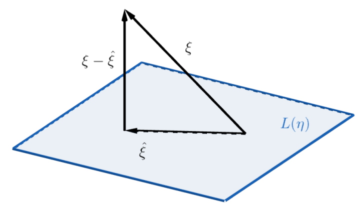
Лекция 14

Пространство случайных величин

Nota. Если две случайных величин $\xi \overset{\text{п.н.}}{=} \eta$, то считаем, что $\xi = \eta$
Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
Введем пространство $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{\xi \mid D\xi < \infty\}$ - множество случайных величин на данном пространстве с конечной дисперсией
Ясно, что L_2 - линейное пространство. Введем на нем скалярное произведение



Def. Скалярным произведением случайных величин ξ и η из $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется число $(\xi, \eta) = E(\xi\eta)$

Nota. Если (ξ, η) - дискретная система случайных величин $(p(\xi = x_i, \eta = y_i) = p_{ij})$, то $E(\xi\eta) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j p_{ij}$
Если же (ξ, η) - непрерывная система с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$, то $E(\xi\eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf_{\xi,\eta}(x, y)dxdy$

Свойства:

1. $(\xi, \eta) = (\eta, \xi)$
2. $(C\xi, \eta) = C(\xi, \eta)$
3. $(\xi_1 + \xi_2, \eta) = (\xi_1, \eta) + (\xi_2, \eta)$
4. $(\xi, \xi) \geq 0$
5. $(\xi, \xi) = 0 \Longrightarrow \xi = 0$ п.н.

То есть это действительно скалярное произведение

Def. Норма вектора равна числу $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$

Def. Метрикой (расстоянием) между случайными величинами называют число $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$

Th. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца
Пусть случайные величины ξ и η имеют конечный второй момент, тогда $|E(\xi, \eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$ (или $|(\xi, \eta)| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$)
Причем $|E(\xi, \eta)| = \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2} \Longleftrightarrow \eta = C\xi$, где $C = \text{const}$

$P_2(x) = E(x\xi - \eta)^2 = x^2 E\xi^2 - 2xE(\xi\eta) + E\eta^2 \geq 0 \Longrightarrow D = 4(E(\xi\eta))^2 - 4E\xi^2 - E\eta^2 \leq 0 \Longrightarrow |E(\xi\eta)| \leq \sqrt{E\xi^2 \cdot E\eta^2}$

$|E(\xi,\eta)| = \sqrt{E\xi^2 - E\eta^2} \Longrightarrow D = 0 \Longrightarrow \exists$ какая-либо точка касания C, из этого $E(C\xi - \eta)^2 = 0 \Longrightarrow C\xi - \eta = 0 \Longleftrightarrow \eta = C\xi$ п.н.

Условное математическое ожидание

В $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ возьмем линейное подпространство $L(\eta) = \{g(\eta) \mid Dg(\eta) < \infty\}$

Def. B. Условное математическое ожидание (УМО, обозначается $E(\xi|\eta) = \hat{\xi}$) случайной величины ξ относительно случайной величины η называется ортогональная проекция случайной величины ξ на $L(\eta)$

Свойства:

1. Тождество ортопроекций: $\exists \hat{\xi} \in L(\eta)$, тогда $\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \Longleftrightarrow E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta))\ \forall g(\eta) \in L(\eta)$

   $\hat{\xi} = E(\xi|\eta) \Longleftrightarrow (\xi - \hat{\xi}) \perp L(\eta) \Longleftrightarrow (\xi - \hat{\xi}, g(\eta)) = 0\ \forall g(n) \in L(\eta) \Longleftrightarrow E(\xi \cdot g(\eta)) = E(\hat{\xi} \cdot g(\eta))$

2. Формула полного математического ожидания
   $E\xi = E(E(\xi|\eta))$ или $E\xi = E\hat{\xi}$

   Nota. При распределении Бернулли получаем обычную формулу полной вероятности

   Верно из тождества ортопроекций при $g(\eta) = 1$

3. Линейность: $E(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 \mid \eta) = C_1E(\xi_1|\eta) + C_2E(\xi_2|\eta)$
4. Если ξ и η независимы, то $E(\xi|\eta) = E\xi$

   ξ, η независимы $\Longrightarrow \xi$ и $g(\eta)$ независимы
   Из этого $E(\xi \cdot g(\eta)) = E\xi \cdot E(g(\eta)) = E(E\xi \cdot g(\eta)) \Longrightarrow E\xi = \hat{\xi}$

5. Если ξ и η независимы, то $(\xi - E\xi) \perp g(\eta)\ \forall g(\eta) \in L(\eta)$, в частности $(\xi - E\xi) \perp \eta$

Докажем, что **Def. A.** согласуется с **Def. B.**

По **Def. A.** $E(\xi|\eta) = h(\eta)$, где $h(y) = E(\xi|\eta = y)$
Рассмотрим случай абсолютно непрерывной системы (ξ, η) с плотностью $f_{\xi,\eta}(x,y)$. Тогда $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx$, где $f(x|y) = \dfrac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}$

Следует доказать, что функция $h(y)$ удовлетворяет тождеству ортопроекций $E(\xi g(\eta)) = E(h(\eta)g(\eta))\ \forall g(\eta) \in L(\eta)$

$E(\xi \cdot g(\eta)) = \iint_{\mathbb{R}^2} x g(y) f_{\xi,\eta}(x,y) dx dy$

$E(h(\eta)g(\eta)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)g(y)f_\eta(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}dx\right)g(y)f_\eta(y) = dy = \iint_{\mathbb{R}^2} xg(y)f_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = E(\xi g(\eta))$

Числовые характеристики. Зависимости случайных величин

Мет. Если случайные величины ξ и η, то $E(\xi\eta) = E\xi E\eta \Longrightarrow E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 0$

Поэтому в качестве индикатора наличия связи берем величину $E(\xi\eta) - E\xi E\eta = \mathrm{cov}(\xi,\eta)$

Def. Ковариацией (ξ,η) называется величина $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))$

Свойства:

1. $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$

   $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = E(\xi\eta - \eta E\xi - \xi E\eta + E\xi E\eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$

2. $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = D\xi$

   $\mathrm{cov}(\xi,\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$

3. $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{cov}(\eta,\xi)$
4. $\mathrm{cov}(C_1\xi_1 + C_2\xi_2, \eta) = C_1\mathrm{cov}(\xi_1,\eta) + C_2\mathrm{cov}(\xi_2,\eta)$
5. $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + 2\mathrm{cov}(\xi,\eta)$
6. $D(\xi_1 + \cdots + \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{i<j}\mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j) = \sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j)$
7. (a) Если ξ и η - независимы, то $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$
   (b) Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta) \neq 0$, то ξ и η - зависимы
   (c) Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$, то неясно
8. Если $\mathrm{cov}(\xi,\eta) > 0$, то зависимость прямая, если $\mathrm{cov}(\xi,\eta) < 0$, то обратная

Nota. Ковариация зависит от единиц измерения случайных величин, поэтому по ее величине нельзя судить о силе зависимости

Коэффициент линейной корреляции

Def. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η с конечными вторыми моментами, называется величина $r_{\xi,\eta} = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = \dfrac{E(\xi\eta) - E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$

Можно записать в другой форме: $r_{\xi,\eta} = \dfrac{E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))}{\sqrt{E(\xi - E\xi)^2}\sqrt{E(\eta - E\eta)^2}} = \dfrac{(\xi - E\xi, \eta - E\eta)}{\|\xi - E\xi\| \|\eta - E\eta\|} = \cos(\widehat{\xi - E\xi, \eta - E\eta})$ - косинус угла между величинами (грубая интерпретация)

Свойства:

1. $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
2. (a) Если ξ и η - независимы, то $r_{\xi,\eta} = 0$
   (b) Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то ξ и η - зависимы
   (c) Если $r_{\xi,\eta} = 0$, то неясно
3. $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$

   По неравенству Коши-Буняковского-Шварца $|E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| \leq \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2}$

4. $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Longleftrightarrow \eta = a\xi + b$ п.н.

   По неравенству Коши-Буняковского-Шварца $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Longleftrightarrow |E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta))| = \sqrt{E(\xi - E\xi)^2 E(\eta - E\eta)^2} \Longrightarrow \eta - E\eta = C(\xi - E\xi) \Longrightarrow \eta = C\xi + (E\eta - CE\xi)$ п.н.

5. (a) Если $r_{\xi,\eta} = 1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a > 0$ (прямая линейная зависимость)
   (b) Если $r_{\xi,\eta} = -1$, то $\eta = a\xi + b$ и $a < 0$ (обратная линейная зависимость)

   Так как $|r_{\xi,\eta}| = 1$, то по свойству 4) $\eta = a\xi + b$ и $r_{\xi,\eta} = \dfrac{E(\xi\eta) - E\xi E\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \dfrac{E(\xi(a\xi + b)) - E\xi E(a\xi + b)}{\sqrt{D\xi D(a\xi + b)}} = \dfrac{aE\xi^2 + bE\xi - a(E\xi)^2 - bE\xi}{\sqrt{D\xi a^2 D\xi}} = \dfrac{a(E\xi^2 - (E\xi)^2)}{|a| D\xi} = \dfrac{a}{|a|} = \operatorname{sign} a$

Def. Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то говорят, что случайные величины коррелированы друг с другом. Если $r_{\xi,\eta} > 0$, то имеет прямая корреляция, если $r_{\xi,\eta} < 0$ - обратная

Nota. Корреляция не транзитивна: $r_{\xi_1,\xi_2} > 0 \land r_{\xi_2,\xi_3} > 0 \not\Longrightarrow r_{\xi_1,\xi_3} > 0$