4.2 ДУ первого порядка (ДУ$_1$)

Nota. Среди ДУ$_1$ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ

1) Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
2) Однородное уравнение (ОУ)
3) Уравнение полных дифференциалов (УПД)
4) Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ$_1$)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

1* УРП

Def. $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

Решение : $N(y)M(x) \neq 0$

$\dfrac{m(x)}{M(x)}dx + \dfrac{n(y)}{N(y)}dy = 0 \quad y = y(x)$ - неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$(\dfrac{m(x)}{M(x)} + \dfrac{n(y)}{N(y)}y')dx = 0$

Интегрируем по dx:

$$\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y'\right) dx = const$$

По свойствам интеграла:

$$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx + \int \frac{n(y)}{N(y)}dy = const$$

или: $\displaystyle\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy$

Ex. $xdy - ydx = 0$

$xdy = ydx$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + \tilde{C} = \ln|\tilde{\tilde{C}}x|$

$|y| = |\tilde{\tilde{C}}x|$

$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

Заметим, $x = y = 0$ - решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$m(a)\underbrace{N(b)}_{=0}dx + n(b)\underbrace{M(a)}_{=0}dy = 0$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

2* ОУ

Def. 1. Однородная функция n-ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Ex. $f = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right), \cos(\dfrac{\lambda x}{\lambda y}) = \cos(\dfrac{x}{y})$ - нулевой порядок однородности

$f = \sqrt{x^2 + y^2}$ - первый порядок

Def. 2. $\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \text{ где } P(x, y), Q(x, y) \text{ - однородные функции одного порядка}}$ - ОУ

<u>Решение</u> $P(x, y) = P\left(x \cdot 1, x \cdot \dfrac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$

$Q(x, y) = x^k Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$

Тогда, $P\left(1, \dfrac{y}{x}\right) dx + Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right) dy = 0.$

Обозначим $\dfrac{y}{x} = t, \quad y' = \dfrac{dy}{dx} \overset{y=tx}{=\!=} t'_x x + t x'_x = t'_x x + t$

$P(1, t) + Q(1, t)y' = P(1, t) + Q(1, t)(t'x + t) = 0$

$t'x + t = -\dfrac{P(1, t)}{Q(1, t)} \overset{\text{обозн}}{=} f(t)$

$t'x = f(t) - t$

$\dfrac{dt}{dx} x = f(t) - t \neq 0$

$\dfrac{dt}{f(t) - t} = \dfrac{dx}{x}$

$\displaystyle\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x} = \ln|Cx|$

$Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x, y)$ - общий интеграл

Если $f(t) - t = 0$, то пусть $t = k$ - корень, тогда $k = \dfrac{y}{x} \to y = kx$ - тоже решение

Ex. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$

$\dfrac{y}{x} = t \quad y' = t'x + t$

$y = tx \quad dy = (t'x + t)dx$

$(x + tx)dx + (x - tx)(t'x + t)dx = 0$

$(1 + t) + (1 - t)(t'x + t) = 0$

$t'(1 - t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$

$t'(1 - t)x = t^2 - 2t - 1$

$\dfrac{(1 - t)dx}{t^2 - 2t - 1} = \dfrac{dx}{x}$ - УРП

$\dfrac{(1 - t)dt}{(1 - t)^2 - 2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d((1 - t)^2) - 2}{(1 - t)^2 - 2} = -\dfrac{1}{2}\ln|(1 - t)^2 - 2| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(1 - t)^2 - 2}} = \ln|Cx|$

$\tilde{C}x = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - t)^2 - 2}} \Longleftrightarrow Cx^2 = \dfrac{1}{(1 - t)^2 - 2} =\Longleftrightarrow Cx^2((1 - t)^2 - 2) = 1$

$C((y - x)^2 - 2x^2) = 1$

$C(y^2 - 2xy - x^2) = 1$

$y^2 - 2xy - x^2 = C$ - гиперболы

$(t - 1)^2 - 2 = 0 \quad \dfrac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \quad y = (1 \pm \sqrt{2})x$ - асимптоты

3* Уравнение в полных дифференциалах

Def. $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}$ - УПД

<u>Решение</u> *Мет.* **Th.** об интеграле НЗП $\quad\exists\Phi(x,y)\mid d\Phi=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy$

Ex. $(x+y)dx+(x-y)dy=0\quad\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
$\Phi(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(x+y)dx+(x-y)dy=\int_{(0,0)}^{(x,0)}xdx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(x-y)dy=\frac{x^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(x,0)}+(xy+\frac{y^2}{2})\Big|_{(x,0)}^{(x,y)}=$
$\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+C$ - общий интеграл
$x^2+2xy-y^2=C$
4* ЛДУ

Def. $\boxed{y'+p(x)y=q(x)}$ - ЛДУ$_1$
$p,q\in C_{[a,b]}$

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)
Принцип: если удалось найти частное решение ДУ$_{\text{однор}}$ (обозначим y_0), то общее решение ДУ$_{\text{неод}}$ можно искать в виде $y=C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y'+p(x)y=0$

Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y'+p(x)y=q(x)$

Ex. $\sqsupset y(x)=x^2e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ
А $y_0=xe^{-x}$, тогда $y=xxe^{-x}=C(x)xe^{-x}$
То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y=y(x)$
<u>Решение</u> а) $y'+p(x)y=0$
$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0$ - УРП
$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$
$\ln|\tilde{C}y|=-\int p(x)dx$
$\overline{y}=Ce^{-\int p(x)dx}=Cy_0$
б) $y'+p(x)y=q(x)$
Ищем $y(x)$ в виде $y=C(x)y_0$
$C'(x)y_0+C(x)y_0'+p(x)C(x)y_0=q(x)$
$C'(x)y_0+C(x)\underbrace{(y_0'+p(x)y_0)}_{=0}=q(x)$
$C'(x)=\frac{q(x)}{y_0}=q(x)e^{\int p(x)dx}$
$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$