

Содержание

1. Евклидовы пространства	3
1.1. Скалярное произведение	3
1.2. Свойства евклидова пространства - E	3
1.3. Норма	4
2. Линейный оператор (линейное отображение, линейный функционал, линейное преобразование)	8
2.1. Определение	8
2.2. Действия с операторами	8
2.3. Обратимость оператора	9
2.4. Матрица ЛО	10
2.5. Ядро и образ оператора	11
2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису	13
2.7. Собственные векторы и значения оператора	15
2.8. Самосопряженные операторы	18
2.9. Ортогональный оператор	21
3. Билинейные и квадратичные формы	23
3.1. Билинейные формы	23
3.2. Квадратичные формы	24
4. Дифференциальные уравнения	26
4.1. Общие понятия	26
4.2. ДУ первого порядка ($ДУ_1$)	29
4.3. Существование и единственность решения	33

4.4. ДУ высших порядков	34
4.5. ЛДУ ₂	35
4.5.1. Определения	35
4.5.2. Решение ЛДУ ₂ с постоянными коэффициентами	35
4.5.3. Свойства решений ЛДУ ₂	37
4.6. Системы ДУ	43
4.7. Теория устойчивости (элементы)	45
X. Программа экзамена в 2023/2024	48

1. Евклидовы пространства

1.1. Скалярное произведение

L - линейное пространство $\forall x, y \in L \quad c = (x, y)$ - ск. произв.
 $x, y \rightarrow c \in \mathbb{R}$

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
4. $\forall x \in L \quad (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \implies x = 0$

Если векторы и коэффициенты комплексно-значные, то определения будут другими!

Def. Скалярная функция $c = (x, y)$ со свойствами 1-4 называется скалярным произведением элементов x и y

Def. Линейное пространство со скалярным произведением называется Евклидовым

Ex. 1. ЛП - пространство геометрических векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi, & \vec{a}, \vec{b} \neq 0 \\ 0, & \vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0 \end{cases}$$

Ex. 2. ЛП $= C_{[a;b]}$

$$(f(x), g(x)) \stackrel{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Очевидно, что 1-3 выполняются, проверим 4:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \stackrel{?}{\implies} f(x) = 0$$

Ex. 3. ЛП - пространство числовых строк вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \text{сумма произведений компонент}$$

1.2. Свойства евклидова пространства - E

Th. Неравенство Коши-Буняковского

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$$

□

Нетрудно заметить, что:

$$\begin{aligned} \langle \lambda x - y, \lambda x - y \rangle &= (\lambda x - y, \lambda x) - (\lambda x - y, y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + \\ & (y, y) \stackrel{\text{пусть}}{=} 0 \end{aligned}$$

Решим относительно λ

$$D = 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y)$$

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y)$$

Так как $(\lambda x - y) \geq 0$ (4-ое свойство ск. произв.), то уравнение имеет ≤ 1 корня, значит

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$$

□

1.3. Норма

ЛП $= L, \forall x \in L$ определена функция так, что выполняется $x \rightarrow n \in \mathbb{R}, n = \|x\|$

$$1. \|x\| \geq 0 \text{ и } \|x\| = 0 \implies x = 0$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L - \text{неравенство треугольника}$$

Евклидово пространство с нормой называется нормированным

Th. E^n является нормированным, если $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

□

Свойства 1-2 очевидны, докажем 3 свойство:

$$\|x + y\| = \sqrt{(x + y, x + y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\|$$

$$\sqrt{(x, x) + 2(x, y) + (y, y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$$

$$(x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq (x, x) + (y, y) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)}$$

$$(x, y) \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) - \text{верно по неравенству Коши-Буняковского}$$

□

Обобщим геометрические понятия ортогональности и косинуса угла на случай произвольных векторов

Def. x, y - ортогональны, если $(x, y) = 0$ и $x \neq 0$ и $y \neq 0$ $x \perp y$

Def. $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ - косинус угла между векторами

Def. $x, y \in E^n$ $x \perp y$ $z = x + y$ - гипотенуза

Th. $x \perp y$, тогда $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

□

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + \underbrace{2(x, y)}_{=0, x \perp y} + (y, y) = (x, x) + (y, y)$$

□

Def. $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис L^n

На L^n введены (x, y) и $\|x\|$ (то есть $L^n \rightarrow E_{\|\cdot\|}^n$ - нормированное евклидово)

B называют ортонормированным базисом, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

Nota. Докажем, что всякая такая система из n векторов линейно независима (то есть всякая нулевая комбинация тривиальная):

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \stackrel{?}{\implies} \forall \lambda_i = 0$$

$$(e_k, \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) \stackrel{k \neq i \implies (e_k, e_i) = 0}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_k, e_i) \stackrel{=}{=} \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k = 0 \quad \forall k$$

(записи внезапно обрываются)

Nota. Изоморфизм $E^n \rightarrow E^n$ позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

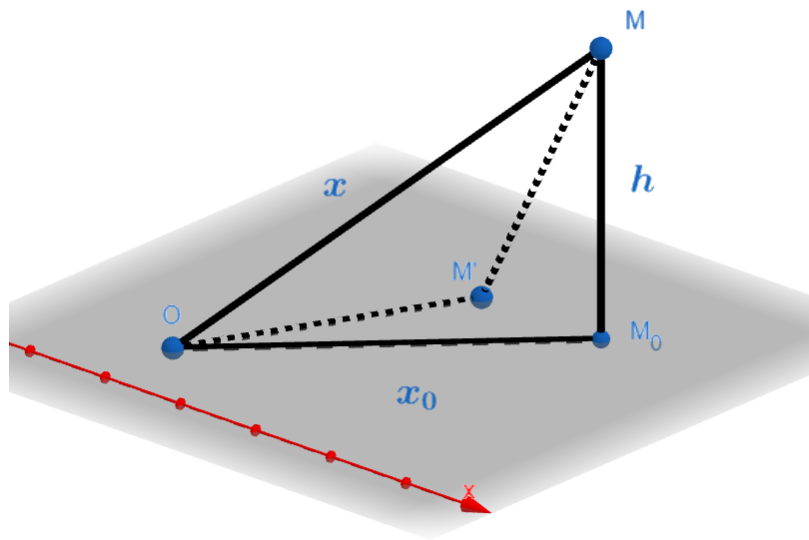
Ex: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - арифметические векторы со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$E^n \in C_{[a;b]}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f * g dx$

$$\sqrt{\int_a^b (f * g)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$$

Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства E^n на подпространство G



Точка M - конец вектора x в пространстве E^n . Нужно найти M_0 (конец вектора x_0 , проекции x на G)

$$x_0 + h = x$$

где $h \perp G$. Правда ли что, длина перпендикулярного вектора h - минимальная длина от точки M до G ?

Th. $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$

$$\square \|x - x'\| = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \stackrel{\text{по теореме Пифагора}}{=} \|x - x_0\| + \|x_0 - x'\| = \|h\| + \|x_0 - x'\| > \|x - x_0\|$$

Nota. x_0 называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

Алгоритм: $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k, \{e_i\}_{i=1}^k$ - базис G (необязательно ортонормированный)

Дан вектор x , пространство G , нужно найти λ_i

$$h = x - x_0, h \perp G \quad (h, e_i) \stackrel{h \perp e_i}{=} \forall i \quad 0$$

$$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0$$

$$(x, e_i) = (x_0, e_i)$$

Тогда $\forall i \quad (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_k (e_k, e_i) - (e_k, e_i)$ - числа, а λ_i - неизвестные

Получили СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \dots & (e_k, e_k) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \Gamma \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$$

Nota. В матрице Γ нет нулевых строк, так как e_i - базисная и по крайней мере $e_i^2 \neq 0$

Таким образом по теореме Крамера $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Def. Матрицу $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1\dots k}$ называют матрицей Грама

$$\Gamma = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}, \text{ если базис ортонормированный}$$

Далее, I - единичная матрица Грама

$$\text{Nota. Тогда } I \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$$

Приложения задачи о перпендикуляре

1) Метод наименьших квадратов

В качестве простейшей модели зависимости $y = y(x)$ берем линейную функцию $y = \lambda x$

Ищем минимально отстоящую прямую от данных (x_i, y_i) , то есть ищем λ

Определим расстояние (в этом методе) как $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{0i})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \lambda x_i)^2$ - минимизируем
Таким образом, ищем y_0 (ортог. проекция) такое, что $(y - y_0)^2 = \sigma^2$ - минимальное
Если $y_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$, где x_i - набор измерений для i -ой точки
Рассмотрим y_0 как разложение по базису $\{x_i\}$

2) Многочлен Фурье

$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$ - линейная комбинация

Функции $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$ - ортогональны

Задача в том, чтобы для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$ найти минимально
отстоящий многочлен $P(t)$ при том, что расстояние определяется как $\sigma^2 = \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$

Нужно найти a_i и b_i - обычные скалярные произведения $a_i = k \int_0^{2\pi} f(t) \cos(it) dt$, $b_i =$
 $m \int_0^{2\pi} f(t) \sin(it) dt$ (k, m - нормирующие множители)

2. Линейный оператор (линейное отображение, линейный функционал, линейное преобразование)

2.1. Определение

Линейный оператор - это отображение $V^n \xrightarrow{\mathcal{A}} W^m$

(V^n, W^m - линейные пространства размерности $n \neq m$ в общем случае),

которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет один какой-либо $y \in W^m$ и

$$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A}x_1 + \mu \mathcal{A}x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$$

Nota. Заметим, что если 0 представим как $0 * x$, где $x \neq 0$, то

$$\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 * x) = 0 * \mathcal{A}x \stackrel{0*y}{=} 0$$

Nota. Если $V = W$, то \mathcal{A} называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы $\mathcal{A}: V \rightarrow V$, $\mathcal{A}: V^n \rightarrow W^n$

Ex. 1. $V = \mathbb{R}^2$ - пространство направленных отрезков

$$\mathcal{A}: V \leftarrow V$$

$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$ для таких \mathcal{A} как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия

Ex. 2. $V^n = W^m$, где $m < n$

\mathcal{A} - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)

Ex. 3. V^n - пространство числовых строк длины n

$$\mathcal{A}: V^n \leftarrow V^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$\mathcal{A}x = y : \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} x = y$$

2.2. Действия с операторами

Def. $\mathcal{A}\mathcal{B}: V \rightarrow W$

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \stackrel{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ - определение суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$

2. $(\lambda \mathcal{A})x \stackrel{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x)$ - $\lambda \mathcal{A} = \mathcal{D}$

Nota. Сформируем линейное пространство из операторов $\mathcal{A}: V \rightarrow W$

1. Ассоциативность сложения (очевидно)
2. Коммутативность (очевидно)
3. Нейтральный элемент $0x = 0$
4. Противоположный: $-\mathcal{A} = (-1) * A$
5. ... LAB

Def: \mathcal{I} - тождественный - $\forall x \in V \quad \mathcal{I}x = x$

Def. Произведение операторов (композиция)

\mathcal{AB} - произведение, $\mathcal{A} : V \rightarrow W$; $\mathcal{B} : U \rightarrow V$

$(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$; $x \in U$

Свойства: Lab доказать

$$1^* \lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$$

$$2^* (\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$$

$$3^* \mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$$

$$4^* \mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$$

Nota. Можно обобщить 4^* на n равных \mathcal{A}

Def. $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \dots \mathcal{A}$ - n раз, степень оператора

Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

2.3. Обратимость оператора

Def: $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V) \quad \begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \implies y_1 \neq y_2$

Тогда \mathcal{A} называется взаимно-однозначно действующим

Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

Th. $\{x_i\}$ - линейно независима $\xrightarrow{\mathcal{A}x=y} \{y_i\}$ - линейно независима

В обратную сторону, если \mathcal{A} - взаимно-однозначен

$\square \square \mathcal{A} : V \rightarrow W$ и $0_V, 0_W$ - нули V и W соответственно

$$1. \mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^k 0 \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^k 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$$

2. Докажем, что если $x_i \subset V$ - лин. нез., то $y_i \subset W$ - лин. нез.

Составим $\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = 0_W$ (От противного) $\square \{y_i\}$ - лин. зав., тогда $\exists \lambda_k \neq 0$

При этом $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. \mathcal{A} - вз.-однозн., то $n' = m'$: кол-во x_i и y_i равно)

$$\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A}x_j \stackrel{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j\right) = 0_W$$

Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то 0_W - образ $x = 0_V$, но так как \mathcal{A} - вз.-однозн., то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит $\sum_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{x_j\}$ - лин. зав. - противоречие

3. \square теперь $\{y_i\}$ - л. нез., а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - лин. зав.

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \stackrel{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$$

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A}x_i = 0_W$$

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \implies \{y_i\}$ - лин. зав. - противоречие

Следствие: $\dim V = \dim W \iff \mathcal{A}$ - лин. изоморфизм

Def: $\mathcal{B} : W \rightarrow V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \rightarrow W$

если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

Следствие: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x = x$

Th. $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$

$\square \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \implies x = 0$

Th. Необходимые и Достаточные условия существования \mathcal{A}^{-1}

$\exists \mathcal{A}^{-1} \iff \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

$\square \implies \exists \mathcal{A}^{-1}$, но $\square \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \stackrel{\exists \mathcal{A}^{-1}}{\implies} x = 0_V \iff x_1 = x_2$ - противоречие

\Leftarrow Так как \mathcal{A} - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists \mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязат. линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}' : W \rightarrow V$ - линейный оператор

$$? \mathcal{A}'(\sum \lambda_i y_i) = \sum \lambda_i \mathcal{A}'y_i = \sum \lambda_i x_i$$

$$\mathcal{A} - \text{вз.-однозн.} \iff \forall x_i \longleftrightarrow y_i \quad \Big| \cdot \lambda_i, \sum$$

$$\mathcal{A}(\sum \lambda_i x_i) = \mathcal{A}x = y = \sum \lambda_i y_i \quad \text{и } y \text{ имеет только один прообраз } x$$

$$\text{Применим } \mathcal{A}' \text{ к } y = \sum \lambda_i y_i \quad \mathcal{A}'y = x = \sum \lambda_i x_i - \text{единственный прообраз } y$$

Таким образом, \mathcal{A}' переводит лин. комбинацию в такую же лин. комбинацию прообразов, то есть \mathcal{A}' - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

2.4. Матрица ЛО

$$\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^n c_j e_j) = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j$$

$$\mathcal{A}e_j \stackrel{\text{образ базисного вектора}}{=} y_j \stackrel{\{f_i\} - \text{базис } W^m}{=} \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_j a_{ij} f_i$$

Иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Def: Матрица $A = a_{ij, i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ пространства V^n

Вопросы:

- 1) $\forall \mathcal{A} \exists A$
- 2) $\forall A \exists \mathcal{A}$
- 3) если $\exists A$ для \mathcal{A} , то единственная?
- 4) если $\exists \mathcal{A}$ для A , то единственная?

Ответы:

- 1) При выбранном базисе $\{e_j\} \forall \mathcal{A} \exists A$ (алгоритм выше)
- 3) такая A единственная \implies в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A} \quad A_e \neq A_{e'}$
- 2) $\forall A_{m \times n}$ можно взять пару ЛП V^n, W^m и определить $\mathcal{A} : V^n \rightarrow W_n$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$
- 4) Lab.

Nota: Далее будем решать две задачи

- 1) преобразование координат как действие оператора
- 2) поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

2.5. Ядро и образ оператора

Def. Ядро оператора - $Ker \mathcal{A} \stackrel{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

Def. Образ оператора - $Im \mathcal{A} \stackrel{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

Nota. $Ker \mathcal{A}$ и $Im \mathcal{A}$ - подпространства

Nota. $Ker \mathcal{A}$ и $Im \mathcal{A}$ - подпространства V ($\mathcal{A} : V \rightarrow V$)

Вообще-то $Ker \mathcal{A} \subset V, Im \mathcal{A} \subset W$ ($\mathcal{A} : V \rightarrow W$)

$\dim W \leq \dim V$, тогда можно считать, что $W \subset V'$ и рассмотрим $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$ (где V' изоморфен W)

$Ker \mathcal{A}$ - подпространство, то есть $Ker \mathcal{A} \subset V$ и $\sum c_i x_i \in \mathcal{A}$, если $\forall x_i \in Ker \mathcal{A}$

$$\mathcal{A}(\sum c_i x_i) = \sum c_i \mathcal{A}x_i \stackrel{x_i \in \mathcal{A}}{=} \sum c_i 0 = 0$$

Следствие: $Ker \mathcal{A} = 0 \implies \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

□ От противного:

□ \mathcal{A} - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \iff \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \in \text{Ker } \mathcal{A}$
- противоречие

Nota. Обратное также верно:

\mathcal{A} - вз.-однозн. $\iff y_1 = y_2 \implies x_1 = x_2$, так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 = 0$

Тогда 0 является образом только 0-вектора $\implies \text{Ker } \mathcal{A} = 0$

Nota. Также очевидно, что

$$\text{Ker } \mathcal{A} = 0 \iff \text{Im } \mathcal{A} = V$$

$$\text{Ker } \mathcal{A} = V \implies \text{Im } \mathcal{A} = 0 \text{ и } \mathcal{A} = 0$$

Th. $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, тогда $\dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim \text{Im } \mathcal{A} = \dim V$

□ Так как $\text{Ker } \mathcal{A}$ - подпространство V , то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса V : $e_1^k, \dots, e_m^k, e_{m+1}^k, \dots, e_n^k$)

Обозначим дополнение W , тогда $\text{Ker } \mathcal{A} \oplus W = V \implies \dim \text{Ker } \mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что W и $\text{Im } \mathcal{A}$ - изоморфны

$$\mathcal{A} : W \rightarrow \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} : \text{Ker } \mathcal{A} \rightarrow 0$$

Докажем, что \mathcal{A} действует из W в $\text{Im } \mathcal{A}$ взаимно-однозначно

□ \mathcal{A} невз.-однозн., тогда $\exists x_1, x_2 \in W (x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in \text{Im } \mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \implies x_1 - x_2 \stackrel{\text{обозн.}}{=} x \in \text{Ker } \mathcal{A}$, но $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$

Но для прямой суммы $W \cup \text{Ker } \mathcal{A} = 0, x \in W \cup \text{Ker } \mathcal{A} \implies$ предположение неверно

$\implies \mathcal{A}$ - лин. вз.-однозн. $\implies \dim W = \dim \text{Im } \mathcal{A}$

$V = W_1 \oplus W_2$ найдется ЛО $\mathcal{A} : V \rightarrow V$

$$W_1 = \text{Ker } \mathcal{A}, W_2 = \text{Im } \mathcal{A}$$

Def. Рангом оператора \mathcal{A} называется $\dim \text{Im } \mathcal{A}$: $\text{rang } \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \dim \text{Im } \mathcal{A} (= r(\mathcal{A}) = \text{rank } \mathcal{A})$

Nota. Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \rightarrow W^m$$

A - матрица \mathcal{A} , $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, $y = y_1 f_1 + \dots + y_m f_m$

$$\mathcal{A}x = y \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e'_i$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_m \end{pmatrix}$$

$$\text{Здесь } \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T - \text{это матрица } (e_1 \ \dots \ e_n) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$$

Nota. Поиск матрицы \mathcal{A} можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots, e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. позже)

Тогда $\text{Ker } \mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему

$$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \Phi CP = n - \text{rang} A) \text{ и при этом } \dim K = n - \dim \text{Im } \mathcal{A}$$

$$\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang} A = \dim \text{Im } \mathcal{A}$$

Следствия (без док-в)

$$1) \text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \leq \text{rang}(\mathcal{A}) \text{ (или } \text{rang} \mathcal{B})$$

$$2) \text{rang}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \geq \text{rang}(\mathcal{A}) + \text{rang}(\mathcal{B}) - \dim V$$

Nota. Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \rightarrow V^n$ (переход из системы $Ox_i \rightarrow Ox'_i, i = 1..n$)

$$\dim \text{Im } T = n, \dim \text{Ker } T = 0 \implies T - \text{вз.-однозн.}$$

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e \rightarrow e'}$

2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

Th. $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

$\{e_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e$ и $\{e'_i\} \stackrel{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства V

$\mathcal{T} : V^n \rightarrow V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e'_i$

$\square A, A'$ - матрицы \mathcal{A} в базисах e и e'

Тогда $A' = TAT^{-1}$ ($A'_{e'} = T_{e \rightarrow e'}AT_{e \rightarrow e'}^{-1}$)

$\square \square y = \mathcal{A}x$, где x, y - векторы в базисе e ($x_e = x'_{e'}$ - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$, где x', y' - векторы в базисе e'

$$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$$

$$y = Ax, y' = A'x', \text{ тогда } Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$$

$$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$$

$$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$$

$$A = T^{-1}A'T \implies A' = TAT^{-1}$$

Th. $A' = T_{e \rightarrow e'}AT_{e \rightarrow e'}^{-1}$

Nota. $C = A + \lambda B$

Следствия:

- 1) $TCT^{-1} = T(A + \lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$
- 2) $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$
- 3) $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

Nota. То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании T

Def. Матрица A называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall i \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij} = (A_i, A_i) = 1 \quad \forall i, j (i \neq j) \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$$

$$\text{В общем } (A_i, A_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Def. Оператор \mathcal{A} называется ортогональным, если его матрица ортогональна

? А ортогональна в каком-либо базисе или во всех?

Свойство. \mathcal{A} - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \det(A)^2 = \det(I)$)

Th. $T_{e \rightarrow e'}$ - преобразование координат в V^n . Тогда T - ортогональный оператор

Базис e - ортонормированный базис

$$\square \quad \square \text{ в базисе } e \text{ матрица } T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} - \text{неортогональна}$$

$$\text{Тогда } e'_1 = \sum_{i=1}^n \tau_{1i} e_i \quad \Big| \cdot e'_1$$

$$1 = (e'_1, e'_1) = \left(\sum_{i=1}^n \tau_{1i} e_i \right)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1 - \text{то есть строка - единичный вектор}$$

$$0 = (e'_1, e'_2) = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_2 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots) = \text{произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны}$$

Таким образом, матрица T - ортогональна

Nota. Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

2.7. Собственные векторы и значения оператора

Def. Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ - это $U = \{x \in V \mid \mathcal{A}x \in U\}$

Ex. $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\leq n$ на $[a; b]$, $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$

Nota. $\text{Ker } \mathcal{A}, \text{Im } \mathcal{A}$ - инвариантные ($A : V \rightarrow V$)

Def. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ ($\mathcal{A}x = Ax, A$ - матрица в некоем базисе)

$$\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Nota. Матрица $A - \lambda I$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Nota. Уравнение $\xi(\lambda) = 0$ называется вековым

Def. Собственным вектором оператора \mathcal{A} , отвечающим собственному значению λ , называется $x \neq 0 \mid \mathcal{A}x = \lambda x$

Def. Собственное подпространство оператора \mathcal{A} , отвечающее числу λ_i ,

$$U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$$

Def. $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность числа λ_i

Th. $\mathcal{A}x = \lambda x \iff \det(A - \lambda I) = 0, \quad A : V^n \rightarrow V^n$

$$\square \iff |A - \lambda I| = 0 \iff \text{rang}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Im}(A - \lambda I) < n \iff \dim \text{Ker}(A - \lambda I) \geq 1$$

$$\exists x \in \text{Ker}(A - \lambda I), x \neq 0 \mid (A - \lambda I)x = 0 \iff Ax - \lambda Ix = 0 \iff Ax = \lambda x$$

Nota. По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет n корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

Def. Кратность корня λ_i называется алгебраической кратностью

Th. $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \implies x_1, x_2$ - линейно независимы

$$\square \text{ Составим комбинацию: } c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \Bigg| \cdot \mathcal{A}$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \square \lambda_2 \neq 0$$

$$c_1 \mathcal{A}x_1 + c_2 \mathcal{A}x_2 = 0 \iff c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

Умножим $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ на λ_2 : $c_1 \lambda_2 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$

$$c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 - c_1 \lambda_2 x_1 - c_2 \lambda_2 x_2 = 0$$

$$c_1 x_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1 = 0$, а комбинация линейно независима

$$\text{Если } \lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0: c_2 \lambda_2 x_2 = 0 \implies c_2 = 0$$

Nota. Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для k -ой системы собственных векторов для попарно различных k чисел λ

Th. $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ - различные собственные значения $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, им соответствуют U_{λ_i} - собственные подпространства V для λ_i

$\square e^{(1)} = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}\}, e^{(2)} = \{e_1^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}\}, \dots$ - базисы $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots$

Составим систему $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ (*)

Тогда система e - линейно независима

\square Составим линейную комбинацию:

$$1) \square \overbrace{\alpha_1 e_1^{(1)} + \dots + \alpha_{k_1} e_{k_1}^{(1)}}^{x_1 \in U_{\lambda_1}} + \dots + \overbrace{\gamma_1 e_1^{(p)} + \dots + \gamma_{k_p} e_{k_p}^{(p)}}^{x_p \in U_{\lambda_p}} = 0$$

Тогда $\sum_{i=1}^p x_i = 0$ (x_i - линейно независимы, так как λ_i - различны) - этого не может быть, так как $\forall i \ x_i \neq 0$ (как собственный вектор)

$$2) \text{ В } \forall U_{\lambda_i} \text{ содержится } 0\text{-вектор. Тогда } \sum_{i=1}^n x_i = 0 \iff \forall x_i = 0$$

Но $x_j = \sum_{i=1}^{k_j} c_i e_i^{(j)} = 0$ ($e_i^{(j)}$ - базисные, т. е. л/нез) $\implies \forall c_j = 0$ (комбинация должна быть тривиальна)

\square

Nota. Таким образом, объединение базисов собственных подпространств U_{λ_i} образует линейно независимую систему в V^n

Что можно сказать о размерности системы e (*) ?

$$\text{Обозначим } S = \sum_{i=1}^p \dim U_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^p \beta_i, \beta_i - \text{геометрическая кратность } \lambda_i$$

Очевидно, $S \leq n$

Th. $S = n \iff \exists$ базис V^n , составленный из собственных векторов

\square Система $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ состоит из собственных векторов

Если $S = n$, получаем n собственных векторов, линейно независимых - базис V^n

Если \exists базис из n лин. незав. собственных векторов, тогда $\dim e = S = n$

□

Nota. Условие Th равносильно: $V^n = \sum_{i=1}^p \oplus U_{\lambda_i} (\lambda_i \neq \lambda_j)$

Действительно: $\dim V^n = \sum_{i=1}^p \dim U_{\lambda_i}$ и $\forall i, j \ U_{\lambda_i} U_{\lambda_j} = 0$

Ex. Если $\exists n$ различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\dim U_{\lambda_i} = 1 \forall i$

Def. Оператор \mathcal{A} диагонализуемый, если существует базис $e \mid A_e$ - диагональна

Th. \mathcal{A} - диаг.-ем $\iff \exists$ базис из собственных векторов

□ $\iff e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис собственных векторов

Собственный вектор (def): $\exists \lambda_i \mid \mathcal{A}e_i = \lambda_i e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$$\begin{cases} \mathcal{A}e_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{k \neq 1} 0 \cdot e_k \\ \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2 + \sum_{k \neq 2} 0 \cdot e_k \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}_e \dots e_i = \mathcal{A}e_i$$

$\implies \exists f$ - базис, в котором A_f - диагональная (по -äëää. - äì)

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{Применим } \mathcal{A} \text{ к } f_i \in f$$

$$\mathcal{A}f_i = A_f f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} f_i = \alpha_i f_i \implies \alpha_i - \text{собственное число (по def), а } f_i - \text{собственный вектор}$$

□

Nota. О связи алгебраической и геометрической кратностей (α - алг., β - геом.)

1) α, β не зависят от выбора базиса

□ β_i по определению $\dim U_{\lambda_i}$ и не связана с базисом

Для α : строим вековое уравнение $|A_f - \lambda I| = 0 \implies \lambda_i$ с кратностью α_i , $\alpha = \sum \alpha_i$

□ A_g - матрица \mathcal{A} в базисе g

Но $A_g = T_{f \rightarrow g} A_f T_{g \rightarrow f}$ или для оператора

$$A_g - \lambda I = T_{f \rightarrow g} (A_f - \lambda I) T_{g \rightarrow f} = \overbrace{T_{f \rightarrow g} A_f T_{g \rightarrow f}}^{=A_g} - \overbrace{\lambda T_{f \rightarrow g} I T_{g \rightarrow f}}^{=\lambda I} = A_g - \lambda I$$

Таким образом, матрицы $A_g - \lambda I$, $A_f - \lambda I$ - подобные

Def. Подобные матрицы - матрицы, получаемые при помощи преобразования координат

Тогда $\det(A_f - \lambda I) = \det(A_g - \lambda I)$ (инвариант) \implies одинаковая кратность

□

2) Геометрическая кратность не превышает алгебраической. У диагонализируемого оператора $\alpha = \beta$

2.8. Самосопряженные операторы

1* Сопряженные операторы

!!! Далее будем рассматривать операторы только в евклидовом пространстве над вещественным полем

Пространство со скалярным произведением над комплексным полем называется унитарным

Мет. Скалярное произведение

$$(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$1) (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$$

$$2) (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$$

$$3) (x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \implies x = 0$$

$$4) (x, y) = (y, x) \text{ в } \mathbb{R}. \text{ Но в комплексном множестве: } (x, y) = \overline{(y, x)}. \text{ Тогда } (x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)}$$

Мет. (x, y) в \mathbb{R}

$$(x, y) = (y, x)$$

Но. (x, y) в комплексном множестве

$$(x, y) = \overline{(y, x)}$$

Важно: линейность по первому аргументу - везде

$$(\lambda x, y) \stackrel{\mathbb{R}C}{=} \lambda(x, y)$$

Но:

$$(x, \lambda y) = \lambda(x, y) \text{ в } \mathbb{R}$$

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y) \text{ в } C$$

Def. 1. Оператор \mathcal{A}^* называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \rightarrow V$, если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$$

Def. 2. \mathcal{A}^* сопряженный для \mathcal{A} , если $A^* = A^T$ в любом ортонормированном базисе

Def. 1. \iff Def. 2.

$$(\mathcal{A}x, y) \stackrel{\text{на языке матриц}}{=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y$$

$$\stackrel{\parallel}{=} (x, \mathcal{A}^*y) = X^T \cdot (A^*Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \implies A^* = A^T$$

Lab. Очевидно существование $\mathcal{A}^* \forall \mathcal{A}$ (определяется в ортонормированном базисе действием \mathcal{A}^T)

Доказать единственность \mathcal{A}^* рассмотреть от противного $(x, \mathcal{A}_1^*y) \neq (x, \mathcal{A}_2^*y)$

Свойства:

$$1) I = I^* \quad \square (Ix, y) = (x, y) = (x, Iy) \quad \square$$

$$2) (A + B)^* = A^* + B^*$$

$$3) (\lambda A)^* = \lambda A^*$$

$$4) (A^*)^* = A$$

$$5) (AB)^* = B^* A^* \quad (\text{св-во транспонирования матриц})$$

$$\text{или } ((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^*y) = (x, B^*A^*y)$$

$$6) A^* - \text{линейный оператор } (Ax = x', Ay = y' \implies A(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y')$$

$$\text{Можно использовать линейные свойства умножения матриц } A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda A^*X + \mu A^*Y$$

2* Самосопряженный оператор

Def. A называется самосопряженным, если $A = A^*$

Следствие. $A^T = A \implies$ матрица A симметричная

Свойства самосопряженных операторов:

$$1) A = A^*, \lambda: Ax = \lambda x (x \neq 0). \text{ Тогда, } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\square (Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad (x, A^*y) = (x, Ay) = (x, \lambda y) \stackrel{B.C}{=} \bar{\lambda}(x, y)$$

$$(Ax, y) = (x, Ay) \implies \lambda(x, y) = \bar{\lambda}(x, y) \implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

\square

$$2) A = A^*, Ax_1 = \lambda_1 x_1, Ax_2 = \lambda_2 x_2 \text{ и } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Тогда $x_1 \perp x_2$

\square Хотим доказать, что $(x_1, x_2) = 0$, при том, что $x_{1,2} \neq 0$

$$\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$$

$$\text{Так как } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ то } (\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \implies (x_1, x_2) = 0 \quad \square$$

Th. Лемма. $A = A^*$, e - собственный вектор ($l_{\{e\}}$ - линейная оболочка e - инвариантное подпространство для A)

$$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$$

Тогда V_1 - инвариантное для A

\square Нужно доказать, что $\forall x \in V_1 Ax \in V_1$ и так как $x \in V_1 \mid x \perp e$, то покажем, что $Ax \perp e$

$$(Ax, e) = (x, Ae) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \stackrel{x \perp e}{=} 0$$

\square

Th. $A = A^*$ ($A: V^n \rightarrow V^n$), тогда $\exists e_1, \dots, e_n$ - набор собственных векторов A и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

(другими словами: A - диагоналируем)

Наводящие соображения.

$$\text{Ex. 1. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$Ix = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

Здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ - базис из собственных векторов, ортонормированный

$$\text{Ex. 2. } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$Ox = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$$

И здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, так как $0 \in U_\lambda$ и $\forall x \quad Ox = 0 \in U_\lambda$

Ex. 3. Поворот \mathbb{R}^2 на $\frac{\pi}{4}$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \right)^2 + \frac{1}{2} = 0 \text{ - вещественных корней нет}$$

□ □ e_1 - какой-либо собственный вектор \mathcal{A} ...

Th. $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n, \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \implies \exists \{e_i\}_{i=1}^n, e_1$ - собственные вектора \mathcal{A} и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

□ e_1 - собственный вектор \mathcal{A}

e_1 найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиального решение $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0 \xrightarrow{\mathcal{A} \text{ - самосопр.}} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора e_1 строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве V_1 \mathcal{A} действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$.

Для e_2 строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, V_3, V_4, V_5, \dots , в котором, найдя e_i , ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из e_i , который можно нормировать

□

Nota. Чтобы упорядочить построение базиса, в котором V_i может брать $\max \lambda_i$

Nota. Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализуется: Σ алг. крат. = n (степень уравнения), а Σ геом. крат. = $\dim\{e_1, \dots, e_n\} = n$

Разложение самосопряж. оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов \mathcal{A} (ортонорм.)

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x, e_1) e_1 + \dots + (x, e_n) e_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

Def. Оператор $P_i x = (x, e_i) e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

Свойства:

$$1) P_i^2 = P_i \text{ (более того } P_i^m = P_i)$$

$$2) P_i P_j = 0$$

$$3) P_i = P_i^* \quad ((P_i x, y) \stackrel{?}{=} (x, P_i y)) \iff (P_i x, y) = ((x, e_i) e_i, y) = (x, e_i)(e_i, y) = (x, (y, e_i) e_i) = (x, P_i y)$$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов \mathcal{A} , то

$$x = \sum_{i=1}^n P_i x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

$$\mathcal{A} x \stackrel{y=\sum_{i=1}^n (y, e_i) e_i}{=} \sum_{i=1}^n (\mathcal{A} x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \mathcal{A} e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \lambda_i e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i x$$

$$\iff \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \text{спектральное разложение } \mathcal{A}, \text{ спектр} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\}$$

Ех.

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1) e_1 + (y, e_2) e_2 = (\mathcal{A} x, e_1) e_1 + (\mathcal{A} x, e_2) e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$$

2.9. Ортогональный оператор

Mem. Орт. оператор $T : V^n \rightarrow V^n \stackrel{def}{\iff} \forall$ о/н базиса матрица T - ортогональная $T^{-1} = T^T$

Nota. Иначе, T - ортогональный оператор $\iff T^{-1} = T^* \implies T T^* = I$

Def. T - ортог. оператор, если $(T x, T y) = (x, y)$

Следствие: $\|T x\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

Nota. Ранее в теореме об изменении матрицы A при преобразовании координат T - ортогональный оператор

Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (док-во теоремы позволяет)

Диагонализация самосопряженного оператора:

Дана матрица A_f

1) Находим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

2) Находим e_1, \dots, e_n - ортогональный базис собственных векторов

3) Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса

4) Находим $T_{e \rightarrow f} A_f T_{f \rightarrow e} = A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного \mathcal{A} - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлениям

3. Билинейные и квадратичные формы

3.1. Билинейные формы

Def. $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B} : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

- 1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z) + \mu \mathcal{B}(y, z)$
- 2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x, y) + \mu \mathcal{B}(x, z)$

Ex.

- 1) $\mathcal{B}(x, y) \stackrel{\text{в } E_{\mathbb{R}}^n}{=} (x, y)$
 - 2) $\mathcal{B}(x, y) = P_y x$ - проектор x на y
- Матрица Б.Ф.

Th. $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис V_n , $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \square \quad \begin{matrix} u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n \\ v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n \end{matrix} \quad \mathcal{B}(u, v) &= \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}\left(e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)\right) \stackrel{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i, e_j) = b_{ij}}{=} \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b_{ij} \\ \square \end{aligned}$$

Nota. Составим матрицу из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Def. Если

- 1) $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$, то \mathcal{B} - симметричная
- 2) $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$, то \mathcal{B} - антисимметричная
- 3) $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$, то \mathcal{B} - косоимметричная (в \mathbb{C})

Def. $\text{rang} \mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rang} B$

Nota.

- 1) \mathcal{B} называется невырожденной, если $\text{rang} \mathcal{B} = n$
- 2) $\text{rang} \mathcal{B}_e = \text{rang} \mathcal{B}_{e'}$ (e, e' - различные базисы V^n), то есть $\text{rang} \mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \rightarrow e'$

Ex. $\mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{ск. пр.}}{=} (u, v)$

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2, \text{ тогда } \mathcal{B}(e_i, e_j) \stackrel{\text{об}}{=} b_{ij} = (e_i, e_j) \\ v = v_1 e_1 + v_2 e_2$$

Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

$$\text{Ex. } \begin{cases} u(t) = 1 + 3t \\ v(t) = 2 - t \end{cases}, \{e_i\} = (1, t), \mathcal{B}(u, v) = (u, v) = \int_{-1}^1 u v dt$$

$$\text{Тогда, } B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 dt & \int_{-1}^1 t dt \\ \int_{-1}^1 t dt & \int_{-1}^1 t^2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Nota. Особое значение имеют симметричные билинейные формы

Если рассмотреть матрицы симм. Б. Ф. как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица Б. Ф. диагонализируется

Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

3.2. Квадратичные формы

Def. Квадратичной формой, порожденной Б. Ф. $\mathcal{B}(u, v)$, называется форма $\mathcal{B}(u, u)$

Ex. Поверхность

$$u = (x, y), v = (x, y, z)$$

$$\mathcal{B}(u, u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$$

$$\mathcal{B}(v, v) = \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2$$

Met. Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$$

Nota. Заметим, что здесь коэфф. a_{ij} соответствуют матрице симметричной Б. Ф.:

$$B(v, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Если диагонализировать $B(v, v)$, то приведем уравнение поверхности к каноническому виду:

$$\mathcal{B}(v, v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

Def. Положительно определенная форма

Nota. Можно говорить о положительно определенном операторе $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$

1) Оператор \mathcal{A} называется положительно определенным, если

$$\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$$

2) \mathcal{A} называется положительным, если

$$\forall x \in V, \quad x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$$

Th. 1), 2) $\iff \forall \lambda_i$ - с. число \mathcal{A} , $\lambda_i > 0$

$\square \implies \lambda_i$ - с. число, e_i - соответствующий им с. вектора

$$\forall x \in V \quad x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^n c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum_{i=1}^n c_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum_{i=1}^n c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$$

Если $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$$\iff 1) \iff \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V \text{ в том числе } x = e_i \neq 0$$

$$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) = \lambda_i > 0 \quad \forall i$$

\square

Nota. $\det A$ инвариантен при замене базиса, $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$. Тогда $\exists \mathcal{A}^{-1}$

Th. Критерий Сильвестра

$$\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n \text{ - положительно определен } \iff \forall k = 1..n \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$\square \implies \mathcal{A}$ - пол. опред.

\mathcal{A} диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ собственных векторов. Тогда, \mathcal{A} диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}, k \leq n$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \stackrel{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$$

\iff ММИ

$$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$$

1) Для $k = 1$ \mathcal{A} - пол. опр.

2) \mathcal{A}_{n-1} - пол. опр. $\implies \mathcal{A}_n$ - пол. опр.

1) $\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \implies \mathcal{A}$ - пол. опр.

$$2) \mathcal{A} \text{ диагон.} \quad \mathcal{A}_e x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n \quad \text{Для } i \leq n-1 \text{ все } \lambda_i > 0$$

$$(\mathcal{A}x, x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum_{i=1}^{n-1} c_i e_i \right) = \overbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2}^{>0} + \lambda_n c_n^2 - \text{знак зависит от } \lambda_n$$

$$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \implies \lambda_n > 0 \implies (\mathcal{A}x, x) > 0$$

□

Ех. Поверхность: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathcal{B}(u, u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \quad \forall k$$

Положительная определенность - наличие экстремума

Def. Оператор \mathcal{A} называется отрицательно определенным, если $-\mathcal{A}$ - положительно определенный

$$\text{Nota. Для } -\mathcal{A} \text{ работает критерий Сильвестра: } \Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$$

Таким образом, \mathcal{A} - отриц. опред. $\iff \Delta_k$ чередует знаки

Nota. Аналогично операторы определяются положительно или отрицательно билинейные формы

$$\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j \stackrel{?}{=} \dots \text{ через оператор}$$

Так как $\mathcal{B}(u, v)$ и $\mathcal{B}(u, u)$ - числа, то \mathcal{B} - называется пол. опред., если $\mathcal{B}(u, v) > 0$

Nota. После приведения $\mathcal{B}(u, v)$ к каноническому виду, получаем

$$\mathcal{B}(u, u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

В общем случае λ_i любого знака

Но можно доказать, что количества $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$ постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (т. н. закон инерции квадратичной формы)

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Общие понятия

1* Постановка задачи

Pr. 1. Скорость распада радия в текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q . Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось Q_0

Коэффициент пропорциональности k найден эмпирически.

Решение. Скорость распада.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ \quad - \text{ ищем } Q(t)$$

$$dQ(t) = kQ dt$$

$$\frac{dQ(t)}{Q} = \frac{k dt}{1} \quad - \text{ «разделение переменных»}$$

содержит только Q

Внесем все в дифференциал:

$$d \ln Q = k dt = dk t$$

$$d(\ln Q - kt) = 0$$

Нашли семейство первообразных:

$$\ln Q - kt = \tilde{C}$$

$$\ln Q = \tilde{C} + kt$$

$$Q = e^{\tilde{C} + kt} \stackrel{e^{\tilde{C}} = C}{=} C e^{kt}$$

По смыслу $k < 0$, так как Q уменьшается. Обозначим $n = -k, n > 0$

Тогда $\boxed{Q(t) = C e^{-nt}}$

Получили вид закона распада. Выбор константы C определен Н.У. (начальными условиями):

$$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$$

Тогда, закон - $\boxed{Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}}$

Nota. Оба закона: общий $Q(t) = C e^{-nt}$ и частный $Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}$ - являются решением дифференциального уравнения:

$$Q'(t) = kQ \quad (\text{явный вид})$$

$$d \ln Q(t) - k dt = 0 \quad (\text{в дифференциалах})$$

Pr. 2 Тело массой m брошено вверх с начальной скоростью v_0 . Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

По II закону Ньютона:

$$m \vec{a} = m \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$a = \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = -g} \quad - \text{ ДУ}$$

Решение. $y''(t) = -g$

$$(y'(t))' = -g$$

$$y'(t) = - \int g dt = -gt + C_1$$

$$y(t) = \int (-gt + C_1) dt = \boxed{-\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = y(t)} - \text{общий закон}$$

$C_{1,2}$ ищем из Н.У.

В задаче нет условия для $y(t_0)$. Возьмем $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

$$\text{Таким образом, } \begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Найдем C_1 : $y'(t_0) = y'(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$

Найдем C_2 : $y(t_0) = y(0) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2 = C_2 = 0$

$$\text{Частный закон: } \boxed{y^*(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}}$$

2* Основные определения

Def. 1. Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ n -ого порядка
(*)

$$\text{Ex. } Q' + nQ = 0 \quad \text{и} \quad y'' + g = 0$$

Def. 2. Решением ДУ (*) называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает (*) в тождество

Def. 2'. Если $y(x)$ имеет неявное задание $\Phi(x, y(x)) = 0$, то $\Phi(x, y)$ называется интегралом уравнения (*)

Nota. Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

Def. 3. Кривая с уравнением $y = y(x)$ или $\Phi(x, y(x)) = 0$ называют интегральной кривой

$$\text{Def. 4. } \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} - \text{система начальных условий (**)}$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases} - \text{задача Коши (ЗК)}$$

Nota. Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

Th. $y' = f(x, y)$ - ДУ

$M_0(x_0, y_0) \in D$ - точка, принадлежащая ОДЗ

Если $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в M_0 , то ЗК

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $\varphi(x, y) = 0$, удовлетворяющее Н.У. (без док-ва)

Nota. Преобразуем ДУ: $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$

См. определения обыкн. и особых точек

Def. 5. Точки, в которых нарушаются условия теоремы называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

Def. 6. Общим решением ДУ (*) называется $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

Nota. $\Phi(x, y(x), C_1, \dots, C_n) = 0$ - общий интеграл

Def. 7. Решением (*) с определенными значениями C_1^*, \dots, C_n^* называется частным

Nota. Форма записи:

Разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$

Сведем к виду: $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \implies -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \implies$

$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ - форма в дифференциалах

4.2 ДУ первого порядка (ДУ₁)

Nota. Среди ДУ₁ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ

- 1) Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
- 2) Однородное уравнение (ОУ)
- 3) Уравнение полных дифференциалов (УПД)
- 4) Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ₁)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

1* УРП

Def. $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

Решение : $N(y)M(x) \neq 0$

$$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0 \quad y = y(x) - \text{неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)}$$

$$\left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = 0$$

Интегрируем по dx :

$$\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y' \right) dx = \text{const}$$

По свойствам интеграла:

$$\int \frac{m(x)}{M(x)} dx + \int \frac{n(y)}{N(y)} dy = \text{const}$$

$$\text{или: } \int \frac{m(x)}{M(x)} dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)} dy$$

$$\text{Ex. } xdy - ydx = 0$$

$$xdy = ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \tilde{C} = \ln |\tilde{C}x|$$

$$|y| = |\tilde{C}x|$$

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$$

Заметим, $x = y = 0$ - решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$$\underbrace{m(a)N(b)}_{=0}dx + \underbrace{n(b)M(a)}_{=0}dy = 0$$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

2* ОУ

Def. 1. Однородная функция n -ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

$$\text{Ex. } f = \cos\left(\frac{x}{y}\right), \cos\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \text{нулевой порядок однородности}$$

$$f = \sqrt{x^2 + y^2} - \text{первый порядок}$$

Def. 2. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y), Q(x, y)$ - однородные функции одного порядка - ОУ

Решение $P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$$Q(x, y) = x^k Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Тогда, $P\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0$.

Обозначим $\frac{y}{x} = t, \quad y' = \frac{dy}{dx} \stackrel{y=tx}{=} t'_x x + tx'_x = t'_x x + t$

$$P(1, t) + Q(1, t)y' = P(1, t) + Q(1, t)(t'_x x + t) = 0$$

$$t'_x x + t = -\frac{P(1, t)}{Q(1, t)} \stackrel{\text{обозн}}{=} f(t)$$

$$t'_x x = f(t) - t$$

$$\frac{dt}{dx} x = f(t) - t \neq 0$$

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} = \ln |Cx|$$

$$Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x, y) - \text{общий интеграл}$$

Если $f(t) - t = 0$, то пусть $t = k$ - корень, тогда $k = \frac{y}{x} \rightarrow y = kx$ - тоже решение

Ex. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$

$$\frac{y}{x} = t \quad y' = t'_x x + t$$

$$y = tx \quad dy = (t'_x x + t)dx$$

$$(x+tx)dx + (x-tx)(t'_x x + t)dx = 0$$

$$(1+t) + (1-t)(t'_x x + t) = 0$$

$$t'(1-t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$$

$$t'(1-t)x = t^2 - 2t - 1$$

$$\frac{(1-t)dx}{t^2 - 2t - 1} = \frac{dx}{x} - \text{УРП}$$

$$\frac{(1-t)dt}{(1-t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \frac{d((1-t)^2) - 2}{(1-t)^2 - 2} = -\frac{1}{2} \ln |(1-t)^2 - 2| = \ln \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 - 2}} = \ln |Cx|$$

$$\tilde{C}x = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 - 2}} \iff Cx^2 = \frac{1}{(1-t)^2 - 2} \iff Cx^2((1-t)^2 - 2) = 1$$

$$C((y-x)^2 - 2x^2) = 1$$

$$C(y^2 - 2xy - x^2) = 1$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = C - \text{гиперболы}$$

$$(t-1)^2 - 2 = 0 \quad \frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \quad y = (1 \pm \sqrt{2})x - \text{асимптоты}$$

3* Уравнение в полных дифференциалах

Def. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \text{УПД}$

Решение *Мет. Тн.* об интеграле НЗП $\exists \Phi(x, y) \mid d\Phi = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$$

$$Ex. (x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\Phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,0)}^{(x,0)} xdx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y)dy = \frac{x^2}{2} \Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{x^2}{2} +$$

$$xy - \frac{y^2}{2} + C - \text{общий интеграл}$$

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

4* ЛДУ

Def. $y' + p(x)y = q(x)$ - ЛДУ₁

$p, q \in C_{[a,b]}$

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Принцип: если удалось найти частное решение ДУ_{однор} (обозначим y_0), то общее решение ДУ_{неод} можно искать в виде $y = C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y' + p(x)y = 0$

Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y' + p(x)y = q(x)$

Ex. $\exists y(x) = x^2 e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ

А $y_0 = x e^{-x}$, тогда $y = x x e^{-x} = C(x) x e^{-x}$

То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y = y(x)$

Решение а) $y' + p(x)y = 0$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 - \text{УРП}$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln |\tilde{C}y| = - \int p(x)dx$$

$$\bar{y} = C e^{-\int p(x)dx} = C y_0$$

б) $y' + p(x)y = q(x)$

Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

$$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$$

$$C'(x)y_0 + C(x) \underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$$

$$C'(x) = \frac{q(x)}{y_0} = q(x) e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

Мет. $y' + p(x)y = q(x)$

1) $y' + p(x)y = 0$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$y_0 = e^{-\int p(x)dx}$$

$\bar{y} = Ce^{-\int p(x)dx}$ - общее решение ЛОДУ

2) $y' + p(x)y = q(x)$

$$y(x) = C(x)y_0$$

$$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$$

$C(x)(y_0' + p(x)y_0) = 0$ - так как y_0 - решение ЛОДУ

$$C'(x) = \frac{q(x)}{y_0}$$

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Окончательно, $y(x) = \left(\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int qe^{\int p(x)dx} = \bar{y} + y^*$

4.3. Существование и единственность решения

Мет. $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ **Th.** Если $\exists U(M_0) \mid \begin{cases} f(x, y) \in C_{U(M_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \text{огр. в } U(M_0) \end{cases}$, то в $M_0 \exists! y(x)$ - решение ДУ

Решение ДУ называется особым, если \forall его точке нарушается **Th.** существования и единственности, то есть через каждую точку проходит несколько интегральных кривых

Def. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ задает поле интегральных кривых, заполняющих область D

Соответственно точки D могут быть особыми или обыкновенными (выпол. усл. **Th.**)

Условия особого решения $P(x, y)$ или $Q(x, y) = 0$

Ex. 1.	$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$	\longrightarrow	$\sqrt{1-y^2}dx - dy = 0$
	Обычное решение		Особое решение:
	$\arcsin y = x + C$		$p = \sqrt{1-y^2} = 0$
	$y = \sin(x + C)$		$1 - y^2 = 0 \rightarrow y = \pm 1$
Ex. 2.	$\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx$	\longrightarrow	$y^{-\frac{2}{3}}dy - 3dx = 0$
	$y^{\frac{1}{3}} = x + C$		$dy - 3y^{-\frac{2}{3}} = 0$
	$y = (x + C)^3$		$P = 0 \implies y = 0$

4.4. ДУ высших порядков

Nota. Рассмотрим три типа интегрируемых ДУ

1* Непосредственно интегрирование

$$y^{(n)} = f(x)$$

$$\text{Решение: } y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2$$

Ex. См. Задачу 2 в начале

2* ДУ₂, не содержащие $y(x)$

$$F(x, y'(x), y''(x)) = 0$$

Замена $y'(x) = z(x)$, получаем:

$$F(x, z(x), z'(x)) = 0 - \text{ДУ}_1$$

$$\text{Ex. } (1+x^2)y'' + (1+y'^2) = 0 \quad y' = z$$

$$(1+x^2)z' + 1 + z^2 = 0$$

$$z' + \frac{1+z^2}{1+x^2} = 0 \iff z' = -\frac{1+z^2}{1+x^2} \iff \frac{dz}{1+z^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\arctan x = \arctan(-x) + C$$

$$z = \frac{-x + \tan(C)}{1 + x \tan C} = y'$$

$$y = \int \frac{-x + \tan(C)}{1 + x \tan C} dx = \dots$$

3* ДУ₂, не содержащие x

$$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$$

$$\text{Замена } y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \frac{dz(y(x))}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z'_y y' = z'z$$

$$\text{ДУ: } F(y, z(y), z'(y)) = 0$$

$$\text{Ex. } y'' + y'^2 = yy'$$

$$y' = z(y) \quad y'' = z'z$$

$$z'z + z^2 = yz \quad | : z \neq 0 \quad z = 0 \implies y = \text{const}$$

$$z' + z = y - \text{ЛДУ}$$

$$1) z' + z = 0$$

$$\ln |z| = -y + C$$

$$z = Ce^{-y}$$

$$2) C'(y)e^{-y} = y$$

$$C'(y) = ye^y$$

$$C(y) = \int ye^y dy = \int y de^y = ye^y - e^y + C_1$$

$$z(y) = (ye^y - e^y + C_1)e^{-y} = \underbrace{y-1}_{z^*} + \underbrace{C_1 e^{-y}}_{\bar{z}}$$

$$y' = C_1 e^{-y} + y - 1 \implies ? \dots$$

4.5. ЛДУ₂

4.5.1. Определения

Def. $a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y = f(x)$, где $y = y(x)$ - неизв. функция, - это ЛДУ_n

Nota. Если $n = 2$ - ЛДУ₂, $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x)$ - разрешенное относительно старших производных ЛДУ₂

Nota. Если $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$ - ЛДУ_n с постоянными коэффициентами

4.5.2. Решение ЛДУ₂ с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$\forall p, q \in \mathbb{R} \exists$ уравнение: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1\lambda_2 = q$ - корни

Назовем уравнение характеристическим (ХрУ) ХрУ

Nota. $\lambda_{1,2}$ могут быть только 1) вещественными различными; 2) вещественными одинаковыми ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ - корень 2-ой кратности); 3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Запишем ЛДУ₂ через $\lambda_{1,2}$:

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2y = f(x)$$

$$y'' - \lambda_1y' - \lambda_2y' + \lambda_1\lambda_2y = f(x)$$

$$(y' - \lambda_2y)' - \lambda_1(y' - \lambda_2y) = f(x)$$

Обозначим $u(x) = y' - \lambda_2y$

$$\text{Тогда ДУ: } \begin{cases} y' - \lambda_2y = u(x) \\ u' - \lambda_1u = f(x) \end{cases}$$

Решим: $u' - \lambda_1u = f(x)$

$$1) u' - \lambda_1u = 0$$

$$2) u' - \lambda_1u = f(x)$$

$$\frac{du}{u} = \lambda_1 dx$$

$$u(x) = C_1(x)e^{\lambda_1 x}$$

$$\bar{u} = C_1 e^{\lambda_1 x}$$

Далее $u(x)$ следует подставить в ДУ с $f(x)$

Поступим лучше, решим ЛОДУ₂ ($f(x) = 0$)

$$\text{Эта система } \begin{cases} y' - \lambda_2y = u(x) \\ u' - \lambda_1u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' - \lambda_2y = u(x) \\ u = C_1 e^{\lambda_1 x} \end{cases}$$

Решим $y' - \lambda_2y = C_1 e^{\lambda_1 x}$:

$$\begin{array}{ll} 1) y' - \lambda_2 y = 0 & 2) y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \bar{y} = C_2 e^{\lambda_2 x} & y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x} \\ & C_2'(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x} \\ & C_2'(x) = C_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2 x} \end{array}$$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Мет. $y'' + py' + qy = f(x)$, $p, q \in \mathbb{R}$

Для начала $y'' + py' + qy = 0$ - ЛОДУ₂

$$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$$

Рассмотрим три случая для $\lambda_{1,2}$

1) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ - случай различных вещественных корней

$$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$

Тогда, $y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C}_1 e^{\lambda_1 - \lambda_2 x} + C_2) e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ - случай вещ. кратных корней

$$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \implies C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 = \lambda_2$

3) $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ - случай комплексно сопряженных корней

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то аналогично первому случаю $y(x) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x + C_2 e} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ - решение ЛОДУ

Получим \mathbb{R} -решения:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (C_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)) = e^{\alpha x} (C_1 + C_2) \cos \beta x + e^{\alpha x} i (C_1 - C_2) \sin \beta x$$

$$Re y(x) = \underbrace{(C_1 + C_2) e^{\alpha x} \cos \beta x}_{u(x)}, Im y(x) = \underbrace{(C_1 - C_2) e^{\alpha x} \sin \beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$$

Так как $y(x)$ - решение ЛОДУ:

$$u'' + iv'' + pu' + ipv' + qu + iqv = 0$$

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta], \text{ то есть } z \in \mathbb{C} \text{ и } z = 0$$

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases}$$

Тогда можно считать решением $y(x) = u(x) + v(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ - решение ЛОДУ, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

Nota. Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)

Также еще не решено ЛНДУ₂

4.5.3. Свойства решений ЛДУ₂

Def. $Ly \stackrel{\text{def}}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$ - лин. дифф. оператор

$$L : E \subset C_{[a;b]}^2 \rightarrow F \subset C_{[a;b]}$$

Nota. Все определения лин. пространства, базиса, лин. независимости, лин. оболочки сохраняются

И ЛДУ₂ записывается как $Ly = 0$ - ЛОДУ₂, $Ly = f(x)$ - ЛНДУ₂

Th. 1. $\exists y_1, y_2$ - частные решение ЛОДУ, то есть $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$

Тогда $Ly = 0$, если $y = C_1y_1 + C_2y_2$

□

$$Ly = y'' + py' + qy = (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = 0$$

□

Def. y_1, y_2 - лин. нез. $\iff C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \implies \forall C_1 = 0 \iff \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

Мет. Для определения лин. независимости в Линале использовали rgA или $\det A$

Введем индикатор лин. независимости

Заметим, что если y_1, y_2 - лин. зав., то y'_1, y'_2 - лин. зав.

Def. $W \stackrel{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$ - определитель Вронского или вронскиан

Th. 2. y_1, y_2 - лин. зав. $\implies W = 0$ на $[a; b]$

□

$$\begin{matrix} y_2 = ky_1 \\ y'_2 = ky'_1 \end{matrix} \implies W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = 0$$

□

Th. 3. $x_0 \in [a; b], \quad \exists W(x_0) = W_0$

Тогда $W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b]$

$W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$

□

$\exists y_1(x), y_2(x)$ - реш ЛОДУ,

$$\begin{cases} Ly_1 = 0 & | \cdot y_2 \\ Ly_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1''y_2 + py_1'y_2 + qy_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + py_2'y_1 + qy_2y_1 = 0 \end{cases}$$

$$(y_1''y_2 - y_2''y_1) + p(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0$$

$$W'(x) + pW(x) = 0$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -pdx$$

$$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^x p dx}$$

$$W_0 = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} p dx} = C$$

$$\text{Тогда } W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^x p dx} \iff \begin{cases} W_0 = 0 \implies W(x) = 0 \\ W_0 \neq 0 \implies W(x) \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in [a; b]$$

□

Th. 4. y_1, y_2 - лин. нез. $\implies W(x) \neq 0$ на $[a; b]$

□ Докажем от противного

$$\exists x_0 \in [a; b] \mid W(x_0) = 0 \implies W(x) = 0 \forall x \in [a; b] \iff \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \forall x \in [a; b]$$

Можно поделить на y_1^2 , так как y_1, y_2 - лин. нез. Тогда $\frac{W}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \implies \frac{y_2}{y_1} = k \in \mathbb{R} \iff y_2 = ky_1$
- лин. зав., противоречие

□

Nota. Общее решение ЛОДУ₂ - это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку $(x_0, y_0) \in D$ и ему соответствует свой и единственный набор (C_1, C_2)

Th. 5. y_1, y_2 - лин. нез. решения ЛОДУ, тогда $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - общее решение ЛОДУ₂

□ Нужно убедиться, что через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит и только одна кривая $\bar{y}(x_0)$

$$\text{Зададим НУ: } \begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} \bar{y}(x_0) = C_1 y_{10} + C_2 y_{20} \\ \bar{y}'(x_0) = C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' \end{cases} - \text{задача Коши}$$

Знаем, что $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ - решение (просто, не общее)

$$\text{Тогда в } x_0 \begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = \bar{y}_0 \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' = \bar{y}_0' \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \bar{y}_0' \end{pmatrix} - \text{система крамеровского типа}$$

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 \iff \exists! (C_1, C_2) - \text{решение СЛАУ}$$

Таким образом через всякую x_0 проходит одна! кривая $\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

□

Nota. Вывод: если найдены какие-либо лин. нез. y_1, y_2 , то общее решение ЛОДУ₂ будет $C_1 y_1 + C_2 y_2 = \bar{y}$

Def. Такие $\{y_1, y_2\}$ называется ФСР ЛОДУ₂

Nota. Тогда, найденные решения ЛОДУ - все общие

- 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: ФСР $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$
- 2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: ФСР $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$
- 3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$: ФСР $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

Th. 6. Решение ЛНДУ $Ly = f(x)$

$\bar{y}(x) : L\bar{y} = 0$ - общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$ - частное решение ЛНДУ

Тогда $y(x) = \bar{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ

□ Lab. □

Мет. ЛДУ₂

- 1) Решим $y'' + py' + qy = 0$ (ХрУ \square : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$)

ФСР для всех случаев:

- 1* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$
- 2* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$
- 3* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \rightarrow \{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

$\bar{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$

- 2) Изначально $y'' + py' + qy = f(x)$

Доказали: $y(x) = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y} = \sum_{i=1}^n C_i y_i$ - вектора из ФСР, а y^* - частное решение (какое-либо) ЛНДУ

Nota. Рассмотрим два метода поиска y^* для ЛДУ₂

- 1* Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части
- 2* Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

1* **СПЧ**

Ex. $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x}$ (♡)

Наводящие соображения: Заметим, что $y = e^{ax}$ не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и $y = P_n(x)$, $y = A \cos bx + B \sin bx$

Имеет смысл искать частные решения (♡) в виде $y = Ae^{3x}$

$$(Ae^{3x})'' - 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$9A - 9A + 2A = 2 \implies A = 1, \text{ то есть } y^* = e^{3x}$$

Nota. Если правая часть содержит произведения $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$, то y^* ищем в виде ПЧ

Def. СПЧ: $f(x) = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$ (обозначим $k = a \pm ib$)

Частные случаи:

1) $f(x) = P_n(x)e^{ax} \quad (b = 0)$

2) $f(x) = A \cos bx + B \sin bx$ - гармоника $(a = 0, n = m = 0)$

3) $f(x) = P_n(x) \quad (a = b = 0)$

Метод: Решение ищется в виде $y^* = e^{ax}(\bar{P}_l \cos bx + \bar{Q}_l(x) \sin bx)$, где a, b - коэфф. СПЧ, $l = \max(m, n)$, \bar{P}_l, \bar{Q}_l - многочлены в неопр. коэфф

Ex. 1. $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} = e^{3x}(2 \cos 0x) \quad (k = 3 \pm 0 = 3)$

$y^* = e^{3x}(\bar{P}_{l=0}(x) \cos 0x) = e^{3x} \cdot A$

Ex. 2. Однако!

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \quad (!)$

СПЧ: $e^{2x} = e^{2x}(1 \cos 0x + B \sin 0x) \quad k = a \pm ib$

$$\left. \begin{aligned} y^* &= Ae^{2x} \\ y^{*'} &= 2Ae^{2x} \\ y^{*''} &= 4Ae^{2x} \end{aligned} \right\} \text{ДУ} \longrightarrow \begin{aligned} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} &= e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A &= 1 \\ 0A &= 1 \end{aligned} \quad - \text{😱}$$

Нельзя найти A

Решим ХрУ 😱 : $\lambda_2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Внимание! Число k , соответствующее СПЧ, равно ХрУ \square

Исследуем ситуацию на примере СПЧ $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

Проблема $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$

ХрУ \square : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \implies \lambda_{1,2}$ - корни

Ищем $y^* = \bar{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*'} = \bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\bar{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*''} = \bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\bar{P}_n(x)e^{ax}$

Получаем:

$$\bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\bar{P}_n(x)e^{ax} + (\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\bar{P}_n(x)e^{ax})p + \bar{P}_n(x)e^{ax}q$$

$$\bar{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a+p)\bar{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2+pa+q)\bar{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$$

$$\bar{P}_{n-2}(x) + (2a+p)\bar{P}_{n-1}(x) + (a^2+pa+q)\bar{P}_n(x) = P_n(x)$$

Заметим, что если a - корень ХрУ \square ; то есть $a \pm ib = a = k = \lambda_i$ (пусть 1-ой кратности), то $a^2 + pa + q = 0$ и степень левой части понижается до $n-1$

Если a - корень ХрУ \square 2-ой кратности, то есть $a^2 + pa + q = \left(a + \frac{p}{2}\right)^2 = 0 \iff 2a + p = 0$, то степень левой части понижается на 2

Чтобы сделать уравнение для \bar{P}_n решаемым, домножим y^* на x^r , где r - число совпадений $k = a \pm ib$ с корнем ХрУ λ_i (или кратность λ_i , с которым совпадает k)

Метод (окончательно): $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$, $\lambda_{1,2}$ - корни ХрУ \square ;

$$k = a \pm ib$$

$$y^* = x^r e^{ax} (\bar{P}_l(x) \cos bx + \bar{Q}_l(x) \sin bx), \quad l = \max(m, n)$$

Обобщение для ЛДУ_n

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$$

$$\text{ХрУ } \square: \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

Правило построения ФСР для \bar{y} - общее решение однородного ДУ

1) Всякому λ_i - одиночному \mathbb{R} -корню ХрУ сопоставляем $y_i = e^{\lambda_i x}$

2) \mathbb{R} -корню λ кратности s сопоставляем набор $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}\}$

3) Всякой одиночной паре $\lambda_{j1, j2} = \alpha_j \pm i\beta_j$ соответствует пара $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

4) \mathbb{C} -паре $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности t соответствует набор $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{t-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{t-1} e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

Nota. количество векторов y_i в ФСР равно порядку n ДУ

СПЧ $y^* = x^r e^{ax} (\dots)$, где r - кратность \mathbb{R} -корня или \mathbb{C} -пары, с которыми совпадает $k = a \pm ib$

Ex. Вернемся к $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

$$\left. \begin{aligned} y^* &= Ax^1 e^{2x} \\ y^{*'} &= Ae^{2x} 2Ax e^{2x} \\ y^{*''} &= 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Ax e^{2x} \end{aligned} \right\} \rightarrow (4 - 6 + 2)Ax e^{2x} + (4 - 3)Ae^{2x} = e^{2x} \quad A = 1$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{2x} + x e^{2x}$$

2* Лагранжа

Мет. ЛДУ₁: $y' + py = f(x)$

1) ЛОДУ - $y' + py = 0 \rightarrow \bar{y} = Cy_0$ - ФСР

2) ЛНДУ - $y(x) = C(x)y_0 \rightarrow C'(x)y_0 = f(x) \rightarrow C(x)$

Nota. Введем аналогичный метод для ЛДУ₂

1 этап) $y'' + py' + qy = 0$ - ЛОДУ, $\lambda_{1,2}$ - корни, соответствующие ФСР $\{y_1, y_2\}$

$$\bar{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

2 этап) Варьируем C_1 и C_2 , но теперь нужны два условия для их определения. Одним является ДУ

Ex. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3x}$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + y^*$$

$$(g(x) + C_1)e^x + (h(x) + C_2)e^{2x} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + g(x)e^x + h(x)e^{2x}$$

Подберем g, h : $\frac{e^{2x}}{g}e^x + \frac{e^x}{h}e^{2x} = e^{3x}$ или $\frac{-e^{2x}}{g}e^x + \frac{2e^x}{g}e^{2x} = e^{3x}$

Заметим, что $C_1'(x)$ во втором случае $g' = -2e^{2x}$, а $C_2' = 2e^x$

Тогда $C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = -2e^{3x} + 2e^{3x} = 0$

Nota. Подставим $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ в ДУ

Метод $y'(x) = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2'$

Требуем $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$

$y''(x) = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2''$

$C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2'' + pC_1(x)y_1' + pC_2(x)y_2' + qC_1(x)y_1 + qC_2(x)y_2 = f(x)$

$C_1(x)Ly_1 + C_2(x)Ly_2 + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$
 $\quad \quad \quad = 0 \quad \quad \quad = 0$

Итак, Система для определения $C_1(x), C_2(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=W} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Крамер}} \begin{cases} C_1'(x) = \frac{W_1}{W} \\ C_2'(x) = \frac{W_2}{W} \end{cases}$

Nota. Обобщив метод на n -ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

? Доказать, что $\bar{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ

Th. $Ly = f(x), y = \bar{y} + y^*$ - решение $Ly = f(x)$.

Тогда $\bar{y} + y^*$ - общее решение

□

Правда ли, что найдется единственный набор констант C_1, \dots, C_n , которое удовлетворяет НУ

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \end{cases}$$

Так как $\bar{y} + y^*$ - решение, то $\begin{cases} y_0 = C_1y_{01} + C_2y_{02} + \dots + C_ny_{0n} + y_0^* \\ y_0' = C_1y_{01}' + \dots + y_0^{*'} \end{cases} \iff \begin{cases} y_0 - y_0^* = \sum C_i y_{0i} \\ y_0' - y_0^{*'} = \sum C_i y_{0i}' \end{cases} \iff$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{01} & y_{02} & \dots & y_{0n} \\ y'_{01} & y'_{02} & \dots & y'_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{01}^{(n)} & y_{02}^{(n)} & \dots & y_{0n}^{(n)} \end{pmatrix}}_{\det W \neq 0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - y_0^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Таким образом система имеет единое решение (C_1, \dots, C_n) , которое удовлетворяет НУ

□

Th. $Ly = f_1(x) + f_2(x)$

Пусть $Ly_1^* = f_1(x)$ и $Ly_2^* = f_2(x)$, тогда $Ly^* = f_1 + f_2$, где $y^* = y_1^* + y_2^*$

□

$Ly^* = L(y_1^* + y_2^*) = Ly_1^* + Ly_2^* = f_1(x) + f_2(x)$

□

4.6. Системы ДУ

Def. Набор функций y_1, \dots, y_n .

Система дифференциальных уравнений, связывающие эти функции, то есть

$\{F_1(x_1, y_1, \dots, y_n, \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}) = 0\}$ называется системой ДУ

Механический смысл

\mathbb{R}^n - фазовое пространство - пространство состояний системы

t - время, x_i - координаты точки M в \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, \{x_i\}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(t, \{x_i\}) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, \{x_i\}) \end{cases} \quad \text{СДУ описывает состояние исследуемой системы во времени,}$$

причем $\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ - скорости

Nota. Такая система называется нормальной, то есть все уравнения разрешены относительно производных

Nota. Всякое ДУ _{n} можно рассмотреть как СДУ: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \iff y = y_1(x), y' = y_2(x, y_1), \dots$

Можно сделать и обратное - свести СДУ к ДУ _{n}

Метод исключения Рассмотрим на примере СДУ 2-ого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y, t) \\ \frac{dx}{dt} = g(x, y, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{y} = f(x, y, t) \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial f}{\partial y} f \\ \dot{x} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Свели СДУ к ДУ₂: $\ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial f}{\partial y}f$

Nota. Чтобы свести к ДУ СДУ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ нужно исключить $n-1$ выражение \dot{x}_i , для этого взять $\frac{d^{n-1}\dot{x}_1}{dt^{n-1}}$

Таким образом общий порядок СДУ (сумма порядков старших производных) будет равен порядку ДУ

$$Ex. \begin{cases} \dot{y} = y + 5x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{x} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5(-y - 3x) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 15x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 3(\dot{y} - y) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \iff \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$$

ХрУ 🐼: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \rightarrow \bar{y} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Найдем $x(t)$ из 1-ого ДУ: $\dot{\bar{y}} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^{-t}((C_2 - C_1) \cos t - (C_1 + C_2) \sin t)$

$5x = \dot{\bar{y}} - \bar{y} = e^{-t}((C_2 - 2C_1) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t)$

$$\begin{cases} y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x(t) = \frac{1}{5}e^{-t}((C_2 - 2C_1) \cos t - (C_1 + 2C_2) \sin t) \end{cases}$$

Nota. Метод исключения сохраняет линейность, поэтому линейная СДУ (с постоянн. коэфф.) сводится к ЛДУ (с пост. коэфф.)

Nota. СДУ из *Ex.* не содержала t в явном виде. Такие СДУ называются автономными

Матричный метод

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $(y_1, \dots, y_n) = Y$, $\{a_{ij}\} = A_{\text{(матрица СДУ)}}$

Тогда СДУ запишется $Y' = AY$ (однородная СДУ, так как нет $f(x)$)

$\square \lambda_1, \dots, \lambda_n$ - собственные числа A и h_i - собственный вектор для λ_i

Будем искать решение Y в виде $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ: $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} \underbrace{A h_i}_{= Y} = AY$

$$Ex. \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 8x + 3y \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{array} \right| = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$$

$$h_1: \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h_2: \begin{pmatrix} [cc|c] - 4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c] - 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t}$$

$$\text{Задача Коши: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -2C_1 + 4C_2 \end{pmatrix} \rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}, C_2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Итак } \begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{5t} \end{cases}$$

Решения в *Ех.* линейно независимы (то есть $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$, где $Y_1 = h_1 e^{\lambda_1 t}$), так как $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Для кратных собственных \mathbb{R} -чисел нельзя построить базис из h_i , а чтобы составить общее решение СДУ, нужно n линейно независимых решений Y_i (ФСР). В этом случае используют жорданов базис (см. литературу)

Для $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ можно искать решения в том же виде, но потом свести к вещественным функциям (см. литературу 🤔)

4.7. Теория устойчивости (элементы)

Наводящие соображения:

Возьмем грузик, подвешенный на стержне. Когда он находится снизу, он находится в устойчивом равновесии, но когда сверху - в неустойчивом

$$\text{Def. СДУ}_2: \begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y) \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad \text{и НУ}_1: \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{и НУ}_2: \begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

Решение СДУ $x = x(t), y = y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \rightarrow +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \begin{matrix} \forall x, y \\ \left\{ \begin{array}{l} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{array} \right. \end{matrix} \quad \forall t > 0 \left\{ \begin{array}{l} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\text{Или } \begin{cases} \Delta x(t) \rightarrow 0 \\ \Delta y(t) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ и } \begin{cases} \Delta x_0 \rightarrow 0 \\ \Delta y_0 \rightarrow 0 \end{cases}$$

Nota. Малое воздействие приводит к малым отклонениям от исходной траектории

Nota. Обычно рассматривают отклонение решений от нулевого, то есть $x_0 = 0$
 $y_0 = 0$

Ex. $\dot{y} + y = 1$, НУ: $y(0) = 1, \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ (малое отклонение)

$$\begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow C = 0 \quad \begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \rightarrow C = \tilde{y} - 1$$

$\tilde{y} - y = (\tilde{y}_0 - y)e^{-t} + 1 - 1 = (\tilde{y}_0 - 1)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ - устойчива. 🤖

Классификация точек покоя. Будем рассматривать СДУ (автономную)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = kx + my \end{cases} \quad \dot{X} = AX \implies \det(A - \lambda E) = 0$$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Заметим, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями (подстановка)

Причем, точка $(0, 0)$ - особая, так как СДУ $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{kx + my}{ax + by}$

Рассмотрим различные случаи значений $\lambda_{1,2}$:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^-$

Тогда решения СДУ будут $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dot{x}(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

Подставляем в первое уравнение, из него получаем $y(t) = \frac{1}{b}(C_1(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t})$

Введем Н.У. $y(0) = y_0, x(0) = x_0$

$$\text{Решение З.К.: } \begin{cases} x(t) = \frac{ax_0 + by_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{1}{b} \left(\frac{ax_0 + by_0 - x_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 - a) e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0 \lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 - a) e^{\lambda_2 t} \right) \end{cases}$$

$$\text{При } t \rightarrow +\infty |e^{\lambda_i t}| < 1 \text{ и } \forall \varepsilon > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \implies \begin{cases} |\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\tilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$, то есть $(0, 0)$ - устойчивое решение

$$\text{Ex. 1. } \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{dx}{x} = -dt \\ \frac{dy}{y} = -2dt \end{cases} \iff \begin{cases} x = C_1 e^{-t} \\ y = C_2 e^{-2t} \end{cases} + \text{Н.У.} \implies \begin{cases} x = x_0 e^{-t} \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

Изобразим интегральные кривые (фазовый портрет системы): СДУ $\implies \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \implies y = Cx^2$

В этом примере получается семейство парабол, при $t \rightarrow +\infty$ они все стремятся к $(0, 0)$ - устойчивому узлу

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$$\text{Ex. 2. } \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 e^t \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$$

Фазовый портрет $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{x} \implies y = \frac{C}{x^2}$

Гиперболы при $t \rightarrow \infty$ стремятся к точкам $(\pm\infty, 0)$ и образуют так называемое седло неустойчивости

$$3) \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$$

$$\text{Ex. 3. } \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t) \\ y(t) = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \end{cases} \quad - \text{устойчивая}$$

Фазовый портрет: перейдем в ПСК $\begin{matrix} x = \rho \cos \varphi & x_0 = A \cos \varphi_0 \\ y = \rho \sin \varphi & y_0 = A \sin \varphi_0 \end{matrix}$

$$\text{Тогда } \begin{cases} \rho \cos \varphi = e^{-t} = A \cos(t - \varphi_0) \\ \rho \sin \varphi = e^{-t} = A \sin(t - \varphi_0) \end{cases} \implies \rho^2 = A^2 e^{-2t} \implies \rho = A e^{-t}$$

Выразим t через φ : $\tan \varphi = \tan(t - \varphi_0)$

Получаем $\rho = A e^{-(\varphi + \varphi_0 + \pi n)}$

Получается семейство логарифмических спиралей ($\rho = A e^\varphi$)

$$3') \lambda_{1,2} = \pm i\beta (\alpha = 0)$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \beta t + y_0 \sin \beta t \\ y(t) = y_0 \cos \beta t - x_0 \sin \beta t \end{cases}$$

Фазовый портрет - семейство соосных и концентрических эллипсов. Центр этих эллипсов устойчивый

$$4) \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$$

Lab.

$$1. \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Обобщим. Если хотя бы один $\lambda \neq 0$ и лежит слева от $Im\lambda$, то решение устойчивое