Содержание

0. Вводная лекция

Задается вопрос: зачем обучающимся программистам нужна физика в учебном плане?
Приводятся цитаты Л. Богуславского, одного из крупнейших IT инвесторов, и Б. Страуструпа, которые считают, что такие фундаментальные дисциплины, как математика, физика, иностранный язык, способствуют развитию мышления человека
Такие компании, как Bell Labs и IBM создали прорывные изобретения в области физики, на основе которых построены компьютерные технологии
В 3-ем семестре курс физики будет состоять из классической механики и основ электричества
В 4-ом семестре будут темы магнетизма, колебаний, волн и волновых процессов
В 5-ом семестре будут рассматриваться оптика, основы квантовой физики и квантовые вычисления
Занятия состоят из лекций, практических и лабораторных занятий. Всего в 3-ем семестре будут 5 лабораторных работ

1. Современная физическая картина мира. Кинематика материальной точки

План лекции

- Историческая справка
- Методы и модели в физике
- Изучаемые объекты
- Физика и другие науки
- Фундаментальные взаимодействия
- Кинематика материальной точки. Начало

Физика - раздел естествознания, изучающий свойства и формы движения материи. Под материей понимают вещество и поля.
Научный метод: сначала проводятся наблюдения и эксперименты, из которых выдвигается гипотеза и ищется адекватная математическая модель, эта гипотеза проверяется, и если она подтверждается, то формируется *теория*
Пример - открытие Нептуна: в 1781-1845 годах наблюдались аномалии в движении Урана, в 1845 проведение расчетов координат новой планеты, а в 1846 обнаружилась новая планета
Принцип соответствия (Н. Бор, 1923 г.) - каждая новая теория должна включать предыдущую как частный случай
Изучаемые объекты: вселенная, галактики, звездные системы и планеты, экосистемы, макротела, молекулы, атомы, ядра, элементарные частицы
Всего в физике существуют 4 фундаментальных взаимодействия:

Взаимодействие	Квант поля	Область взаимодействия
Гравитационное	гравитон	масса
Электромагнитное	фотон	все заряженные частицы, атомы, электротехника
Слабое	бозон	радиоактивный распад
Сильное	глюон	атомные ядра, фундаментальные частицы

Механика - раздел физики, изучающий механическое движение, то есть движение тел в пространстве и времени. Механическое движение тел ОТНОСИТЕЛЬНО.

	$\ll 3 \cdot 10^8$ м/с	$\approx 3 \cdot 10^8$ м/с
$\gg 1$ нм	Классическая	Релятивистская
$\ll 1$ нм	Квантовая	Квантовая теория поля

Материальная точка - тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи

Абсолютно твердое тело (АТТ) - система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения (деформации в процессе движения пренебрежимо малы)

Тело отсчета - тело, относительно которого определяется положение других тел в пространстве

Система отсчета - совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и синхронизированных между собой часов

Степени свободы - число независимых скалярных величин, однозначно определяющих положение тела в пространстве

Материальная точка: 3 степени свободы

Система N материальных точек: $3N$ степени свободы

АТТ: 6 степеней свободы

Система единиц (le System International d'unites), 1960

$[t] = \text{с} \quad [S, l] = \text{м}$

7 основных единиц:

$[S] = \text{м} \quad [T] = \text{К}$

$[m] = \text{кг} \quad [\nu] = \text{моль}$

$[t] = \text{с} \quad [l] = \text{Кд}$

$[q] = \text{Кл}$

Изначально все физические единицы основывались на материальных предметов, из-за которых точности единиц была низкой, но недавно все единицы были переопределены на основе физических констант.

В природе нет абсолютно точных вычислений. Измерение любой физической величины без погрешности не имеет смысла!

2. Кинематика материальной точки

План лекции

- Основные способы описания движения
- Основные понятия кинематики
- Кинематика поступательного и вращательного движения
- Прямая и обратная задачи кинематики
- Численные методы при решении задач

Def. Кинематика - раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причин, вызывающих это движение.

Def. Траектория - линия, по которой движется материальная точка в пространстве

Def. Путь - длина траектории

Def. Перемещение - вектор, проведенный из начальной точки в конечную

Способы описания движения

Векторный способ	Координатный способ	Естественный (траекторный) способ
Положение точки может быть однозначно определено с помощью радиус-вектора	Положение точки может быть однозначно определено с помощью трех скалярных координат	Положение точки определяется дуговой координатой

Векторный способ

$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радиус-векторы, определяющие положения материальной точки в 1 и 2
$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ - перемещение материальной точки

Def. Скорость - векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки

Средняя скорость - $\langle\vec{v}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

Мгновенная скорость - $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Средняя путевая скорость - $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

Def. Ускорение - векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости материальной точки

Среднее ускорение - $\langle\vec{a}\rangle = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

Мгновенное ускорение - $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Координатный способ

В координатном способе положение точки описано 3 координатами x, y, z (в данном случае в ДПСК)

$|r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{\imath} + r_y(t)\vec{\jmath} + r_z(t)\vec{k} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{\imath} + \dfrac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{\imath} + v_y(t)\vec{\jmath} + v_z(t)\vec{k}$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

Прямая задача:

$\vec{r}(t), x(t), y(t), z(t) \longrightarrow \vec{v}(t), \vec{a}(t), v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z$

Решением является дифференцирование

Обратная задача:

$\vec{a}(t), a_x, a_y, a_z \longrightarrow \vec{v}(t), \vec{r}(t), x(t), y(t), z(t)$

Для обратной задачи решением является интегрирование

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \quad d\vec{r} = \vec{v}dt \quad \Delta\vec{r} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\vec{v}dt$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \Delta\vec{r} = \vec{r_0} + \int_{t_1}^{t_2}\vec{v}dt$$

Аналогично для ускорения

Численное решение ОДУ (обыкновенного дифференциального уравнения) $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ при условии $y(x_0) = y_0$

Разбиваем отрезок $[x_0, x_n]$ на конечное число частей введением узловых точек

Шаг разбиения: $h = \dfrac{x_N - x_0}{N}$

По определению производной $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_{i+1}-y_i}{h}$, из этого:

Формула Эйлера: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$

$dy = f(x,y)dx$

$\Delta y = y_{i+1} - y_i = \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx$

Естественный (траекторный) способ

Если траектория точки заранее известна, то положение точки задается дуговой координатой $l(t)$

$\vec{v} = v_\tau \vec{\tau} \quad v_\tau \dfrac{dl}{dt} |\vec{\tau}| = 1$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}v_\tau \qquad \dfrac{d\tau}{dt} = \dfrac{d\tau}{dl} \cdot \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{d\tau}{dl}v_\tau$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}v_\tau^2$

$d\tau = \tau d\alpha$

$dl = Rd\alpha \qquad d\vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{n}$

R - радиус кривизны траектории

$\vec{\alpha} = \dfrac{dv_\tau}{dt}\vec{\tau} + \dfrac{1}{R}v_\tau^2\vec{n} \qquad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости, направлено по касательной к траектории движения

Нормальное ускорение отвечает за изменение направления вектора скорости, направлено к центру кривизны траектории

3. Кинематика вращательного движения. Динамика материальной точки

План лекции

- Угловые величины: угол поворота, угловая скорость
- Взаимосвязь между линейными и угловыми величинами
- Плоское движение
- Динамика материальной точки
- Законы Ньютона. Силы в механике
- Принципы работы акселерометра

Движение по окружности

Возьмем точку A, положение которое определим через $\vec{r}$. Точка A движется по окружности вокруг неподвижной оси OO'

Тогда $d\vec{r}$ - перемещение, $d\vec{\varphi}$ - элементарный угол поворота (вектор определяет в какую сторону, по часовой или против, обращается по окружности тело; вектор направлен перпендикулярно окружности)

$|d\vec{r}| = Rd\varphi = r \cdot \sin\alpha d\varphi$

$R = r \cdot \sin\alpha$

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{r}]$ здесь и далее $[\vec{x}\vec{y}]$ - векторное произведение

Угловая скорость - векторная величина, показывающая как меняется угол поворота тела со временем: $\langle\omega\rangle = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$

Направление совпадает с направлением угла поворота $d\vec{\varphi}$: $\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$

Угловое ускорение - векторная величина, показывающая как меняется угловая скорость тела со временем

$\langle\beta\rangle = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$

Направление совпадает с направлением вектора изменения скорости $\Delta\vec{\omega}$: $\vec{\beta} \uparrow\uparrow d\vec{\omega}$

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{r}]$

$dr = d\varphi \cdot r \cdot \sin\alpha = d\varphi \cdot R$

Выразим скорость $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = [\dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}\vec{r}] = [\vec{\omega}\vec{r}]$

$v = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha = \omega \cdot R$

Выразим ускорение: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = [\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}] + [\vec{\omega}\dfrac{d\vec{r}}{dt}] = [\vec{\beta}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

$\vec{a}_\tau$ называют тангенциальным ускорением (напраленным по касательной), $\vec{a}_n$ - нормальным (направленным к центру)

$a_\tau = \beta \cdot r \cdot \sin\alpha = \beta \cdot R$

Перемещение, путь, скорость:

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{\rho}]$($\vec{\rho}$ - вектор радиуса окружности) $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{\rho}]$

$dr = d\varphi \cdot R$ $v = \omega \cdot R$

$S = \varphi \cdot R$

Ускорение: $\vec{a} = [\vec{\beta}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}]$

$\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}\vec{r}]$ $\vec{a}_n = [\vec{\omega}\vec{v}] = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{\rho}]]$ $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{\nu}$ - период

$a_\tau = \beta \cdot R$ $a_n = \omega^2 R = \dfrac{1}{R}v^2$ $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$ - частота

Плоское движение - движение твердого тела, при котором каждая его точка движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной в данной системе отсчета плоскости

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$

$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' = d\vec{r}_0 + [d\vec{\varphi}\vec{r}]$

$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}]$

$\vec{v}_C$ - скорость центра колеса относительно точки отсчета

$\vec{v}_{\text{вр}}$ - скорость точек колеса относительное его центра

Def. Динамика - раздел механики, изучающий причины, вызывающие движение тел

1687 г. - законы Ньютона, основа классической механики (механики Ньютона), обобщение большего количества опытов (Г. Галилей)

Классическая механика - частный случай 1) СТО при скоростях много меньших скорости света $v \ll c$; 2) квантовой механики при массах, много больших массы атома

В динамике существуют различия между системами отсчета и преимущества одних СО над другими.
Существуют такие системы отсчета, относительно которых свободное тело (тело, на которое не действуют другие тела) движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя. Таким системы называются инерциальными (ИСО)

Принцип относительности Галилея:
Любая СО, движущаяся с постоянной скоростью относительно ИСО, также является ИСО. Тогда справедливо любое из этих утверждений:

1. все ИСО эквивалентны друг другу по своим механическим свойствам
2. во всех ИСО свойства пространства и времени одинаковы
3. законы механики одинаковы во всех ИСО

Преобразования Галилея - преобразования координат при переходе от одной ИСО к другой
K, K' - ИСО
$\vec{V}$ - скорость, с которой движется СО K' относительно K $t = t'$
$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$
$\vec{c} = \vec{v}' + \vec{V}$
$\vec{a} = \vec{a}'$

Def. Сила - физическая величина, определяющая количественную характеристику и напраление воздействия, оказываемого на данное тело со стороны других тел.
Силы условно можно разделить на силы, возникающие при непосредственном контакте (силы трения, давления) и на силы, возникающие через поля (электрические, гравитационные).

Def. Инертная масса - мера инертности тела, то есть способности тела сохранять свою скорость при движении

Def. Гравитационная масса - мера гравитацонного взаимодействия, величина, определяющая вес тел.
$m_{\text{ин}} = m_{\text{гр}}$ с точностью до 10^{-13} кг
В классической механике 1) масса - величина аддитивная $(m_1 + m_2 + \cdots = m)$; 2) $m = const$

Законы Ньютона

I закон Ньютона

Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

II закон Ньютона

Ускорение тела пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально его массе $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

Под равнодействующей всех сил понимают векторную сумму всех сил, действующих на тело (принцип суперпозиции)

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ - II закон в импульсной (дифференциальной) форме

III закон Ньютона

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга равны по модулю и направлены в противоположные стороны $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Закон Гука: $F = k|\Delta l|$ - сила упругости пропорциональна изменению длины тела

Акселерометр - прибор, измеряющий ускорение, точнее проекцию кажущегося ускорения. Акселерометр использует II закон Ньютона ($mg - k\Delta l = ma$) во всех трех осях, что позволяет измерение ускорения в трех направлениях. Акселерометр используется в автомобилях, авиации, телефонах, игровых контроллерах, компьютерах (защита жесткого диска). Сейчас акселерометры изготавливаются в размерах от 20 мкм до 1 мм из кремния

4. Импульс. Закон сохранения импульса.

План лекции

- Силы в механике
- Универсальные законы природы - законы сохранения
- Импульс материальной точки
- Закон сохранения импульса
- Центр масс. Ц-система

Силы в механике. Сила гравитационного взаимодействия

Все силы в механике относятся к гравитационным и электромагниным фундаментальным воздействиям. Это можно заметить на примере законов всемирного тяготения и Кулона:

$$\vec{F} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

Закон всемирного тяготения

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$

Закон Кулона

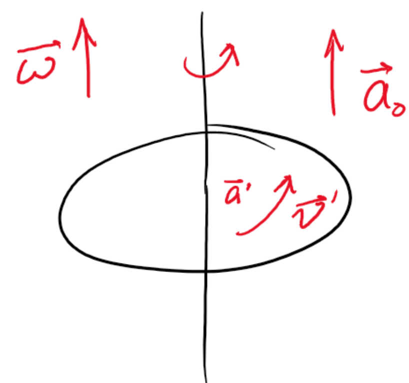
Запишем закон всемирного тяготения для тела m на расстоянии r от Земли (радиуса R и массы $M_З$):

$$|\vec{F}| = G\frac{mM_З}{(R+r)^2}$$

С другой стороны, любое тело вблизи поверхности Земли движется с ускорением свободного падения $\vec{g}$, следовательно, сила, действующая на тело, равна:

$$F = G\frac{mM_З}{R^2} = mg$$

Одинаково ли ускорение свободного падения на поверхности Земли?



Пусть k - ИСО, k' - НИСО (неинерциальная СО), а $\vec{a}', \vec{v}'$ - ускорение и скорость в системе k', а сама система k' движется с ускорением $\vec{a}_0$ и вокруг оси с угловой скоростью $|\vec{\omega}| = const$

Тогда получаем ускорение в НИСО: $\vec{a}' = \vec{a} + \omega^2\vec{\rho} + 2[\vec{v}'\vec{\omega}] - \vec{a}_0$

$\vec{a}$ - ускорение тела в системе k'

$\omega^2\vec{\rho}$ - центробежное ускорение

$2[\vec{v}'\vec{\omega}]$ - ускорение Кориолиса

$\vec{a}_0$ - поступательное ускорение (системы отсчета k' для k)

$m\vec{a}' = \underbrace{m\vec{a}}_{\sum\vec{F}} + \underbrace{m\omega^2\vec{\rho} + 2m[\vec{v}'\vec{\omega}] - m\vec{a}_0}_{\text{силы инерции (т. н. фиктивные)}}$ - основное уравнение динамики в НИСО

$m\omega^2\vec{\rho}$ - центробежная сила

$2m[\vec{v}'\vec{\omega}]$ - сила Кориолиса

$m\vec{a}_0$ - поступательная сила инерции

В НИСО возникают так называемые силы инерции (фиктивные), центробежная и Кориолиса связаны с вращением

Сила Кориолиса будет действовать только на те тела, которые движутся

Из закона всемирного тяготения можно вывести ускорение свободного падения гравитационное: $g_{\text{грав}} = G\frac{M_З}{R^2} = 9.81\ldots 9.83\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Из этого получить ускорение эффективное: $g_{\text{эфф}} = g_{\text{грав}} + a_{\text{цб}} = 9.78\ldots 9.83$ (ускорение свободного падения уменьшается на 3 сотых из-за вращения)

Вес тела

Def. Вес тела - сила, с которой тело действует на неподвижную относительно него опору
В случае опоры $|P| = |N|$ (N - сила реакции опоры)
Рассмотрим случай, когда тело находится в неподвижном состоянии на поверхности:
$m\vec{g} + \vec{N} = 0 \qquad N - mg = 0 \qquad P = mg$
Вес тела равен силе тяжести только при $\vec{a} = 0$ системы отсчета

Силы трения

Силы трения появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей относительно друг друга. Различают сухое и вязкое трение. К сухому трению относится трение покоя, трение скольжения и трение качения
Сила трения покоя применима не телам, которые покоятся; она не может превышать некоторого максимального значения: $0 \leq F_{\text{тр.}} \leq \mu_0 N$ (где μ_0 - коэффициент трения покоя)
Сила трения скольжения возникает при движении соприкасающихся тел. В общем случае сила трения скольжения зависит от скорости движения, но для широкого класса тел равна максимальной силе трения покоя и подчиняется закону Амонтона-Кулона: $F_{\text{тр}} = \mu N$
В задачах принимается, что $\mu_0 = \mu$, тогда во время покоя сила трения растет линейно, пока не достигнет μN, тогда тело начинает движение, и применяется сила трения скольжения

Как можно измерить массу тел?

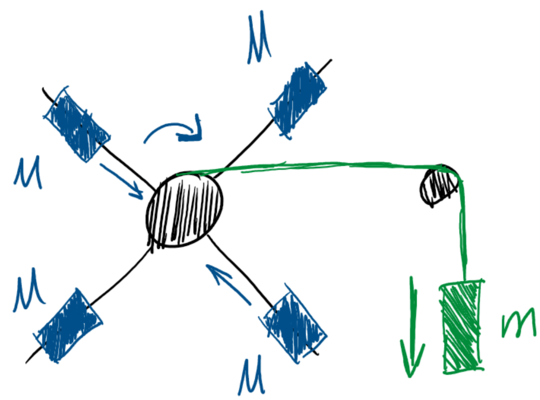
Для измерения массы необходимо сравнить ее с другой, принятой за эталон. Сравним массы m_1 и m_2
Опыт показывает, что в замкнутой системе - системе, в которой можно пренебречь взаимодействием с другими телами, выполняется соотношение:
$$\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta\vec{v}_2} = \frac{m_2}{m_1}$$
$\Delta\vec{v}_1 \uparrow\downarrow \Delta\vec{v}_2 \qquad v \ll c$
$m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2$ или $m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 = 0$
Импульс (количество движения) - векторная величина, равная произведению массы тела на его скорость: $\vec{p} = m\vec{v} \qquad [p] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$
Определение справедливо для материальной точки и для поступательного движения твердого тела
Импульс системы материальных точек: $\vec{P} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{p}_i$
Для системы N материальных точек ($\vec{F}_i$ - внешние силы)
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i \qquad \vec{P} = const$$

Закон сохранения импульса - импульс замкнутой системы остается постоянным
При изменении состояния системы всегда существуют такие величины, которые сохраняются с течением времени. Среди этих величин наиболее важное значение имеют импульс, энергия и момент импульса.
Эти величины обладают свойством аддитивности – значение величин для системы, состоящей из частей, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности.
Законы сохранения – универсальные законы природы, связаны с фундаментальными свойствами пространства и времени.

Закон сохранения импульса – однородность пространства
Закон сохранения энергии – однородность времени
Закон сохранения момента импульса – изотропность пространства

5. Вращательное движение. Моменты силы и импульса

Одной из лабораторный работ в курсе механики является работа с маятником Обербека (представлен на рисунке). Принцип его работы таков: к вращающемуся колесу с грузиками на спицах привязана нить, другой конец которой привязан к грузу через блок, груз падает, вращает колесо. В ходе эксперимента можно заметить, что при приближении грузиков к центру колесо начинает раскручиваться быстрее.

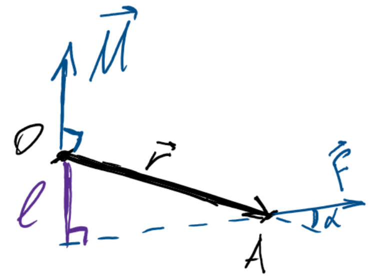


Рассмотрим величины, действующие при вращательном движении:

1. Момент силы M

   $M = F \cdot l$

   $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] \qquad M = r \cdot F \cdot \sin\alpha = l \cdot F$

   Так как момент силы - векторное произведение, то вектор момента силы направлен перпендикулярно к плоскости радиус-вектора и вектора силы

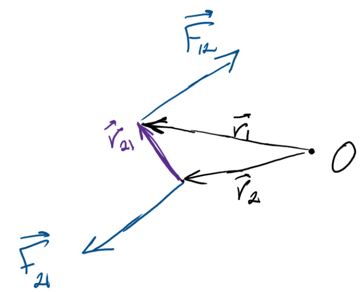
   $[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$

   Аналогично рассмотрим момент силы для противоположных сил:

2. Момент пары сил

   $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [\vec{r}_1\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2\vec{F}_{21}] = [(\vec{r}_2 + \vec{r}_{21})\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2\vec{F}_{21}] = [\vec{r}_2\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_{21}\vec{F}_{12}] + [\vec{r}_2\vec{F}_{21}]$

   $\vec{M} = [\vec{r}_{21}\vec{F}_{12}] = [\vec{r}_{12}\vec{F}_{21}]$

   Момент пары сил равен произведению вектора силы на радиус-вектор между точками приложения сил

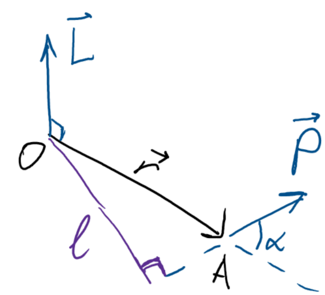
3. Момент импульса L

   Аналогично моменту силы можем определить момент импульса:

   $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$

   $L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = p \cdot l$

   $[L] = \text{кг}\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}$

4. Уравнение моментов

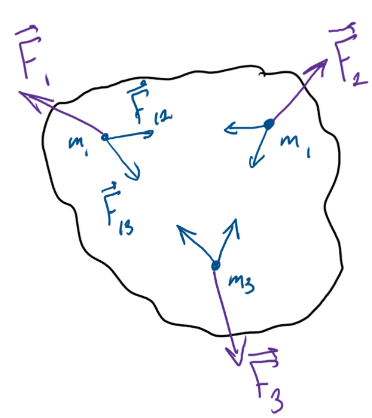
   $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = [\dfrac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}] + [\vec{r}\dfrac{d\vec{p}}{dt}] = \cancelto{0}{[\vec{v}\vec{p}]} + [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M} \qquad \cancelto{0}{[\vec{v}\vec{p}]} \Longleftarrow \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{p}$

   $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$

   $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_{\text{внешн}} = 0 \Longrightarrow \vec{p} = const$ - закон сохранения импульса

5. Закон сохранения момента импульса

   Пусть дана система материальных точек. На них действуют силы, которые мы можен разделить на внутренние и внешние

   В замкнутой системе внешние силы сведены к 0:

   $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{M}_{\text{внешн}} + \cancelto{0}{\vec{M}_{\text{внутр}}}$

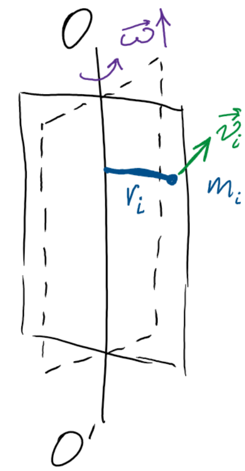
   Поэтому:

   $\vec{M}_{\text{внешн}} = 0 \Longrightarrow \vec{L} = const$ - закон сохранения момента импульса

6. Основное уравнение динамики вращательного движения

   $L_i = m_i v_i \cdot r_i = m_i\omega \cdot r_i^2 = \omega m_i r_i^2$

$L = \sum L_i = \omega \sum m_i r_i^2$



$\vec{p} = m\vec{v} \qquad L_z = I\omega_z$

$I = \sum m_i r_i^2$ - момент инерции системы материальных точек, $[I] = \text{с} \cdot \text{м}^2$

В интегральной форме: $I = \int r^2 dm$

Здесь же выделим различное распределение массы

a) Линейное: $\tau = \dfrac{dm}{dl} = \dfrac{m}{l}$

b) Поверхностное: $\sigma = \dfrac{m}{s} = \dfrac{dm}{ds}$

c) Объемное: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{dm}{dV}$

$L_z = I\omega_z$

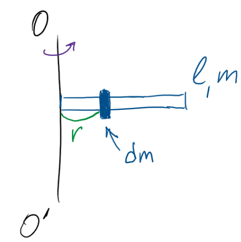
$\dfrac{dL_z}{dt} = I\dfrac{d\omega_z}{dt} = I\beta_z$

$\boxed{M_z = I\beta_z}$ - основное уравнение динамики вращательного движения

7. Расчет моментов инерции твердых тел

Рассмотрим моменты инерции для твердых тел разной формы:

(a) **Стержень**



$I = \int r^2 dm$

$I_{\text{м.т.}} = mr^2$

$dI = r^2$

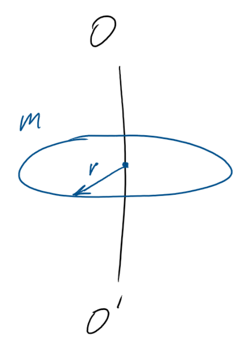
$I = \sum_i dI_i = \int_0^l dI = \int_0^l r^2 dm = \int_0^l r^2 \tau dl = \int_0^l r^2 \tau dr = \tau \dfrac{r^3}{3}\Big|_0^l = \tau\dfrac{l^3}{3} = \dfrac{ml^2}{3}$

$\boxed{I_{\text{стерж}} = \dfrac{ml^2}{3}}$

(b) **Кольцо**

Для кольца тривиально: $\boxed{I_{\text{кольц}} = r^2 m}$

(c) **Диск**



Разбиваем диск на кольца с радиусом r толщиной dr

$dI = dmr^2 = \sigma dsr^2 = \sigma 2\pi r dr r^2 = \sigma dsr^2$

$I = \int \sigma 2\pi r^3 dr = \sigma 2\pi \dfrac{R^4}{4} = \dfrac{mR^2}{2}$

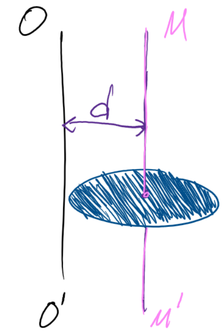
$\boxed{I_{\text{диск}} = \dfrac{mR^2}{2}}$

(d) **Теорема Штейнера**

Теорема Штейнера гласит, что момент инерции тела для неподвижной оси равен сумме момента инерции для оси тела, проходящей через центр масс и параллельной исходной и произведению квадрата расстояния и массы

$I = I_0 + md^2$

Пример: кольцо вращается вокруг оси, расположенной на торце кольца, зная момент импульса в центральной оси кольца и расстояние между осями, можем узнать момент импульса для кольца



6. Гироскоп. Механическая работа.

Повторим то, что было на прошлой лекции. Рассмотрим два типа движения:

Поступательное движение

$d\vec{r}; x, y, z$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{a}_\tau = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

m

$\vec{p} = m\vec{v}$

$\vec{p} = const$ при $\vec{F}_{\text{вн.}} = 0$ (ЗСИ)

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

Вращательное движение

$d\vec{\varphi}$

$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$\vec{\beta} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

$I \qquad I_{\text{м.т.}} = mr^2, \qquad I = \int r^2 dm$

$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad \vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]$

$\vec{L} = const$ при $\vec{M}_{\text{вн}} = 0$ (ЗСМИ)

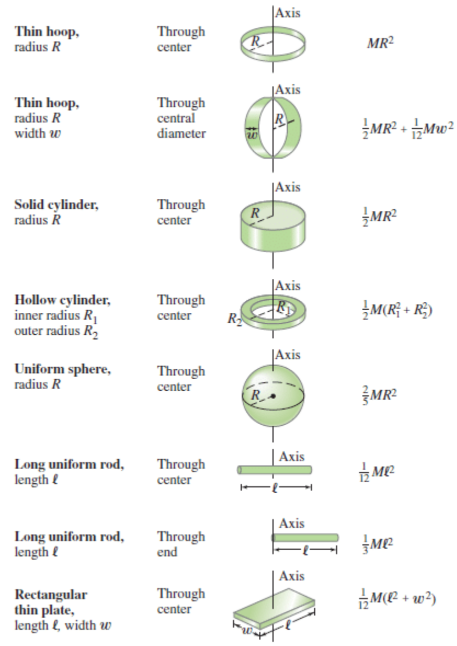
$M_z = I\beta_z$

$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \qquad = [\vec{r}\vec{F}]$

Теорема Штейнера: момент инерции I тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого тела I_0 относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями:

$$I = I_0 + md^2$$

Также мы рассмотрели моменты инерции для разных тел



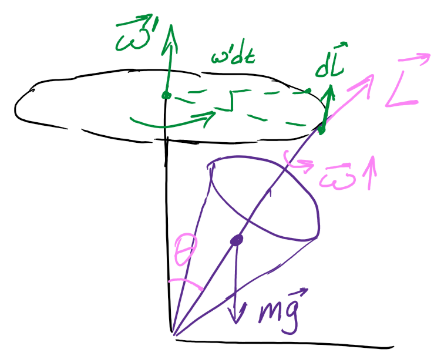
Гироскоп

Рассмотрим вращающийся волчок: вращаясь, он постепенно теряет энергию из-за трения и сопротивления воздуха, из-за чего его вращение замедляется, и его ось начинает вращаться по другой оси.

Обозначим за $\vec{L}_\omega$ момент инерции волчка и за $\vec{L}'$ момент инерции оси. Тогда:

$\vec{L} = \vec{L}_\omega + \vec{L}'$

$\vec{L}_\omega = I\vec{\omega}$



Заметим, что в опыте скорость вращения волчка намного больше скорости вращения оси $\omega \gg \omega'$

Из этого $d\vec{L} = L\sin\theta \cdot \omega' dt$

Или в векторной форме:

$d\vec{L} = [\vec{\omega}\vec{L}]dt$

$\vec{M} = [\vec{\omega}\vec{L}]$

Также заметим, что $L_\omega \gg L'$

Способность сохранять положение вращающегося волчка используется в таком приборе, как гироскоп. Гироскоп применяется для определения положения аппарата (например, самолет, космического корабля) в авионике.

Механическая работа

$d\vec{r}$ - элементарное перемещение, в пределах которого сила $\vec{F}$ постоянна

Fs - проекция силы на направление перемещения

$d\vec{r} = ds$

Элементарная работа силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$

$dA = \vec{F}d\vec{r} = F \cdot ds \cos\alpha = F_s ds$

$A = \sum dA = \int dA$

$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$

Допустим на тело действует несколько сил:

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots$

$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots) d\vec{r}$

Мощность - скалярная величина, равная работе силы, совершаемой за единицу времени. Характеризует скорость, с которой совершается работа

$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

$A = \int N dt$

Работа силы упругости: $A = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$

Работа силы тяжести: $A = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r} = mgh_1 - mgh_2$

Работа силы тяготения: $A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr = -\frac{Gm_1m_2}{r}\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{Gm_1m_2}{r_1} - \frac{Gm_1m_2}{r_2}$

Силы, чья работа не зависит от траектории пути, будет называть *консервативными* (потенциальными)

Тогда из этого мы можем вывести потенциальную энергию:

Потенциальная энергия для силы упругости: $U = \frac{kx^2}{2}$

Потенциальная энергия для силы тяжести: $U = mgh$

Потенциальная энергия для силы тяготения: $U = \frac{Gm_1m_2}{r}$

В общем виде получаем $A = U_1 - U_2$

$dA = -dU \qquad \vec{F} d\vec{r} = -dU$

$\vec{F} = -(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k})$

$\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\nabla U$

7. Закон сохранения энергии.

$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F_s ds \quad F_s = F \cdot \cos\alpha$

$A_{\text{упр.}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$

$A = mgh_1 - mgh_2$

$A = \frac{Gm_1m_2}{r_1^2} - \frac{Gm_1m_2}{r_2^2}$

$A = U_1 - U_2,$ $\qquad U(x, y, z)$ - потенциальная энергия, Дж

$dA = -dU$

$\vec{F} d\vec{r} = -dU$

$d\vec{r}$ по Ox

$F_x dx = -dU$

$F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$

Аналогично для других осей: $F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$; $\quad F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$

$\vec{F} = -\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}U$

$\vec{F}(x,y,z) \longrightarrow U(x,y,z)$

Например, в электростатике напряженность поля $\vec{E} = -\nabla\varphi$ - это градиент потенциал

Кинетическая энергия

$A = \displaystyle\int \vec{F}d\vec{r} = \int m\vec{a}d\vec{r} = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v}d\vec{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$

$A = U_1 - U_2$

Энергия вращательного движения

$E_{\text{кин}} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{m\omega^2 r^2}{2} = \dfrac{I\omega^2}{2}$

Работа при вращательном движении

$dA = \vec{F}_i d\vec{r}_i = F_{r_i} dr = F_{r_i} r_i d\varphi_i = M_i d\varphi_i$

$A = \displaystyle\int \vec{M}d\vec{\varphi} = \int \vec{F}d\vec{r}$

Механическая энергия - скалярная физическая величина, характеризующая способность тел совершать работу

$E_{\text{мех}} = E_k + U$ - сумма кинетической и потенциальной энергий

Кинетическая энергия - функция состояния движения системы: $E_k = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$

Потенциальная энергия - функция состояния системы $U(x,y,z)$

Работа всех сил:

$A_{12} + A_{\text{внешн}} = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1}$

$A_{\text{внешн}} = (E_{\text{к}2} + U_2) - (E_{\text{к}1} + U_1) = E_{\text{мех}2} - E_{\text{мех}1} = \Delta E$

Если работа внешних сил равна нулю, то $\Delta E = 0 \Longleftrightarrow E_{\text{мех}} = E_{\text{к}} + U = const$

Закон сохранения энергии: полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которым действуют только консервативные силы остается постоянной

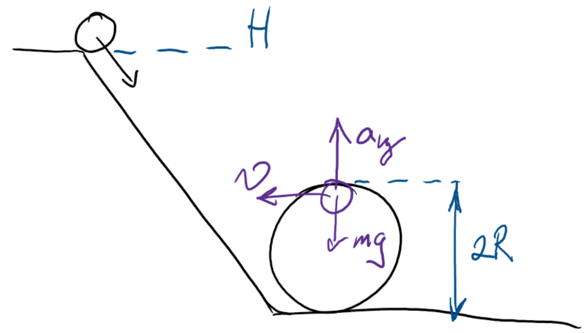
Если в системе действуют неконсервативные силы, из-за которых механическая энергия системы уменьшается, то такие силы называют диссипативными. При этом общий ЗСЭ выполняется: потерянная энергия переходит в другие виды, например, тепловую.

Энергия никогда не создается и не уничтожается - она переходит из одной формы в другой.

Задача: полнотелый шарик радиуса r катится со склона с высоты H, на конце склона есть мертвая петля радиуса R. Какая изначальная высота склона H должна быть у шара, чтобы он смог прокатиться по мертвой петле.

Условие прохождения шара по мертвой петле:

$mg = a_ц = \frac{mv^2}{R} \implies v = \sqrt{gR}$



Кинетическая энергия в верхней точке петли:

$E_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$

Шар катится без скольжения, значит имеет место быть вращательное движение, момент инерции для полнотелого шара $I = \frac{2}{3}mr^2$

Получаем $mgH = 2mgR + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = 2mgR + \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{3}mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = 2mgR + \frac{5}{6}mv^2$

$h = 2R + \frac{5v^2}{6g} = 2R + \frac{5}{6}R = \frac{17}{6}R$

8. Тепловые явления.

Тепловые явления в физике изучают 2 раздела: молекулярная кинетическая теория (МКТ) и термодинамика. МКТ обычно изучает макроскопические системы, используя статистику, а термодинамика описывает макросистемы, исходя из глобальных параметров

Здесь же исследователи выделили основные положения МКТ: все тела состоят из очень большого числа частиц, и эти частицы постоянно находятся в хаотичном, беспорядочном движении - броуновском движении

Возьмем поршень и посчитаем давление на него - силу на единицу площади:

$p = \frac{F}{S} \implies F = p \cdot S$

Работа силы давления:

$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = p \cdot S \cdot dx$

$A = \int pSdx = \int pdV$

Или знакомая со школы формула $A = p\Delta V$ при $p = const$ (изобарный процесс)

Внутренняя энергия молекул идеального газа $U = \frac{i}{2}\nu RT$

i - степень свободы

ν - количество вещества (в молях)

$R = 8.31 \ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - универсальная газовая постоянная

T - температура ($T = t^\circ C + 273.15$ К)

Или для одной молекулы $U = \frac{i}{2}kT$

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ - постоянная Больцмана

На каждую степень свободы молекулы приходится $\frac{1}{2}kT$

У инертных газов степень свободы - 3

У двухатомных газов степень свободы - 5 (еще 2 вращательных)

У молекул газов, состоящих из более 2 атомов, степень свободы - 6

$Q = A + \Delta U$ - количество теплоты, которое получает газ, преобразовывается в работу и изменение внутренней энергии

Закон сохранения тепловой энергии - *первое начало термодинамики*

Равновесное состояние - состояние системы, при котором нет направленного движения вещества или энергии между ее составляющими или между системой и окружающей средой. Обратимым может быть только равновесный процесс

Второе начало термодинамики гласит: энтропия либо остаётся неизменной, либо возрастает в неравновесных процессах, достигая максимума при установлении термодинамического равновесия

Элементарное приращение энтропии: $dS = \frac{dQ}{T}$

$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$

Для обратимых процессов $\Delta S = 0 \Longrightarrow S = \text{const}$

Для необратимых $\Delta S > 0 \Longrightarrow S \uparrow$

9. Электрическое поле в вакууме

Электромагнитное взаимодействие

Электромагнитное взаимодействие - одно из четырёх фундаментальных взаимодействий, оно существует между частицами, обладающими электрическим зарядом

Электрон переводится с древнегреческого как янтарь - греки заметили, что натертый мехом янтарь притягивает вещи

С тех пор человек обозначил заряд положительным, если в теле образовался его избыток, и отрицательным при его дефиците.

У. Гильберт предложил первый электроскоп: два лепестка фольги в банке, соединенные с металлическим шариком, при касании заряженного предметом шарика лепестки расходятся

В 1861 году Максвелл вывел уравнения Максвелла, который стали основой классической электродинамикой:

Уравнения Максвелла

$$\oint_l \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$$
$$\oint_l \vec{H}d\vec{l} = I_{\text{полн}} = \int_S (\vec{j} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})d\vec{S}$$
$$\oint \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho dV$$
$$\int_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

Смысл уравнений:

1 уравнение: изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле - закон электромагнитной индукции Фарадея

2 уравнение: переменное электрическое поле D и электрический ток $\vec{j}$ будут вызывать магнитное поле - теорема о циркуляции магнитного поля

3 уравнение: электрический заряд порождает электрическую индукции - закон Гаусса

4 уравнение: поток магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю - закон Гаусса для магнитного поля

Эти уравнения можно переписать в дифференциальной форме:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\text{div}\vec{D} = \rho$$
$$\text{div}\vec{B} = 0$$

Второй уравнение можно представить так: $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ - плотность тока равна проводимости среды на напряженность поля (закон Ома)

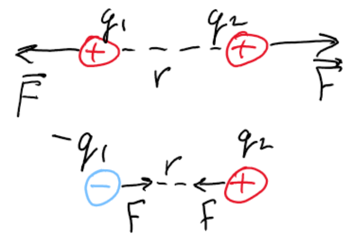
Заряд - характеристика вещества, показывающая, может ли тело участвовать в электромагнитом взаимодействии

Милликен показал, что $\overline{e} = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Позже были найдены заряд электрона $|p| = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, массы электрона $m_{\overline{e}} = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг и протона $m_p = 1836 \cdot m_{\overline{e}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг

Отрицательно заряженное тело - тело, где электронов больше, чем протонов; положительное тело - тело, где электронов меньше, чем протонов

Если тело не заряжено, то его суммарный заряд равен нулю



Точечный заряд - заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до других заряженных тел

Путем бесчисленного количества опытов Кулон установил, что $|F| \sim \dfrac{1}{r^2} \sim q_1 \sim q_2$

В итоге появилась сила Кулона в вакууме: $\vec{F} = \dfrac{k|q_1||q_2|}{r^3}\vec{r}$

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$

Электрическое (электромагнитное) поле - определенная форма материи, через которую осуществляются электромагнитные взаимодействия. Любое заряженное тело, помещенное в какую-либо точку поля оказывается под воздействием силы.

Электростатическое поле - поле неподвижных зарядов

Пробный заряд - точечный положительный заряд, который не искажает исследуемое поле, то есть не вызывает в нем перераспределения зарядов

Выделяют 2 характеристики поля:

- Напряженность (силовая)
- Потенциал (энергетическая)

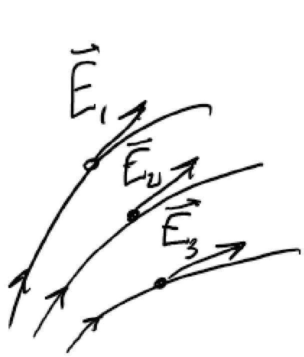
Напряженность электрического поля - векторная величина, численно равная силе, действующей на единичный положительный заряд, помещенный в данную точку поля. Вектор напряженности совпадает по направлению с силой, действующей на «+» заряд

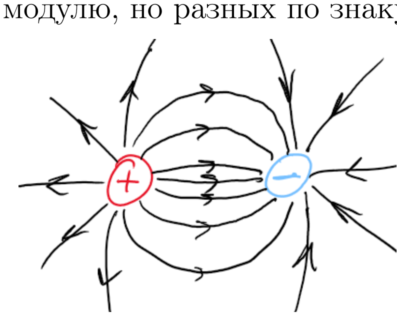
$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$ $\qquad [E] = \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$

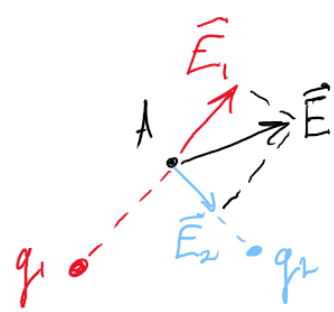
$\vec{E} = \dfrac{k|q|}{r^3}\vec{r}$ - напряженность поля точечного заряда

Линии напряженности - линии, касательные к которым в каждой точке поля направлены также, как и вектор напряженности. Линии напряженности начинаются на положительных зарядах, заканчиваются на отрицательных зарядах. Линии не пересекаются, не замкнуты. Густота линий напряженности пропорциональна модулю вектора напряженности электрического поля

Диполь - система из равных по модулю, но разных по знаку точечных зарядов







Принцип суперпозиции: напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которое создает каждый из этих зарядов в отдельности

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_n$$

Однородное поле - поле, в каждой точке которого напряженность одинакова по модулю и направлению, например, поле конденсатора

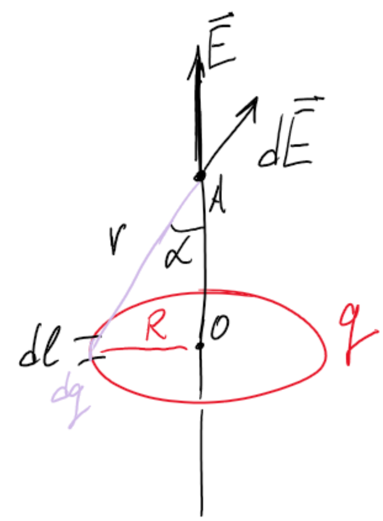
Линейная плотность заряда (однородное распределение заряда): $\tau = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{l}$ $\quad [\tau] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$

Поверхностная плотность заряда $\sigma = \frac{dq}{dS} = \frac{q}{S}$ $\quad [\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

Объемная плотность заряда $\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{q}{V}$ $\quad [\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$

Поле на оси тонкого равномерно-заряженного кольца:

Заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом R. Найти напряженность, создаваемую кольцом как функцию расстояния z от его центра



$E = \int_l dE = \int_l k\frac{dq}{z^2 + R^2}$

$dEz = dE \cos\alpha$

$E = \sum dE \cdot z = \int dE \cdot z = \int k\frac{dq}{r^2} \cdot z$

$E = \int \frac{kdq}{r^2}\cos\alpha = \frac{k\cos\alpha}{r^2}\int dq = \frac{kq\cos\alpha}{r^2}$

$\cos\alpha = \frac{z}{r}$

$r = \sqrt{R^2 + z^2}$

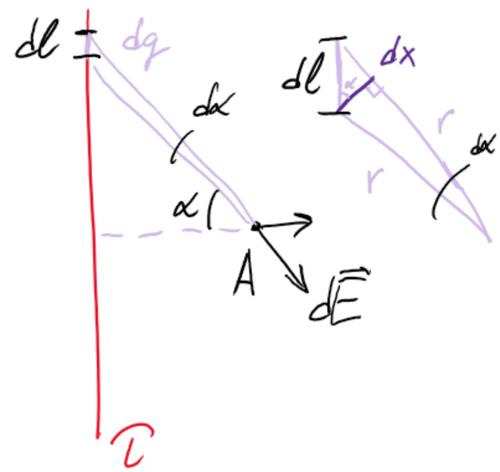
$E = \frac{kqz}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

Заметим, что в центре кольца напряженность нулевая

При слишком больших z получаем формулу напряженность для точечного заряда - размерами кольца можно пренебречь

Поле равномерно-заряженной прямой нити:

Бесконечная прямая нить равномерно заряжена с линейной плотностью τ. Найти напряженность, создаваемую нитью на расстоянии a от ее центра



В силу симметрии напряженность будет направлена вправо

$dE_x = dE\cos\alpha = \dfrac{kdq}{r^2}\cos\alpha$

$dq = \tau dl = \left[dl = \dfrac{dx}{\cos\alpha} = \dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}\right] = \tau\dfrac{rd\alpha}{\cos\alpha}$

$dE_x = \dfrac{k\tau rd\alpha}{r^2\cos\alpha}\cos\alpha = \dfrac{k\tau d\alpha}{r} = \left[r = \dfrac{a}{\cos\alpha}\right] = \dfrac{k\tau}{a}\cos\alpha d\alpha$

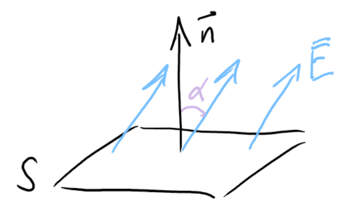
$E = \dfrac{k\tau}{a}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha d\alpha = \dfrac{2k\tau}{a}$

$E = \dfrac{2k\tau}{a}$

Теорема Гаусса-Остроградского

Подробнее о теореме можно прочитать в конспекте математического анализа

Поток вектора напряженности электрического поля



Поток $d\Phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_n dS = E\cdot dS\cdot\cos\alpha$

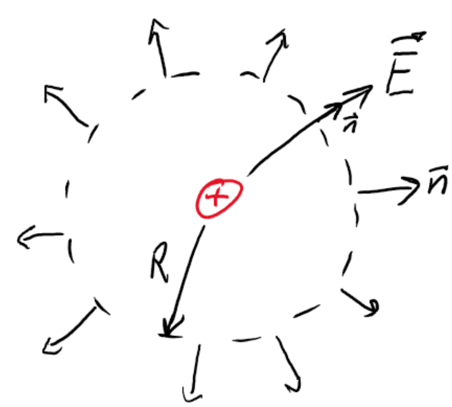
Поток пропорционален числу линий напряженности электрического поля, пронизывающих площадку dS

$[\Phi] = \dfrac{\text{В}}{\text{м}}\cdot\text{м}^2 = \text{В}\cdot\text{м}$

Через произвольную поверхность $\Phi = \displaystyle\int_S d\Phi = \int\vec{E}d\vec{S}$.

Отсюда $\Phi = E\cdot S\cdot\cos\alpha$

Заряд q в центре замкнутой сферической поверхности



$\Phi = \oint\vec{E}d\vec{s} \quad \vec{E}\uparrow\uparrow\vec{n}$

$E = \dfrac{kq}{r^2} = \text{const}$

$\Phi = \dfrac{kq}{r^2}\cdot S = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$\displaystyle\oint\vec{E}d\vec{S} = \Phi = \frac{q_{\text{внутр}}}{\varepsilon_0}$ - теорема Гаусса-Остроградского

10. Теорема Гаусса

$\Phi = \displaystyle\oint\vec{E}d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

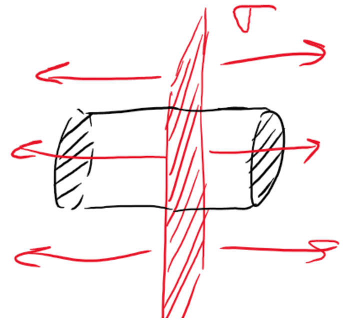
$d\Phi = \vec{E}d\vec{s} = E_n ds$, где $E_n = E\cos\alpha$

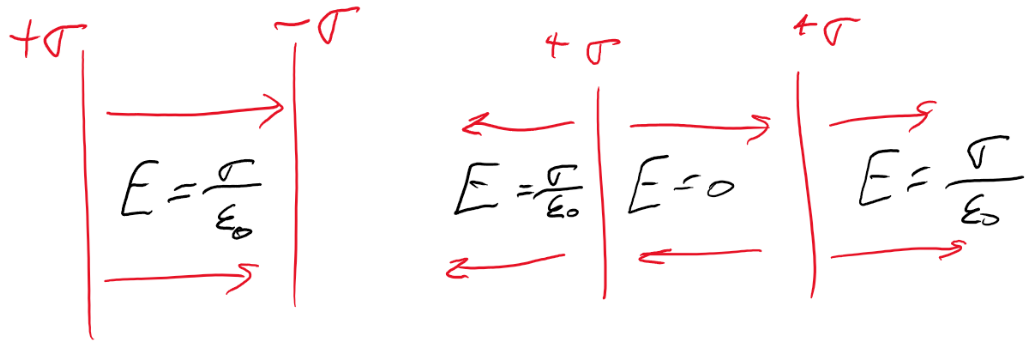
Ex. 1. Однородная равномерно заряженная бесконечная плоскость, σ

$$\Phi = 2\Phi_{осн} + \cancelto{0}{\Phi_{бок}} = 2\Phi_{осн} = 2E \cdot S_{осн} = \frac{a}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Если плоскости противоположно заряжены и расположены друг против друга, то получаем конденсатор. Если плоскости имеют одноименный заряд, то между ними напряженность равна нулю





Ex. 2. Цилиндрическая нить/стержень с плотностью заряда τ

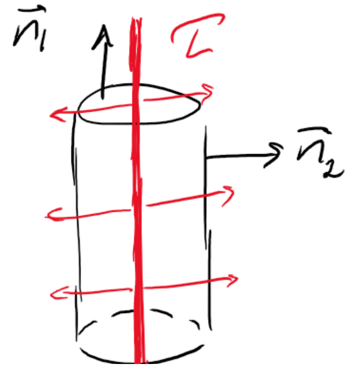
Сделаем цилиндрическую поверхность вдоль стержня

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint EdS_{бок} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$\vec{n}_2 \uparrow\uparrow \vec{E}$

Так как $E = \mathrm{const}$ на расстоянии r, $E = \dfrac{q}{2\pi r h\varepsilon_0} = \dfrac{h\tau}{2\pi r h\varepsilon_0} = \dfrac{\tau}{2\pi r\varepsilon_0}$



Ex. 3. Сфера (пустотелая)

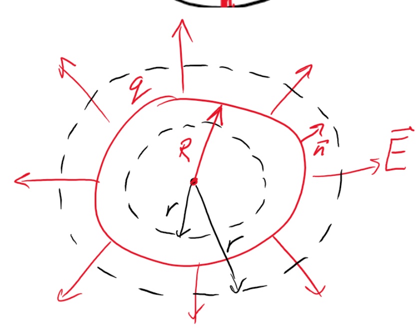
Выбираем сферу радиуса $r < R$, для нее $\oint \vec{E}d\vec{s} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = 0$

$\vec{E} = 0$ внутри сферы, так как внутри заряда нет

Выберем сферу радиуса $r > R$

$$\oint \vec{E}d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



Ex. 4. Шар (полнотелый)

При $r \leq R$ получаем аналогичную сфере ситуацию: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

При $r < R$ $E \cdot S = \dfrac{q'}{\varepsilon_0}$ (q' - заряд внутри поверхности)

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{q'}{V'} \Longrightarrow q' = \frac{q \cdot r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{q \cdot r^3}{R^3} \cdot \frac{1}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Так как $\vec{E}$ - поле векторное, то к нему можно применить набла-оператор. Тогда получаем:
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mathrm{div}\vec{E}$ - дивергенция поля
$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathrm{rot}\vec{E}$ - ротор поля
По теореме Гаусса:
$\oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \rho \rangle V$
При $V \to 0$
$\frac{1}{V} \oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \rho \rangle$
$\lim\limits_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint \vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho = \mathrm{div}\vec{E}$ - дивергенция поля
Если в точке A $\mathrm{div}\vec{E} < 0$, то в точке A *сток* поля. Если $\mathrm{div}\vec{E} > 0$, то говорят, что в точке *исток* поля