

Мем. Дифф. хар.: $\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}, \text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$

Инт. хар.: $\Pi = \iint_S \vec{F} d\vec{\sigma}, \Gamma = \oint_L \vec{F} d\vec{l}$

Мех. смысл: 1) $\text{div } \vec{F} \Big|_{M_0} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Pi}{V}$ - мощность точечного источника

Г.-О.: поток через замкнутую поверхность равен суммарной мощности источников внутри

2) $\text{rot } \vec{F} \Big|_{M_0} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S}$ - циркуляция по б. м. контуру. Мех. смысл - ?

3) Поток Π - кол-во жидкости через площадку за единицу времени

4) Γ - ?

Nota. Выясним смысл ротора и циркуляции на примере конкретного поля

Ex. $\vec{F} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ - поле линейных скоростей, вращающегося твердого тела, где $\vec{\omega} = \text{const}$ - угловая скорость

Выберем контур L , ограничивающий область S

$$\text{Найдем } \Gamma_L = \oint_L \vec{F} d\vec{l} = \oint_L (-\omega y)dx + \omega x dy \stackrel{\text{Стокс}}{=} \iint_S \text{rot } \vec{F} \vec{n} d\sigma = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma = \iint_S 2\omega \cos \gamma d\sigma$$

Так как ротор сонаправлен оси Oz , получаем $\cos \gamma = 1$

$$\iint_S 2\omega \cos \gamma d\sigma = 2\omega \iint_S d\sigma = 2\omega S$$

Раньше в интеграле видно, что $\text{rot } \vec{F} \vec{n} \implies |\text{rot } \vec{F}| = 2\omega$

То есть механический смысл ротора - удвоенная угловая скорость вращающегося тела (или диска)

Nota. Чтобы уточнить смысл Γ , рассмотрим такое же поле жидких скоростей (водоворот)

$\vec{v} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j}$ и погруженное в него колесо с лопатками (водяная мельница)

В качестве контура L берем обод колеса, а его располагаем под углом γ к вектору $\vec{\omega}$

$$\text{Все равно } \Gamma_L = \iint_S 2\omega \cos \gamma d\sigma = 2\omega \cos \gamma S$$

Если $\gamma = 0$, то $\Gamma_L = 2\omega S$ - максимальная мощность вращения нашей мельницы

Если, например, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\Gamma_L = 0$ - колесо перпендикулярно полю, поэтому оно не вращается

6.6. Приложения к физике

1* Уравнение неразрывности (в гидромеханике)

Nota. Здесь потребуются формулы:

$$\frac{du(x(t), y(t), z(t))}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \dots$$

$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{F} + f \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$, где f - скалярное поле, \vec{F} - векторное поле

Задача Дано $\vec{F} = \rho \vec{v}$ - поле скоростей жидкости с весом $\rho = \rho(x, y, z, t)$

Через площадку dS за время dt протекает $d\Pi = \rho v_n dt dS$ или за ед. времени $d\Pi = \rho v_n dS$

Приращение жидкости за единицу времени $|dm| = \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right|$

Поток жидкости равен ее убыли в объеме V , то есть $\Pi = \oint_S \rho v_n dS = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

Применяя Г.-О.: $\Pi = \iiint_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \iff \iiint_V (\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}) dV = 0 \quad \forall V$ (по-
этому подынт. функ. = 0)

$$\iff \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{Учтем: } \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{v}$$

$$\vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{v} + \rho \vec{\nabla} \vec{v} \iff \vec{\nabla} \rho \vec{v} = \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) - \rho \vec{\nabla} \vec{v}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 - \text{уравнение неразрывности (при несжимаемой жидкости } \operatorname{div} \vec{v} = 0)$$

2* Уравнения Максвелла

$$\text{Экспериментально: 1) } \int_L \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{r} d\vec{\sigma} - \text{закон Био-Савара}$$

$$2) \int_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{\sigma} - \text{закон Фарадея}$$

где \vec{H} - магнитная сила, \vec{r} - полный ток, \vec{E} - электрическая сила, \vec{B} - магнитная индукция

$$\text{Максвелл: } \vec{r} = \text{ток проводимости} + \text{ток смещения} = \lambda \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

λ - коэффициент проводимости, ϵ, μ - проницаемость

$$1) \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \iint_S (\lambda \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) d\vec{\sigma}$$

$$\text{Стокс: } \iint_S \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{\sigma} - \iint_S (\lambda \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) d\vec{\sigma} = 0$$

В векторной форме: $\operatorname{rot} \vec{H} = (\lambda \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ - источники магнитного поля - токи проводимости и смещения

$$2) \oint_L \vec{E} d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{\sigma} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{\sigma} \iff \operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{изменение индукции дает эл. ток в соленоиде.}$$

$$3) \vec{\nabla} \epsilon \vec{E} = \rho$$

$$4) \vec{\nabla} \mu \vec{H} = 0$$