

Th. $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n, \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \implies \exists \{e_i\}_{i=1}^n, e_1$ - собственные вектора \mathcal{A} и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

□ e_1 - собственный вектор \mathcal{A}

e_1 найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиальное решение $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0 \xRightarrow{\mathcal{A} - \text{самосопр.}} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора e_1 строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве V_1 \mathcal{A} действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$.

Для e_2 строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, V_3, V_4, V_5, \dots , в котором, найдя e_i , ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из e_i , который можно нормировать

□

Nota. Чтобы упорядочить построение базиса, в котором V_i может брать $\max \lambda_i$

Nota. Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализуется: Σ алг. крат. = n (степень уравнения), а Σ геом. крат. = $\dim\{e_1, \dots, e_n\} = n$

Разложение самосопряж. оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов \mathcal{A} (ортонорм.)

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x, e_1) e_1 + \dots + (x, e_n) e_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

Def. Оператор $P_i x = (x, e_i) e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

Свойства:

$$1) P_i^2 = P_i \text{ (более того } P_i^m = P_i)$$

$$2) P_i P_j = 0$$

$$3) P_i = P_i^* \quad ((P_i x, y) \stackrel{?}{=} (x, P_i y)) \iff (P_i x, y) = ((x, e_i) e_i, y) = (x, e_i) (e_i, y) = (x, (y, e_i) e_i) = (x, P_i y)$$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \rightarrow V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов \mathcal{A} , то

$$x = \sum_{i=1}^n P_i x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i$$

$$\mathcal{A}x \stackrel{y=\sum (y, e_i) e_i}{=} \sum_{i=1}^n (\mathcal{A}x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \mathcal{A}e_i) e_i = \sum_{i=1}^n (x, \lambda_i e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x, e_i) e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i x$$

$$\iff \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i - \text{спектральное разложение } \mathcal{A}, \text{ спектр} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n \mid \lambda_i \leq \dots \leq \lambda_n\}$$

Ex.

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1) e_1 + (y, e_2) e_2 = (\mathcal{A}x, e_1) e_1 + (\mathcal{A}x, e_2) e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$$

2.9. Ортогональный оператор

Mem. Орт. оператор $T : V^n \rightarrow V^n \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \text{ о/н базиса матрица } T - \text{ортогональная } T^{-1} = T^T$

Nota. Иначе, T - ортогональный оператор $\iff T^{-1} = T^* \implies TT^* = I$

Def. T - ортог. оператор, если $(Tx, Ty) = (x, y)$

Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

Nota. Ранее в теореме об изменении матрицы A при преобразовании координат T - ортогональный оператор

Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (док-во теоремы позволяет)

Диагонализация самосопряженного оператора:

Дана матрица A_f

1) Находим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

2) Находим e_1, \dots, e_n - ортогональный базис собственных векторов

3) Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса

4) Находим $T_{e \rightarrow f} A_f T_{f \rightarrow e} = A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного \mathcal{A} - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлениям

3. Билинейные и квадратичные формы

3.1. Билинейные формы

Def. $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B} : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x, y)$) называется билинейной формой, если выполнены

- 1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z) + \mu \mathcal{B}(y, z)$
- 2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x, y) + \mu \mathcal{B}(x, z)$

Ex.

- 1) $\mathcal{B}(x, y) \stackrel{\text{в } E_{\mathbb{R}}^n}{=} (x, y)$
 - 2) $\mathcal{B}(x, y) = P_y x$ - проектор x на y
- Матрица Б.Ф.

Th. $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис V_n , $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

□

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$$

$$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, v) &= \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i=1}^n u_i \mathcal{B}(e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j) = \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)\right) \stackrel{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i, e_j) = b_{ij}}{=} \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j b_{ij} \end{aligned}$$

□

Nota. Составим матрицу из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Def. Если

- 1) $\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{B}(v, u)$, то \mathcal{B} - симметричная
- 2) $\mathcal{B}(u, v) = -\mathcal{B}(v, u)$, то \mathcal{B} - антисимметричная
- 3) $\mathcal{B}(u, v) = \overline{\mathcal{B}(v, u)}$, то \mathcal{B} - кососимметричная (в \mathbb{C})

Def. $\text{rang} \mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rang} B$

Nota.

- 1) \mathcal{B} называется невырожденной, если $\text{rang} \mathcal{B} = n$

2) $\text{rang} \mathcal{B}_e = \text{rang} \mathcal{B}_{e'}$ (e, e' - различные базисы V^n), то есть $\text{rang} \mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \rightarrow e'$

Ex. $\mathcal{B}(u, v) \stackrel{\text{ск. пр.}}{=} (u, v)$

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, тогда $\mathcal{B}(e_i, e_j) \stackrel{\text{об}}{=} b_{ij} = (e_i, e_j)$
 $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$

Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

Ex. $\begin{matrix} u(t) = 1 + 3t \\ v(t) = 2 - t \end{matrix}$, $\{e_i\} = (1, t)$, $\mathcal{B}(u, v) = (u, v) = \int_{-1}^1 u v dt$

Тогда, $B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 dt & \int_{-1}^1 t dt \\ \int_{-1}^1 t dt & \int_{-1}^1 t^2 dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$