5. Интеграл ФНП

5.1 Общая схема интегрирования

Постановка задачи.

В некоторой области Ω (дуга кривой, участок поверхности, тело и т. д.) распределена или действует непрерывно некоторая функция скалярная g или векторная $\overrightarrow{G}$, то есть определены $g(M)$ или $\overrightarrow{G}$ $\forall M \in \Omega$

Ex. Область Ω - дуга кривой $l : y = y(x)$
Скалярная функция $g(M)$ - плотность в точке M

Ex. Область Ω - трубка в $\mathbb{R}^3$
Векторная величина $\overrightarrow{G}(M)$ - скорость жидкой частицы, движущейся по трубке
Из всех векторов $\overrightarrow{v}$ (для всех $M \in \Omega$) складывается «поле жидких скоростей»

Ex. Область Ω - кривая, по которой движется точка M под действием силы $\overrightarrow{G}(M)$

Задача интегрирования - найти суммарное содержание скалярной величины или действие векторной величины в области Ω

Схема Величины $g(M)$ и $\overrightarrow{G}(M)$, меняясь от точки к точке заменяются на квазипостоянные на малых (элементарных) участках $d\omega$

Так как $g(M)$ или $\overrightarrow{G}(M)$ должны быть непрерывны на Ω, то на малом участке $d\omega$ их изменение незначительно и значение функции можно считать почти постоянным, приняв за это значение какое-либо среднее $g_{\text{ср.}}(M), \overrightarrow{G_{\text{ср.}}}(M)$

Тогда элементарное содержание $g(M)$ в $d\omega$ будет отличаться от среднего содержания, то есть $g_{\text{ср.}} d\omega$ на б. м. большего порядка

Ex. Проиллюстрируем на примере $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

S - площадь по наибольшей границе, σ - площадь по наименьшей границе, $S_{\text{трап.}}$ - «истинная» площадь

Т. к. $f(x)$ непр. $\forall x \in [a, b]$, то $\Delta f \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

Для простоты рассмотрим монотонно возрастающую $f(x)$

Хотим доказать, что $S - S_{\text{трап.}}$ - б. м. большего порядка, чем $S_{\text{трап.}}$ или S

$$0 \le S - S_{\text{трап.}} \le dx\Delta y$$

Сравним $\dfrac{dx\Delta y}{S} = \dfrac{dx\Delta y}{dxf(x+\Delta x)} = \dfrac{\Delta y}{\text{огр.}} \overset{\Delta x \to 0}{\to} 0$

таким образом $S - S_{\text{трап.}} = 0(S_{\text{трап.}})$

Смысл интеграла в случае векторной функции $\overrightarrow{G}(M)$

Будем интегрировать только скалярные выражения вида $\overrightarrow{G}(M) \cdot d\overrightarrow{\omega}$ - скал. произведение векторов, где $d\overrightarrow{\omega}$ - ориентированный элемент $d\omega$

Ex. Сила $\overrightarrow{F}(M)$ перемещает точку M вдоль плоской кривой l. При этом сила совершает работу по перемещению (работа A - скалярная величина)

Известна формула для $\overrightarrow{F} = const$ и перемещения $\overrightarrow{s}$ по прямой: $A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}$

Разобьем дугу на элементы $dl \approx ds$ и ориентируем их (зададим направление перемещению ds)

$dl = ds + o(dl)$, $d\overrightarrow{s}$ - вектор элем. перемещения, как правило, ds направлен согласовано с Ox

Элемент работы $dA = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{s} = (F_x, F_y) \cdot (dx, dy) \overset{\text{обозн.}}{=} (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$ - скаляр. Вся работа равна $A = \int dA$

Nota. Ориентированный участок поверхности $d\overrightarrow{\sigma}$ - это размер участка $d\sigma$, умноженный на вектор нормали к участку $\overrightarrow{n}$, то есть $d\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{n}d\sigma$

Итак. Схема интегрирования:

1* Дробление области Ω на элементы $d\omega$ 2* Выбор постоянного значения функции на $d\omega$, то есть $g_{\text{ср.}}$ или $\overrightarrow{G_{\text{ср.}}}$ 3* Составление подынтегрального выражения $g_{\text{ср.}}d\omega$ или $\overrightarrow{G_{\text{ср.}}}d\overrightarrow{\omega}$ 4* «Суммирование» элементарных величин $\int gd\omega$ или $\int \overrightarrow{G}d\overrightarrow{\omega}$

5.2. Классификация интегралов

1* По размерности Ω

$n = 1$: * прямая (определенный интеграл $\int_a^b$)

* кривая (криволинейный интеграл $\int_A^B$)

$n = 2$: * плоскость (двойной интеграл $\iint_D$)

* поверхность, не криволинейная (поверхностный интеграл $\iint_S$)

$n = 3$: * пространство $\mathbb{R}^3$ (тройной $\iiint_V$ или $\iiint_T$)

2* По виду функции

скалярная $g(M)$ векторная $\overrightarrow{G}(M)$

$n = 1$ определенный, криволинейный I рода криволин. II рода (интегралы в проекциях)

$n = 2$ двойной, поверхн. I рода поверхн. II рода

$n = 3$ тройной