

$$\square$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из u_1 и получаем число гарантированно меньшее u_1

По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность $\square \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} \stackrel{0}{=} S \in \mathbb{R}$$

\square

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \implies \text{ряд сходится}$$

Nota. Оценка остатка ряда

$$\text{Запишем ряд: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k = S_n + \underset{\uparrow \text{остаток ряда}}{R_n}$$

В доказательстве **Th.** было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1} u_k| = u_k = u_{n+1}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \underbrace{\frac{1}{32}}_{R_4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

$$|R_4| < \frac{1}{32}$$

$$\text{Проверка: } -\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) - \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{256}\right) - \dots = - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \underline{\text{Lab.}} \text{ досчитать и сравнить с } \frac{1}{32}$$

Nota. Оценка не работает в знакоположительных рядах

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$R_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$$

Def. Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \text{ где } u_n - \text{любого знака и не все } u_n \text{ одного знака}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

Nota. Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

Th. Абсолютная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится}$$

Mem. См. абсолютную сходимость в [несобственных интегралах](#)

□

По критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

По неравенству треугольника:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$$

□

Nota. Обратное неверно!

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ сходится

Но $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ сходится, он называется **абсолютно сходящимся**

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ расходится, он называется **условно сходящимся**

Nota. Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезненна и сохраняет сумму ряда

Nota. На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов

1) Признак сравнения: $|u_n| < |v_n| : \sum |v_n| \text{ сходится} \implies \sum |u_n| \text{ сходится}$

2) Предельный признак: $\lim \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) $D = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

4) $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$

5) $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сравнивается с $\sum |u_n|$

§2. Функциональные ряды

1. Определения

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется функциональным

Nota. При фиксации переменной x ряд становится числовым

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится

Таким образом для $|x| < 1$ ряд будет сходящимся, для $|x| > 1$ расходящимся

Def. Множество значений x , при которых $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости

Def. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E , то сумма ряда - функция $S(x)$

Nota. То есть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток: $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Часто удобно исследовать $R_n(x) \rightarrow 0$. Также работает критерий Коши

Th. Критерий Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x) \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

Nota. Очень неприятно, что n_0 зависит от ε и всякого x

Def. Равномерная сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n(x) \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Nota. Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

Th. Признак Вейерштрасса

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \leq \alpha_n \forall n$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся

Nota. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим (то есть преобладающий), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - мажорируемым

\square
 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n^\alpha \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Заменим на условие $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$ (кр. Коши)

$$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \leq |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \leq \alpha_n + \dots + \alpha_m \leq \varepsilon$$

При этом номер n_0 зависит только от ε

\square

Nota. Таким образом всякий мажорируемый ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

Nota. Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

Ex. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$$

$$\text{При } x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$$

$$\text{При } x < 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$$

$$\text{При } x = 0 \quad S_n = 0$$