Содержание

1. Евклидовы пространства

1.1. Скалярное произведение

L - линейное пространство $\quad \forall x, y \in L \quad \underset{x,y \to c \in \mathbb{R}}{c = (x, y)}$ – ск. произв.

1. $(x, y) = (y, x)$
2. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$
4. $\forall x \in L\ (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

Если векторы и коэффициенты комплексно-значные, то определения будут другими!

Def. Скалярная функция $c = (x, y)$ со свойствами 1-4 называется скалярным произведением элементов x и y

Def. Линейное пространство со скалярным произведением называется Евклидовым

Ex. 1. ЛП - пространство геометрических векторов

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{bmatrix} |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi, & \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq 0 \\ 0, & \overrightarrow{a} = 0 \vee \overrightarrow{b} = 0 \end{bmatrix}$$

Ex. 2. ЛП $= C_{[a;b]}$

$$(f(x), g(x)) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Очевидно, что 1-3 выполняются, проверим 4:

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} f(x) = 0$$

Ex. 3. ЛП - пространство числовых строк вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$(x, y) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ - сумма произведений компонент

1.2. Свойства евклидова пространства - E

Th. Неравенство Коши-Буняковского

$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

□

Нетрудно заметить, что:

$\lessdot (\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x - y, \lambda x) - (\lambda x - y, y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \overset{\text{пусть}}{=} 0$

Решим относительно λ

$D = 4(x,y)^2 - 4(x,x)(y,y)$

$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y)$

Так как $(\lambda x - y) \geq 0$ (4-ое свойство ск. произв.), то уравнение имеет ≤ 1 корня, значит $\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$

□

1.3. Норма

ЛП $= L, \forall x \in L$ определена функция так, что выполняется $x \to n \in \mathbb{R}, n = \|x\|$

1. $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in L$ - неравенство треугольника

Евклидово пространство с нормой называется нормированным

Th. E^n является нормированным, если $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

□

Свойства 1-2 очевидны, докажем 3 свойство:

$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)} = \|x\| + \|y\|$

$\sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$

$(x,x)+2(x,y)+(y,y) \leq (x,x)+(y,y)+2\sqrt{(x,x)(y,y)}$

$(x,y) \leq \sqrt{(x,x)(y,y)}$

$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$ - верно по неравенству Коши-Буняковского

□

Обобщим геометрические понятия ортогональности и косинуса угла на случай произвольных векторов

Def. x, y - ортогональны, если $(x,y) = 0$ и $x \neq 0$ и $y \neq 0 \quad x \perp y$

Def. $\cos(\widehat{x,y}) = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ - косинус угла между векторами

Def. $x, y \in E^n \quad x \perp y \quad z = x + y$ - гипотенуза

Th. $x \perp y$, тогда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

□

$\|x+y\|^2 = (x+y,x+y) = (x,x)^2 + \underbrace{2(x,y)}_{=0, x \perp y} + (y,y)^2 = (x,x)^2 + (y,y)^2$

□

Def. $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис L^n

На L^n введены (x, y) и $\|x\|$ (то есть $L^n \to E^n_{\|\cdot\|}$ - нормированное евклидово)

B называют ортонормированным базисом, если $(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

Nota. Докажем, что всякая такая система из n векторов линейно независима (то есть всякая нулевая комбинация тривиальная):

$\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \forall \lambda_i = 0$

$(e_k, \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i (e_k, e_i) \overset{k\neq i \Rightarrow (e_k, e_i)=0}{=\!=} \lambda_k \|e_k\|^2 = \lambda_k = 0 \quad \forall k$

(записи внезапно обрываются)

Nota. Изоморфизм $E^n \to E'^n$ позволяет переносить свойства скалярного произведения из одного в другое пространство

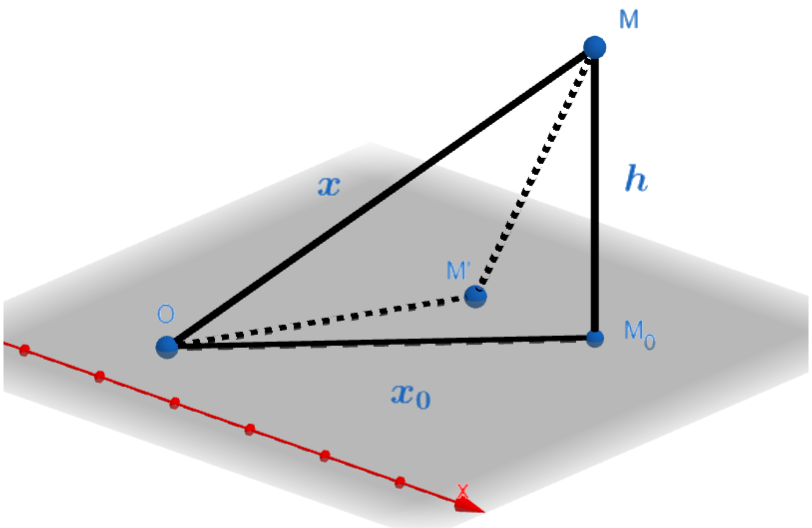
Ex: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - арифметические векторы со скалярным произведением $(x, y) = \Sigma_{i=1}^n x_i y_i$

$E'^n \in C_{[a;b]}$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_a^b f * g dx$

$\sqrt{\int_a^b (f * g)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g^2 dx}$

Задача о перпендикуляре

Постановка: Нужно опустить перпендикуляр из точки пространства E^n на подпространство G



Точка M - конец вектора x в пространстве E^n. Нужно найти M_0 (конец вектора x_0, проекции x на G)

$$x_0 + h = x$$

где $h \perp G$. Правда ли что, длина перпендикулярного вектора h - минимальная длина от точки M до G?

Th. $h \perp G, x_0 \in G, x = x_0 + h$. Тогда $\forall x' \in G (x' \neq x_0) \quad \|x - x'\| > \|x - x_0\|$
$\square \|x - x'\| = \|x - x_0 + x_0 - x'\| \overset{\text{по теореме Пифагора}}{=\!=\!=} \|x - x_0\| + \|x_0 - x'\| = \|h\| + \|x_0 - x'\| > \|x - x_0\|$

Nota. x_0 называется ортогональной проекцией, возникает вопрос о ее вычислении (так находятся основания перпендикуляров)

Алгоритм: $x_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e2 + \dots + \lambda_k + e_k$, $\{e_i\}_{i=1}^k$ - базис G (необязательно ортонормированный)
Дан вектор x, пространство G, нужно найти λ_i
$h = x - x_0,\ h \perp G \quad (h, e_i) \overset{h \perp e_i\ \forall i}{=} 0$
$(x - x_0, e_i) = (x, e_i) - (x_0, e_i) = 0$
$(x, e_i) = (x_0, e_i)$
Тогда $\forall i \quad (x_0, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k, e_i) = \lambda_1 (e_1, e_i) + \dots + \lambda_k (e_k, e_i)$ - (e_k, e_i) - числа, а λ_i - неизвестные
Получили СЛАУ:

$$\begin{vmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_k, e_1) & (e_k, e_2) & \dots & (e_k, e_k) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \Gamma \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$$

Nota. В матрице Γ нет нулевых строк, так как e_i - бизисная и по крайней мере $e_i^2 \neq 0$
Таким образом по теореме Крамера $\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

Def. Матрицу $\Gamma = (e_i, e_j)_{i,j=1\dots k}$ называют матрицей Грама

$\Gamma = I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$, если базис ортонормированный
Далее, I - единичная матрица Грама

Nota. Тогда $I \times \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x, e_1) \\ \dots \\ (x, e_k) \end{vmatrix}$

Приложения задачи о перпендикуляре

1) Метод наименьших квадратов
В качестве простейшей модели зависимости $y = y(x)$ берем линейную функцию $y = \lambda x$
Ищем минимально отстоящую прямую от данных (x_i, y_i), то есть ищем λ

Определим расстояние (в этом методе) как $\sigma^2 = \Sigma_{i=1}^{n}(y_i - y_{0i})^2 = \Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \lambda x_i)^2$ - минимизируем

Таким образом, ищем y_0 (ортог. проекция) такое, что $(y - y_0)^2 = \sigma^2$ - минимальное

Если $y_0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$, где x_i - набор измерений для i-ой точки

Рассмотрим y_0 как разложение по базису $\{x_i\}$

2) Многочлен Фурье

$P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots a_n \cos nt + b_n \sin nt$ - линейная комбинация

Функции $1, \cos t, \sin t, \dots, \cos nt, \sin nt$ - ортогональны

Задача в том, чтобы для функции $f(t)$, определенной на отрезке $[0; 2\pi]$ найти минимально отстоящий многочлен $P(t)$ при том, что расстояние определяется как $\sigma^2 = \int_0^{2\pi} (f(t) - P(t))^2 dt$

Нужно найти a_i и b_i - обычные скалярные произведения $a_i = k \int_0^{2\pi} f(t) \cos(it) dt$, $b_i = m \int_0^{2\pi} f(t) \sin(it) dt$ (k, m - нормирующие множители)

2. Линейный оператор (линейное отображение, линейный функционал, линейное преображение)

2.1. Определение

Линейный оператор - это отображение $V^n \overset{\mathcal{A}}{\Longrightarrow} W^m$
(V^n, W^m - линейные пространства размерности $n \neq m$ в общем случае),
которое $\forall x \in V^n$ сопоставляет один какой-либо $y \in W^m$ и
$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathcal{A} x_1 + \mu \mathcal{A} x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2$

Nota. Заметим, что если 0 представим как $0 * x$, где $x \neq 0$, то
$\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(0 * x) = 0 * \mathcal{A}x \overset{0*y}{=} 0$

Nota. Если $V = W$, то $\mathcal{A}$ называют линейным преобразованием, но далее будем рассматривать в основном операторы $\mathcal{A}: \quad V \to V$, $\mathcal{A}: \quad V^n \to W^n$

Ex. 1. $V = \mathbb{R}^2$ - пространство направленных отрезков
$\mathcal{A}: V \leftarrow V$
$\mathcal{A}x = y = \lambda y_1 + \mu y_2$ для таких $\mathcal{A}$ как сдвиг, поворот, гомотетия, симметрия

Ex. 2. $V^n = W^m$, где $m < n$
$\mathcal{A}$ - оператор проектирования (убедиться, что он линейный)

Ex. 3. V^n - пространство числовых строк длины n
$\mathcal{A}: V^n \leftarrow V^n$
$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\mathcal{A}x = y : \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} x = y$$

2.2. Действия с операторами

Def. $\mathcal{A}\mathcal{B}: V \to W$

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x \overset{def}{=} \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ - определение суммы $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$
2. $(\lambda \mathcal{A})x \overset{def}{=} \lambda(\mathcal{A}x)$ - $\lambda \mathcal{A} = \mathcal{D}$

Nota. Сформируем линейное пространство из операторов $\mathcal{A}: V \to W$

1. Ассоциативность сложения (очевидно)
2. Коммутативность (очевидно)
3. Нейтральный элемент $\mathcal{O}x = 0$
4. Противоположный: $-\mathcal{A} = (-1) * A$
5. ... *LAB*

Def: $\mathcal{I}$ - тождественный - $\forall x \in V \quad \mathcal{I}x = x$

Def. Произведение операторов (композиция)

$\mathcal{AB}$ - произведение, $\mathcal{A}: V \to W;\ \mathcal{B}: U \to V$

$(\mathcal{AB})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x); \quad x \in U$

Свойства: Lab доказать

1* $\lambda(\mathcal{AB}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$

2* $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}$

3* $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}$

4* $\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C}$

Nota. Можно обобщить 4* на n равных $\mathcal{A}$

Def. $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \dots \mathcal{A}$ - n раз, степень оператора

Свойства: $\mathcal{A}^{m+n} = \mathcal{A}^n \cdot \mathcal{A}^m$

2.3. Обратимость оператора

Def: $\mathcal{A}: V \to W$ так, что $\mathcal{A}V = W$ и $\forall x_1 \neq x_2 (x_1, x_2 \in V)$ $\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x_1 \\ y_2 = \mathcal{A}x_2 \end{cases} \Longrightarrow y_1 \neq y_2$

Тогда $\mathcal{A}$ называется взаимно-однозначно действующим

Nota: Проще сказать «линейный изоморфизм»

Th. $\{x_i\}$ - линейно независима $\xrightarrow{\mathcal{A}x=y}$ $\{y_i\}$ - линейно независима

В обратную сторону, если $\mathcal{A}$ - взаимно-однозначен

$\square \sqsupset \mathcal{A}: V \to W$ и $0_V, 0_W$ - нули V и W соответственно

1. $\mathcal{A}(0_V) = \mathcal{A}(\sum\limits_{i=1}^{k} 0 \cdot e_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} 0 \cdot \mathcal{A}e_i = 0_W$
2. Докажем, что если $x_i \subset V$ - лин. нез., то $y_i \subset W$ - лин. нез.

   Составим $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j y_j = 0_W$ (От противного) $\sqsupset \{y_i\}$ - лин. зав., тогда $\exists \lambda_k \neq 0$

   При этом $\forall j \quad y_j = \mathcal{A}x_j$ (т. к. $\mathcal{A}$ - вз.-однозн., то $n' = m'$: кол-во x_i и y_i равно)

   $\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j \mathcal{A}x_j \overset{\text{линейность}}{=} \mathcal{A}(\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j) = 0_W$

Так как $\mathcal{A}0_V = 0_W$, то 0_W - образ $x = 0_V$, но так как $\mathcal{A}$ - вз.-однозн., то $\nexists x' \neq x \mid \mathcal{A}(x') = 0_W$

Значит $\sum\limits_{j=1}^{m'} \lambda_j x_j = 0_V$, но $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{x_j\}$ - лин. зав. - противоречие

3. $\sqsupset$ теперь $\{y_i\}$ - л. нез., а $\{x_i\}$ (по предположению от противного) - лин. зав.

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i x_i \overset{\exists \lambda_k \neq 0}{=} 0_V \quad \Big| \mathcal{A}$$

$$\sum_{i=1}^{n'} \lambda_i \mathcal{A} x_i = 0_W$$

При этом $\exists \lambda_k \neq 0 \Longrightarrow \{y_i\}$ - лин. зав. - противоречие

Следствие: $\dim V = \dim W \Longleftarrow \mathcal{A}$ - лин. изоморфизм

Def: $\mathcal{B} : W \to V$ называется обратным оператором для $\mathcal{A} : V \to W$

если $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$ (обозначается $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$)

Следствие: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}x = x$

Th. $\mathcal{A}x = 0$ и $\exists \mathcal{A}^{-1}$, тогда $x = 0$

$\square \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^{-1}0_W = 0_V \Longrightarrow x = 0$

Th. Необходимые и Достаточные условия существования $\mathcal{A}^{-1}$

$\exists \mathcal{A}^{-1} \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

$\square \Longrightarrow \exists \mathcal{A}^{-1}$, но $\sqsupset \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V (x_1 \neq x_2) \mid \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0_W \overset{\exists \mathcal{A}^{-1}}{\Longrightarrow} x = 0_V \Longleftrightarrow x_1 = x_2$ - противоречие

$\Longleftarrow$ Так как $\mathcal{A}$ - изоморфизм (не учитывая линейность), то $\exists \mathcal{A}'$ - обратное отображение (не обязат. линейное)

Докажем, что $\mathcal{A}' : W \to V$ - линейный оператор

? $\mathcal{A}'(\sum \lambda_i y_i) = \sum \lambda_i \mathcal{A}' y_i = \sum \lambda_i x_i$

$\mathcal{A}$ - вз.-однозн. $\Longleftrightarrow \forall x_i \longleftrightarrow y_i \quad \Big| \cdot \lambda_i, \sum$

$\mathcal{A}(\sum \lambda_i x_i) = \mathcal{A}x = y = \sum \lambda_i y_i$ и y имеет только один прообраз x

Применим $\mathcal{A}'$ к $y = \sum \lambda_i y_i \quad \mathcal{A}'y = x = \sum \lambda_i x_i$ - единственный прообраз y

Таким образом, $\mathcal{A}'$ переводит лин. комбинацию в такую же лин. комбинацию прообразов, то есть $\mathcal{A}'$ - линейный: $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^{-1}$

2.4. Матрица ЛО

$\mathcal{A} : V^n \to W^m$

Возьмем вектор $x \in V^n$ и разложим по какому-либо базису $\{e_j\}_{j=1}^n$

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^n c_j e_j) = \sum_{j=1}^n c_j \mathcal{A} e_j$$

$$\mathcal{A}e_j \overset{\text{образ базисного вектора}}{=} y_j \overset{\{f_i\} - \text{ базис } W^m}{=} \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$$

$\mathcal{A}x = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_j a_{ij} f_i$

Иллюстрация:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Def: Матрица $A = {a_{ij}}_{i=1..m, j=1..n}$ называется матрицей оператора $\mathcal{A} : V^n \to W^m$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ пространства V^n

Вопросы:

1) $\forall ? \mathcal{A}\ \exists A$

2) $\forall ? A\ \exists \mathcal{A}$

3) если $\exists A$ для $\mathcal{A}$, то единственная?

4) если $\exists \mathcal{A}$ для A, то единственная?

Ответы:

1) При выбранном базисе $\{e_j\}$ $\forall \mathcal{A}\ \exists A$ (алгоритм выше)

3) такая A единственная $\Longrightarrow$ в разных базисах матрицы ЛО $\mathcal{A}\quad A_e \neq A_{e'}$

2) $\forall A_{m\times n}$ можно взять пару ЛП V^n, W^m и определить $\mathcal{A} : V^n \to W_n$ по правилу $\mathcal{A}e_V = e'_W$

4) Lab.

Nota: Далее будем решать две задачи

1) преобразование координат как действие оператора

2) поиск наиболее простой матрицы в некотором базисе

2.5. Ядро и образ оператора

Def. Ядро оператора - $Ker\mathcal{A} \overset{def}{=} \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0_W\}$

Def. Образ оператора - $Im\mathcal{A} \overset{def}{=} \{y \in W \mid \mathcal{A}x = y\}$

Nota. $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$ - подпространства

Nota. $Ker\ \mathcal{A}$ и $Im\ \mathcal{A}$ - подпространства V $(\mathcal{A} : V \to V)$

Вообще-то $Ker\ \mathcal{A} \subset V, Im\ \mathcal{A} \subset W$ $(\mathcal{A} : V \to W)$

$\dim W \leq \dim V$, тогда можно считать, что $W \subset V'$ и рассмотрим $\mathcal{A} : V \to V'$ (где V' изоморфен V)

$Ker\mathcal{A}$ - подпространство, то есть $Ker\mathcal{A} \subset V$ и $\sum c_i x_i \subset \mathcal{A}$, если $\forall x_i \in Ker\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(\sum c_i x_i) = \sum c_i \mathcal{A}x_i \overset{x_i \in \mathcal{A}}{=} \sum c_i 0 = 0$

Следствие: $Ker\mathcal{A} = 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ - вз.-однозн.

□ От противного:

$\sqsupset \mathcal{A}$ - не вз.-однозн., то есть $\exists x_1, x_2 \in V(x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \in Ker\mathcal{A}$ - противоречие

Nota. Обратное также верно:

$\mathcal{A}$ - вз.-однозн. $\Longleftrightarrow y_1 = y_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$, так как $\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 = 0$

Тогда 0 является образом только 0-вектора $\Longrightarrow Ker\mathcal{A} = 0$

Nota. Также очевидно, что

$Ker\mathcal{A} = 0 \Longleftrightarrow Im\mathcal{A} = V$

$Ker\mathcal{A} = V \Longrightarrow Im\mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A} = 0$

Th. $\mathcal{A} : V \to V$, тогда $\dim Ker\mathcal{A} + \dim Im\mathcal{A} = \dim V$

□ Так как $Ker\mathcal{A}$ - подпространство V, то можно построить дополнение до прямой суммы (взяв базисные векторы ядра, дополнить их набор до базиса V: $e_1^k, \dots e_m^k, e_{m+1}^k, \dots e_n^k$)

Обозначим дополнение W, тогда $Ker\mathcal{A} \oplus W = V \Longrightarrow \dim Ker\mathcal{A} + \dim W = \dim V$

Докажем, что W и $Im\mathcal{A}$ - изоморфны

$\mathcal{A} : W \to Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A} : Ker\mathcal{A} \to 0$

Докажем, что $\mathcal{A}$ действует из W в $Im\mathcal{A}$ взаимно-однозначно

$\sqsupset \mathcal{A}$ невз.-однозн., тогда $\exists x_1, x_2 \in W(x_1 \neq x_2) | \mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2 \in Im\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \overset{\text{обозн.}}{=} x \in Ker\mathcal{A}$, но $x \neq 0$, так как $x_1 \neq x_2$

Но для прямой суммы $W \cup Ker\mathcal{A} = 0, x \ni W \cup Ker\mathcal{A} \Longrightarrow$ предположение неверно

$\Longrightarrow \mathcal{A}$ - лин. вз.-однозн. $\Longrightarrow \dim W = \dim Im\mathcal{A}$

$V = W_1 \oplus W_2$ найдется ЛО $\mathcal{A} : V \to V$

$W_1 = Ker\mathcal{A}, W_2 = Im\mathcal{A}$

Def. Рангом оператора $\mathcal{A}$ называется $\dim Im\mathcal{A}$: $rang\mathcal{A} \overset{def}{=} \dim Im\mathcal{A} (= r(\mathcal{A}) = rank\mathcal{A})$

Nota. Сравним ранг оператора с рангом его матрицы

$\mathcal{A}x = y \quad \mathcal{A} : V^n \to W^m$

A - матрица $\mathcal{A}, x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n, y = y_1f_1 + \dots + y_mf_m$

$$\mathcal{A}x = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Или при преобразовании базиса $Ae_i = e_i'$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_m' \end{pmatrix}$$

Здесь $\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}^T$ - это матрица $\begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots \end{pmatrix}$

Nota. Поиск матрицы $\mathcal{A}$ можно осуществить, найдя ее в «домашнем» базисе $\{e_i\}$, то есть $A(e_1, \dots e_n) = (e'_1, \dots, e'_m)$

Затем, можно найти матрицу в другом (нужном) базисе, используя формулы преобразований (см. позже)

Тогда $Ker\mathcal{A} = K$ - множество векторов, которые решают систему

$AX = 0 \quad (\dim K = m = \dim \text{ФСР} = n - rangA)$ и при этом $\dim K = n - \dim Im\mathcal{A}$

$rang\mathcal{A} = rangA = \dim Im\mathcal{A}$

Следствия (без док-в)

1) $rang(\mathcal{A}\mathcal{B}) \le rang(\mathcal{A})$ (или $rang\mathcal{B}$)

2) $rang(\mathcal{A}\mathcal{B}) \ge rang(\mathcal{A}) + rang(\mathcal{B}) - \dim V$

Nota. Рассмотрим преобразование координат, как линейный оператор $T : V^n \to V^n$ (переход из системы $Ox_i \to Ox'_i,\ i = 1..n$)

$\dim ImT = n, \dim KerT = 0 \Longrightarrow T$ - вз.-однозн.

Поставим задачу отыскания матрицы в другом базисе, используя $T_{e\to e'}$

2.6. Преобразование матрицы оператора при переходе к другому базису

Th. $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

$\{e_i\} \overset{\text{об}}{=} e$ и $\{e'_i\} \overset{\text{об}}{=} e'$ - базисы пространства V

$\mathcal{T} : V^n \to V^n$ - преобразование координат, то есть $Te_i = e'_i$

$\sqsupset A, A'$ - матрицы $\mathcal{A}$ в базисах e и e'

Тогда $A' = TAT^{-1}$ $(A'_{e'} = T_{e\to e'}AT^{-1}_{e\to e'})$

$\Box \sqsupset y = \mathcal{A}x$, где x, y - векторы в базисе e ($x_e = x'_{e'}$ - один вектор)

$y' = \mathcal{A}x'$, где x', y' - векторы в базисе e'

$\mathcal{T}x = x', \mathcal{T}y = y'$

$y = Ax,\ y' = A'x'$, тогда $Ty = A'(Tx) \quad \Big| \cdot T^{-1}$

$T^{-1}Ty = (T^{-1}A'T)x$

$Ax = y = (T^{-1}A'T)x$

$A = T^{-1}A'T \Longrightarrow A' = TAT^{-1}$

Th. $A' = T_{e\to e'}AT^{-1}_{e\to e'}$

Nota. $C = A + \lambda B$

Следствия:

1) $TCT^{-1} = T(A+\lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$

2) $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$

3) $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

Nota. То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании T

Def. Матрица A называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$

Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij} = (A_i, A_i) = 1 \ \forall i, j (i \neq j) \sum_{kk=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$

В общем $(A_i, A_j) = \left[\begin{array}{l} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{array}\right.$

Def. Оператор $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если его матрица ортогональна

? A ортогональна в каком-либо базисе или во всех?

Свойство. $\mathcal{A}$ - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \overset{2}{\det}(A) = \det(I)$)

Th. $T_{e \to e'}$ - преобразование координат в V^n. Тогда T - ортогональный оператор

Базис e - ортонормированный базис

□ $\quad \sqsupset$ в базисе e матрица $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ - неортогональна

Тогда $e'_1 = \sum_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i \quad \Big| \cdot e'_1$

$1 = (e'_1, e'_1) = (\sum_{i=1}^{n} \tau_{1i} e_i)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1$ - то есть строка - единичный вектор

$0 = (e'_1, e'_2) = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_1 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots) =$ произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны

Таким образом, матрица T - ортогональна

Nota. Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

2.7. Собственные векторы и значения оператора

Def. Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}: V \to V$ - это $U = \{x \in V_1 \in V | \mathcal{A}x \in V_1\}$

Ex. $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\leq n$ на $[a; b]$, $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$

Nota. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ - инвариантные $(A : V \to V)$

Def. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A} : V \to V$ ($\mathcal{A}x = Ax, A$ - матрица в неком базисе)
$\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Nota. Матрица $A - \lambda I$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Nota. Уравнение $\xi(\lambda) = 0$ называется вековым

Def. Собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ, называется $x \neq 0 \mid \mathcal{A}x = \lambda x$

Def. Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее числу λ_i,
$U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

Def. $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность числа λ_i

Th. $\mathcal{A}x = \lambda x \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0, \quad A : V^n \to V^n$
$\square \Longleftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Longleftrightarrow rang(A - \lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim Im(A - \lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim Ker(A - \lambda I) \geq 1$
$\exists x \in Ker(A - \lambda I), x \neq 0 \mid (A - \lambda I)x = 0 \Longleftrightarrow Ax - \lambda Ix = 0 \Longleftrightarrow Ax = \lambda x$

Nota. По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет n корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

Def. Кратность корня λ_i называется алгебраической кратностью

Th. $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \Longrightarrow x_1, x_2$ - линейно независимы
$\square$ Составим комбинацию: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \Big| \cdot \mathcal{A}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \sqsupset \lambda_2 \neq 0$

$c_1\mathcal{A}x_1 + c_2\mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 = 0$

Умножим $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ на λ_2: $c_1\lambda_2 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 = 0$

$c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 - c_1\lambda_2 x_1 - c_2\lambda_2 x_2 = 0$

$c_1 x_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1 = 0$, а комбинация линейно независима

Если $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$: $c_2\lambda_2 x_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$

Nota. Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для k-ой системы собственных векторов для попарно различных k чисел λ

Th. $\lambda_1, \dots \lambda_p$ - различные собственные значения $\mathcal{A}: V \to V$, им соответствуют U_{λ_i} - собственные подпространства V для λ_i

$\sqsupset e^{(1)} = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}\}, e^{(2)} = \{e_1^{(2)}, \dots, e_{k_2}^{(2)}\}, \dots$ - базисы $U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots$

Составим систему $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ (*)

Тогда система e - линейно независима

□ Составим линейную комбинацию:

1) $\sqsupset \quad \overbrace{\alpha_1 e_1^{(1)} + \dots + \alpha_{k_1} e_{k_1}^{(1)}}^{x_1 \in U_{\lambda_1}} + \dots + \overbrace{\gamma_1 e_1^{(p)} + \dots + \gamma_{k_p} e_{k_p}^{(p)}}^{x_p \in U_{\lambda_p}} = 0$

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{p} x_i = 0$ (x_i - линейно независимы, так как λ_i - различны) - этого не может быть, так как $\forall i \ x_i \neq 0$ (как собственный вектор)

2) В $\forall U_{\lambda_i}$ содержится 0-вектор. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longleftrightarrow \forall x_i = 0$

Но $x_j = \sum\limits_{j=1}^{k_i} c_i e_i^{(j)} = 0$ ($e_i^{(j)}$ - базисные, т. е. л/нез) $\Longrightarrow \forall c_j = 0$ (комбинация должна быть тривиальна)

□

Nota. Таким образом, объединение базисов собственных подпространств U_{λ_i} образует линейно независимую систему в V^n

Что можно сказать о размерности системы e (*) ?

Обозначим $S = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i} = \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i$, β_i - геометрическая кратность λ_i

Очевидно, $S \leq n$

Th. $S = n \Longleftrightarrow \exists$ базис V^n, составленный из собственных векторов

□ Система $e = \{e_1^{(1)}, \dots, e_{k_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{k_p}^{(p)}\}$ состоит из собственных векторов

Если $S = n$, получаем n собственных векторов, линейно независимых - базис V^n

Если $\exists$ базис из n лин. незав. собственных векторов, тогда $\dim e = S = n$

□

Nota. Условие Th равносильно: $V^n = \sum_{i=1}^{p} \oplus U_{\lambda_i} (\lambda_i \neq \lambda_j)$

Действительно: $\dim V^n = \sum_{i=1}^{p} \dim U_{\lambda_i}$ и $\forall i, j\ U_{\lambda_i} U_{\lambda_j} = 0$

Ex. Если $\exists n$ различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $\dim U_{\lambda_i} = 1 \forall i$

Def. Оператор $\mathcal{A}$ диагонализируемый, если существует базис $e \mid A_e$ - диагональна

Th. $\mathcal{A}$ - диаг.-ем $\iff \exists$ базис из собственных векторов

□ $\Longleftarrow e = \{e_1, \dots, e_n\}$ - базис собственных векторов

Собственный вектор (def): $\exists \lambda_i \mid \mathcal{A} e_i = \lambda_i e_i = 0 \cdot e_1 + \dots + \lambda_i e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$$\begin{cases} \mathcal{A} e_1 = \lambda_1 e_1 + \sum_{k \neq 1} 0 \cdot e_k \\ \mathcal{A} e_2 = \lambda_2 e_2 + \sum_{k \neq 2} 0 \cdot e_k \\ \vdots \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}_e \cdots e_i = \mathcal{A} e_i$$

$\Longrightarrow \exists f$ - базис, в котором A_f - диагональная (по $-$äèàã. $-$ åì)

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \text{Применим } \mathcal{A} \text{ к } f_i \in f$$

$\mathcal{A} f_i = A_f f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} f_i = \alpha_i f_i \Longrightarrow \alpha_i$ - собственное число (по def), а f_i - собственный вектор

□

Nota. О связи алгебраической и геометрической кратностей (α - алг., β - геом.)

1) α, β не зависят от выбора базиса

□β_i по определению $\dim U_{\lambda_i}$ и не связана с базисом

Для α: строим вековое уравнение $|A_f - \lambda I| = 0 \Longrightarrow \lambda_i$ с кратностью α_i, $\alpha = \sum \alpha_i$

$\sqsupset A_g$ - матрица $\mathcal{A}$ в базисе g

Но $A_g = T_{f \to g} A_f T_{g \to f}$ или для оператора

$A_g - \lambda I = T_{f \to g} (A_f - \lambda I) T_{g \to f} = \overbrace{T_{f \to g} A_f T_{g \to f}}^{=A_g} - \overbrace{\lambda T_{f \to g} I T_{g \to f}}^{=\lambda I} = A_g - \lambda I$

Таким образом, матрицы $A_g - \lambda I$, $A_f - \lambda I$ - подобные

Def. Подобные матрицы - матрицы, получаемые при помощи преобразования координат

Тогда $\det(A_f - \lambda I) = \det(A_g - \lambda I)$ (инвариант) $\Longrightarrow$ одинаковая кратность

□

2) Геометрическая кратность не превышает алгебраической. У диагонализируемого оператора $\alpha = \beta$

2.8. Самосопряженные операторы

1* Сопряженные операторы

!!! Далее будем рассматривать операторы только в евклидовом пространстве над вещественном полем

Пространство со скалярным произведением над комплексным полем называется унитарным

Мет. Скалярное произведение

$(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

3) $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

4) $(x, y) = (y, x)$ в $\mathbb{R}$. Но в комплексном множестве: $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Тогда $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)}$

Мет. (x, y) в $\mathbb{R}$

$(x, y) = (y, x)$

Но. (x, y) в комплексном множестве

$(x, y) = \overline{(y, x)}$

Важно: линейность по первому аргументу - везде

$(\lambda x, y) \overset{\mathbb{R}, C}{=} \lambda(x, y)$

Но:

$(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ в $\mathbb{R}$

$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$ в C

Def. 1. Оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным для $\mathcal{A} : V \to V$, если

$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$

Def. 2. $\mathcal{A}^*$ сопряженный для $\mathcal{A}$, если $A^* = A^T$ в любом ортонормированном базисе

Def. 1. $\Longleftrightarrow$ **Def. 2.**

$(\mathcal{A}x, y) \overset{\text{на языке матриц}}{=\!=\!=} (AX, Y) = (AX)^T \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y$

$||$

$(x, \mathcal{A}^* y) = X^T \cdot (A^* Y) = (X^T A^*) \cdot Y = X^T \cdot A^T \cdot Y \Longrightarrow A^* = A^T$

<u>Lab.</u> Очевидно существование $\mathcal{A}^*$ $\forall \mathcal{A}$ (определяется в ортонормированном базисе действием $\mathcal{A}^T$)

Доказать единственность $\mathcal{A}^*$ рассмотреть от противного $(x, \mathcal{A}_1^* y) \neq (x, \mathcal{A}_2^* y))$

Свойства:

1) $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$ $\square(\mathcal{I}x, y) = (x, y) = (x, \mathcal{I}y)$ $\square$

2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$

3) $(\lambda\mathcal{A})^* = \lambda\mathcal{A}^*$

4) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$

5) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$ (св-во транспонирования матриц)

или $((\mathcal{A}\mathcal{B})x, y) = (\mathcal{A}(\mathcal{B}x), y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*y)$

6) $\mathcal{A}^*$ - линейный оператор ($\mathcal{A}x = x', \mathcal{A}y = y' \Longrightarrow \mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda x' + \mu y'$)

Можно использовать линейные свойства умножения матриц $A^*(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathcal{A}^*X + \mu\mathcal{A}^*Y$

2* Самосопряженный оператор

Def. $\mathcal{A}$ называется самосопряженным, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$

Следствие. $A^T = A \Longrightarrow$ матрица A симметричная

Свойства самосопряженных операторов:

1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \lambda:\ \mathcal{A}x = \lambda x (x \neq 0)$. Тогда, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\square(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ $(x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mathcal{A}y) = (x, \lambda y) \overset{\text{в } C}{=} \overline{\lambda}(x, y)$

$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y) \Longrightarrow \lambda(x, y) = \overline{\lambda}(x, y) \Longrightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$\square$

2) $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*,\ \mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Тогда $x_1 \perp x_2$

$\square$ Хотим доказать, что $(x_1, x_2) = 0$, при том, что $x_{1,2} \neq 0$

$\lambda_1(x_1, x_2) = ({}_1x_1, x_2) = (\mathcal{A}x_1, x_2) = (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = (x_1, x_2)\lambda_2$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 \Longrightarrow (x_1, x_2) = 0$ $\square$

Th. Лемма. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, e - собственный вектор ($l_{\{e\}}$ - линейная оболочка e - инвариантное подпространство для $\mathcal{A}$)

$V_1 = \{x \in V \mid x \perp e\}$

Тогда V_1 - инвариантное для $\mathcal{A}$

$\square$ Нужно доказать, что $\forall x \in V_1\ \mathcal{A}x \in V_1$ и так как $x \in V_1 \mid x \perp e$, то покажем, что $\mathcal{A}x \perp e$

$(\mathcal{A}x, e) = (x, \mathcal{A}e) = (x, \lambda e) = \lambda(x, e) \overset{x \perp e}{=\!=} 0$

$\square$

Th. $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ ($\mathcal{A}: V^n \to V^n$), тогда $\exists e_1, \ldots, e_n$ - набор собственных векторов $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

(другими словами: $\mathcal{A}$ - диагонализируем)

Наводящие соображения.

Ex. 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$\mathcal{I}x = x = 1 \cdot x, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$

Здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ - базис из собственных векторов, ортонормированный

Ex. 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$

$\mathcal{O}x = 0, \quad \lambda_{1,2,3} = 0$

И здесь $U_{\lambda_{1,2,3}} = V^3$, так как $0 \in U_\lambda$ и $\forall x\ \mathcal{O}x = 0 \in U_\lambda$

Ex. 3. Поворот $\mathbb{R}^2$ на $\dfrac{\pi}{4}$

$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 0$ - вещественных корней нет

$\square \sqsupset e_1$ - какой-либо собственный вектор $\mathcal{A}$ ...

Th. $\mathcal{A} : V^n \to V^n, \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \implies \exists \{e_i\}_{i=1}^n, e_1$ - собственные вектора $\mathcal{A}$ и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис

$\square$ e_1 - собственный вектор $\mathcal{A}$

e_1 найдется, если $\mathcal{A}x = \lambda x$ имеет нетривиального решение $\iff \det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0 \overset{\mathcal{A}\text{ - самосопр.}}{\implies} \exists \lambda \in \mathbb{R}$

Для вектора e_1 строим инвариантное подпространство $V_1 \perp e_1$ (см. лемму), $\dim V_1 = n - 1$

В подпространстве V_1 $\mathcal{A}$ действует как самосопряженный и имеет собственный вектор $e_2 \perp e_1$.

Для e_2 строим $V_2 \perp e_2, e_1$

Затем, $V_3, V_4, V_5, \ldots$, в котором, найдя e_i, ортогональный всем предыдущим

Составили ортогональный базис из e_i, который можно нормировать

$\square$

Nota. Чтобы упорядочить построение базиса, в котором V_i может брать $\max \lambda_i$

Nota. Из теоремы следует, что самосопряженный оператор диагонализируется: Σ алг. крат. $= n$ (степень уравнения), а Σ геом. крат. $= \dim\{e_1, \ldots,_n\} = n$

Разложение самосопряж. оператора в спектр:

$x \in V^n \quad \{e_i\}_{i=1}^n$ - базис из собственных векторов $\mathcal{A}$ (ортонорм.)

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (x, e_1)e_1 + \cdots + (x, e_n)e_n = \sum_{i=1}^n (x, e_i)e_i$$

Def. Оператор $P_i x = (x, e_i)e_i$ называется проектором на одномерное пространство, порожденное e_i (линейная оболочка)

Свойства:

1) $P_i^2 = P_i$ (более того $P_i^m = P_i$)

2) $P_i P_j = 0$

3) $P_i = P_i^*$ $\quad ((P_i x, y) \stackrel{?}{=} (x, P_i y)) \Longleftrightarrow (P_i x, y) = ((x, e_i)e_i, y) = (x, e_i)(e_i, y) = (x, (y, e_i)e_i) = (x, P_i y)$

Итак, если $\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - самосопряженный и $\{e_i\}$ - ортонормированный базис собственных векторов $\mathcal{A}$, то

$x = \sum_{i=1}^{n} P_i x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i$

$\mathcal{A}x \stackrel{y=\Sigma(y,e_i)e_i}{=} \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}x, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, \mathcal{A}e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} (x, \lambda_i e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x$

$\Longleftrightarrow \mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i$ - спектральное разложение $\mathcal{A}$, спектр $= \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n \mid \lambda_i \le \cdots \le \lambda_n\}$

Ex.

$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 = (y, e_1)e_1 + (y, e_2)e_2 = (\mathcal{A}x, e_1)e_1 + (\mathcal{A}x, e_2)e_2 = \lambda_1 x_1 e_1 + \lambda_2 x_2 e_2$

2.9. Ортогональный оператор

Мет. Орт. оператор $T : V^n \to V^n \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \forall$ о/н базиса матрица T - ортогональная $T^{-1} = T^T$

Nota. Иначе, T - ортогональный оператор $\Longleftrightarrow T^{-1} = T^* \Longrightarrow TT^* = I$

Def. T - ортог. оператор, если $(Tx, Ty) = (x, y)$

Следствие: $\|Tx\| = \|x\|$, то есть T сохраняет расстояние

Nota. Ранее в теореме об изменении матрицы A при преобразовании координат T - ортогональный оператор

Это необязательно, то есть можно переходить в другой произвольный базис (док-во теоремы позволяет)

Диагонализация самосопряженного оператора:

Дана матрица A_f

1) Находим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

2) Находим $e_1, \ldots e_n$ - ортогональный базис собственных векторов

3) Составляем $T = \begin{pmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \ldots & e_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица поворота базиса

4) Находим $T_{e \to f} A_f T_{f \to e} = A_e$ - диагональная

Таким образом диагонализация самосопряженного $\mathcal{A}$ - это нахождение композиции поворотов и симметрий, как приведение пространства к главным направлением

3. Билинейные и квадратичные формы

3.1. Билинейные формы

Def. $x, y \in V^n$ Отображение $\mathcal{B} : V^n \to \mathbb{R}$ (обозн. $\mathcal{B}(x,y)$) называется билинейной формой, если выполнены

1) $\mathcal{B}(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \mathcal{B}(x,z) + \mu \mathcal{B}(y,z)$
2) $\mathcal{B}(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \mathcal{B}(x,y) + \mu \mathcal{B}(x,z)$

Ex.
1) $\mathcal{B}(x,y) \overset{\text{в } E^n_{\mathbb{R}}}{=} (x,y)$
2) $\mathcal{B}(x,y) = P_y x$ - проектор x на y

Матрица Б.Ф.

Th. $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис V_n, $u, v \in V^n$. Тогда $\mathcal{B}(u,v) = \sum\limits_{j=1}^n \sum\limits_{i=1}^n b_{ij} u_i v_j$, где $b_{ij} \in \mathbb{R}$

□

$u = u_1 e_1 + \dots + u_n e_n$

$v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$

$\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(\sum\limits_{i=1}^n u_i e_i, \sum\limits_{j=1}^n v_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^n u_i \mathcal{B}(e_i, \sum\limits_{j=1}^n v_j e_j) = \sum\limits_{i=1}^n u_i (\sum\limits_{j=1}^n v_j \mathcal{B}(e_i, e_j)) \overset{\text{обозн. } \mathcal{B}(e_i,e_j)=b_{ij}}{=} \sum\limits_{i=1}^n u_i \sum\limits_{j=1}^n v_j b_{ij} = \sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n u_i v_j b_{ij}$

□

Nota. Составим матрицу из $\mathcal{B}(e_i, e_j)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Def. Если

1) $\mathcal{B}(u,v) = \mathcal{B}(v,u)$, то $\mathcal{B}$ - симметричная
2) $\mathcal{B}(u,v) = -\mathcal{B}(v,u)$, то $\mathcal{B}$ - антисимметричная
3) $\mathcal{B}(u,v) = \overline{\mathcal{B}(v,u)}$, то $\mathcal{B}$ - кососимметричная (в C)

Def. $rang\mathcal{B}(u,v) \overset{def}{=} rangB$

Nota.

1) $\mathcal{B}$ называется невырожденной, если $rang\mathcal{B} = n$

2) $rang\mathcal{B}_e = rang\mathcal{B}_{e'}$ (e, e' - различные базисы V^n), то есть $rang\mathcal{B}$ инвариантно относительно преобразования $e \to e'$

Ex. $\mathcal{B}(u,v) \overset{\text{ск. пр.}}{=} (u,v)$

$\begin{matrix} u = u_1e_1 + u_2e_2 \\ v = v_1e_1 + v_2e_2 \end{matrix}$, тогда $\mathcal{B}(e_i, e_j) \overset{\text{об}}{==} b_{ij} = (e_i, e_j)$

Таким образом, $B = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) \end{pmatrix}$ - матрица Грама

Ex. $\begin{matrix} u(t) = 1+3t \\ v(t) = 2-t \end{matrix}$, $\{e_i\} = (1,t)$, $\mathcal{B}(u,v) = (u,v) = \int_{-1}^{1} uvdt$

Тогда, $B = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 dt & \int_{-1}^1 tdt \\ \int_{-1}^1 tdt & \int_{-1}^1 t^2dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Nota. Особое значение имеют симметричные билинейные формы

Если рассмотреть матрицы симм. Б. Ф. как матрицу самосопряженного оператора, то можно найти базис (ортонормированный базис собственных векторов), в котором матрица Б. Ф. диагонализируется

Этот базис называется каноническим базисом билинейной формы

3.2. Квадратичные формы

Def. Квадратичной формой, порожденной Б. Ф. $\mathcal{B}(u,v)$, называется форма $\mathcal{B}(u,u)$

Ex. Поверхность

$u = (x,y), v = (x,y,z)$

$\mathcal{B}(u,u) = b_{11}u_1u_1 + b_{12}u_1u_2 + b_{21}u_2u_1 + b_{22}u_2u_2 = b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{21}xy + b_{22}y^2$

$\mathcal{B}(v,v) = \beta_{11}x^2 + \beta_{12}xy + \beta_{13}xz + \beta_{21}xy + \beta_{22}y^2 + \beta_{23}yz + \beta_{31}xz + \beta_{32}yz + \beta_{33}z^2$

Mem. Ранее уравнение поверхности второго порядка (без линейной группы, то есть сдвига)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = c$$

Nota. Заметим, что здесь коэфф. a_{ij} соответствуют матрице симметричной Б. Ф.:

$B(v,v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Если диагонализировать $B(v,v)$, то приведем уравнение поверхности к каноническому виду:

$\mathcal{B}(v,v)_{\text{канон.}} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2$

Поэтому квадратичная форма, соответствующая поверхности второго порядка, рассматривается, как форма, порожденная симметричной билинейной формой

Def. Положительно определенная форма

Nota. Можно говорить о положительно определенном операторе $\mathcal{A} : V^n \to V^n$

1) Оператор $\mathcal{A}$ называется положительно определенным, если

$\exists \gamma > 0 \mid \forall x \in V \quad (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2$

2) $\mathcal{A}$ называется положительным, если

$\forall x \in V,\ x \neq 0 \quad (\mathcal{A}x, x) > 0$

Th. 1), 2) $\Longleftrightarrow \forall \lambda_i$ - с. число $\mathcal{A}$, $\lambda_i > 0$

$\square \Longrightarrow \quad \lambda_i$ - с. число, e_i - соответствующий им с. вектора

$\forall x \in V \quad x = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i$

$(\mathcal{A}x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \overbrace{\mathcal{A}e_i}^{\lambda_i e_i}, \sum\limits_{i=1}^{n} c_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i c_i^2 \geq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{\min} c_i^2 = \lambda_{\min} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_{\min} \|x\|^2$

Если $0 < \lambda_{\min} < \lambda_i, \lambda_i \neq \lambda_{\min}$, то $(\mathcal{A}x, x) > 0$

$\Longleftarrow \quad 1) \Longleftrightarrow \exists \gamma > 0 \mid (\mathcal{A}x, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall x \in V$ в том числе $x = e_i \neq 0$

$(\mathcal{A}e_i, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) = \lambda_i > 0\ \forall i$

$\square$

Nota. $\det A$ инвариантен при замене базиса, $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n > 0$. Тогда $\exists \mathcal{A}^{-1}$

Th. Критерий Сильвестра

$\mathcal{A} : V^n \to V^n$ - положительно определен $\Longleftrightarrow \forall k = 1..n\ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$\square \Longrightarrow \quad \mathcal{A}$ - пол. опред.

$\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ собственных векторов. Тогда, $\mathcal{A}$ диагонализируется в базисе $\{e_1, \dots, e_k\}$, $k \leq n$

$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad \Delta_k = \det A_k \stackrel{inv}{=} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{vmatrix} > 0$

$\Longleftarrow$ ММИ

$\forall k = 1..n, \Delta_k > 0$

1) Для $k = 1 \quad \mathcal{A}$ - пол. опр.

2) $\mathcal{A}_{n-1}$ - пол. опр. $\Longrightarrow \mathcal{A}_n$ - пол. опр.

1) $\mathcal{A}x = a_{11}x \quad |a_{11}| > 0 \Longrightarrow \mathcal{A}$ - пол. опр.

2) $\mathcal{A}$ диагон. $\mathcal{A}_e x = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} x = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n$ Для $i \le n-1$ все $\lambda_i > 0$

$(\mathcal{A}x, x) = (\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i e_i + \lambda_n c_n e_n, \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i e_i) = \overbrace{\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i c_i^2}^{>0} + \lambda_n c_n^2$ - знак зависит от λ_n
$\Delta_n = \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}_{>0} \cdot \lambda_n \Longrightarrow \lambda_n > 0 \Longrightarrow (\mathcal{A}x, x) > 0$
□

Ex. Поверхность: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
$\mathcal{B}(u,u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_k = 1 > 0 \ \forall k$
Положительная определенность - наличие экстремума

Def. Оператор $\mathcal{A}$ называется отрицательно определенным, если $-\mathcal{A}$ - положительно определенный

Nota. Для $-\mathcal{A}$ работает критерий Сильвестра: $\Delta_k(-\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k(\mathcal{A}) > 0$
Таким образом, $\mathcal{A}$ - отриц. опред. $\Longleftrightarrow \Delta_k$ чередует знаки

Nota. Аналогично операторы определяются положительно или отрицательно билинейные формы
$\mathcal{B}(u,v) = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij} u_i v_j \stackrel{?}{=} \dots$ через оператор
Так как $\mathcal{B}(u,v)$ и $\mathcal{B}(u,u)$ - числа, то $\mathcal{B}$ - называется пол. опред., если $\mathcal{B}(u,v) > 0$

Nota. После приведения $\mathcal{B}(u,v)$ к каноническому виду, получаем
$\mathcal{B}(u,u)_{\text{канон.}} = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$
В общем случае λ_i любого знака
Но можно доказать, что количества $\lambda_i > 0, \lambda_j < 0, \lambda_k = 0$ постоянны по отношению к способу приведения к каноническому виду (т. н. закон инерции квадратичной формы)

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Общие понятия

1* Постановка задачи

Pr. 1. Скорость распада радия в текущий момент времени t пропорциональна его наличному количеству Q. Требуется найти закон распада радия:

$$Q = Q(t),$$

если в начальный момент времени $t_0 = 0$ количество равнялось Q_0
Коэффициент пропорциональности k найден эмпирически.
Решение. Скорость распада.
$\frac{dQ(t)}{dt} = kQ$ - ищем $Q(t)$
$dQ(t) = kQdt$
$\underbrace{\frac{dQ(t)}{Q}}_{\text{содержит только } Q} = \underbrace{kdt}_{\text{содержит только } t}$ - «разделение переменных»
Внесем все в дифференциал:
$d\ln Q = kdt = dkt$
$d(\ln Q - kt) = 0$
Нашли семейство первообразных:
$\ln Q - kt = \tilde{C}$
$\ln Q = \tilde{C} + kt$
$Q = e^{\tilde{C}+kt} \xlongequal{e^{\tilde{C}}=C} Ce^{kt}$
По смыслу $k < 0$, так как Q уменьшается. Обозначим $n = -k, n > 0$

Тогда $\boxed{Q(t) = Ce^{-nt}}$

Получили вид закона распада. Выбор константы C определен Н.У. (начальными условиями):
$t_0 = 0 \quad Q(t_0) = Q_0 = C$
Тогда, закон - $\boxed{Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}}$

Nota. Оба закона: общий $Q(t) = Ce^{-nt}$ и частный $Q^*(t) = Q_0 e^{-nt}$ - являются решением дифференциального уравнения:
$Q'(t) = kQ$ (явный вид)
$d\ln Q(t) - kdt = 0$ (в дифференциалах)

Pr. 2 Тело массой m брошено вверх с начальной скоростью v_0. Нужно найти закон движения $y = y(t)$. Сопротивлением воздуха пренебречь.
По II закону Ньютона:
$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$

$a = \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -g}$ - ДУ

<u>Решение.</u> $y''(t) = -g$

$(y'(t))' = -g$

$y'(t) = -\int gdt = -gt + C_1$

$y(t) = \int (-gt + C_1)dt = \boxed{-\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2 = y(t)}$ - общий закон

$C_{1,2}$ ищем из Н.У.

В задаче нет условия для $y(t_0)$. Возьмем $y_0 = y(t_0) = 0$

Кроме того $y'(t_0) = v(t_0) = v_0$

Таким образом, $\begin{cases} y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$

Найдем C_1: $y'(t_0) = y(0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \quad C_1 = v_0$

Найдем C_2: $y(t_0) = y(0) = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2 = C_2 = 0$

Частный закон: $\boxed{y^*(t) = v_0t - \frac{gt^2}{2}}$

2* Основные определения

Def. 1. Уравнение $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$ - называется обыкновенным ДУ n-ого порядка $(*)$

Ex. $Q' + nQ = 0$ и $y'' + g = 0$

Def. 2. Решением ДУ $(*)$ называется функция $y(x)$, которая при подстановке обращает $(*)$ в тождество

Def. 2'. Если $y(x)$ имеет неявное задание $\Phi(x, y(x)) = 0$, то $\Phi(x, y)$ называется интегралом уравнения $(*)$

Nota. Разделяют общее решение ДУ - семейство функций, при этом каждое из них - решение; и частное решение - отдельная функция

Def. 3. Кривая с уравнением $y = y(x)$ или $\Phi(x, y(x)) = 0$ называют интегральной кривой

Def. 4. $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$ - система начальных условий $(**)$

Тогда $\begin{cases} (*) \\ (**) \end{cases}$ - задача Коши (ЗК)

Nota. Задача Коши может не иметь решений или иметь множество решений

Th. $y' = f(x, y)$ - ДУ
$M_0(x_0, y_0) \in D$ - точка, принадлежащая ОДЗ
Если $f(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в M_0, то ЗК
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$
имеет единственное решение $\varphi(x, y) = 0$, удовлетворяющее Н.У. (без док-ва)

Nota. Преобразуем ДУ: $\underbrace{y' - f(x, y)}_{F(x, y(x), y'(x))} = 0$
См. определения обыкн. и особых точек

Def. 5. Точки, в которых нарушаются условия теоремы называются особыми, а решения, у которых каждая точка особая, называются особыми

Def. 6. Общим решением ДУ $(*)$ называется $y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$

Nota. $\Phi(x, y(x), C_1, \ldots, C_n) = 0$ - общий интеграл

Def. 7. Решением $(*)$ с определенными значениями $C_1^*, \ldots, C_n^*$ называется частным

Nota. Форма записи:
Разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$
Сведем к виду: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x, y)}{-Q(x, y)} \Longrightarrow -Q(x, y)dy = P(x, y)dx \Longrightarrow$
$\boxed{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0}$ - форма в дифференциалах

4.2 ДУ первого порядка (ДУ$_1$)

Nota. Среди ДУ$_1$ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ
1) Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
2) Однородное уравнение (ОУ)
3) Уравнение полных дифференциалов (УПД)
4) Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ$_1$)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

1* УРП

Def. $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

Решение : $N(y)M(x) \neq 0$

$\dfrac{m(x)}{M(x)}dx + \dfrac{n(y)}{N(y)}dy = 0 \quad y = y(x)$ - неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$(\dfrac{m(x)}{M(x)} + \dfrac{n(y)}{N(y)}y')dx = 0$

Интегрируем по dx:

$\displaystyle\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y'\right) dx = const$

По свойствам интеграла:

$\displaystyle\int \frac{m(x)}{M(x)}dx + \int \frac{n(y)}{N(y)}dy = const$

или: $\displaystyle\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy$

Ex. $xdy - ydx = 0$

$xdy = ydx$

$\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$

$\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + \tilde{C} = \ln|\tilde{\tilde{C}}x|$

$|y| = |\tilde{\tilde{C}}x|$

$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

Заметим, $x = y = 0$ - решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$m(a)\underbrace{N(b)}_{=0}dx + n(b)\underbrace{M(a)}_{=0}dy = 0$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

2* ОУ

Def. 1. Однородная функция n-ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Ex. $f = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right), \cos(\dfrac{\lambda x}{\lambda y}) = \cos(\dfrac{x}{y})$ - нулевой порядок однородности

$f = \sqrt{x^2 + y^2}$ - первый порядок

Def. 2. $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \text{ где } P(x,y), Q(x,y) \text{ - однородные функции одного порядка}}$ - ОУ

Решение $P(x,y)=P\left(x\cdot 1, x\cdot\frac{y}{x}\right)=x^kP\left(1,\frac{y}{x}\right)$

$Q(x,y)=x^kQ\left(1,\frac{y}{x}\right)$

Тогда, $P\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0.$

Обозначим $\frac{y}{x}=t, \quad y'=\frac{dy}{dx}\overset{y=tx}{=\!=}t'_xx+tx'_x=t'_xx+t$

$P(1,t)+Q(1,t)y'=P(1,t)+Q(1,t)(t'x+t)=0$

$t'x+t=-\frac{P(1,t)}{Q(1,t)}\overset{\text{обозн}}{=}f(t)$

$t'x=f(t)-t$

$\frac{dt}{dx}x=f(t)-t\neq 0$

$\frac{dt}{f(t)-t}=\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dt}{f(t)-t}=\int\frac{dx}{x}=\ln|Cx|$

$Cx=e^{\int\frac{dt}{f(t)-t}}=\varphi(x,y)$ - общий интеграл

Если $f(t)-t=0$, то пусть $t=k$ - корень, тогда $k=\frac{y}{x}\rightarrow y=kx$ - тоже решение

Ex. $(x+y)dx+(x-y)dy=0$

$\frac{y}{x}=t \quad y'=t'x+t$

$y=tx \quad dy=(t'x+t)dx$

$(x+tx)dx+(x-tx)(t'x+t)dx=0$

$(1+t)+(1-t)(t'x+t)=0$

$t'(1-t)x+t-t^2+1+t=0$

$t'(1-t)x=t^2-2t-1$

$\frac{(1-t)dx}{t^2-2t-1}=\frac{dx}{x}$ - УРП

$\frac{(1-t)dt}{(1-t)^2-2}=-\frac{1}{2}\frac{d((1-t)^2)-2}{(1-t)^2-2}=-\frac{1}{2}\ln|(1-t)^2-2|=\ln\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}}=\ln|Cx|$

$\tilde{C}x=\frac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}}\Longleftrightarrow Cx^2=\frac{1}{(1-t)^2-2}=\Longleftrightarrow Cx^2((1-t)^2-2)=1$

$C((y-x)^2-2x^2)=1$

$C(y^2-2xy-x^2)=1$

$y^2-2xy-x^2=C$ - гиперболы

$(t-1)^2-2=0 \quad \frac{y}{x}=1\pm\sqrt{2} \quad y=(1\pm\sqrt{2})x$ - асимптоты

3* Уравнение в полных дифференциалах

Def. $\boxed{P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}}$ - УПД

Решение *Мет.* **Th.** об интеграле НЗП $\exists\Phi(x,y) \mid d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$

Ex. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,0)}^{(x,0)} xdx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y)dy = \frac{x^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{(x,0)}^{(x,y)} = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C$ - общий интеграл

$x^2 + 2xy - y^2 = C$

4* ЛДУ

Def. $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ - ЛДУ$_1$

$p, q \in C_{[a,b]}$

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Принцип: если удалось найти частное решение ДУ$_{\text{однор}}$ (обозначим y_0), то общее решение ДУ$_{\text{неод}}$ можно искать в виде $y = C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y' + p(x)y = 0$

Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y' + p(x)y = q(x)$

Ex. $\sqsupset y(x) = x^2e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ

А $y_0 = xe^{-x}$, тогда $y = xxe^{-x} = C(x)xe^{-x}$

То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y = y(x)$

Решение а) $y' + p(x)y = 0$

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ - УРП

$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$

$\ln|\tilde{C}y| = -\int p(x)dx$

$\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx} = Cy_0$

б) $y' + p(x)y = q(x)$

Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$

$C'(x)y_0 + C(x)\underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$

$C'(x) = \frac{q(x)}{y_0} = q(x)e^{\int p(x)dx}$

$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Мет. $y'+p(x)y=q(x)$

1) $y'+p(x)y=0$

$\dfrac{dy}{y}=-p(x)dx$

$y_0=e^{-\int p(x)dx}$

$\overline{y}=Ce^{-\int p(x)dx}$ - общее решение ЛОДУ

2) $y'+p(x)y=q(x)$

$y(x)=C(x)y_0$

$C'(x)y_0+C(x)y_0'+p(x)C(x)y_0=q(x)$

$C(x)(y_0'+p(x)y_0)=0$ - так как y_0 - решение ЛОДУ

$C'(x)=\dfrac{q(x)}{y_0}$

$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$

Окончательно, $y(x)=\left(\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}+C\right)dx\right)e^{-\int p(x)dx}=Ce^{-\int pdx}+e^{-\int pdx}\int qe^{\int pdx}=\overline{y}+y^*$

4.3. Существование и единственность решения

Мет. $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ **Th.** Если $\exists U(M_0)$ | $\begin{cases} f(x,y)\in C_{U(M_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \text{ - огр. в } U(M_0) \end{cases}$, то в M_0 $\exists! y(x)$ - решение ДУ

Решение ДУ называется особым, если $\forall$ его точке нарушается **Th.** существования и единственности, то есть через каждую точку проходит несколько интегральных кривых

Def. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ задает поле интегральных кривых, заполняющих область D
Соответственно точки D могут быть особыми или обыкновенными (выпол. усл. **Th.**)

<u>Условия особого решения</u> $P(x,y)$ или $Q(x,y)=0$

Ex. 1.

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \qquad \longrightarrow \qquad \sqrt{1-y^2}dx - dy = 0$$

Обычное решение | Особое решение:

$$\arcsin y = x + C \qquad p = \sqrt{1-y^2} = 0$$

$$y = \sin(x+C) \qquad 1 - y^2 = 0 \to y = \pm 1$$

Ex. 2.

$$\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}dy = dx \qquad \longrightarrow \qquad y^{-\frac{2}{3}}dy - 3dx = 0$$

$$y^{\frac{1}{3}} = x + C \qquad dy - 3y^{-\frac{2}{3}} = 0$$

$$y = (x+C)^3 \qquad P = 0 \Longrightarrow y = 0$$

4.4. ДУ высших порядков

Nota. Рассмотрим три типа интегрируемых ДУ

1* Непосредственно интегрирование

$y^{(n)} = f(x)$

Решение: $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$

$y^{(n-2)} = \int (\int f(x)dx + C_1)dx + C_2$

Ex. См. Задачу 2 в начале

2* ДУ$_2$, не содержащие $y(x)$

$F(x, y'(x), y''(x)) = 0$

Замена $y'(x) = z(x)$, получаем:

$F(x, z(x), z'(x)) = 0$ - ДУ$_1$

Ex. $(1+x^2)y'' + (1+y'^2) = 0 \quad y' = z$

$(1+x^2)z' + 1 + z^2 = 0$

$z' + \dfrac{1+z^2}{1+x^2} = 0 \Longleftrightarrow z' = -\dfrac{1+z^2}{1+x^2} \Longleftrightarrow \dfrac{dz}{1+z^2} = -\dfrac{dx}{1+x^2}$

$\arctan x = \arctan(-x) + C$

$z = \dfrac{-x + \tan(C)}{1 + x\tan C} = y'$

$y = \displaystyle\int \frac{-x + \tan(C)}{1 + x\tan C}dx = \ldots$

3* ДУ$_2$, не содержащие x

$F(y(x), y'(x), y''(x)) = 0$

Замена $y'(x) = z(y) \quad y''(x) = \dfrac{dz(y(x))}{dx} = \dfrac{dz}{dx}\dfrac{dy}{dx} = z'_y y' = z'z$

ДУ: $F(y, z(y), z'(y)) = 0$

Ex. $y'' + y'^2 = yy'$

$y' = z(y) \quad y'' = z'z$

$z'z + z^2 = yz \quad | \; : z \neq 0 \qquad z = 0 \Longrightarrow y = const$

$z' + z = y$ - ЛДУ

1) $z' + z = 0$

$\ln|z| = -y + C$

$z = Ce^{-y}$

2) $C'(y)e^{-y} = y$

$C'(y) = ye^y$

$C(y) = \int ye^y dy = \int y de^y = ye^y - e^y + C_1$

$z(y) = (ye^y - e^y + C_1)e^{-y} = \underbrace{y-1}_{z^*} + \underbrace{C_1 e^{-y}}_{\overline{z}}$

$y' = C_1 e^{-y} + y - 1 \Longrightarrow ? \ldots$

4.5. ЛДУ$_2$

4.5.1. Определения

Def. $a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(x)} + \cdots + a_{n-1}y'(x) + a^n(x)y = f(x)$, где $y = y(x)$ - неизв. функция, - это ЛДУ$_n$

Nota. Если $n = 2$ - ЛДУ$_2$, $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y = f(x)$ - разрешенное относительно старших производных ЛДУ$_2$

Nota. Если $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$ - ЛДУ$_n$ с постоянными коэффициентами

4.5.2. Решение ЛДУ$_2$ с постоянными коэффициентами

$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$

$\forall p, q \in \mathbb{R} \exists$ уравнение: $\quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \mid \lambda_1 + \lambda_2 = -p, \lambda_1\lambda_2 = q$ - корни

Назовем уравнение характеристическим (ХрУ) 

Nota. $\lambda_{1,2}$ могут быть только 1) вещественными различными; 2) вещественными одинаковыми $(_1 = \lambda_2 = \lambda$ - корень 2-ой кратности); 3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Запишем ЛДУ$_2$ через $\lambda_{1,2}$:

$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = f(x)$

$y'' - \lambda_1 y' - \lambda_2 y' + \lambda_1\lambda_2 y = f(x)$

$(y' - \lambda_2 y)' - \lambda_1(y' - \lambda_2 y) = f(x)$

Обозначим $u(x) = y' - \lambda_2 y$

Тогда ДУ: $\begin{cases} y' - \lambda_2 y = u(x) \\ u' - \lambda_1 u = f(x) \end{cases}$

Решим: $u' - \lambda_1 u = f(x)$

1) $u' - \lambda_1 u = 0$

$\dfrac{du}{u} = \lambda_1 dx$

$\overline{u} = C_1 e^{\lambda_1 x}$

2) $u' - \lambda_1 u = f(x)$

$u(x) = C_1(x) e^{\lambda_1 x}$

Далее $u(x)$ следует подставить в ДУ с $f(x)$

Поступим лучше, решим ЛОДУ$_2$ $(f(x) = 0)$

Эта система $\begin{cases} y' - \lambda_2 y u(x) \\ u' - \lambda_1 u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' - \lambda_2 y u(x) \\ u = C_1 e^{\lambda_1 x} \end{cases}$

Решим $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$:

1) $y' - \lambda_2 y = 0$

$\overline{y} = C_2 e^{\lambda_2 x}$

2) $y' - \lambda_2 y = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x}$

$C_2'(x) e^{\lambda_2 x} = C_1 e^{\lambda_1 x}$

$C_2'(x) = C_1 e^{\lambda_1 = \lambda_2} x$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Мет. $y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$

Для начала $y'' + py' + qy = 0$ - ЛОДУ$_2$

$C_2'(x) = C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}$

Рассмотрим три случай для $\lambda_{1,2}$

1) $\lambda_{1.2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ - случай различных вещественных корней

$$C_2(x) = \int C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2 = \underbrace{\frac{C_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}_{\tilde{C_1}} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} + C_2$$

Тогда, $y(x) = C_2(x) e^{\lambda_2 x} = (\tilde{C_1} e^{\lambda_1 - \lambda_2} x + C_2) e^{\lambda_2 x} = \boxed{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ - случай вещ. кратных корней

$$C_2'(x) = C_1 e^{0x} = C_1 \Longrightarrow C_2(x) = \int C_1 dx = C_1 x + C_2$$

$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x} = \boxed{C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} = y(x)}$ - решение ЛОДУ, $\lambda_1 = \lambda_2$

3) $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ - случай комплексно сопряженных корней

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то аналогично первому случаю $y(x) = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x + C_2 e} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$ - решение ЛОДУ

Получим $\mathbb{R}$-решения:

$y(x) = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)) = e^{\alpha x}(C_1 + C_2)\cos\beta x + e^{\alpha x} i(C_1 - C_2)\sin\beta x$

$Rey(x) = \underbrace{(C_1 + C_2)e^{\alpha x}\cos\beta x}_{u(x)}, Imy(x) = \underbrace{(C_1 + C_2)e^{\alpha x}\sin\beta x}_{v(x)} \quad y(x) = u(x) + iv(x)$

Так как $y(x)$ - решение ЛОДУ:

$u'' + iv'' + pu' + ipv\prime + qu + iqv = 0$

$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv\prime + qv) = 0 \quad \forall x \in [\alpha; \beta]$, то есть $z \in \mathbb{C}$ и $z = 0$

$$\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0, \\ v'' + pv\prime + qv = 0 \end{cases}$$

Тогда можно считать решением $y(x) = u(x) + v(x) = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ - решение ЛОДУ, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

Nota. Ни про одно из полученных решений нельзя сказать, что оно общее (см. след. пункт)
Также еще не решено ЛНДУ$_2$

4.5.3. Свойства решений ЛДУ$_2$

Def. $Ly \overset{def}{=} y''(x) + py'(x) + qy(x)$ - лин. дифф. оператор
$L : E \subset C^2_{[a;b]} \to F \subset C_{[a;b]}$

Nota. Все определения лин. пространства, базиса, лин. независимости, лин. оболочки сохраняются
И ЛДУ$_2$ записывается как $Ly = 0$ - ЛОДУ$_2$, $Ly = f(x)$ - ЛНДУ$_2$

Th. 1. $\exists y_1, y_2$ - частные решение ЛОДУ, то есть $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$
Тогда $Ly = 0$, если $y = C_1y_1 + C_2y_2$
□
$Ly = y'' + py' + qy = (C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1Ly_1 + C_2Ly_2 = 0$
□

Def. y_1, y_2 - лин. нез. $\Longleftrightarrow C_1y_1 + C_2y_2 = 0 \Longrightarrow \forall C_1 = 0 \Longleftrightarrow \nexists k : y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$

Mem. Для определения лин. независимости в Линале использовали rgA или $\det A$
Введем индикатор лин. независимости
Заметим, что если y_1, y_2 - лин. зав., то y_1', y_2' - лин. зав.

Def. $W \overset{\text{обозн}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ - определитель Вронского или вронскиан

Th. 2. y_1, y_2 - лин. зав. $\Longrightarrow W = 0$ на $[a; b]$
□
$\begin{matrix} y_2 = ky_1 \\ y_2' = ky_1' \end{matrix} \Longrightarrow W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0$
□

Th. 3. $x_0 \in [a; b], \quad \exists W(x_0) = W_0$

Тогда $\begin{matrix} W_0 = 0 \Longrightarrow W(x) = 0 \forall x \in [a;b] \\ W_0 \neq 0 \Longrightarrow W(x) \neq 0 \forall x \in [a;b] \end{matrix}$

□

$\urcorner y_1(x), y_2(x)$ - реш ЛОДУ,

$\begin{cases} Ly_1 = 0 & | \cdot y_2 \\ Ly_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1''y_2 + py_1'y_2 + qy_1y_2 = 0 y_2''y_1 + py_2'y_1 + qy_1y_2 = 0 \end{cases}$

$(y_1''y_2 - y_2''y_1) + p(y_1'y_2 - y_2'y_1) = 0$

$W'(x) + pW(x) = 0$

$\dfrac{dW(x)}{W(x)} = -pdx$

$W(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} pdx}$

$W_0 = Ce^{-\int_{x_0}^{x_0} pdx} = C$

Тогда $W(x) = W_0 e^{-\int_{x_0}^{x} pdx} \Longleftrightarrow \left[\begin{matrix} W_0 = 0 \Longrightarrow W(x) = 0 \\ W_0 \neq 0 \Longrightarrow W(x) \neq 0 \end{matrix}\right. \quad \forall x \in [a;b]$

□

Th. 4. y_1, y_2 - лин. нез. $\Longrightarrow W(x) \neq 0$ на $[a;b]$

□ Докажем от противного

$\urcorner \exists x_0 \in [a;b] \mid W(x_0) = 0 \Longrightarrow W(x) = 0 \forall x \in [a;b] \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \forall x \in$ $[a;b]$

Можно поделить на y_1^2, так как y_1, y_2 - лин. нез. Тогда $\dfrac{W}{y_1^2} = \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \Longrightarrow \dfrac{y_2}{y_1} = k \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow y_2 = ky_1$ - лин. зав., противоречие

□

Nota. Общее решение ЛОДУ$_2$ - это семейство всех решений (интегральных кривых), каждое из которых проходит через точку $(x_0, y_0) \in D$ и ему соответствует свой и единственный набор (C_1, C_2)

Th. 5. y_1, y_2 - лин. нез. решения ЛОДУ, тогда $\overline{y}(x) = C_1y_1 + C_2y_2$ - общее решение ЛОДУ$_2$

□ Нужно убедиться, что через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит и только одна кривая $\overline{y}(x_0)$

Зададим НУ: $\begin{cases} y_1(x_0) = y_{10} \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$, тогда $\begin{matrix} \overline{y}(x_0) = C_1y_{10} + C_2y_{20} \\ \overline{y}'(x_0) = C_1y_{10}' + C_2y_{20}' \end{matrix}$ - задача Коши

Знаем, что $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ - решение (просто, не общее)

Тогда в x_0 $\begin{cases} C_1y_{10} + C_2y_{20} = \overline{y}_0 \\ C_1y_{10}' + C_2y_{20}' = \overline{y}_0' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y}_0 \\ \overline{y}_0' \end{pmatrix}$ - система крамеровского типа

$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = W_0 \neq 0 \Longleftrightarrow \exists!(C_1, C_2)$ - решение СЛАУ

Таким образом через всякую x_0 проходит одна! кривая $\overline{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

□

Nota. Вывод: если найдены какие-либо лин. нез. y_1, y_2, то общее решение ЛОДУ$_2$ будет $C_1 y_1 + C_2 + y_2 = \overline{y}$

Def. Такие $\{y_1, y_2\}$ называется ФСР ЛОДУ$_2$

Nota. Тогда, найденные решения ЛОДУ - все общие

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$: ФСР $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}, \lambda_i \in \mathbb{R}$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$: ФСР $\{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in :$ ФСР $\{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

Th. 6. Решение ЛНДУ $Ly = f(x)$

$\overline{y}(x) : L\overline{y} = 0$ - общее решение ЛОДУ

$y^*(x) : Ly^*(x) = f(x)$ - частное решение ЛНДУ

Тогда $y(x) = \overline{y} + y^*$ - общее решение ЛНДУ

□ Lab. □

Мет. ЛДУ$_2$

1) Решим $y'' + py' + qy = 0$ (ХрУ : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$)

ФСР для всех случаев:

1* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

2* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \{e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}\}$

3* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \longrightarrow \{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x\}$

$\overline{y} = l_{\{\text{ФСР}\}}$

2) Изначально $y'' + py' + qy = f(x)$

Доказали: $y(x) = \overline{y} + y^*$, где $\overline{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_i$ - вектора из ФСР, а y^* - частное решение (какое-либо) ЛНДУ

Nota. Рассмотрим два метода поиска y^* для ЛДУ$_2$

1* Метод неопределенных коэффициентов для случая специальной правой части

2* Метод (Лагранжа) вариации произвольных постоянных (универсальный)

1* **СПЧ**

Ex. $y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} \quad (\heartsuit)$

Наводящие соображения: Заметим, что $y = e^{ax}$ не меняет свой вид при дифференцировании, так же как и $y = P_n(x)$, $y = A\cos bx + B\cos bx$

Имеет смысл искать частные решения (♡) в виде $y = Ae^{3x}$

$(Ae^3x)'' - 3(Ae^{3x})' + 2Ae^{3x} = 2e^{3x}$

$9A - 9A + 2A = 2 \Longrightarrow A = 1$, то есть $y^* = e^{3x}$

Nota. Если правая часть содержит произведения $e^{ax}, P_n(x), \cos bx, \sin bx$, то y^* ищем в виде ПЧ

Def. СПЧ: $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$ (обозначим $k = a \pm ib$)

Частные случаи:

1) $f(x) = P_n(x)e^{ax} \quad (b = 0)$

2) $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$ - гармоника $\quad (a = 0, n = m = 0)$

3) $f(x) = P_n(x) \quad (a = b = 0)$

Метод: Решение ищется в виде $y^* = e^{ax}(\overline{P}_l \cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx)$, где a, b - коэфф. СПЧ, $l = \max(m, n), \overline{P}_l, \overline{Q}_l$ - многочлены в неопр. коэфф

Ex. 1. ♡ $\quad y'' - 3y' + 3y = 2e^{3x} = e^{3x}(2\cos 0x) \quad (k = 3 \pm 0 = 3)$

$y^* = e^{3x}(\overline{P}_{l=0}(x)\cos 0x) = e^{3x} \cdot A$

Ex. 2. Однако!

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ (!)

СПЧ: $e^{2x} = e^{2x}(1\cos 0x + B\sin 0x) \quad k = a \pm ib$

$$\left.\begin{aligned} y^* &= Ae^{2x} \\ y^{*\prime} &= 2Ae^{2x} \\ y^{*\prime\prime} &= 4Ae^{2x} \end{aligned}\right\} \text{ДУ} \longrightarrow \begin{gathered} 4Ae^{2x} - 6Ae^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x} \\ 4A - 6A + 2A = 1 \\ 0A = 1 \end{gathered} \quad - 🤯$$

Нельзя найти A

Решим ХрУ 😈: $\lambda_2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

Внимание! Число k, соответствующее СПЧ, равно ХрУ

Исследуем ситуацию на примере СПЧ $f(x) = P_n(x)e^{ax}$

Проблема $y'' + py' + qy = P_n(x)e^{ax}$

ХрУ : $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2}$ - корни

Ищем $y^* = \overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax}$

$y^{*\prime} = \overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax}$

Получаем:

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + 2a\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a^2\overline{P}_n(x)e^{ax} + (\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + a\overline{P}_n(x)e^{ax})p + \overline{P}_n(x)e^{ax}q$

$\overline{P}_{n-2}(x)e^{ax} + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x)e^{ax} + (a^2+pa+q)\overline{P}_n(x)e^{ax} = P_n(x)e^{ax}$

$\overline{P}_{n-2}(x) + (2a+p)\overline{P}_{n-1}(x) + (a^2+pa+q)\overline{P}_n(x) = P_n(x)$

Заметим, что если a - корень ХрУ , то есть $a \pm ib = a = k = \lambda_i$ (пусть 1-ой кратности), то $a^2+pa+q=0$ и степень левой части понижается до $n-1$

Если a - корень ХрУ 2-ой кратности, то есть $a^2+pa+q = \left(a+\dfrac{p}{2}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2a+p=0$, то степень левой части понижается на 2

Чтобы сделать уравнение для $\overline{P}_n$ решаемым, домножим y^* на x^r, где r - число совпадений $k = a \pm ib$ с корнем ХрУ λ_i (или кратность λ_i, с которым совпадает k)

Метод (окончательно): $y'' + py' + qy = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$, $\quad \lambda_{1,2}$ - корни ХрУ ; $k = a \pm ib$

$y^* = x^r e^{ax}(\overline{P}_l(x)\cos bx + \overline{Q}_l(x)\sin bx), \quad l = \max(m,n)$

Обобщение для ЛДУ$_n$

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$

ХрУ : $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0$

Правило построения ФСР для $\overline{y}$ - общее решение однородного ДУ

1) Всякому λ_i - одиночному $\mathbb{R}$-корню ХрУ сопоставляем $y_i = e^{\lambda_i x}$

2) R-корню λ кратности s сопоставляем набор $\{y_1, y_2, \dots, y_s\} = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{s-1}e^{\lambda x}\}$

3) Всякой одиночной паре $\lambda_{j_1,j_2} = \alpha_j \pm i\beta_j$ соотвветствует пара $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$

4) $\mathbb{C}$-паре $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности t соответствует набор $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{t-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{t-1}e^{\alpha}$

Nota. количество векторов y_i в ФСР равно порядку n ДУ

СПЧ $y^* = x^r e^{ax}(\dots)$, где r - кратность $\mathbb{R}$-корня или $\mathbb{C}$-пары, с которыми совпадает $k = a \pm ib$

Ex. Вернемся к $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

$$\left.\begin{aligned} &y^* = Ax^1e^{2x} \\ &\mathrm{y}^{*\prime} = Ae^{2x}2Axe^{2x} \\ &\mathrm{y}^{*\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} \end{aligned}\right\} \to (4-6+2)Axe^{2x} + (4-3)Ae^{2x} = e^{2x} \quad A = 1$$

$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{2x} + xe^{2x}$

2* **Лагранжа**

Met. ЛДУ$_1$: $y' + py = f(x)$

1) ЛОДУ - $y' + py = 0 \to \overline{y} = Cy_0$ - ФСР

2) ЛНДУ - $y(x) = C(x)y_0 \longrightarrow C'(x)y_0 = f(x) \to C(x)$

Nota. Введем аналогичный метод для ЛДУ$_2$

1 этап) $y''+py'+qy=0$ - ЛОДУ, $\lambda_{1,2}$ - корни, соответствующие ФСР $\{y_1, y_2\}$

$\overline{y}(x)=C_1y_1+C_2y_2$

2 этап) Варьируем C_1 и C_2, но теперь нужны два условия для их определения. Одним является ДУ

Ex. $y''-3y'+2y=2e^{3x}$

$\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$

$y(x)=C_1(x)e^x+C_2(X)e^{2x}=C_1e^x+C_2e^{2x}+y^*$

$(g(x)+C_1)e^x+(h(x)+C_2)e^{2x}=C_1e^x+C_2e^{2x}+g(x)e^x+h(x)e^{2x}$

Подберем g,h: $\underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{g}e^x+\underbrace{\frac{e^x}{2}}_{h}e^{2x}=e^{3x}$ или $\underbrace{-e^{2x}}_{g}e^x+\underbrace{2e^x}_{g}e^{2x}=e^{3x}$

Заметим, что $C_1'(x)$ во втором случае $g'=-2e^{2x}$, а $C_2'=2e^x$

Тогда $C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{2x}=-2e^{3x}+2e^{3x}=0$

Nota. Подставим $y(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$ в ДУ

<u>Метод</u> $y'(x)=C_1'(x)y_1+C_1(x)y_1'+C_2'(x)y_2+C_2(x)y_2'$

Требуем $C_1'y_1+C_2'y_2=0$

$y''(x)=C_1'(x)y_1'+C_1(x)y_1''+C_2'(x)y_2'C_2(x)y_2''$

$C_1'(x)y_1'+C_1(x)y_1''+C_2'(x)y_2'C_2(x)y_2''+pC_1(x)y_1'+pC_2(x)y_2'+qC_1(x)y_1+qC_2(x)y_2=f(x)$

$C_1(x)\underbrace{Ly_1}_{=\,0}+C_2(x)\underbrace{Ly_2}_{=\,0}+C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x)$

<u>Итак</u>, Система для определения $C_1(x), C_2(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x) \end{cases}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=W}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{Крамер}}\begin{matrix} C_1'(x)=\frac{W_1}{W} \\ C_2'(x)=\frac{W_2}{W} \end{matrix}$$

Nota. Обобщив метод на n-ый порядок систему, получим

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_{n-1}'(x) \\ C_n'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

? Доказать, что $\overline{y}+y^*$ - общее решение ЛНДУ

Th. $Ly=f(x), y=\overline{y}+y^*$ - решение $Ly=f(x)$.

Тогда $\overline{y}+y^*$ - общее решение

□

Правда ли, что найдется единственный набор констант $C_1, \ldots, C_n$, которое удовлетворяет НУ
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \end{cases}$$

Так как $\overline{y} + y^*$ - решение, то $\begin{cases} y_0 = C_1 y_{01} + C_2 y_{02} + \cdots + C_n y_{0n} + y_0^* \\ y'_0 = C_1 y'_{01} + \cdots + y_0^{*\prime} \end{cases} \iff \begin{cases} y_0 - y_0^* = \sum C_i y_{0i} \\ y'_0 - y_0^{*\prime} = \sum C_i y'_{0i} \end{cases} \iff$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{01} & y_{02} & \ldots & y_{0n} \\ y'_{01} & y'_{02} & \ldots & y'_{0n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{01}^{(n)} & y_{02}^{(n)} & \ldots & y_{0n}^{(n)} \end{pmatrix}}_{\det W \neq 0} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - y_0^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Таким образом система имеет единое решение $(C_1, \ldots, C_n)$, которое удовлетворяет НУ

□

Th. $Ly = f_1(x) + f_2(x)$

Пусть $Ly_1^* = f_1(x)$ и $Ly_2^* = f_2(x)$, тогда $Ly^* = f_1 + f_2$, где $y^* = y_1^* + y_2^*$

□

$Ly^* = L(y_1^* + y_2^*) = Ly_1^* + Ly_2^* = f_1(x) + f_2(x)$

□

4.6. Системы ДУ

Def. Набор функций $y_1, \ldots, y_n$.

Система дифференциальных уравнений, связывающие эти функции, то есть
$\begin{cases} F_1(x_1, y_1, \ldots y_n, \ldots, y_1^{(n)}, \ldots y_n^{(n)}) = 0 \\ \vdots \end{cases}$ называется системой ДУ

<u>Механический смысл</u>

$\mathbb{R}^n$ - фазовое пространство - пространство состояний системы

t - время, x_i - координаты точки M в $\mathbb{R}^n$

$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, \{x_i\}) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi_2(t, \{x_i\}) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, \{x_i\}) \end{cases}$ - СДУ описывает состояние исследуемой системы во времени, причем $\dfrac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i$ - скорости

Nota. Такая система называется нормальной, то есть все уравнения разрешены относительно производных

Nota. Всякое ДУ$_n$ можно рассмотреть как СДУ: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \Longleftrightarrow y = y_1(x), y' = y_2(x, y_1), \dots$

Можно сделать и обратное - свести СДУ к ДУ$_n$

Метод исключения Рассмотрим на примере СДУ 2-ого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x,y,t) \\ \frac{dx}{dt} = g(x,y,t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{y} = f(x,y,t) \\ \dot{x} = g(x,y,t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}g + \frac{\partial f}{\partial y}f \\ \dot{x} = g(x,y,t) \end{cases}$$

Свели СДУ к ДУ$_2$: $\ddot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x}g + \dfrac{\partial f}{\partial y}f$

Nota. Чтобы свести к ДУ СДУ $\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = \varphi_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ нужно исключить $n-1$ выражение $\dot{x}_i$, для этого взять $\dfrac{d^{n-1}\dot{x}_1}{dt^{n-1}}$

Таким образом общий порядок СДУ (сумма порядков старших производных) будет равен порядку ДУ

Ex. $\begin{cases} \dot{y} = y + 5x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{x} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} + 5\dot{(-y-3x)} \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 15x \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\begin{cases} \ddot{y} = \dot{y} - 5y - 3(\dot{y} - y) \\ \dot{x} = -y - 3x \end{cases} \Longleftrightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0$

ХрУ 😼: $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \to \overline{y} = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$

Найдем $x(t)$ из 1-ого ДУ: $\dot{\overline{y}} = -e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) = e^{-t}((C_2 - C_1)\cos t - (C_1 + C_2)\sin t)$

$5x = \dot{\overline{y}} - \overline{y} = e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t)$

$\begin{cases} y(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x(t) = \frac{1}{5}e^{-t}((C_2 - 2C_1)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t) \end{cases}$

Nota. Метод исключения сохраняет линейность, поэтому линейная СДУ (с постоян. коэфф.) сводится к ЛДУ (с пост. коэфф.)

Nota. СДУ из *Ex.* не содержала t в явном виде. Такие СДУ называются автономными

Матричный метод

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_n + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Обозначим $(y_1, \dots, y_n) = Y$, $\{a_ij\} = A_{(\text{матрица СДУ})}$

Тогда СДУ запишется $Y' = AY$ (однородная СДУ, так как нет $f(x)$)

$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные числа A и h_i - собственный вектор для λ_i

Будем искать решение Y в виде $Y = \ln e^{\lambda_i x}$

Подставим в СДУ: $Y' = \lambda_i h_i = e^{\lambda_i x} = A\underbrace{h_i e^{\lambda_i x}}_{Y} = AY$

$$Ex. \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 8x + 3y \end{cases} \qquad x(0) = 0, y(0) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$

$$h_1 : \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c]2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h_2 : \begin{pmatrix} [cc|c]-4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} [cc|c]-4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Задача Коши: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \\ -2C_1 + 4C_2 \end{pmatrix} \longrightarrow C_1 = -\dfrac{1}{3}, C_2 = \dfrac{1}{3}$

Итак $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{5t} \\ y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{5t} \end{cases}$

Решения в *Ex.* линейно независимы (то есть $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$, где $Y_1 = h_i e^{\lambda_i t}$), так как $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Для кратных собственных $\mathbb{R}$-чисел нельзя построить базис из h_i, а чтобы составить общее решение СДУ, нужно n линейно независимых решений Y_i (ФСР). В этом случае используют жорданов базис (см. литературу)

Для $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$ можно искать решения в том же виде, но потом свести к вещественным функциям (см. литературу🧐)

4.7. Теория устойчивости (элементы)

Наводящие соображения:

Возьмем грузик, подвешенный на стержне. Когда он находится снизу, он находится в устойчивом равновесии, но когда сверху - в неустойчивом

Def. СДУ$_2$: $\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y) \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) \end{cases}$ и НУ$_1$: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ и НУ$_2$: $\begin{cases} \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

Решение СДУ $x = x(t), y = y(t)$ называется устойчивым по Ляпунову при $t \longrightarrow +\infty$

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \mid \quad \forall x, y \quad \forall t > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \varepsilon \end{cases}$

$\begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases}$

Или $\begin{matrix} \Delta x(t) \to 0 \\ \Delta y(t) \to 0 \end{matrix}$ при $t \to +\infty$ и $\begin{cases} \Delta x_0 \to 0 \\ \Delta y_0 \to 0 \end{cases}$

Nota. Малое воздействие приводит к малым отклонениям от исходной траектории

Nota. Обычно рассматривают отклонение решений от нулевого, то есть $\begin{matrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{matrix}$

Ex. $\dot{y} + y = 1$, НУ: $y(0) = 1, \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$ (малое отклонение)

$\begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \to C = 0 \quad \begin{cases} y = Ce^{-t} + 1 \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \end{cases} \to C = \tilde{y} - 1$

$\tilde{y} - y = (\tilde{y}_0 - y)e^{-t} + 1 - 1 = (\tilde{y}_0 - 1)e^{-t} \xrightarrow{t \to +\infty} 0$ - устойчива 🥳

<u>Классификация точек покоя.</u> Будем рассматривать СДУ (автономную)

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = kx + my \end{cases} \qquad \dot{X} = AX \Longrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$

Далее все зависит от $\lambda_{1,2}$

Заметим, что функции $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями (подстановка)

Причем, точка $(0, 0)$ - особая, так как СДУ $\to \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{kx + my}{ax + by}$

Рассмотрим различные случаи значений $\lambda_{1,2}$:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^-$

Тогда решения СДУ будут $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dot{x}(t) = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t}$

Подставляем в первое уравнение, из него получаем $y(t) = \dfrac{1}{b}(C_1(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t})$

Введем Н.У. $y(0) = y_0, x(0) = x_0$

Решение З.К.: $\begin{cases} x(t) = \frac{ax_0 + by_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{ax_0 + by_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - a)e^{\lambda_1 t} + \frac{x_0\lambda_1 - ax_0 - by_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - a)e^{\lambda_2 t}\right) \end{cases}$

При $t \to +\infty$ $|e^{\lambda_i t}| < 1$ и $\forall\varepsilon > 0 \begin{cases} |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\tilde{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0, \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$, то есть $(0, 0)$ - устойчивое решение

Ex. 1. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{x} = -dt \\ \frac{dy}{y} = -2dt \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^{-t} \\ y = C_2 e^{-2t} \end{cases} +$ Н.У. $\Longrightarrow \begin{cases} x = x_0 e^{-t} \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$

Изобразим интегральные кривые (фазовый портрет системы): СДУ $\Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} \Longrightarrow y = Cx^2$

В этом примере получается семейство парабол, при $t \to +\infty$ они все стремятся к $(0,0)$ - устойчивому узлу

2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

Ex. 2. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_0 e^t \\ y = y_0 e^{-2t} \end{cases}$

Фазовый портрет $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2y}{x} \Longrightarrow y = \dfrac{C}{x^2}$

Гиперболы при $t \to \infty$ стремятся к точками $(\pm\infty, 0)$ и образуют так называемое седло неустойчивости

3) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$

Ex. 3. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$ $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$

$\begin{cases} x(t) = e^{-t}(x_0 \cos t + y_0 \sin t) \\ y(t) = e^{-t}(y_0 \cos t - x_0 \sin t) \end{cases}$ - устойчивая

Фазовый портрет: перейдем в ПСК $\begin{matrix} x = \rho \cos \varphi & x_0 = A \cos \varphi_0 \\ y = \rho \sin \varphi & y_0 = A \sin \varphi_0 \end{matrix}$

Тогда $\begin{cases} \rho \cos \varphi = e^{-t} = A \cos(t - \varphi_0) \\ \rho \sin \varphi = e^{-t} = A \sin(t - \varphi_0) \end{cases} \Longrightarrow \rho^2 = A^2 e^{-2t} \Longrightarrow \rho = Ae^{-t}$

Выразим t через φ: $\tan \varphi = \tan(t - \varphi_0)$

Получаем $\rho = Ae^{-(\varphi + \varphi_0 + \pi n)}$

Получается семейство логарифмических спиралей $(\rho = Ae^{\varphi})$

3′) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta (\alpha = 0)$

$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \beta t + y_0 \sin \beta t \\ y(t) = y_0 \cos \beta t - x_0 \sin \beta t \end{cases}$.

Фазовый портрет - семейство соосных и концентрических эллипсов. Центр этих эллипсов устойчивый

4) $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$

Lab.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -0 \end{cases}$

Обобщим. Если хотя бы один $\lambda \neq 0$ и лежит слева от $Im\lambda$, то решение устойчивое