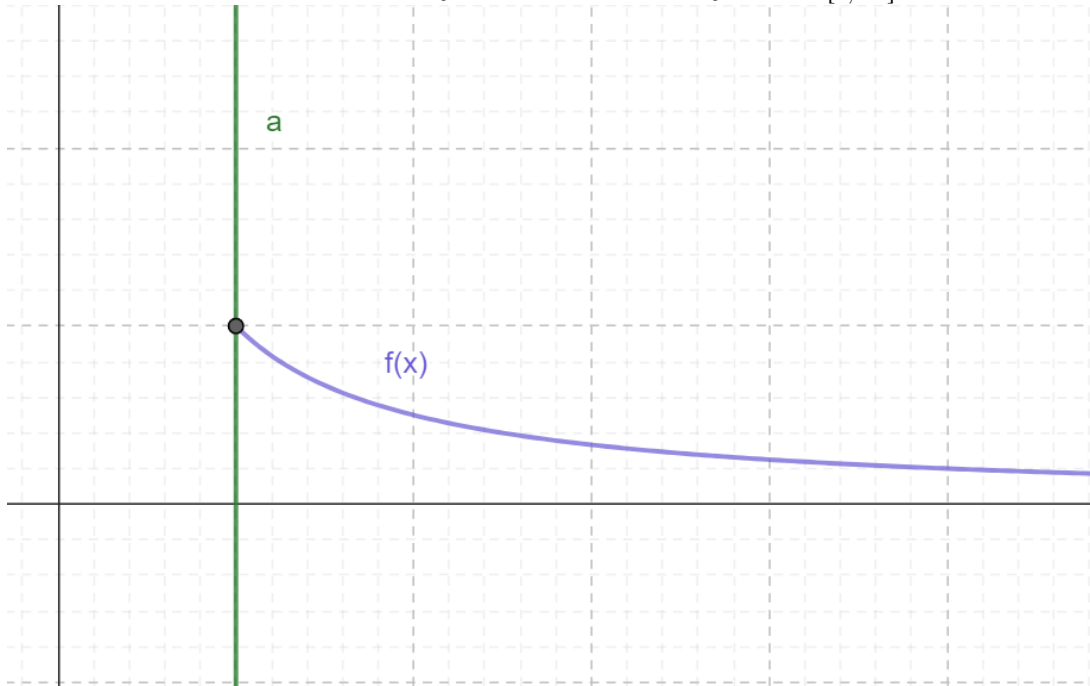


2. Несобственные интегралы

2.1. Определения

1* Интегралы на неограниченном промежутке

Геометрический смысл: пусть $f(x) : [a; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \in C_{[a; +\infty]}$



Тогда определенный интеграл имеет смысл - это площадь под графиком функции:

$$\int_a^b f(x) dx = S$$

Имеет ли смысл площадь неограниченной фигуры под графиком функции?

Предел функции $\Phi(b) = \int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow +\infty$ может быть конечным или бесконечным

Def. 1. Определим несобственный интеграл первого рода (на неограниченном промежутке) ($f(x)$ любого знака):

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Nota. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится. В противном случае расходится

Def. 2. Функция определена на полуинтервале $[-\infty; b]$ и непрерывна. Тогда определен:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

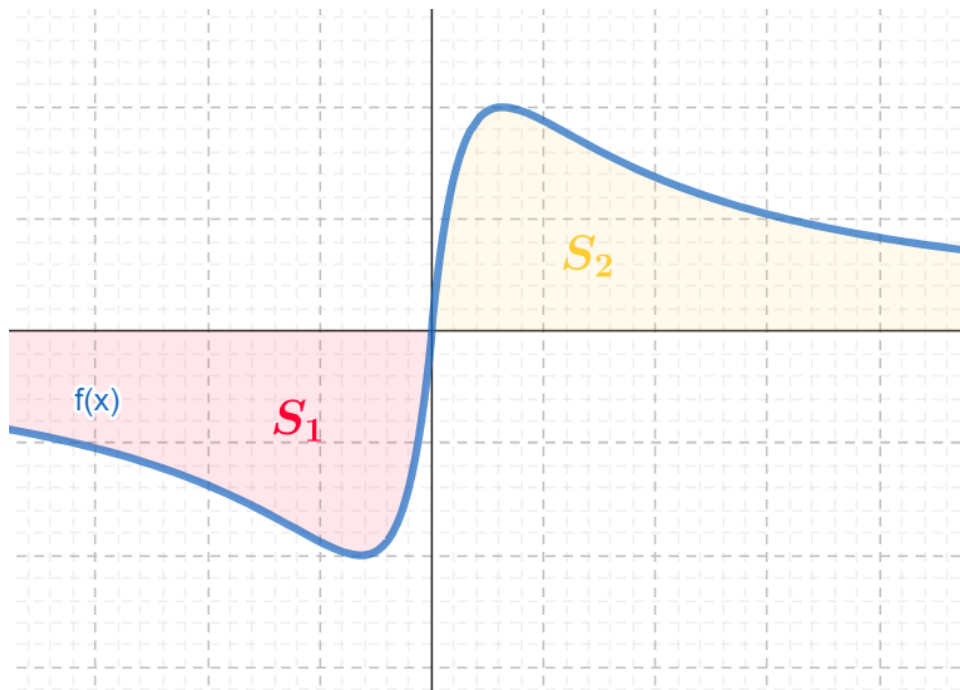
Def. 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

Nota. Этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла справа, и расходится, если расходится хотя бы один из них (в том числе если возникает неопределенность $\infty - \infty$)

Ex. $f(x) = \frac{1}{x}$



Сделаем ее непрерывной



$S_1 = S_2$, но $I_1 = -I_2$. Суммарный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ должен быть равен нулю.

Но по определению $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится

Чтобы учесть обнуление интеграла в ситуации взаимного погашения площадей S_1 и S_2 (а это происходит тогда, когда левый и правый концы промежутка синхронно стремятся к $+\infty$) используют понятие интеграла в смысле главного значения (*v.p.* - от французского *valeur principale*):

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \int_{-\delta}^{\delta} f(x)dx$$

Разложение по формуле Ньютона-Лейбница

Ex. 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \arctg x \Big|_{-\infty}^{c=0} + \arctg x \Big|_{c=0}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x - \arctg(0) + \arctg(0) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Ex. 2.

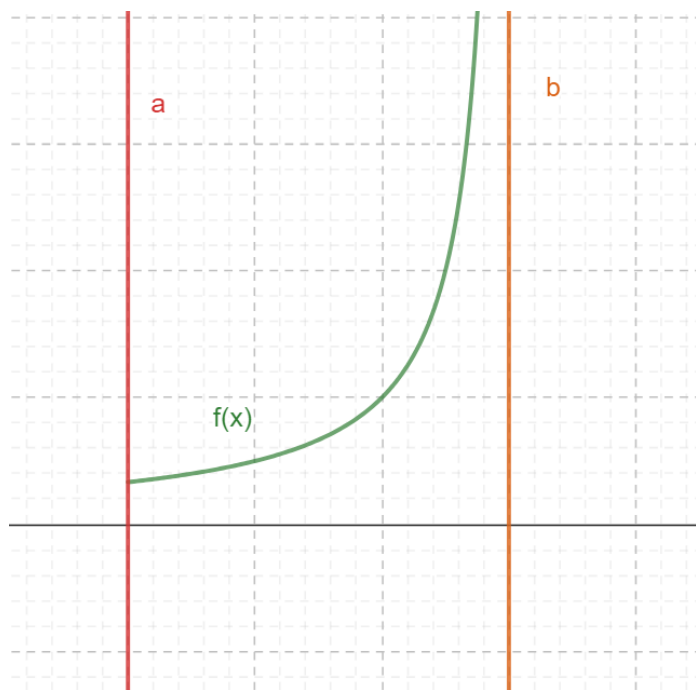
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_0^{+\infty} = \ln \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \ln x - \lim_{x \rightarrow 1} \ln \ln x = \infty - \infty$$

- расходится

Заметим нарушение непрерывности функции $\frac{1}{x \ln x}$ в $x = 1$, что привело к $\ln \ln x \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 1$

Это не интеграл первого рода, а комбинация интегралов первого и второго рода

2* Интеграл от неограниченной на отрезке функции



$f(x) : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, где b - точка разрыва второго рода, а именно бесконечного

Def. 1. Интеграл второго рода (несобственный)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^\beta f(x) dx$$

Этот интеграл сходится, если предел существует и конечен

Def. 2. Аналогично (a - точка бесконечного разрыва):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a} \int_\alpha^b f(x) dx$$

Def. 3. $c \in [a; b]$ - точка бесконечного разрыва:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Сходится, если оба интеграла сходятся

Ex. 1.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{-1}^0 + \ln |x| \Big|_0^1$$

- интеграл расходится

Не заметили $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln |x| \Big|_{-1}^1 = 0$???

Ex. 2.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{dx}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$$

- неверно

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{dx}{x} \Big|_{-1}^0 + -\frac{dx}{x} \Big|_0^1$$

- расходится

Nota. Если нет разбиения $[a; b]$ по аддитивности, то неопределенности раскрываются

$$\begin{aligned} \text{Ex. } \int_1^2 \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\ln|1-1| - \ln|x+1|) \Big|_1^2 = \infty, \text{ т. к. разбивается отрезок} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{3} - \ln(0) \right) = \infty - \text{теперь точно } \infty \end{aligned}$$

2.2 Свойства

1) Линейность: $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx$ - если интегралы сходятся (иначе исследуем по определению через предел)

2) Аддитивность: $I = \int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ - отсечение любого конечного интеграла $\int_a^c f(x) dx$ не влияет на сходимость

3) Знаки интегралов:

$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$ при $f(x) \leq g(x)$. Если $g(x)$ сходится, то $f(x)$ тоже сходится

В частности $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq 0$ при $f(x) \leq 0$ на $[a; +\infty]$

Nota. Исследование интегралов двух функций используется для определения их сходимости

2.3 Сходимость несобственных интегралов

Задача: Часто нужно исследовать интеграл на сходимость без или до его вычисления (обычно приближенного для неберущихся интегралов)

Требуются признаки сходимости интегралов, часто использующие сравнение с эталонными интегралами (вычисляемые по формуле Ньютона-Лейбница)

1* Признак сравнения в неравенствах (далее только для интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, для остальных аналогично)

$f(x), g(x) : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, непрерывны на $[a; +\infty)$ и $\forall x \in [a; +\infty) f(x) \leq g(x)$

Тогда, если $\int_a^{+\infty} g(x)dx = I \in \mathbb{R}$, то $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, причем $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$

Прежде чем использовать свойство ОИ и предельный переход в неравенства, нужно доказать, что интеграл $J = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ сходится

Т. к. $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx$ при $b \rightarrow \infty$ монотонно возрастающая функция

При этом:

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \leq \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x)dx = I \in \mathbb{R}$$

То $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ ограничена и по признаку Вейерштрасса сходится

Можно использовать предельный переход

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \Big| \lim_{b \rightarrow +\infty}$$

$$0 \leq J \leq I$$

Nota. Можно аналогично сравнить функции отрицательного знака

Если сходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ при $g(x) \leq f(x) \leq 0$, то сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Интегралы от функций разных знаков этим методом не сравниваются

$f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; +\infty)$, но функции разных знаков, и нижняя площадь, т. е. $\int_a^b |f(x)|dx$, больше верхней

1* $f(x), g(x) \in C_{[a; +\infty)}$, $0 \leq f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; +\infty)$

$J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится

□ Lab. (от противного) □

Nota. Отметим, что если $f(x)$ не является убывающей к нулю, т. е. б. м. на $+\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ разойдется

Таким образом, если сравнить б. м. $\frac{f(x)}{g(x)}$, то можно исследовать их интегралы на сходимость

2* Предельный признак сравнения

$f(x), g(x) \in C_{[a; +\infty)}$, $f(x), g(x) > 0$

$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда $I = \int_a^{+\infty} g(x)dx$ и $J = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

$$\square \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > \delta \left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + k < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + k \quad | * g(x) > 0$$

$$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\varepsilon + k)g(x)$$

Т. к. $k > 0$ ($\frac{f(x)}{g(x)} > 0$) и ε - сколь угодно мало, то $k \pm \varepsilon$ - положительное и не близкое к нулю число

$$\text{ОИ: } \int_a^b (k - \varepsilon)g(x)dx < \int_a^b f(x)dx < \int_a^b (k + \varepsilon)g(x)dx$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} : (k - \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)dx < \int_a^{+\infty} f(x)dx < (k + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

Если $I = \infty$ (но $k - \varepsilon \neq 0$), то по первому признаку (линейность) J расходится. Если $I \in \mathbb{R}$ ($k + \varepsilon \neq \infty$), то по первому признаку (линейность) J сходится

3* Абсолютная сходимость

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = I \in \mathbb{R} \implies \int_a^{+\infty} f(x)dx = J \in \mathbb{R}$$

Nota. Обратное неверно

\square ОИ и модуль:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\text{Очевидно, что } 0 \leq \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)|dx = I$$

$$-I \leq \int_a^b f(x)dx \leq I$$

$$0 \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx = I$$

Nota. Если $I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то I называют условно сходящимся

$$\text{Ex. } I = \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{8x^2 + 3} dx$$

$$\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{8x^2 + 3} \right| dx = \int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{8x^2 + 3} dx \text{ синус ограничен } \leq \int_a^{+\infty} \frac{dx}{8x^2 + 3} = \frac{1}{k} \arctg \frac{x}{k} \Big|_1^{+\infty} \in \mathbb{R}$$

В качестве эталонных интегралов удобно использовать:

$$\text{I рода: } \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$$

II рода: $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$

Lab. Исследовать на сходимость в зависимости от $n \in \mathbb{Z}(\mathbb{Q})$

3. Интегралы зависящие от параметра

Задача. Ех ($\alpha \neq 0$). $\int_0^1 \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 \cos \alpha x d\alpha x = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \Big|_0^1 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \phi(\alpha)$

$J(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ - интеграл, зависящий от параметра

$f(x, \alpha)$ непрерывна в $a \leq x \leq b$, $c \leq \alpha \leq d$ и существует непрерывная производная f'_α

Тогда на $[c; d]$ определена $J'_\alpha(\alpha) = \left(\int_a^b f(x, \alpha) dx \right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha dx$

Если последний интеграл берется лучше, чем исходный, то теорема полезна

$$\square J'_\alpha(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{J(\alpha + \Delta\alpha) - J(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \left(\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) dx - \int_a^b f(x, \alpha) dx \right) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\alpha} \left(\int_a^b (f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)) dx \right)$$

По теореме Лагранжа о среднем $\exists \xi \in [\alpha; \alpha + \Delta\alpha]$

$$= \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \int_a^b f(x, \xi) dx$$

Т. к. f'_α непрерывна, то $f'_\alpha(x, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow \alpha} f'_\alpha(x, \xi) + \varepsilon = f'_\alpha(x, \alpha) + \varepsilon$

$$\text{Таким образом } J'_\alpha(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx + \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \int_a^b \varepsilon dx = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \int_a^b f'_\alpha(x, \xi) dx$$