### 5.3 Двойной и тройной интегралы

*Nota.* Дадим строгое определение

*Def.* $z = z(x, y) \quad z : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) Дробление на $[x_{i-1}, x_i]$ длиной $\Delta x$

2) Выбор средней точки $M_i(\xi_i, \eta_i)$, по значению $z(M_i)$ строим элементарный параллелепипед объемом $v_i = z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i \approx V_{\text{малого цилиндра}}$

3) Интеграл суммы $v_i = \Sigma_{i=1}^n v_i = \Sigma z(M_i)\Delta x_i \Delta y_i$

4) Если $\exists \lim v_n \in \mathbb{R}$, не зависящий от ранга, типа дробления и т.д. при $n \to \infty$ и $\tau = \max \Delta x_i, \Delta y_i \to 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} v_n \overset{def}{=} \iint_D z(x, y)dxdy$ - двойной интеграл от $z(x, y)$ на области $D$

*Мет.* $\int_a^b f(x)dx$

$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^+$

1) Дробление на элементы $P_i$ прямыми $x = const, y = const$, $S_{P_i} = \Delta x_i \Delta y_i$ (дали $dx$, $dy$)

2) Выбор $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, площадь элементарных прямоугольников $f(\xi_i)\Delta x_i \approx S_{\text{полоски}}$

3) Интеграл суммы $\sigma_n = \Sigma_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)dx$

*Nota*: Об области $D$

В простейшем случае рассматривают выпуклую, односвязную $\mathbb{R}^2$-область

**а) Выпуклость:**

$\exists M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \notin D$ - не выпуклая

$\forall M_1, M_2 \in D \mid \overline{M_1M_2} \in D$ - выпуклая

**б) Связность:**

$D = D' \cup D''$ - не связная: $\exists M_1, M_2 \in D \mid \overset{\smile}{M_1M_2} \notin D$

$D$ - связная: $\forall M_1, M_2 \in D \mid \underset{\smile}{M_1M_2} \in D$

Обычно область - открытая, дальше будем рассматривать в том числе области с границей.

Добавим к определению $\iint_{\partial D \text{ - граница } D} z(x, y)dxdy$

Геометрический смысл: В определении при $z(x, y) \geq 0$ интегральная сумма $v_n = \Sigma_{i=1}^n v_i$ была суммой объемов элементарных параллелепипедов и приближала объем подповерхности

Тогда $\iint_D z(x, y)dxdy \overset{z\geq 0}{=} V_{\text{цилиндра с осн. } D}$, а при $z = 1$ $\iint_D dxdy = S_D$

Вычисление: По геометрическому смыслу - найти $\iint_D z(x, y)dxdy$ значит найти объем подповерхности

Можно найти $S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x = c, y)dy$ - площадь поперечного сечения

Найдем $V$ как объем тела с известными площадями сечений

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x = c, y)dy\right) dx$$

*Nota.* Кратный

Если найдена первообразная для $z(x = c, y)$ (обозн. $F(x, y(x))$), то по формуле N-L:

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x = c, y)dy = F(x, y(x))\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = F(x, y_2(x)) - F(x, y_1(x))$$

Тогда $\int_a^b \overbrace{(F(x, y_2) - F(x, y_1))}^{\varphi(x)} dx$ - обычный определенный интеграл

Пределы интегрирования во внутреннем интеграле - функции, во внешнем - точки

? Можно вычислить V, рассекая тело сечениями $y = const$. Верно ли, что $\displaystyle\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x,y)dy\right) dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x,y)dx\right) dy$?

Верно, $V$ не зависит от порядка сечения

Таким образом, двойной интеграл $\displaystyle\iint_D z(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1}^{y_2} z(x,y)dydx = \int_\alpha^\beta \int_{x_1}^{x_2} z(x,y)dxdy$

Но при другом порядке интегрирования область $D$ может оказаться неправильной

*Def.* При проходе области $D$ в направлении $Oy\uparrow$ граница области (верхняя) меняет аналитическое задание. Такая область называется направильной в направлении $Oy$

Выгодно выбирать правильное направление, чтобы не делить интеграл по аддитивности

*Ex.* $\displaystyle\iint_D xydxdy$, $D : x^2 + y^2 \le 1$

$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^1 (\int_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}} xydy)dx = \int_{-1}^1 (\frac{x}{2}y^2\Big|_{y_1=-\sqrt{1-x^2}}^{y_2=\sqrt{1-x^2}})dx = \int_{-1}^1 (\frac{x}{2}((1-x^2)-(1-x^2))dx = 0$$

*Def.* Тройной интеграл

$T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

1) дробление на элементы объема $dv = dxdydz$

2) Вычисление среднего содержания $u(x,y,z)$ в $dv$: $u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)dv$

3) Интегральная сумма $\sigma_n = \Sigma u(M_i)dv$

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty, \tau=\max dv\to 0} \overset{def}{=} \iiint_T u(x,y,z)dxdydz$

Геометрический смысл. Только при $u = 1$ $\displaystyle\iiint_T dxdydz = V_T$

Физический смысл. $u(x,y,z)$ - плотность в каждой точке $T$

$\displaystyle\iiint_T u(x,y,z)dxdydz = m_T$ - масса

Вычисление. $\displaystyle\iiint_T u(x,y,z)dxdydz \overset{\text{кратный}}{=} \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} u(x,y,z)dzdydx$