Содержание

§1. Ряды **2**
1. Числовые ряды. Определения 2
2. Свойства числовых рядов 3
3. Условия сходимости рядов 6
3.1. Необходимое 6
3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия) 6
3.3. Достаточное условие (признаки сходимости) 6
4. Знакочередующиеся ряды 10

§2. Функциональные ряды **13**
1. Определения 13
2. Степенные ряды 16
3. Ряд Тейлора 18

§1. Ряды

1. Числовые ряды. Определения

Mem. Числовая последовательность: $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$
Ex. 1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $u_n = bq^n$, $\quad \dfrac{1}{2^n} \overset{n=0,1,\dots}{=} \{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dots\}$
Ex. 2. $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

Def. $\{u_n\}$ - последовательность
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется числовым рядом
Nota. Начальное значение n произвольно (целое)

Ex. $u_n = \dfrac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$
$u_n = \dfrac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$
Nota. u_n называется общим членом ряда

Nota. Существует ли сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и в каком смысле?

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$ - существует, но бесконечная
Ex. 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \left[\begin{array}{l} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{array}\right.$
Ex. 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots = 2$

Def. Частичная сумма ряда $S_n \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$
Nota. Последовательность частичных сумм - $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

Ex. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dots$
$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \dfrac{3}{2} \quad S_3 = \dfrac{7}{4} \quad S_4 = \dfrac{15}{8}$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n =?$, но проблема заключается в том, что бы найти формулу для S_n

Def. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$
Nota. В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1=S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный): $\sum\limits_{n=0}^{\infty}bq^n$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}bq^k=b(1+q+q^2+q^3+\dots+q^n)=b\frac{1-q^n}{1-q}$$

Исследуем предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$:

$|q|<1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{b}{1-q}\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^n)=\dfrac{b}{1-q}$

$|q|>1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty(q^n\to\infty)$

$|q|=1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}b\dfrac{0}{0}? \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty}bq^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b=\infty \quad (b\neq 0)$

$q=-1 \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty}b(-1)^n$ - расходится (из четвертого примера)

<u>Lab.</u> Доказать при $q=-1$ по def ($S_n=?$)

2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

Th. 1. Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=k>1}^{\infty}u_n$ одновременно сходятся или расходятся

□

$S_n^u = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$

$S_n^v = \sum\limits_{n=k}^{\infty} v_n \qquad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$

$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^u = \lim\limits_{n\to\infty}(\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim\limits_{n+\infty} S_n^v$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

Th. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

Th. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$ - сходится

□ По свойству пределов $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n \pm \sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma$ □

Nota. Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad$ но: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся

Nota. Докажем расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Ex. Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$$

$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как $u_n \geq v_n$, то $S_n \geq \sigma_n$, тогда $\lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \to \infty \Longrightarrow S_n \to \infty$

Th. 4. Если ряд сходится к числу S, то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна S

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{k\to\infty} S_n^{(k)} = S$, где $S_n^{(k)}$ - подпоследовательность S_n

□

Ex. Было $\sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \left[\begin{matrix} 0, \\ 1, \end{matrix}\right.$ так как ряд расходится

Nota. В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$

$S = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2}S$?!

Nota. Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

Nota. Сходящиеся ряды допускают умножение, но непочленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$

Тогда $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$

3. Условия сходимости рядов

3.1. Необходимое

Th. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

□

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$

□

Nota. Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+3)\sin\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)\sin\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{3}{n}) = 2 \neq 0$

3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

Мет. Критерий Коши для последовательности: $\{x_n\}$ сходится $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0\ |x_m - x_k| < \varepsilon$

Th. (без док-ва) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0\ \underset{|S_m - S_k| < \varepsilon}{|u_n + \cdots + u_m| < \varepsilon}$

Nota. Хвост ряда попадает в ε-трубу

Nota. Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличии от признаков

3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Далее $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - вспомогательный (уже исследован на сходимость), для простоты $v_n, u_n > 0$ (для отрицательных доказывается аналогично)

Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)
а) $\exists 0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\Longrightarrow \sum u_n$ сходится
б) $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\Longrightarrow \sum u_n$ расходится

$\square$
а) Строим частичные суммы:
$\sum v_n$ сходится $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$
S_n, σ_n возрастают и обе ограничены числом σ
Следовательно $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leq \sigma$
Аналогично пункт б)
$\square$

Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \left[\begin{array}{l} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{array}\right.$$

$\square$
По определению предела
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |\dfrac{u_n}{v_n} - q| < \varepsilon$
$|\dfrac{u_n}{v_n} - q| < \varepsilon \Longleftrightarrow q - \varepsilon < \dfrac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$
$(q-\varepsilon)v_n < u_n < (q+\varepsilon)v_n$
а) Если $\sum v_n$ сходится, то из правой части неравенства: $0 < u_n < (q+\varepsilon)v_n$
По признаку сравнения $\sum u_n$ также сходится
б) Если $\sum v_n$ расходится, то из левой части неравенства: $0 < (q-\varepsilon)v_n < u_n$
Тогда по пункту б) **Th. 1.** $\sum u_n$ расходится
$\square$

Nota. При $q = 0$ можем говорить, что u_n - бесконечно малая высшего порядка, чем v_n, а значит, если ряд v_n сходится, то u_n сходится

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится

$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n^2+n}>\dfrac{1}{n^2+2n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится по признаку сравнения

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ сходится

Начиная с некоторого n_0 $n!>2^n$. Тогда $u_n<v_n$ при $n>n_0$, по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ сходится

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1_{\frac{}{n}}$

Nota. Члены рядов u_n и v_n - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если u_n и v_n одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$u_n=\arcsin\dfrac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}=v_n\qquad\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится

Th. 3. Признак Даламбера

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ - исследуемый, $\exists\mathcal{D}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\in\mathbb{R}^+$

а) $0\le\mathcal{D}<1\quad\Longrightarrow\sum u_n$ сходится

б) $\mathcal{D}>1\quad\Longrightarrow\sum u_n$ расходится

в) $\mathcal{D}=1\quad\Longrightarrow$ ничего не следует, требуется другое исследование

□

а) По определению предела $\mathcal{D}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n},\ 0\le\mathcal{D}<1\Longleftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n>n_0\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\mathcal{D}|<\varepsilon\quad\Longleftrightarrow\quad\mathcal{D}-\varepsilon<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\mathcal{D}+\varepsilon$

Так как $0\le\mathcal{D}<1$, можно втиснуть число r между $\mathcal{D}$ и 1: $\mathcal{D}<r<1$

Положим $\varepsilon=r-\mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D}+\varepsilon=r$

Смотрим правую часть $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<r$ для $\forall n>n_0$, где $n_0=n_0(\varepsilon),\varepsilon=r-\mathcal{D}$

$u_{n_0+1}<ru_{n_0}$

$u_{n_0+2}<ru_{n_0+1}<r^2u_{n_0}$

$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1}}_{k} + u_{n_0} + \dots = k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены $v_m < r^l u_{n_0}$; u_{n_0} - фикс. число, а $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l$ сходится как геометрический при $|r| < 1$

Итак ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$ сходится и почленно превышает $\sum v_m = \left(\sum u_n\right) - k$

То есть $\sum u_n$ сходится

б) Lab. (взять r между $\mathcal{D}$ и 1, $1 < r < \mathcal{D}$, $\mathcal{D} - r = \varepsilon$)

Сравнить $\sum u_n$ с $\sum r^l$ (расходящимся)

$\square$

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\quad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ - сходится

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ - расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ - сходится

Th. 4. Радикальный признак Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \qquad u_n \geq 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$

а) $0 \leq K < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ расходится

Nota. $K = 1$ - ничего не следует

$\square$

а) По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \ |\sqrt[n]{u_n} - K| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow k - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon$ Положим $\varepsilon = r - K$, где $K < r < 1$

$\Longrightarrow 0 \leq u_n < r^n$ - геом. ряд с $|r| < 1$, то есть $\sum r^n$ сходится

б) Аналогично

$\square$

Ex. 1. $\sum\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $\quad K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}}$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ - необходимое условие не выполняется

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $\qquad K = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-1} < 1$ - сходится

Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует $f(x) : [1;+\infty] \to \mathbb{R}^+, f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

$\square$

$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx$

$\sum\limits_{n=2}^{b} u_n = u_2\cdot 1 + u_3\cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x)dx < u_1\cdot 1 + u_2\cdot 1 + \dots = \sum\limits_{n=1}^{b-1} u_n$

Обозначим $\sum\limits_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}, \quad \sum\limits_{n=2}^{b} u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x)dx < S_{b-1}$

$0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x)dx < \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

Если $\int$ сходится, то смотрим правую часть

Если $\int$ расходится, то смотрим левую часть неравенства

$\square$

4. Знакочередующиеся ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ $(u_n > 0)$ - знакочередующийся ряд

Th. Признак Лейбница

Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ верно, что $\underset{n\to\infty}{u_n \to 0}$ и $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ сходится

□
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$
$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$
Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать
$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$
Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из u_1 и получаем число гарантированно меньшее u_1
По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$
$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}; \qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \cancelto{0}{\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}} = S \in \mathbb{R}$
□

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$
$u_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} \Longrightarrow$ ряд сходится

Nota. Оценка остатка ряда
Запишем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k = S_n + P_n$ - остаток ряда
В доказательстве было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1}u_k| = u_k = u_{n+1}$$

Ex. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} \underbrace{- \dfrac{1}{32} + \dots}_{R_4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n}$

$|R_4| < \dfrac{1}{32}$
Проверка: $-(\dfrac{1}{32} - \dfrac{1}{64}) - (\dfrac{1}{128} - \dfrac{1}{256}) - \dots = -\sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2k}}$ - Lab. досчитать и сравнить с $\dfrac{1}{32}$

Nota. Оценка не работает в знакоположительных рядах
$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$
$R_3 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{64} + \dots = \dfrac{1}{16}(1 + \dfrac{1}{2} + \dots) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{16}$

Def. Знакопеременный ряд
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n - любого знака и не все u_n одного знака

Ex. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dots$

Nota. Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

Th. Абсолютная сходимость
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

Mem. См. абсолютную сходимость в несобственных интегралах

□

По критерию Коши:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится
$\forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$
По неравенству треугольника:
$|u_n| + |u_{n+1} + \dots + u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$

□

Nota. Обратное неверно!

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ сходится
Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ сходится, он называется **абсолютно сходящимся**
Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ расходится, он называется **условно сходящимся**
Nota. Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезнена и сохраняет сумму ряда
Nota. На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов
1) Признак сравнения: $|u_n| < |v_n|$: $\sum |v_n|$ сходится $\Longrightarrow \sum |u_n|$ сходится
2) Предельный признак: $\lim |\frac{u_n}{v_n}| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3) $D = \lim |\frac{u_{n+1}}{u_n}| < 1$
4) $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$
5) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сравнивается с $\sum |u_n|$

§2. Функциональные ряды

1. Определения

Def. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функциональным

Nota. При фиксации переменной x ряд становится числовым

Ex. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$ расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ сходится

Таким образом для $|x| < 1$ ряд будет сходящимся, для $|x| > 1$ расходящимся

Def. Множество значений x, при которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости

Def. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E, то сумма ряда - функция $S(x)$

Nota. То есть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток: $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Часто удобно исследовать $R_n(x) \to 0$. Также работает критерий Коши

Th. Критерий Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области $D \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon, x)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \ |u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon$

Nota. Очень неприятно, что n_0 зависит от ε и всякого x

Def. Равномерная сходимость ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0 \ |R_n(x)| < \varepsilon$

Nota. Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

Th. Признак Вейерштрасса

$\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \le \alpha_n \ \forall n$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся

Nota. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим

□

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0 \ |R_n^{\alpha}| < \varepsilon$

Заменим на условие $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$ (кр. Коши)

$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \le |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \le \alpha_n + \dots + \alpha_m \le \varepsilon$

При этом номер n_0 зависит только от ε

□

Nota. Таким образом всякий мажорирующий ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

Nota. Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

Ex. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$

При $x > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$

При $x < 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$

При $x = 0 \quad S_n = 0$

Th. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(u_n(x) \in C_{[a,b]})$ мажорируем в $D = [a, b]$, то его сумма S_x непрерывна на $[a, b]$

□

$S(x)$ непрерывна на $x \in [a, b] \iff \Delta S \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x), \ S(x) = S_n(x) + r_n(x)$

$\Delta S_n(x) = S_n(x + \Delta x) - S_n(x)$

$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = S_n(x + \Delta x) + r_n(x + \Delta x) - S_n(x) - r_n(x)$

$\Delta S(x) = \Delta S_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x)$

$|\Delta S(x)| \le |\Delta S_n| + |r_n(x+\Delta x)| + |r_n(x)|$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем $\Longleftrightarrow \exists$ сходящийся $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \,\Big|\, |u_n(x) \le \alpha_n|$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

и $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x+\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (так как N не зависит от x; $x+\Delta x \in [a,b]$)

$\Delta S_n = S_n(x+\Delta x) - S(x) = u_n(x+\Delta x) - u(x) + \dots + u_n(x+\Delta x) - u_n(x)$ - конечная сумма непрерывна

Сама $S_n(x)$ непрерывна, тогда $\forall \varepsilon > 0$ (при фиксированном N) $\exists \delta > 0 \mid |\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $|\Delta x| < \delta$

Итак: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$ и $\delta > 0 \mid \forall \underset{|\Delta x|<\delta}{x \in D}$

$$\begin{aligned} &|\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &+ |r_n(x+\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &+ |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &= |\Delta S(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

То есть $S(x) \in C_{[a,b]}$

□

Nota. Не все равномерно сходящиеся мажорируются, но у всех $S(x)$ непрерывна

Это позволяет определить $\int_{x_0}^{y} S(x)dx$, а если $S(x) \in C'_{[a,b]}$, то и $\frac{dS(x)}{dx}$

Th. Если ряд мажорируется на $[a,b]$ и $u_n(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то определен $\int_{x_0}^{y} S(x)dx$ и $\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$

□

$S(x) = S_n(x) + r_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x)$ - конечное число слагаемых из непрерывных функций ($r_n(x)$ как хвост равномерно сходящегося ряда)

Тогда для $x_0, x \in [a,b]$ $\quad \int_{x_0}^{x} S(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(x)dx + \int_{x_0}^{x} r_n(x)dx$ - это будет верно, если $\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

По свойству интегралов $\left|\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx\right| \le \int_{x_0}^{x} |r_n(x)|dx$

$\left|\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx\right| \le \int_{x_0}^{x} |r_n(x)|dx < \int_{x_0}^{x} \varepsilon_n dx = \underset{\varepsilon_n \to 0}{\varepsilon_n(x - x_0)}$ (x, x_0 - фикс.)

То есть $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} r_n(x)dx = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_0}^{x} u_k(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx$$
$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$$
□

Nota. Почленно интегрируются не просто равномерно сходящиеся, а мажорируемые, иначе остаток необязательно стремится к 0

Th. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a,b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$

Тогда $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

□

Пусть $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Докажем, что $g(x) = S'(x)$

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} u'_n(x)dx\right) = u_1(x)\Big|_{x_0}^{x} + u_2(x)\Big|_{x_0}^{x} + \dots$$
$= (u_1(x) - u_1(x_0)) + (u_2(x) - u_2(x_0)) + \dots = S(x) - S(x_0)$ - разность сходящихся рядов
$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = S(x) - S(x_0) \Longrightarrow \left(\int_{x_0}^{x} g(x)dx\right)' = g(x) = S'(x)$$
□

2. Степенные ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,\ c_n \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром x_0 (в точке x_0, по степеням $(x-x_0)$)

Nota. В частности $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ - степенной с центром в $x_0 = 0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ легко сводится заменой $x - x_0 = t$ к $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

Th. Абеля.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_1. Тогда ряд сходится для любого x, который $|x| < |x_1|$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_2. Тогда ряд расходится $\forall x\ |x| > |x_2|$

□

1) В точке x_1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots$ - числовой ряд, сходящийся

В точке x $(|x| < |x_1|)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = c_0 + c_1 x_1 \dfrac{x}{x_1} + c_1 x_1^2 \dfrac{x^2}{x_1^2} + \ldots$

Для этого ряда докажем абсолютную сходимость

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x_1| \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + |c_1 x_1^2| \left|\dfrac{x^2}{x_1^2}\right| + \ldots$

При этом ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится $\Longrightarrow \exists M > 0 \ : \ |c_n x_1^n| \le M$

И $\left|\dfrac{x^k}{x_1^k}\right| < 1$, так как $|x| < |x_1|$

Тогда $|c_0| + |c_1 x_1| \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + |c_1 x_1^2| \left|\dfrac{x^2}{x_1^2}\right| + \cdots + |c_k x_1^k| \left|\dfrac{x^k}{x_1^k}\right| < M \left(1 + \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^2 + \cdots + \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^k\right)$ - геометрическая прогрессия с $|q| < 1$

Таким образом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \sim M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$, который сходится

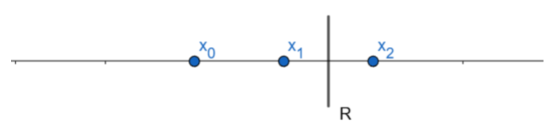
Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится (и равномерно?)

б) От противного, используя пункт а)

□

Nota. Заметим, что должно существовать такое R, для которого для всех x меньше R ряд сходится

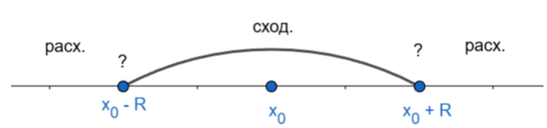
Зафиксируем между x_0 и R число $x_0 < r < R$ - тогда $\sum c_n r^n$ - мажорирует $c_n x^n$, то есть ряд сходится равномерно



Def. $R \in \mathbb{R}^+ \ \Big| \ \forall |x| < R$ ряд сходится, а $\forall |x| > R$ ряд расходится, тогда R называют радиусом сходимости

Для сдвинутого ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \forall x : \ |x - x_0| < R$ - сходится; $\forall x : \ |x - x_0| > R$ - расходится

Сходимость ряда в $x_0 \pm R$ нужно проверять специально



Nota. Чаще всего исследование на сходимость проводится по признакам Даламбера, Коши

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}|x|^{n+1}\dfrac{n}{|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}|x| = |x| < 1$
Предварительно $D = (-1; 1)$.

Далее, рассмотрим $x = \pm 1$:

$(x = 1) : \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ - сходится

$(x = -1) : \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$ - расходится

Итак, $D = (-1; 1]$

3. Ряд Тейлора

Мет. Формула Тейлора: $f(x) \in C^{n+1}_{U_\delta(x_0)}$, тогда $f(x) \overset{x\in U_\delta(x_0)}{=\!=} f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Чтобы $f(x)$ в пределе равнялось $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, нужно, чтобы $r_n(x) \to 0$