

Лекция 2

Построение модели случайных явлений

1. Задаем пространство элементарных исходов Ω
2. **Def.** Система \mathcal{F} подмножеств Ω называется σ -алгеброй событий, если:

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
- 2) $A \in \mathcal{F} \implies \bar{A} \in \mathcal{F}$;
- 3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Свойства:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$, так как $\Omega \in \mathcal{F} \implies \bar{\Omega} = \emptyset \in \mathcal{F}$
- (b) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \implies \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \in \mathcal{F} \quad \square$$

- (c) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \setminus B \in \mathcal{F}$

$$\square \quad A, B \in \mathcal{F} \implies A, \bar{B} \in \mathcal{F} \implies A \setminus B = A \cdot \bar{B} \in \mathcal{F} \quad \square$$

Ex. 1. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

Ex. 2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$

Ex. 3. **Def.** Борелевская σ -алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ - минимальная σ -алгебра, содержащая все возможные интервалы на прямой

3. **Def.** \square Ω - пространство элементарных исходов, \mathcal{F} - его σ -алгебра событий. Вероятностью на (Ω, \mathcal{F}) называется функция $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

- (a) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (неотрицательность)
- (b) Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ - несовместное, то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (свойство счетной аддитивности)
- (c) $P(\Omega) = 1$ (условие нормированности)

Def. Из этого тройка (Ω, \mathcal{F}, P) называется вероятностным пространством

Свойства вероятности

1. Так как \emptyset и Ω - несовместные, то $1 = P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = 1 + P(\emptyset) \implies P(\emptyset) = 0$

2. Формула обратной вероятности: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$$\square \quad A \text{ и } \bar{A} - \text{несовместные и } A + \bar{A} = \Omega \implies P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1 \quad \square$$

3. $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \leq 1$

Аксиома непрерывности

Пусть имеется убывающая цепочка событий $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

Тогда $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

При непрерывном изменении области $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ соответствующая вероятность $P(A)$ также должна изменяться непрерывно

Th. Аксиома непрерывности следует из аксиомы счетной аддитивности

\square

Ясно, что $A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_i \bar{A}_{i+1} + \prod_{i=n}^{\infty} A_i$

$$\prod_{i=n}^{\infty} A_i = A_n \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^n A_i \cdot \prod_{i=n+1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \implies A_n = \sum_{i=n}^{\infty} A_n \bar{A}_{i+1} \text{ и так как эти события}$$

несовместны, то по свойству счетной аддитивности $P(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1})$ - это остаток (хвост) сходящегося ряда

$$P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \bar{A}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i \bar{A}_{i+1}) + P(A_n) \text{ и } P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ по необходимому признаку сходимости}$$

\square

Nota. Аксиому счетной аддитивности можно вывести из конечной аддитивности и аксиомы счетной непрерывности

Свойства операций сложения и умножения

1. Свойство дистрибутивности: $A \cdot (B + C) = AB + AC$

2. Формула сложения: если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

3. Формула сложения вероятностей: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

\square

$$A + B = \bar{A}\bar{B} + AB + \bar{A}B - \text{несовместные события} \implies P(A + B) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B) = (P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B)) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

\square

Ех. Из колоды в 36 карт достали одну карту. Какова вероятность того, что будет дама или пика

Пусть Д - дама, П - пика, $P(Д + П) = P(Д) + P(П) - P(ДП) = \frac{4}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$

Формула сложения при $N = 3$: $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) - P(A_1A_2) + P(A_1A_2A_3)$

Общий случай: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_iA_j) + \sum_{i < j < k} P(A_iA_jA_k) + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1A_2 \dots A_n)$ - формула включения и исключения

Ех. n писем случайно раскладывается по n конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо окажется в своем конверте

$\square A_i$ - i -ое письмо в своем конверте

$$P(A_i) = \frac{1}{n}; P(A_iA_j) = \frac{1}{A_n^2}; P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{A_n^3}; P(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{n!}$$

Слагаемых вида A_i - n штук; A_iA_j - C_n^2 ; $A_iA_jA_k$ - C_n^3 ; $A_1A_2 \dots A_n$ - 1 штука

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{A_n^2} + C_n^3 \frac{1}{A_n^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

Так как $e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \dots$, то при $n \rightarrow \infty$ $P(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-1} \approx 0.63$

Независимые события

Под независимыми событиями логично подразумевать события, не связанные причинно-следственной связью (то есть когда факт наступления одного не влияет на оценку вероятности другого)

$$\square |\Omega| = n; |A| = m_1; |B| = m_2$$

Проведем пару независимых испытаний. Тогда получаем пространство элементарных исходов $\Omega \times \Omega$ и $|\Omega \times \Omega| = n^2$

По основному принципу комбинаторики $|A \cdot B| = m_1 \cdot m_2$

$$P(AB) = \frac{|A \cdot B|}{|\Omega \times \Omega|} = \frac{m_1 m_2}{n^2} = P(A) \cdot P(B)$$

Def. События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

Lab. $\square P(A), P(B) \neq 0$, доказать, что если A и B несовместны, то они зависимы

Свойство: Если A и B независимы, то независимы \bar{A} и \bar{B} , A и \bar{B} , \bar{A} и B

Доказательство: $A = A \cdot (B + \bar{B}) = AB + A\bar{B}$ - несовместные события $\implies P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) \implies P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}) \implies$ независимы

Def. События A_1, A_2, \dots, A_n - независимы в совокупности, если для любого набора i_1, i_2, \dots, i_k ($2 \leq k \leq n$) $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Nota. Из независимости в совокупности при $k = 2$ получаем попарную независимость. Обратное утверждение неверно

Ех. (С. Бернштейн)

Пусть имеется правильный тетраэдр, одна грань окрашена в красный, вторая в синий, третья в зеленый, а четвертая во все эти три цвета.

Подбросили тетраэдр, $\triangle A$ - грань, которая содержит красный цвет, B - синий, C - зеленый.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Так как } P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B) \text{ - попарная независимость}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) \text{ - но вот независимость в совокупности не соблюдается}$$

Ех. (Шевалье де Мере, Паскаль, Ферма, ≈ 1650 г.)

Какова вероятность того, что при 4 бросании кости выпадет одна шестерка

A_1 - при первом броске шестерка, A_2 - при втором, A_3 - при третьем, A_4 - при четвертом

B - выпала хотя бы одна шестерка при 4 бросках

$B = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ - совместные события, но независимые

Найдем обратную вероятность: \bar{B} - ни разу не выпала шестерка

$$\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4$$

$$P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = \frac{5}{6}$$

$$\bar{B} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.482$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) \approx 0.52$$