Th. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(u_n(x) \in C_{[a,b]})$ мажорируем в $D = [a,b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a,b]$

□

$S(x)$ непрерывна на $x \in [a,b] \iff \Delta S \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\Delta S(x) = S(x+\Delta x) - S(x), \ \ S(x) = S_n(x) + r_n(x)$

$\Delta S_n(x) = S_n(x+\Delta x) - S_n(x)$

$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) = S_n(x+\Delta x) + r_n(x+\Delta x) - S_n(x) - r_n(x)$

$\Delta S(x) = \Delta S_n(x) + r_n(x+\Delta x) - r_n(x)$

$|\Delta S(x)| \le |\Delta S_n(x)| + |r_n(x+\Delta x)| + |r_n(x)|$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем $\iff \exists$ сходящийся $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \ \Big| \ |u_n(x) \le \alpha_n|$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ | \ |r_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

и $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ | \ |r_n(x+\Delta x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (так как N не зависит от x; $x + \Delta x \in [a,b]$)

$\Delta S_n = S_n(x+\Delta x) - S(x) = u_1(x+\Delta x) - u_1(x) + \dots + u_n(x+\Delta x) - u_n(x)$ - конечная сумма непрерывна

Сама $\Delta S_n(x)$ непрерывна, тогда $\forall \varepsilon > 0$ (при фиксированном N) $\exists \delta > 0 \ | \ |\Delta S_n(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ при $|\Delta x| < \delta$

Итак: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$ и $\delta > 0 \ | \ \forall \underset{|\Delta x| < \delta}{x \in D}$

$$
\begin{aligned}
&|\Delta S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\
&+ |r_n(x+\Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\
&+ |r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \\
&= |\Delta S(x)| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

То есть $S(x) \in C_{[a,b]}$

□

Nota. Не все равномерно сходящиеся мажорируются, но у всех $S(x)$ непрерывна

Это позволяет определить $\int_{x_0}^{y} S(x)dx$, а если $S(x) \in C'_{[a,b]}$, то и $\dfrac{dS(x)}{dx}$

Th. Если ряд мажорируется на $[a,b]$ и $u_n(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то определен $\int_{x_0}^{y} S(x)dx$ и $\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$

□

$S(x) = S_n(x) + r_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + r_n(x)$ - конечное число слагаемых из непрерывных функций ($r_n(x)$ как хвост равномерно сходящегося ряда)

Тогда для $x_0, x \in [a, b]$ $\displaystyle\int_{x_0}^{x} S(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(x)dx + \int_{x_0}^{x} r_n(x)dx$ - это будет верно, если $\displaystyle\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

По свойству интегралов $\displaystyle\left|\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx\right| \le \int_{x_0}^{x} |r_n(x)|dx$

$\displaystyle\left|\int_{x_0}^{x} r_n(x)dx\right| \le \int_{x_0}^{x} |r_n(x)|dx < \int_{x_0}^{x} \varepsilon_n dx = \underset{\varepsilon_n \to 0}{\varepsilon_n(x - x_0)}$ (x, x_0 - фикс.)

То есть $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} r_n(x)dx = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} S(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} r_n(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x} S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(x)dx$$

□

Nota. Почленно интегрируются не просто равномерно сходящиеся, а мажорируемые, иначе остаток необязательно стремится к 0

Th. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ мажорируем на $[a, b]$ и $u_n(x) \in C'_{[a,b]}$

Тогда $\displaystyle S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

□

Пусть $\displaystyle g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$. Докажем, что $g(x) = S'(x)$

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} u'_n(x)dx\right) = u_1(x)\Big|_{x_0}^{x} + u_2(x)\Big|_{x_0}^{x} + \dots$$

$= (u_1(x) - u_1(x_0)) + (u_2(x) - u_2(x_0)) + \dots = S(x) - S(x_0)$ - разность сходящихся рядов

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = S(x) - S(x_0) \Longrightarrow \left(\int_{x_0}^{x} g(x)dx\right)' = g(x) = S'(x)$$

□

2. Степенные ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n,\ c_n \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ - степенной ряд с центром x_0 (в точке x_0, по степеням $(x-x_0)$)

Nota. В частности $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ - степенной с центром в $x_0 = 0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ легко сводится заменой $x - x_0 = t$ к $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n t^n$

Th. Абеля.

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_1. Тогда ряд сходится для любого x, который $|x| < |x_1|$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится в точке x_2. Тогда ряд расходится $\forall x\ |x| > |x_2|$

$\square$

1) В точке x_1 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n = c_0 + c_1x_1 + c_2x_1^2 + \ldots$ - числовой ряд, сходящийся

В точке x $(|x| < |x_1|)$ $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = c_0 + c_1 x_1 \dfrac{x}{x_1} + c_1 x_1^2 \dfrac{x^2}{x_1^2} + \ldots$

Для этого ряда докажем абсолютную сходимость

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = |c_0| + |c_1 x_1| \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + |c_1 x_1^2| \left|\dfrac{x^2}{x_1^2}\right| + \ldots$

При этом ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ сходится $\Longrightarrow \exists M > 0\ :\ |c_n x_1^n| \le M$

И $\left|\dfrac{x^k}{x_1^k}\right| < 1$, так как $|x| < |x_1|$

Тогда $|c_0| + |c_1 x_1| \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + |c_1 x_1^2| \left|\dfrac{x^2}{x_1^2}\right| + \cdots + |c_k x_1^k| \left|\dfrac{x^k}{x_1^k}\right| < M\left(1 + \left|\dfrac{x}{x_1}\right| + \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^2 + \cdots + \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^k\right)$ - геометрическая прогрессия с $|q| < 1$

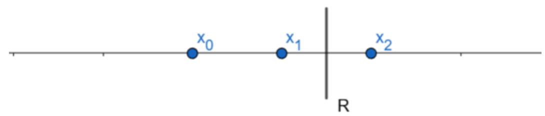
Таким образом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \sim M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{x}{x_1}\right|^n$, который сходится

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно сходится (и равномерно?)

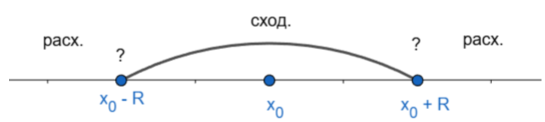
б) От противного, используя пункт а)

$\square$

Nota. Заметим, что должно существовать такое R, для которого для всех x меньше R ряд сходится
Зафиксируем между x_0 и R число $x_0 < r < R$ - тогда $\sum c_n r^n$ - мажорирует $c_n x^n$, то есть ряд сходится равномерно



Def. $R \in \mathbb{R}^+ \Big| \; \forall |x| < R$ ряд сходится, а $\forall |x| > R$ ряд расходится, тогда R называют радиусом сходимости
Для сдвинутого ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \forall x: \; |x - x_0| < R$ - сходится; $\forall x: \; |x - x_0| > R$ - расходится
Сходимость ряда в $x_0 \pm R$ нужно проверять специально



Nota. Чаще всего исследование на сходимость проводится по признакам Даламбера, Коши

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} (-1)^{n+1}$
$\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} \frac{n}{|x|^n} = \lim\limits_{n \to \infty} |x| = |x| < 1$
Предварительно $D = (-1; 1)$.
Далее, рассмотрим $x = \pm 1$:

$(x = 1): \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - сходится

$(x = -1): \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ - расходится

Итак, $D = (-1; 1]$

3. Ряд Тейлора

Mem. Формула Тейлора: $f(x) \in C^{n+1}_{U_\delta(x_0)}$, тогда $f(x) \overset{x \in U_\delta(x_0)}{=\!=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$
Чтобы $f(x)$ в пределе равнялось $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, нужно, чтобы $r_n(x) \to 0$