

Лекция 3

Условная вероятность

Условная вероятность $P(A|B)$ (или $P_B(A)$) - вероятность события A , вычисленная в предположении, что событие B уже произошло

Ex. Бросается кость один раз, известно, что выпало больше 3 очков. Найти вероятность того, что выпало четное число очков

A - выпало четное число очков

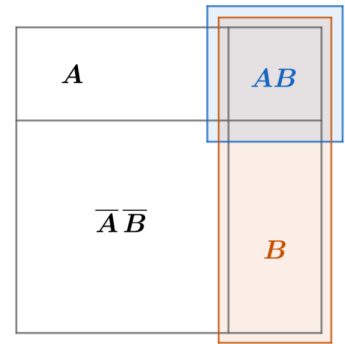
B - выпало больше трех очков

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; |\Omega| = 6; A = \{2, 4, 6\}; B = \{4, 5, 6\}$

$$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Интерпретация с помощью геометрической вероятности:

$$P(A|B) = \frac{S_{AB}}{S_B} = \frac{\frac{S_{AB}}{S_{\Omega}}}{\frac{S_B}{S_{\Omega}}}$$



Def. Условной вероятностью события A при условии, что имело место событие B , называется величина $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Ex. Известно, что среди населения 1% воров. В комнате, где находилось 10 гостей, у хозяина пропал кошелек. Какова вероятность того, что произвольный гость является вором.

A - гость является вором $P(A) = 0.01$

B - пропал кошелек (хотя бы один вор среди гостей есть)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{1 - P(\bar{B})} = \frac{P(A)}{1 - 0.99^{10}} = \frac{0.01}{1 - 0.99^{10}} = 0.105$$

Формула умножения:

В качестве следствия условной вероятности получаем:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \implies P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Общий случай:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

База индукции $P(AB) = P(B)P(A|B)$ Шаг индукции: пусть верно при $n - 1$:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_{n-1}|A_1 A_2 \dots A_{n-2})$$

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}) \cdot P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) =$$

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

□

Ех. Студент выучил 1 билет из n , в группе n студентов. Каким по очереди ему нужно зайти, чтобы вероятность сдать экзамен была наибольшей

Пусть A_i - билет, вытянутый на i -ом шаге ($1 \leq i \leq n$)

A - студент сдал экзамен

$$P(A) = P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i-1}} \cdot A_i) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{n-(i-1)}{n-(i-2)} \cdot \frac{1}{n-(i-1)} = \frac{1}{n}$$

Полная группа событий

Def. События $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ образуют полную группу событий, если они попарно несовместны и содержат все возможные элементарные исходы

$$H_i \cap H_j = \emptyset \quad \forall i, j \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$$

Следствие: $\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) = 1$

Th. Формула полной вероятности. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ - полная группа событий. Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

□

$$P(A) = P(\Omega A) = P((H_1 + H_2 + H_3 + \dots)A) = P(H_1 A + H_2 A + H_3 A + \dots) = [H_i \cdot A \cdot H_j \cdot A = \emptyset \cdot A] =$$

$$P(H_1 A) + P(H_2 A) + \dots = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

□

Th. Формула Байеса. $\sqsupset H_1, H_2, \dots, H_n$ - полная группа событий, и известно, что событие A уже произошло

Тогда $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)}$$

Ех. 1. В первой коробке 4 белых и 2 черных шара, во второй 1 белый и 2 черных. Из первой коробки во вторую переложили 2 шара, затем из второй коробки достали шар. Какова вероятность того, что он оказался белым

H_1 - переложили 2 белых H_2 - 2 черных

H_3 - разного цвета

A - из второй коробки достали белый шар

$$P(H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} + \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{75} + \frac{1}{75} + \frac{16}{75} = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}$$

Ех. 2. Вероятность попадания первого стрелка в цель 0.9, а второго 0.3. Наугад вызванный стрелок попал в цель. Какова вероятность того, что это бы первый стрелок?

H_1 - вызван первый стрелок

H_2 - вызван второй стрелок

A - стрелок попал

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_1) = 0.9 \quad P(A|H_2) = 0.3$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.9}{\frac{1}{2} \cdot 0.9 + \frac{1}{2} \cdot 0.3} = \frac{9}{9+3} = 0.75$$

Ех. 3. По статистике раком болеет 1% населения. Тест дает правильный результат в 99% случаев. Тест оказался положительный. Найти вероятность того, что человек болен.

H_1 - человек болен

H_2 - человек здоров

A - анализ положительный

$$P(H_1) = 0.01$$

$$P(H_2) = 0.99$$

$$P(A|H_1) = 0.99$$

$$P(A|H_2) = 0.01$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{0.01 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01} = \frac{1}{2} = 0.5$$




Допустим, что второй независимый с первым анализ также оказался положительным. Найти вероятность того, что человек болен.

$$P(H_1) = 0.01 \quad P(H_2) = 0.99$$

$$P(AA|H_1) = 0.99^2 \quad P(AA|H_2) = 0.01^2$$

$$P(H_1|AA) = \frac{0.01 \cdot 0.99^2}{0.01 \cdot 0.99^2 + 0.99 \cdot 0.01^2} = \frac{0.99}{0.99 + 0.01} = 0.99$$

Интуитивно вероятность $\frac{1}{2}$ может поддаваться непониманию, однако можно рассуждать так: пусть в городе живут 10000 человек, из них 100 болеют, а у 99 из них положительный анализ; у других 9900 положительный анализ всего лишь у 99, отсюда выходит $\frac{1}{2}$

Ех. 4. В телевизионной студии 3 двери  , за одной из них приз  . Игрок выбрал наугад одну из 3 дверей, после чего ведущий открывает одну из двух оставшихся дверей и показывает, что там приза нет  . После чего предлагает игроку поменять свой выбор. Стоит ли игроку соглашаться?

H_1 - игрок угадал

H_2 - игрок не угадал

A - ведущий открыл дверь без приза

$$P(H_1) = \frac{1}{3} \quad P(H_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(A|H_1) = 1 \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Но это неправильно, так как действия ведущего неслучайны - он всегда откроет дверь без приза

В этом случае, если мы гипотетически выберем 300 дверей, в 100 случаях мы отгадаем, ведущий откроет любую дверь без приза; но в 200 случаях мы не отгадаем, ведущий откроет вторую дверь без приза, и в этом случае мы сможем поменяться на дверь с призом, отсюда шанс $\frac{2}{3}$, если мы поменяем свой выбор

Ех. 5. Вероятность того, что в семье с детьми ровно k детей, равна $\frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots$. Какова вероятность того, что в семье один мальчик, если известно, что нет девочки? Рождения мальчиков и девочек равновероятны.

H_i - в семье i детей ($1 \leq i < \infty$)

$$P(H_i) = \frac{1}{2^i}$$

A - в семье нет девочки

$$P(A|H_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A|H_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A|H_i) = \frac{1}{2^i}$$
$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{2^i}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{1-\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4} = 0.75$$