrow{F} dv = \Pi$

Th. о среднем: $\exists M_1 \in T \mid \iiint_T div\overrightarrow{F} dv = div\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} \cdot V_T = \Pi$

$div\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} = \frac{\Pi}{V_T}$, точка M_0, S и T выбраны произвольно

$\sqsupset V_T \to 0$, тогда $div\overrightarrow{F}\Big|_{M_1 \to M_0} = \lim\limits_{V_T \to 0} \frac{\Pi}{V_T}$ - поток через границу бесконечно малого объема с центром M_0, отнесенный к V_T - мощность источника в M_0

Таким образом, дивергенция поля - мощность источников

Nota. Смысл утверждения $div(rot\overrightarrow{F}) = 0$ - поле вихря свободно от источников

Nota. Утверждение $rot(\overrightarrow{gradu}) = 0$ - поле потенциалов свободно от вихрей

2* Ротор

Стокс $\iint_S rot\overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma} = \Gamma$

Th. о среднем: $\exists M_1 : \iint_S rot\overrightarrow{F} d\overrightarrow{\sigma} = rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} \cdot S = \Gamma$

$rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_1} = \frac{\Gamma}{S}$, будем стягивать S к точке $M_0 \Longrightarrow rot\overrightarrow{F}\Big|_{M_0} = \lim\limits_{S \to 0} \frac{\Gamma}{S}$ - циркуляция по б.м. контуру с центром M_0