

10. Теорема Гаусса

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$d\Phi = \vec{E} d\vec{s} = E_n ds, \text{ где } E_n = E \cos \alpha$$

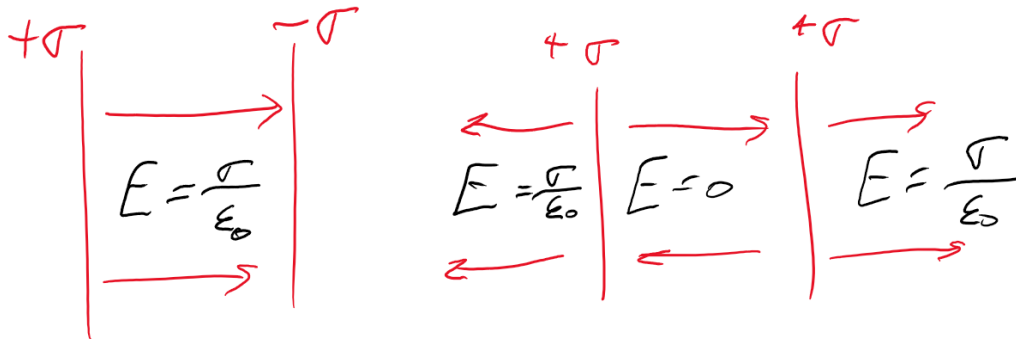
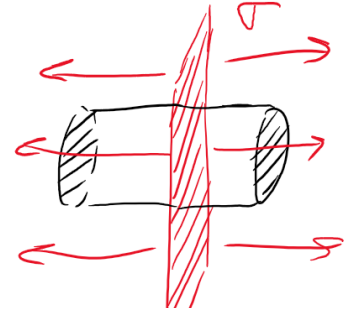
Ex. 1. Однородная равномерно заряженная бесконечная плоскость,

σ

$$\Phi = 2\Phi_{\text{осн}} + \cancel{\Phi_{\text{бок}}}^0 = 2\Phi_{\text{осн}} = 2E \cdot S_{\text{осн}} = \frac{a}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Если плоскости противоположно заряжены и расположены друг против друга, то получаем конденсатор. Если плоскости имеют одноименный заряд, то между ними напряженность равна нулю



Ex. 2. Цилиндрическая нить/стержень с плотностью заряда τ

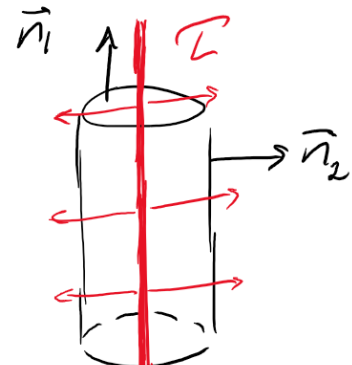
Сделаем цилиндрическую поверхность вдоль стержня

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E dS_{\text{бок}} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{n}_2 \uparrow \vec{E}$$

$$\text{Так как } E = \text{const на расстоянии } r, E = \frac{q}{2\pi r h \epsilon_0} = \frac{h\tau}{2\pi r h \epsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi r \epsilon_0}$$



Ex. 3. Сфера (пустотелая)

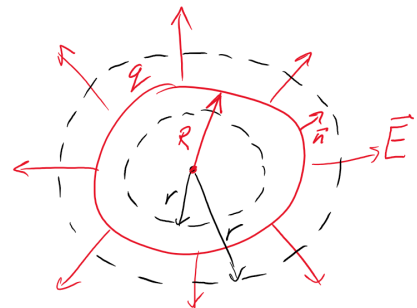
$$\text{Выбираем сферу радиуса } r < R, \text{ для нее } \oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = 0$$

$\vec{E} = 0$ внутри сферы, так как внутри заряда нет

Выберем сферу радиуса $r > R$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$



Ex. 4. Шар (полнотелый)

При $r \geq R$ получаем аналогичную сфере ситуацию: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

При $r < R$ $E \cdot S = \frac{q'}{\epsilon_0}$ (q' - заряд внутри поверхности)

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q'}{V'} \implies q' = \frac{q \cdot r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{q \cdot r^3}{R^3} \cdot \frac{1}{4\pi r^2 \cdot \epsilon_0} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Так как \vec{E} - поле векторное, то к нему можно применить набла-оператор. Тогда получаем:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div} \vec{E}$ - дивергенция поля

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rot} \vec{E}$ - ротор поля

По теореме Гаусса:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho \rangle V$$

При $V \rightarrow 0$

$$\frac{1}{V} \oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho \rangle$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \text{div} \vec{E} - \text{дивергенция поля}$$

Если в точке A $\text{div} \vec{E} < 0$, то в точке A *сток* поля. Если $\text{div} \vec{E} > 0$, то говорят, что в точке *исток* поля