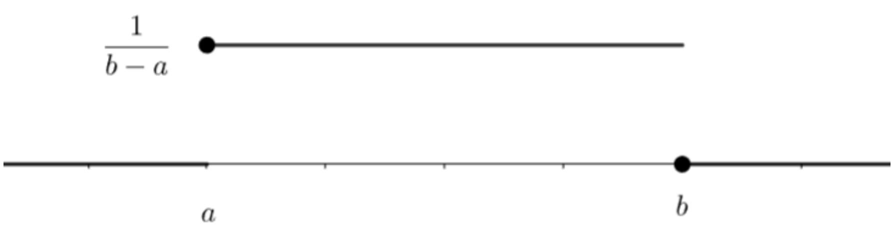
Стандартное абсолютно непрерывное распределение

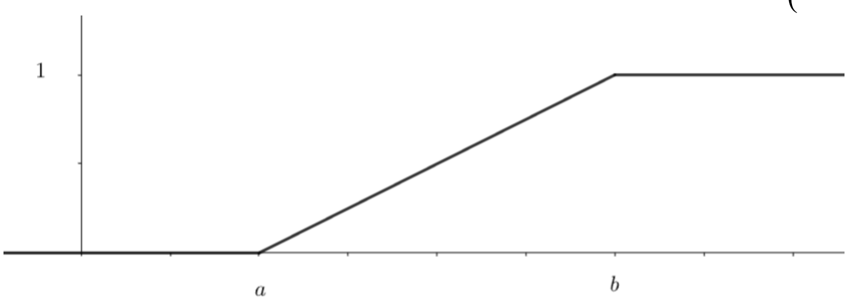
I. Равномерное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение $\xi \in u(a, b)$, если ее плотность на этом отрезке постоянна

Получаем функцию плотности $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x < b \\ 0 & x \ge b \end{cases}$ $\qquad \frac{1}{b-a}$ из усл. нормировки



Из этого функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$



Числовые характеристики:

$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$

$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

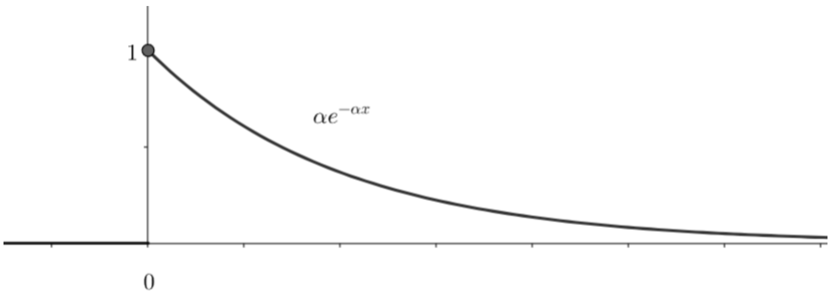
$p(\alpha < \xi < \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$ при условии, что $\alpha, \beta \in [a, b]$

Nota. Примеры равномерного распределения: задача со временем, датчики случайных чисел имеют стандартное равномерное распределение $u(0, 1)$

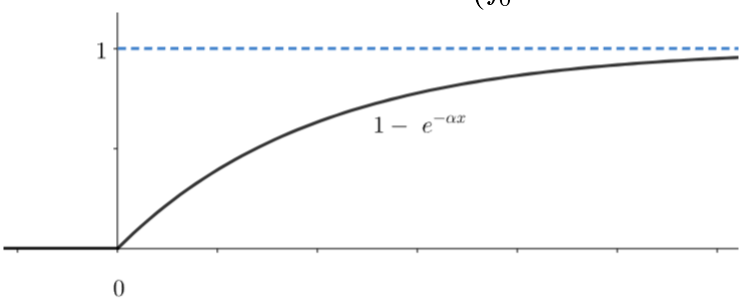
II. Показательное распределение

Def. Случайная величина ξ имеет показательное (или экспоненциальное) распределение с параметром $\alpha > 0$ (обозн. $\xi \in E_\alpha$), если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



Функция распределения $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha x} = 1 - e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \end{cases}$



Числовые характеристики:

$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \alpha e^{-\alpha x} dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \alpha e^{-\alpha x} \alpha x & v = -e^{-\alpha x} \end{bmatrix} = -x e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = -\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = -\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha x}} - \frac{1}{\alpha}(\lim\limits_{x \to \infty} e^{-\alpha x} - 1) = \frac{1}{\alpha}$

$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2x dx \\ dv = \alpha e^{-\alpha x} \alpha x & v = -e^{-\alpha x} \end{bmatrix} = -x^2 e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} = \frac{2}{\alpha} E\xi = \frac{2}{\alpha^2}$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$

$\sigma = \sqrt{D\xi} = \frac{1}{\alpha}$

$p(\alpha < \xi < \beta) = F(b) - F(a) = e^{-a\alpha} - e^{-b\alpha} \qquad a, b \geq 0$

Nota. Из непрерывных случайных величин только показательная обладает свойством нестарения

Th. $\exists \xi \in E_\alpha$. Тогда $p(\xi < x+y \mid \xi > x) = p(\xi > y) \qquad \forall x, y > 0$

□

$p(\xi < x+y \mid \xi > x) = p(\xi > y) = \dfrac{p(\xi > x+y, \xi > x)}{p(\xi > x)} = \dfrac{1 - p(\xi < x+y)}{1 - p(\xi < x)} = \dfrac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} = \dfrac{e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} =$
$e^{-\alpha y} = 1 - (1 - e^{-\alpha y}) = 1 - p(\xi < y) = p(\xi > y)$

□

Ex. 1. Время работы надежной микросхемы до поломки

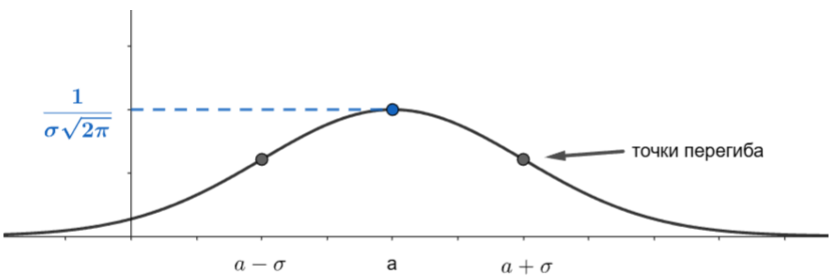
Ex. 2. Время между появлениями двух редких событий (через схему Пуассона)

Nota. Применется в системах массового обслуживания, теория надежности

III. Нормальное распределение (Гауссовское)

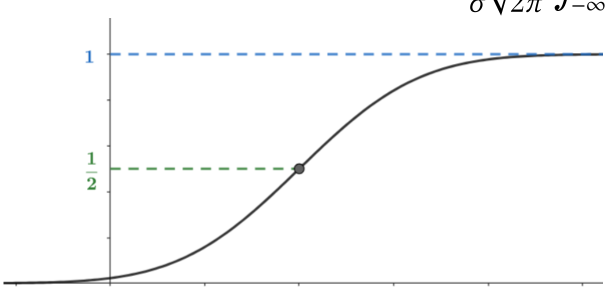
Def. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2 (обозн. $\xi \in N(a, \sigma^2)$), если ее плотность имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$



Смысл параметров распределения: $a = E\xi$ - матожидание и медиана, σ - СКО, а $D\xi = \sigma^2$

Функция распределения: $F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt$



Проверим корректность определения - условие нормировки. Покажем, что $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \begin{bmatrix} t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}} & dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \\ t(\pm\infty) = \pm\infty & dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1$ - верно

Ясно, что $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$ - интеграл сходится абсолютно для любого k (степень e задавит полином)

$E\xi = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a$ в силу симметрии

Найдем дисперсию при помощи дифференцирования интеграла по параметру:

Из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{(x-a)^2}{2}(-\sigma^{-3})\right) dx = 1$

$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 = D\xi$, получаем, что σ - СКО

Стандартное нормальное распределение

Def. Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma^2 = 1$: $\xi \in N(0,1)$

Плотность: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса

$E\xi = 0;\ \ D\xi = 1$

Распределение: $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция стандартного нормального распределения

Заметим, что $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{2} + \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа

Функция Лапласа нечетная и из соображения симметрии легко вычисляется для отрицательных x, однако большинство ПО используют $F_0(x)$

Связь между нормальным и стандартным нормальным распределениями

1) $\exists \xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $F_\xi(x) = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

□

$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \begin{bmatrix} z = \frac{t-a}{\sigma} & t = \sigma z + a & dt = \sigma dz \\ z(-\infty) = -\infty & z(x) = \frac{x-a}{\sigma} & \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = F_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$

□

2) Если $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma} \in N(0,1)$ (процесс $\xi \longrightarrow \eta$ называется стандартизацией)

□

$F_\eta(x) = p(\eta < x) = p\left(\dfrac{\xi - a}{\sigma} < x\right) = p(\xi < \sigma x + a) = F_\xi(\sigma x + a) = F_0\left(\dfrac{\sigma x + a - a}{\sigma}\right) = F_0(x)$, так как $F_\eta(x) = F_0(x)$, то $\eta \in N(0,1)$

□

3) $\sqsupset \xi \in N(a, \sigma^2)$. Тогда $p(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$

$$p(\alpha < \xi < \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = F_0\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

4) Вероятность попадания в симметричный интервал (вероятность отклонения случайной величины от матожидания) $p(|\xi - a| < t) = 2\Phi\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)$

$p(|\xi - a| < t) = p(-t < \xi - a < t) = p(a - t < \xi < a + t) = \Phi\left(\dfrac{a + t - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - t - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{t}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\dfrac{t}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)$

Nota. Если через $F_0(x)$, то $p(|\xi - a| < t) = 2_0\left(\dfrac{t}{\sigma}\right) - 1$

5) Правило 3 «сигм»: $p(|\xi - a| < 3\sigma) \approx 0.9973$ - попадание случайной величины нормального распределения в интервал $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ близко к 1

$$p(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0.49685 = 0.9973$$

6) Свойство линейности: если случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $\eta = \gamma\xi + b \in N(a\gamma + b, \gamma^2\sigma^2)$ (можем доказать при помощи свойств ранее, но мы докажем позже, используя другие методы)

7) Устойчивость относительно суммирования: если случайные величины $\xi_1 \in N(a_1, \sigma_1^2), \xi_2 \in N(a_2, \sigma_2^2)$, и они независимы, то $\xi_1 + \xi_2 \in N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса

Def. 1. Асимметрией распределения называется число $A_s = E\left(\dfrac{\xi - a}{\sigma}\right)^3 = \dfrac{\mu^3}{\sigma^3}$

Def. 2. Эксцессом распределения называется число $E_s = E\left(\dfrac{\xi - a}{\sigma}\right)^4 - 3 = \dfrac{\mu^4}{\sigma^4} - 3$

Nota. Если случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$, то $A_s = E_s = 0$, таким образом, отличие этих характеристик от нуля характеризует степень отклонения распределения. Благодаря этим и другим параметрам, можно проверять на практике, является ли распределение нормальным