10. Теорема Гаусса

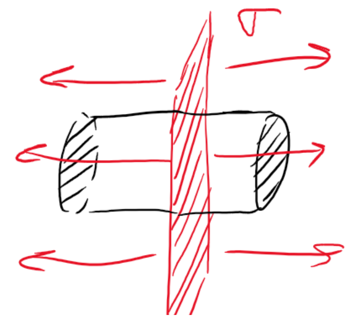
$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$d\Phi = \vec{E} d\vec{s} = E_n ds$, где $E_n = E \cos \alpha$

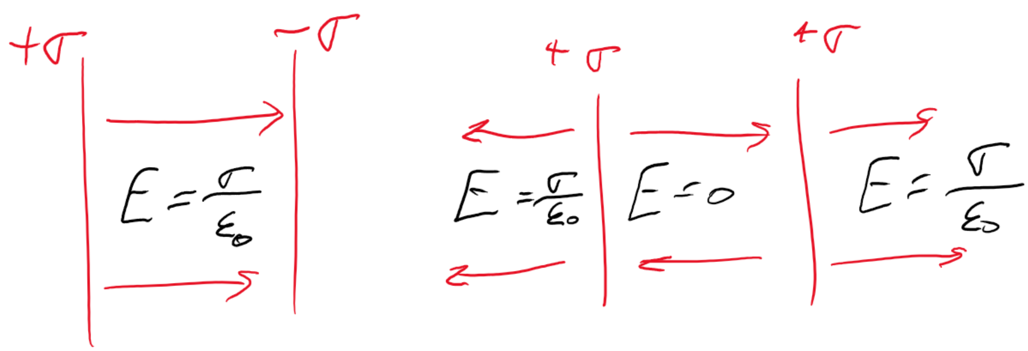
Ex. 1. Однородная равномерно заряженная бесконечная плоскость, σ

$\Phi = 2\Phi_{\text{осн}} + \cancelto{0}{\Phi_{\text{бок}}} = 2\Phi_{\text{осн}} = 2E \cdot S_{\text{осн}} = \dfrac{a}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma S_{\text{осн}}}{\varepsilon_0}$

$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

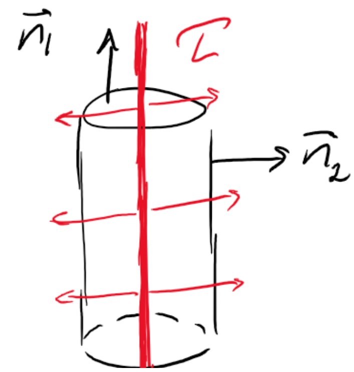


Если плоскости противоположно заряжены и расположены друг против друга, то получаем конденсатор. Если плоскости имеют одноименный заряд, то между ними напряженность равна нулю



Ex. 2. Цилиндрическая нить/стержень с плотностью заряда τ

Сделаем цилиндрическую поверхность вдоль стержня



$\oint \vec{E} d\vec{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$\oint E dS_{\text{бок}} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$\vec{n}_2 \uparrow\uparrow \vec{E}$

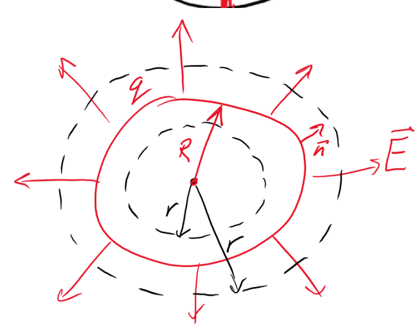
Так как $E = \text{const}$ на расстоянии r, $E = \dfrac{q}{2\pi r h \varepsilon_0} = \dfrac{h\tau}{2\pi r h \varepsilon_0} = \dfrac{\tau}{2\pi r \varepsilon_0}$

Ex. 3. Сфера (пустотелая)

Выбираем сферу радиуса $r < R$, для нее $\oint \vec{E} d\vec{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = 0$

$\vec{E} = 0$ внутри сферы, так как внутри заряда нет

Выберем сферу радиуса $r > R$



$\oint \vec{E} d\vec{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$E \cdot S = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \qquad E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Ex. 4. Шар (полнотелый)

При $r \geq R$ получаем аналогичную сфере ситуацию: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

При $r < R$ $E \cdot S = \dfrac{q'}{\varepsilon_0}$ (q' - заряд внутри поверхности)

$\rho = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q'}{V'} \Longrightarrow q' = \dfrac{q \cdot r^3}{R^3}$

$E = \dfrac{q \cdot r^3}{R^3} \cdot \dfrac{1}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} = \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$

Так как $\vec{E}$ - поле векторное, то к нему можно применить набла-оператор. Тогда получаем:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mathrm{div}\vec{E}$ - дивергенция поля

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathrm{rot}\vec{E}$ - ротор поля

По теореме Гаусса:

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle V$$

При $V \to 0$

$$\frac{1}{V}\oint \vec{E}d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle$$

$\lim\limits_{V\to 0}\dfrac{1}{V}\oint \vec{E}d\vec{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho = \mathrm{div}\vec{E}$ - дивергенция поля

Если в точке A $\mathrm{div}\vec{E} < 0$, то в точке A *сток* поля. Если $\mathrm{div}\vec{E} > 0$, то говорят, что в точке *исток* поля