

## Содержание

<b>§1. Ряды</b>	<b>2</b>
1. Числовые ряды. Определения	2
2. Свойства числовых рядов	3
3. Условия сходимости рядов	6
3.1. Необходимое	6
3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)	6
3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)	6
4. Знакопеременные ряды	10
<b>§2. Функциональные ряды</b>	<b>13</b>
1. Определения	13
2. Степенные ряды	16
3. Ряд Тейлора	18
3.1. Стандартные разложения элементарных функций	19
3.2. Приложения	21
4. Ряды Фурье	21
<b>Х. Программа экзамена в 2024/2025</b>	<b>25</b>

## §1. Ряды

### 1. Числовые ряды. Определения

*Mem.* Числовая последовательность:  $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$

*Ex. 1.* Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:  $u_n = bq^n$ ,  $\frac{1}{2^n} \stackrel{n=0,1,\dots}{=} \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$

*Ex. 2.*  $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

**Def.**  $\{u_n\}$  - последовательность

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$  называется числовым рядом

*Nota.* Начальное значение  $n$  произвольно (целое)

*Ex.*  $u_n = \frac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$

$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$

*Nota.*  $u_n$  называется общим членом ряда

*Nota.* Существует ли сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и в каком смысле?

*Ex. 3.*  $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$  - существует, но бесконечная

*Ex. 4.*  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{cases} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{cases}$

*Ex. 5.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

**Def.** Частичная сумма ряда  $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n u_k$

*Nota.* Последовательность частичных сумм -  $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

*Ex.*  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \frac{3}{2} \quad S_3 = \frac{7}{4} \quad S_4 = \frac{15}{8}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$ , но проблема заключается в том, что бы найти формулу для  $S_n$

**Def.** Если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  называют сходящимся, а  $S$  называют суммой ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

*Nota.* В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный):  $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^n bq^k = b(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Исследуем предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ :

$$|q| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1}) = \frac{b}{1 - q}$$

$$|q| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty (q^n \rightarrow \infty)$$

$$|q| = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b \frac{0}{0} ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$$

$$q = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} b(-1)^n - \text{расходится (из четвертого примера)}$$

Lab. Доказать при  $q = -1$  по def ( $S_n = ?$ )

## 2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

**Th. 1.** Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \text{ одновременно сходятся или расходятся}$$

□

$$S_n^u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$

$$S_n^v = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \quad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$$

$$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v$$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

**Th. 2.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда  $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

**Th. 3.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$  - сходится

□ По свойству пределов  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm \sigma$  □

*Nota.* Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

*Ex.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ , но:  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , а  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$  расходятся

*Nota.* Докажем расходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

*Ex.* Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как  $u_n \geq v_n$ , то  $S_n \geq \sigma_n$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \rightarrow \infty \implies S_n \rightarrow \infty$$

**Th. 4.** Если ряд сходится к числу  $S$ , то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна  $S$

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = S$ , где  $S_n^{(k)}$  - подпоследовательность  $S_n$

□

$$Ex. \text{ Было } \sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \text{ так как ряд расходится}$$

*Nota.* В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2} S \quad ?!$$

*Nota.* Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

*Nota.* Сходящиеся ряды допускают умножение, но почленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

$$\text{Тогда } \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$$

### 3. Условия сходимости рядов

#### 3.1. Необходимое

$$\text{Th. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

□

*Nota.* Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

$$\text{Ex. } \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \neq 0$$

#### 3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

*Мет.* Критерий Коши для последовательности:

$$\{x_n\} \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

**Th.** (без док-ва)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad \begin{matrix} |u_{n+1} + \dots + u_m| < \varepsilon \\ |S_m - S_n| < \varepsilon \end{matrix}$$

*Nota.* Хвост ряда попадает в  $\varepsilon$ -трубу

*Nota.* Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличие от признаков

#### 3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)

### 5. Признак Коши (интегральный)

Далее  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  - исследуемый ряд,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  - вспомогательный (уже исследован на сходимость), для простоты  $v_n, u_n > 0$  (для отрицательных доказывается аналогично)

#### Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)

а)  $\exists 0 < u_n \leq v_n$ . Тогда  $\sum v_n$  сходится  $\implies \sum u_n$  сходится

б)  $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$ . Тогда  $\sum v_n$  расходится  $\implies \sum u_n$  расходится

□

а) Строим частичные суммы:

$$\sum v_n \text{ сходится} \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

$S_n, \sigma_n$  возрастают и обе ограничены числом  $\sigma$

Следовательно  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq \sigma$

Аналогично пункт б)

□

#### Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \begin{cases} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{cases}$$

□

По определению предела

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - q \right| < \varepsilon \iff q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)v_n < u_n < (q + \varepsilon)v_n$$

а) Если  $\sum v_n$  сходится, то из правой части неравенства:  $0 < u_n < (q + \varepsilon)v_n$

По признаку сравнения  $\sum u_n$  также сходится

б) Если  $\sum v_n$  расходится, то из левой части неравенства:  $0 < (q - \varepsilon)v_n < u_n$

Тогда по пункту б) Th. 1.  $\sum u_n$  расходится

□

*Nota.* При  $q = 0$  можем говорить, что  $u_n$  - бесконечно малая высшего порядка, чем  $v_n$ , а значит, если ряд  $v_n$  сходится, то  $u_n$  сходится

$$\begin{aligned} \text{Ex. 1. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится} \\ \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится по признаку сравнения} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex. 2. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится} \end{aligned}$$

Начиная с некоторого  $n_0$   $n! > 2^n$ . Тогда  $u_n < v_n$  при  $n > n_0$ , по признаку сравнения  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  сходится

$$\text{Ex. 3. } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n}$$

*Nota.* Члены рядов  $u_n$  и  $v_n$  - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если  $u_n$  и  $v_n$  одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$$u_n = \arcsin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

**Th. 3.** Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{исследуемый, } \exists \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{а) } 0 \leq \mathcal{D} < 1 \implies \sum u_n \text{ сходится}$$

$$\text{б) } \mathcal{D} > 1 \implies \sum u_n \text{ расходится}$$

$$\text{в) } \mathcal{D} = 1 \implies \text{ничего не следует, требуется другое исследование}$$

□

$$\text{а) По определению предела } \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad 0 \leq \mathcal{D} < 1 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D} \right| < \varepsilon \iff \mathcal{D} - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$$

Так как  $0 \leq \mathcal{D} < 1$ , можно втиснуть число  $r$  между  $\mathcal{D}$  и 1:  $\mathcal{D} < r < 1$

Положим  $\varepsilon = r - \mathcal{D}$ , то есть  $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$  для  $\forall n > n_0$ , где  $n_0 = n_0(\varepsilon), \varepsilon = r - \mathcal{D}$



$$u_{n_0+1} < ru_{n_0}$$

$$u_{n_0+2} < ru_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$$

$$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1} + u_{n_0}}_k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены  $v_m < r^l u_{n_0}$ ;  $u_{n_0}$  - фикс. число, а  $\sum_{l=1}^{\infty} r^l$  сходится как геометрический при  $|r| < 1$

Итак ряд  $\sum_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$  сходится и почленно превышает  $\sum v_m = (\sum u_n) - k$

То есть  $\sum u_n$  сходится

б) Lab. (взять  $r$  между  $\mathcal{D}$  и 1,  $1 < r < \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} - r = \varepsilon$ )

Сравнить  $\sum u_n$  с  $\sum r^l$  (расходящимся)

□

$$Ex. 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 - \text{сходится}$$

$$Ex. 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 - \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 - \text{сходится}$$

**Th. 4.** Радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad u_n \geq 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$$

а)  $0 \leq K < 1 \Rightarrow \sum u_n$  сходится

б)  $K > 1 \Rightarrow \sum u_n$  расходится

*Nota.*  $K = 1$  - ничего не следует

□

а) По определению предела  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \sqrt[n]{u_n} - K \mid < \varepsilon$

$\Leftrightarrow k - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon$  Положим  $\varepsilon = r - K$ , где  $K < r < 1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n < r^n$  - геом. ряд с  $|r| < 1$ , то есть  $\sum r^n$  сходится

б) Аналогично

□

$$Ex. 1. \sum_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \quad K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}$$

Но  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-1} \neq 0$  - необходимое условие не выполняется

Ex. 2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ,  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-1} < 1$  - сходится

**Th. 5.** Интегральный признак Коши

Если существует  $f(x) : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $f(x)$  монотонно убывает,  $f(n) = u_n$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  и

$\int_1^{\infty} f(x)dx$  одновременно сходятся или расходятся

$$\begin{aligned} \square \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x)dx \\ \sum_{n=2}^b u_n &= u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x)dx < u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n \end{aligned}$$

Обозначим  $\sum_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}$ ,  $\sum_{n=2}^b u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x)dx < S_{b-1}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если  $\int$  сходится, то смотрим левую часть

Если  $\int$  расходится, то смотрим правую часть неравенства

□

## 4. Знакопередающие ряды

**Def.**  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  ( $u_n > 0$ ) - знакопередающийся ряд

**Th.** Признак Лейбница

Если для знакопередающегося ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  верно, что  $u_n \rightarrow 0$  и  $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$ ,

то ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  сходится

$$\square \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из  $u_1$  и получаем число гарантированно меньшее  $u_1$

По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность  $\square \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} \stackrel{0}{=} S \in \mathbb{R}$$

$\square$

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \implies \text{ряд сходится}$$

*Nota.* Оценка остатка ряда

Запишем ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k = S_n + \overset{R_n}{\uparrow} \text{остаток ряда}$

В доказательстве **Th.** было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1} u_k| = u_k = u_{n+1}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \underbrace{\frac{1}{32}}_{R_4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

$$|R_4| < \frac{1}{32}$$

$$\text{Проверка: } -\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) - \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{256}\right) - \dots = - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \underline{\text{Lab.}} \text{ досчитать и сравнить с } \frac{1}{32}$$

*Nota.* Оценка не работает в знакоположительных рядах

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$R_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$$

**Def.** Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_n - \text{любого знака и не все } u_n \text{ одного знака}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

*Nota.* Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

**Th.** Абсолютная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится}$$

*Mem.* См. абсолютную сходимость в [несобственных интегралах](#)

□

По критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

По неравенству треугольника:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$$

□

*Nota.* Обратное неверно!

*Ex.*  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  сходится

Но  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится

**Def.** Если  $\sum u_n$  сходится, при том что  $\sum |u_n|$  сходится, он называется **абсолютно сходящимся**

**Def.** Если  $\sum u_n$  сходится, при том что  $\sum |u_n|$  расходится, он называется **условно сходящимся**

*Nota.* Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезнена и сохраняет сумму ряда

*Nota.* На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов

1) Признак сравнения:  $|u_n| < |v_n| : \sum |v_n| \text{ сходится} \implies \sum |u_n| \text{ сходится}$

2) Предельный признак:  $\lim \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3)  $D = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

4)  $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$

5)  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  сравнивается с  $\sum |u_n|$

## §2. Функциональные ряды

### 1. Определения

**Def.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , где  $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  называется функциональным

*Nota.* При фиксации переменной  $x$  ряд становится числовым

*Ex.*  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$  расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  сходится

Таким образом для  $|x| < 1$  ряд будет сходящимся, для  $|x| > 1$  расходящимся

**Def.** Множество значений  $x$ , при которых  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится, называется областью сходимости

**Def.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится при всех  $x$  из некоторого множества  $E$ , то сумма ряда - функция  $S(x)$

*Nota.* То есть  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток:  $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ . Часто удобно исследовать  $R_n(x) \rightarrow 0$ . Также работает критерий Коши

**Th.** Критерий Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится в области  $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x) \mid < \varepsilon$   
 $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

*Nota.* Очень неприятно, что  $n_0$  зависит от  $\varepsilon$  и всякого  $x$

**Def.** Равномерная сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходится в области  $D \stackrel{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n(x) \mid < \varepsilon$   
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

*Nota.* Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

**Th.** Признак Вейерштрасса

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  - числовой ряд такой, что  $\alpha_n > 0$ ,  $\sum \alpha_n$  сходится,  $|u_n(x)| \leq \alpha_n \forall n$

Тогда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  равномерно сходящийся

*Nota.* Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  называется мажорирующим (то есть преобладающий), а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  - мажорируемым

$$\square \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n^\alpha < \varepsilon$$

Заменим на условие  $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$  (кр. Коши)

$$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \leq |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \leq \alpha_n + \dots + \alpha_m \leq \varepsilon$$

При этом номер  $n_0$  зависит только от  $\varepsilon$

$\square$

*Nota.* Таким образом всякий мажорируемый ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

*Nota.* Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

*Ex.* Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$$

$$\text{При } x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$$

$$\text{При } x < 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$$

$$\text{При } x = 0 \quad S_n = 0$$

**Th.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  ( $u_n(x) \in C_{[a,b]}$ ) мажорируем в  $D = [a, b]$ , то его сумма  $S_x$  непрерывна на  $[a, b]$

$\square$

$$S(x) \text{ непрерывна на } x \in [a, b] \iff \Delta S \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$$

$$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x), \quad S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

$$\Delta S_n(x) = S_n(x + \Delta x) - S_n(x)$$

$$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x) = S_n(x + \Delta x) + r_n(x + \Delta x) - S_n(x) - r_n(x)$$

$$\Delta S(x) = \Delta S_n + r_n(x + \Delta x) - r_n(x)$$

$$|\Delta S(x)| \leq |\Delta S_n| + |r_n(x + \Delta x)| + |r_n(x)|$$

$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ мажорируем } \iff \exists \text{ сходящийся } \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mid |u_n(x)| \leq \alpha_n$$

$$\text{Тогда } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\text{и } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \mid |r_n(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ (так как } N \text{ не зависит от } x; x + \Delta x \in [a, b])$$

$\Delta S_n = S_n(x + \Delta x) - S(x) = u_1(x + \Delta x) - u_1(x) + \dots + u_n(x + \Delta x) - u_n(x)$  - конечная сумма непрерывна

Сама  $S_n(x)$  непрерывна, тогда  $\forall \varepsilon > 0$  (при фиксированном  $N$ )  $\exists \delta > 0 \mid |\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$  при  $|\Delta x| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{Итак: } \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \text{ и } \delta > 0 \mid \forall x \in D \mid_{|\Delta x| < \delta} \quad & |\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ & + |r_n(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ & + |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ & = |\Delta S(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

То есть  $S(x) \in C_{[a,b]}$

□

*Nota.* Не все равномерно сходящиеся мажорируются, но у всех  $S(x)$  непрерывна

Это позволяет определить  $\int_{x_0}^y S(x)dx$ , а если  $S(x) \in C'_{[a,b]}$ , то и  $\frac{dS(x)}{dx}$

**Th.** Если ряд мажорируется на  $[a, b]$  и  $u_n(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то определен  $\int_{x_0}^y S(x)dx$

$$\text{и } \int_{x_0}^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x)dx$$

□

$S(x) = S_n(x) + r_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x)$  - конечное число слагаемых из непрерывных функций ( $r_n(x)$  как хвост равномерно сходящегося ряда)

Тогда для  $x_0, x \in [a, b]$   $\int_{x_0}^x S(x) = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(x)dx + \int_{x_0}^x r_n(x)dx$  - это будет верно, если

$$\int_{x_0}^x r_n(x)dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{По свойству интегралов } \left| \int_{x_0}^x r_n(x)dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)|dx$$

$$\left| \int_{x_0}^x r_n(x)dx \right| \leq \int_{x_0}^x |r_n(x)|dx < \int_{x_0}^x \varepsilon_n dx = \varepsilon_n(x - x_0) \text{ (} x, x_0 \text{ - фикс.)}$$

То есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x r_n(x) dx = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x S(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(x) dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x r_n(x) dx$$

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u_n(x) dx$$

□

*Nota.* Почленно интегрируются не просто равномерно сходящиеся, а мажорируемые, иначе остаток необязательно стремится к 0

**Th.**  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  мажорируем на  $[a, b]$  и  $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$

Тогда  $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

□

Пусть  $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ . Докажем, что  $g(x) = S'(x)$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x g(x) dx &= \int_{x_0}^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{x_0}^x u'_n(x) dx \right) = u_1(x) \Big|_{x_0}^x + u_2(x) \Big|_{x_0}^x + \dots \\ &= (u_1(x) - u_1(x_0)) + (u_2(x) - u_2(x_0)) + \dots = S(x) - S(x_0) - \text{разность сходящихся рядов} \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^x g(x) dx = S(x) - S(x_0) \implies \left( \int_{x_0}^x g(x) dx \right)' = g(x) = S'(x)$$

□

## 2. Степенные ряды

**Def.**  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ ,  $c_n \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  - степенной ряд с центром  $x_0$  (в точке  $x_0$ , по степеням  $(x-x_0)$ )

*Nota.* В частности  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$  - степенной с центром в  $x_0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$  легко сводится заменой  $x-x_0 = t$  к  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$



**Th. Абеля.**

- 1)  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  сходится в точке  $x_1$ . Тогда ряд сходится для любого  $x$ , который  $|x| < |x_1|$
- 2)  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  расходится в точке  $x_2$ . Тогда ряд расходится  $\forall x$   $|x| > |x_2|$

□

- 1) В точке  $x_1$   $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \dots$  - числовой ряд, сходящийся

$$\text{В точке } x \ (|x| < |x_1|) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots = c_0 + c_1 x_1 \frac{x}{x_1} + c_1 x_1^2 \frac{x^2}{x_1^2} + \dots$$

Для этого ряда докажем абсолютную сходимость

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x_1| \left| \frac{x}{x_1} \right| + |c_1 x_1^2| \left| \frac{x^2}{x_1^2} \right| + \dots$$

При этом ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$  сходится  $\Rightarrow \exists M > 0 : |c_n x_1^n| \leq M$

И  $\left| \frac{x^k}{x_1^k} \right| < 1$ , так как  $|x| < |x_1|$

Тогда  $|c_0| + |c_1 x_1| \left| \frac{x}{x_1} \right| + |c_1 x_1^2| \left| \frac{x^2}{x_1^2} \right| + \dots + |c_k x_1^k| \left| \frac{x^k}{x_1^k} \right| < M \left( 1 + \left| \frac{x}{x_1} \right| + \left| \frac{x}{x_1} \right|^2 + \dots + \left| \frac{x}{x_1} \right|^k \right)$  - геометрическая прогрессия с  $|q| < 1$

Таким образом  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \sim M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$ , который сходится

Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  абсолютно сходится (и равномерно?)

б) От противного, используя пункт а)

□

*Nota.* Заметим, что должно существовать такое  $R$ , для которого для всех  $x$  меньше  $R$  ряд сходится

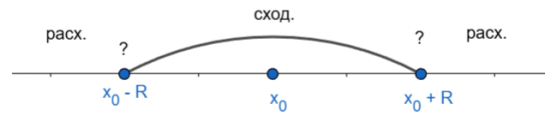
Зафиксируем между  $x_0$  и  $R$  число  $x_0 < r < R$  - тогда  $\sum c_n r^n$  - мажорирует  $c_n x^n$ , то есть ряд сходится равномерно



**Def.**  $R \in \mathbb{R}^+$   $\left| \forall |x| < R \right.$  ряд сходится, а  $\forall |x| > R$  ряд расходится, тогда  $R$  называют радиусом сходимости

Для сдвинутого ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \forall x : |x - x_0| < R$  - сходится;  $\forall x : |x - x_0| > R$  - расходится

Сходимость ряда в  $x_0 \pm R$  нужно проверять специально



*Nota.* Чаще всего исследование на сходимость проводится по признакам Даламбера, Коши

Ex.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} \frac{n}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| = |x| < 1$$

Предварительно  $D = (-1; 1)$ .

Далее, рассмотрим  $x = \pm 1$ :

$$(x = 1) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \text{сходится}$$

$$(x = -1) : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} - \text{расходится}$$

Итак,  $D = (-1; 1]$

### 3. Ряд Тейлора

*Мет.* Формула Тейлора:  $f(x) \in C_{U_\delta(x_0)}^{n+1}$ , тогда  $f(x) \stackrel{x \in U_\delta(x_0)}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

Чтобы  $f(x)$  в пределе равнялось  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ , нужно, чтобы  $r_n(x) \rightarrow 0$

Формула:  $f(x) \in C_{U_0(x_0)}^\infty$  и  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$ ,  $\xi$  между  $x$  и  $x_0$

**Th.** Если  $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , то  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  - ряд Тейлора

*Nota.* Если  $x_0 = 0$ , то ряд Маклорена

### 3.1. Стандартные разложения элементарных функций

$$1^\circ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\text{Nota. } e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$2^\circ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{Nota. } \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$3^\circ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\text{Nota. } 1 - \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$4^\circ \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$$

$$\text{Def. } \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Сложим и вычтем ряды для  $e^x$  и  $e^{-x}$

$$\text{Причем } e^{-x} \underset{x, t \in u(0)}{\stackrel{t=-x}{=}} e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Из этого получаем:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$$

Формула Эйлера

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \dots = (1 - \frac{x^2}{2!} + \dots) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \dots) = \cos x + i \sin x$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$5^\circ \text{ Биномиальный ряд}$$

$$f(x) = (1+x)^m, m \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Заметим, что } f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$(1+x)f'(x) = m(1+x)^m = mf(x)$$

Получаем дифференциальное уравнение:  $(1+x)f'(x) = mf(x)$

*Nota.* Если дополнить ДУ начальными условиями, то задача Коши будет решаться единственным образом, то есть, найдя ряд  $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  как единственное решение, получим, что  $S(x) = f(x)$  и не надо исследовать остаток  $R_n$  на убывание к нулю

Задача Коши:

$$\begin{cases} (1+x)f'(x) = mf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда  $S(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ka_kx^{k-1} + \dots$$

$$(1+x)S'(x) = a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \dots + (ka_k + (k+1)a_{k+1})x^k + \dots$$

$$mS(x) = ma_0 + ma_1x + ma_2x^2 + \dots + ma_kx^k + \dots$$

Начальные условия:  $a_0 = 1$ . Тогда приравниваем коэффициенты:  $a_1 = m, a_2 = \frac{m(m-1)}{2}, a_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$

Выявили закономерность:  $a_k = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)}{k!}$

Таким образом:  $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} C_m^k x^k$

При  $m \in \mathbb{N}$  ряд - конечная сумма, при остальных - бесконечная

$$\text{Lab. } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+(-x^2))^{-\frac{1}{2}} = (\arcsin x)' \quad \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t$$

6°  $\ln(1+x)$

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \right) dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^n dy = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Интервал сходимости:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n} \right| = |x| < 1 \quad D = (-1, 1)$

При  $x = 1$   $\ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  - сходится  $D = (-1, 1]$

*Nota.* Сходимость остатка требует исследования

*Nota.* Заметим, если  $x = \frac{1}{k}$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то  $\ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln \frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k$  - рекуррентная формула логарифмов натуральных чисел

$$7^\circ \arctg x - \text{Lab. } ((\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2})$$

### 3.2. Приложения

$$\text{Ex. 1. } I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad x = \frac{1}{2} \in u(0)$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots) dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{1}{32 \cdot 5 \cdot 120} - \dots$$

Ряд знакопеременный - можем найти такой  $u_n$ , который будет меньше заданной точности вычисления  $\varepsilon$

$$\text{Ex. 2. } \int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a (1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2!} + \dots) dx = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{10} + \dots \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{5} + \frac{a^5}{10} - \dots$$

Отсюда были вычислены таблицы для функции Лапласа  $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Ex. 3. Вычисление пределов

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots) - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}) + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

### 4. Ряды Фурье

Мет. Линейное функциональное пространство со скалярным произведением

$$f(x) \in C_{[a,b]}$$

$$\text{Скалярное произведение } (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\text{Из этого норма } \|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Главное приложение евклидовых пространств - задача о перпендикуляре: найти перпендикуляр  $h$  из конца вектора  $f$  на подпространство  $L'$ . Иначе: ищем расстояние  $\|f - h\|$  (метрика) или ортогональную проекция  $f_0$  вектора  $f$  на  $L'$ , такую, что  $f_0 + h = f$

Будем искать  $f_0$ , задав подпространство  $L'$  множеством функций  $\{\sin mx, \cos mx\}$

Тригонометрические функции полезны для описания периодических явлений

Раньше рассматривали тригонометрический многочлен

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + \dots + b_m \sin mx + a_m \cos mx$$

Дальше стоит задача: при каких  $a_i, b_i$  многочлен  $T_m(x)$  будет наименее отстоящим от данной  $f(x)$

Мет. Решаем задачу о перпендикуляре, ищем  $f_0$  - наименьшую из проекций и минимально отстоящую от  $f$

Координаты  $f_0$  в выбранном ортонормированном базисе  $L'$  равны соответствующим координатам  $f$  в этом базисе

$$f_0 = f_1 e_1 + f_2 e_2 + \dots + f_k e_k = (f, e_1) e_1 + (f, e_2) e_2 + \dots + (f, e_k) e_k$$

$k=\dim L', n=\dim L$

$$(f, e_1) = \int_a^b f(x) e_1(x) dx$$

*Nota.* Итак,  $\exists L \in C_{[-\pi, \pi]}, L' = l_{\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots\}}$

Тогда можно искать многочлен  $P_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ , который наилучшим образом приближает  $f(x)$

Если нормировать систему  $\{\sin nx, \cos nx\}$ , то коэффициентами многочлена  $P_n(x)$  будут скалярные произведения  $f(x)$  на функция ортонормированной системы.

Получим  $\left\{ \frac{1}{2\pi}, \frac{\sin x}{\pi}, \frac{\cos x}{\pi}, \dots, \frac{\sin nx}{\pi}, \frac{\cos nx}{\pi} \right\}$

Тогда,

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \end{cases} \quad \text{- коэффициенты Фурье}$$

*Nota.* Если увеличивать степень  $n$ , то получим ряд Фурье. Запишем формально:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{- сходится ли этот ряд и сходится ли к } f(x)?$$

Ответ дает теорема (доказательство будет приведено позже)

**Th.**  $f(x)$  -  $2\pi$ -периодична, на  $[-\pi, \pi]$   $f(x)$  - кусочно монотонна и ограничена (то есть имеет конечное число конечных разрывов). Тогда в точках непрерывности  $f(x)$  представляется рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = S(x)$$

а в точках разрыва  $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0))$

Сейчас только тригонометрический ряд Фурье, хотя подобное разложение возможно по различным ортогональным системам функций

*Nota.* В концах отрезках  $[-\pi, \pi]$   $f(x)$  может быть не определена, но в любом случае ограничена  $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$

Разложение периодичных функций (на  $[-\pi, \pi]$ )

1°:  $f(x) = x$  на  $[-\pi, \pi]$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$

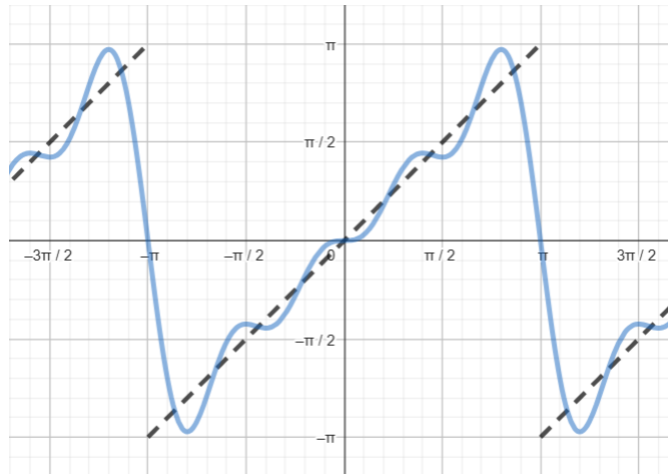
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{-2}{\pi n} \int_0^{\pi} x d \cos nx = -\frac{2}{\pi n} \left( x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = -\frac{2}{\pi n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} =$$

$$-\frac{2}{n} \cos \pi n = \begin{cases} -\frac{2}{n}, & n = 2m \\ \frac{2}{n}, & n = 2m + 1 \end{cases} = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$\text{Итак } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{n} \sin nx$$



$$2^\circ: f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на } [0, \pi] \\ -1 & \text{на } [-\pi, 0) \end{cases}$$

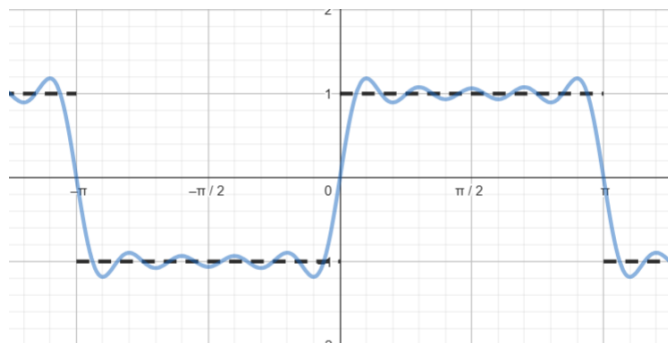
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{2n} \left( \int_{-\pi}^0 d \cos nx - \int_0^{\pi} d \cos nx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi n} \left( \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n} (1 - \cos \pi n - \cos \pi n + 1) = \frac{2}{\pi n} (1 - \cos \pi n) = \frac{4}{\pi(2m-1)}$$

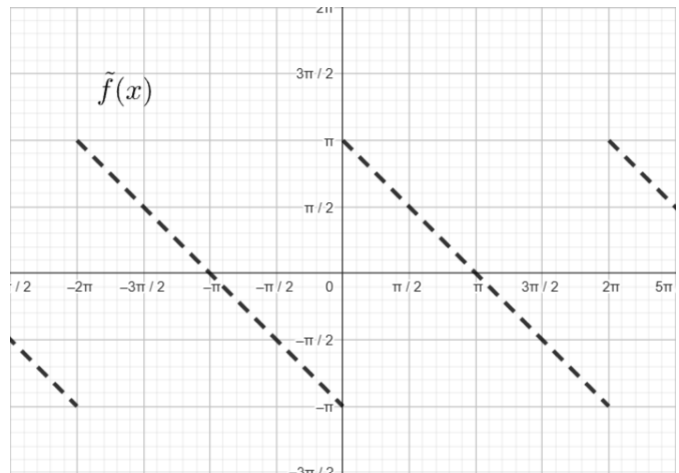
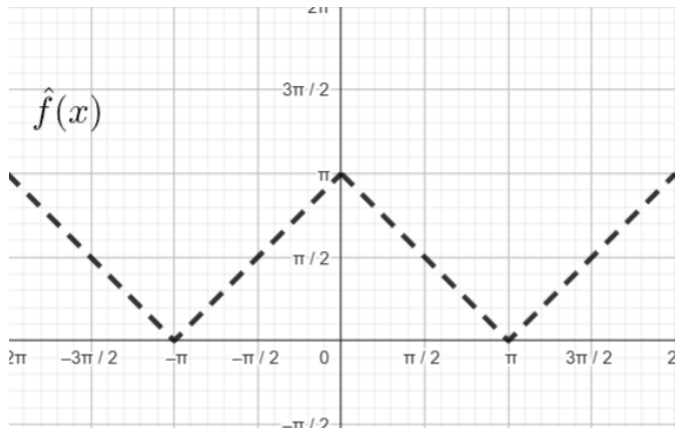
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin(2m-1)x$$



*Nota.* Заметим, что если  $f(x)$  - четная, то  $b_n = 0$ , а если нечетная, то  $a_n = 0$ . Иногда в задаче требуется разложить  $f(x)$ , заданную только на отрезке  $[0, \pi]$ . Такую функцию можно продолжить четным или нечетным образом на  $[-\pi, \pi]$ . Говорят о разложении в ряд по косинусам и синусам соответственно

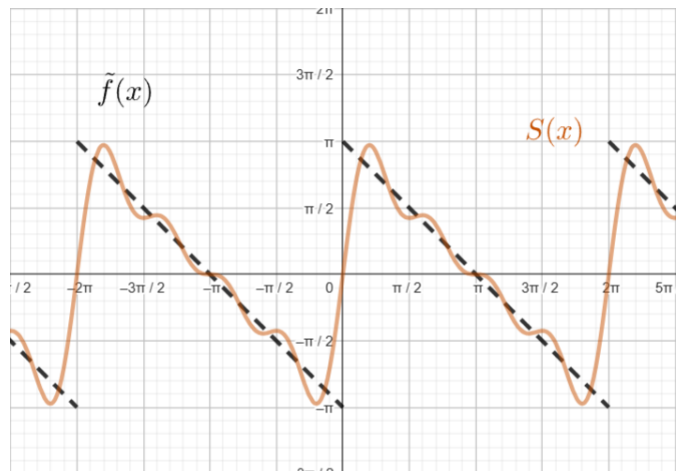
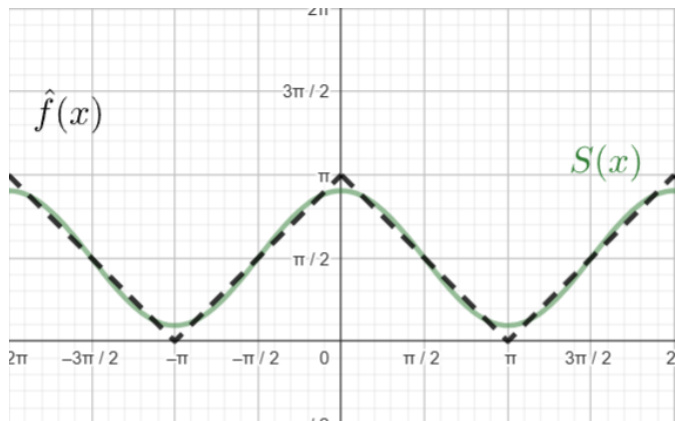
З<sup>о</sup>:  $f(x) = \pi - x, \quad x \in [0, \pi]$

Дополним  $f(x)$  двумя способами



В ряд Фурье раскладываются периодические функции  $\hat{f}, \tilde{f}$

Lab.  $\hat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$



Заметим, что  $\tilde{f}$  на  $[0, 2\pi]$  имеет одно аналитическое задание (удобно интегрировать). Изменится ли ряд Фурье, если сдвинуть отрезок?

**Th.** Сдвиг промежутка длиной  $2\pi$  не меняет ряда Фурье



**Th.** Для  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  растяжение промежутка приводит к разложению:

$b - a = 2l = T$  - период

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

## Х. Программа экзамена в 2024/2025

### 1. Числовые ряды.

1. Определение числового ряда, понятие суммы ряда.
2. Сходимость числового ряда. Эталонные ряды: геометрический, гармонический.
3. Условия сходимости рядов: необходимое условие, критерий Коши.
4. Знакоположительные числовые ряды, свойства.
5. Признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признаки сравнения.
6. Признак Даламбера, радикальный признак Коши.
7. Интегральный признак сходимости.
8. Знакопередающие ряды. Теорема Лейбница. Оценка остатка ряда.
9. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

### 2. Функциональные ряды.

10. Функциональные ряды. Сходимость. Поточечная и равномерная сходимость ряда. Мажорирующий ряд.
11. Признак Вейерштрасса.
12. Непрерывность суммы ряда.
13. Свойства равномерно сходящихся рядов (дифференцирование и интегрирование суммы ряда).
14. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости.
15. Ряд Тейлора. Стандартные разложения элементарных функций.
16. Ортогональные системы функций и ряды Фурье. Определение тригонометрического ряда Фурье для функции на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Теорема Дирихле.
17. Тригонометрический ряд Фурье на произвольном отрезке (сдвиг, растяжение)