

Мет. (x, y) в \mathbb{R}

$$(x, y) = (y, x)$$

Но. (x, y) в комплексном множестве

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

Важно: линейность по первому аргументу - везде

$$(\lambda x, y) \stackrel{\mathbb{R}, \mathbb{C}}{=} \lambda(x, y)$$

Но:

$$(x, \lambda y) = \lambda(x, y) \text{ в } \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \text{ в } \mathbb{C}$$

Def 1. Оператор \mathcal{A}^* называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

Def 2. \mathcal{A}^* сопряженный для \mathcal{A} , если $A^* = A^T$ в любой ортонормированном базисе

Nota. Def 1. \iff Def 2.

$$(\mathcal{A}x, y) \stackrel{\text{на языке матриц}}{=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y$$

$$\stackrel{\parallel}{=} (x, \mathcal{A}^*y) = X^T \cdot (A^*Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \implies A^* = A^T$$

Lab. Очевидно существование $\mathcal{A}^* \forall \mathcal{A}$ (определяется в ортонормированном базисе действием \mathcal{A}^T)

Доказать единственность \mathcal{A}^* рассмотреть от противного $(x, \mathcal{A}_1^*y) \neq (x, \mathcal{A}_2^*y)$

Свойства:

$$1) \mathcal{I} = \mathcal{I}^* \quad \square (\mathcal{I}x, y) = (x, y) = (x, \mathcal{I}y) \quad \square$$

$$2) (\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$$

$$3) (\lambda \mathcal{A})^* = \lambda \mathcal{A}^*$$

$$4) (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$

$$5) (\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^* \mathcal{A}^* \text{ (св-во транспонирования матриц)}$$

$$\text{или } ((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^* \mathcal{A}^*y)$$

$$6) \mathcal{A}^* - \text{линейный оператор } (\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \implies \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y')$$

$$\text{Можно использовать линейные свойства умножения матриц } A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathcal{A}^*X + \mu \mathcal{A}^*Y$$

2* Самосопряженный оператор

Def. \mathcal{A} называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие. $A^T = A \implies$ матрица A симметричная

Свойства самосопряженных операторов:

$$1) \mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \lambda : \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0). \text{ Тогда, } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\square (\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad (x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) \stackrel{\text{в } \mathbb{C}}{=} \overline{\lambda}(x, y)$$

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \implies \lambda(x, y) = \overline{\lambda}(x, y) \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

\square

$$2) \mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2 \text{ и } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Тогда $x_1 \perp x_2$

\square Хотим доказать, что $(x_1, x_2) = 0$, при том, что $x_{1,2} \neq 0$

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \implies (x_1, x_2) = 0 \quad \square$

Th. Лемма. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, e - собственный вектор ($l_{\{e\}}$ - линейная оболочка e - инвариантное подпространство для \mathcal{A})

$$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$$

Тогда V_1 - инвариантное для \mathcal{A}

\square Нужно доказать, что $\forall x \in V_1 \quad \mathcal{A}x \in V_1$ и так как $x \in V_1 \mid x \perp e$, то покажем, что $\mathcal{A}x \perp e$

$$(\mathcal{A}x, e) = (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \stackrel{x \perp e}{=} 0$$

\square

Th. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$), тогда $\exists e_1, \dots, e_n$ - набор собственных векторов \mathcal{A} и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

(другими словами: \mathcal{A} - диагоназируем)

Наводящие соображения.

$$Ex \ 1. \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$Ix = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

Здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ - базис из собственных векторов, ортонормированный

$$Ex \ 2. \ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$Ox = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$$

И здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, так как $0 \in U_\lambda$ и $\forall x \quad Ox = 0 \in U_\lambda$

Ex 3. Поворот \mathbb{R}^2 на $\frac{\pi}{4}$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \frac{1}{2} = 0 - \text{ вещественных корней нет}$$

$\square \square e_1$ - какой-либо собственный вектор \mathcal{A} ...