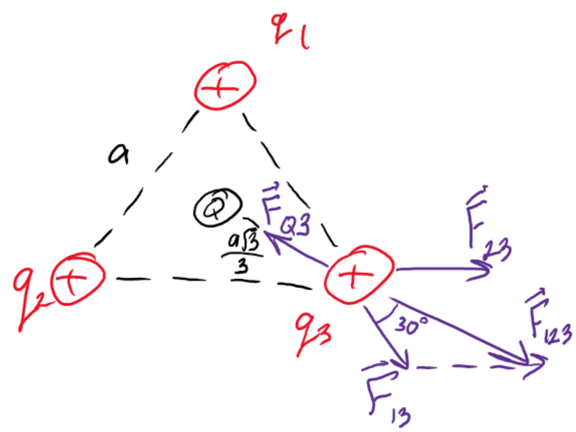
Y. Решение задач из сборника

Электромагнетизм

Задача 1.4.2. Три одинаковых одноименных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q противоположного знака нужно поместить в центр этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?



Чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю, сумма сил, действующих на каждый заряд от других зарядов, должна быть равна нулю.

Так как на заряд Q в центре действуют одинаковая сила со всех других зарядов, то в силу симметрии его суммарная сила равна 0

Возьмем заряд q_3 в вершине - на него действуют три силы: $\vec{F}_{13}, \vec{F}_{23}$ и $\vec{F}_{Q3}$

$F_{13} = F_{23} = \dfrac{kq}{a^2}$

Результирующая сил сила $F_{123} = 2F_{13} \cdot \cos 30° = \sqrt{3}\dfrac{kq}{a^2}$

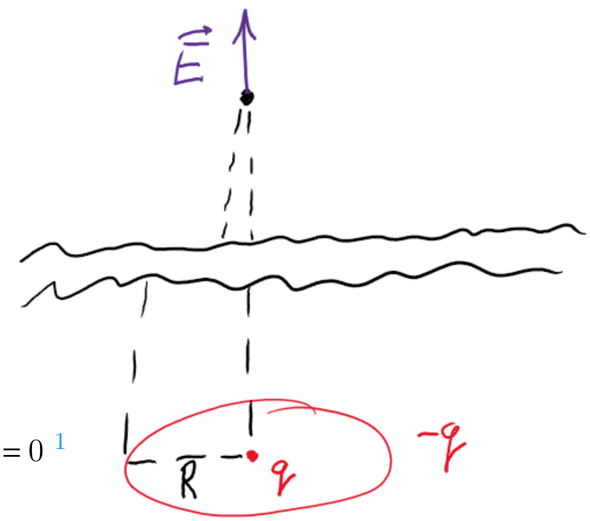
$$F_{Q3} = \frac{kQ}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{3kQ}{a^2}$$

$$F_{Q3} = F_{123} \Longrightarrow \sqrt{3}\frac{kq}{a^2} = \frac{3kQ}{a^2} \Longrightarrow Q = \frac{\sqrt{3}q}{3}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}q}{3}$

Задача 1.4.9. Точечный заряд q находится в центре тонкого кольца радиуса R, по которому равномерно распределен заряд (—q). Найти модуль вектора напряженности электрического поля на оси кольца в точке, отстоящей от центра кольца на расстояние $x \gg R$.

На лекции выводили формулу напряженности кольца в точке, расположенной на оси кольца:
$E_{\text{кольца}} = -\frac{kqx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
При $x \gg R$ можем сказать, что $(R^2 + x^2) \approx x^2$ - тогда получаем, что кольцо можно представить как точечный заряд:
$E_{\text{кольца}} \approx -\frac{kq}{x^2}$
Аналогично для точечного заряда получаем
$E_{\text{т.з.}} = \frac{kq}{x^2}$
Получаем напряженность в точке $E = E_{\text{т.з.}} + E_{\text{кольца}} = 0$ [1]
Ответ: 0



[1] Несмотря на это, можно получить более точную оценку:
$$E = \frac{kq}{x^2}\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{R^2}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \approx \left[\text{делаем замену } y = \frac{R^2}{x^2}, \text{ разложение } \left(1 - \frac{1}{(y+1)^{\frac{3}{2}}}\right) \text{ по Тейлору}\right] \approx \frac{3kqR^2}{2x^4}$$

Задача 1.4.11. Система состоит из тонкого заряженного проводящего кольца радиуса R и очень длинной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью τ, расположенной на оси кольца так, что один из её концов совпадает с центром кольца. Кольцо имеет заряд q. Найти силу взаимодействия кольца и нити.

Формула напряженности кольца в точке, расположенной на оси кольца:

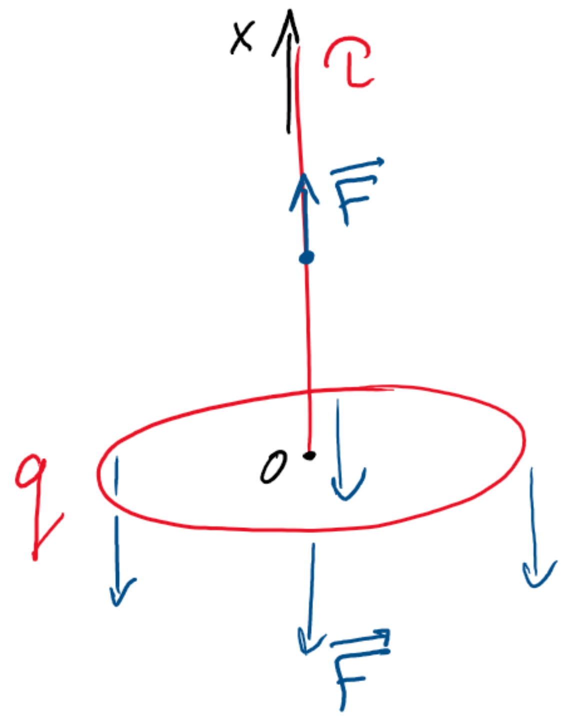
$E_{\text{кольца}} = \dfrac{kqx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Тогда для каждого кусочка заряда $d\tilde{q}$ на нити сила равна

$dF = d\tilde{q}E_{\text{кольца}} = d\tilde{q}\dfrac{kqx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

Для всей нити получаем:

$F = \displaystyle\int_l d\tilde{q}\frac{kqx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^\infty \frac{kqx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\tau dx = \frac{k\tau q}{2}\frac{-2}{\sqrt{R^2+x^2}}\Bigg|_0^\infty = \frac{k\tau q}{R}$



Ответ: $\dfrac{k\tau q}{R}$

Задача 1.4.14. Шар радиуса R сферически симметрично заряжен по объему зарядом Q так, что $p(r) \sim r^2$. Определить напряженность электрического поля в точках A и B, если $r_A = 0.5R$, а $r_B = 2R$.

Пусть $\rho(r) = mr^2$, где m некая константа, тогда $Q = \iiint \rho(r)dV = \int_0^R \rho(r)S(r)dr = \int_0^R mr^2 \cdot 4\pi r^2 \cdot dr = \frac{4}{5}m\pi R^5$

Из этого $m = \frac{5Q}{4^5}, \rho(r) = r^2\frac{5Q}{4^5}$

Для точки B воспользуемся выкладками из лекции, в точке вне шара напряженность можем считать по формуле точечного заряда:

$E_B = k\frac{Q}{4R^2}$

Теперь найдем $q(r)$ - количество заряда внутри сферы радиуса r:

$q(r) = \int_0^r \rho(t)S(t)dt = \int_0^r mt^2 \cdot 4\pi t^2 \cdot dr = \frac{4}{5}m\pi r^5 = Q\frac{r^5}{R^5}$

По теореме Гаусса $E_A S(r) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$, тогда

$E_A = Q\frac{r^5}{R^5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = kQ\frac{r^3}{R^5} = \frac{kQ}{8R^2}$

Ответ: $E_A = \frac{kQ}{8R^2}, E_B = k\frac{Q}{4R^2}$