Ex. мультиномиальной теоремы:

$(x+y+z)^4 = 1(x^4+y^4+z^4)+4(xy^3+xz^3+x^3y+yz^3+y^3z+yz^3)+6(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)+12(xyz^2+xy^2z+x^2yz)$

Доказательство:

$\square$

$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum\limits_{\substack{i_j\in[r]\\ j\in[n]}} x^1_{i_1}\cdot\dots\cdot x^1_{i_n} = \sum\limits_{\substack{i_j\in[r]\\ j\in[n]}} x^{k_1}_1\cdot\dots\cdot x^{k_r}_r$, где k_t - количество x с индексом t в одночлене ($k_t = |\{j\in[n] | i_j = t\}|$)

Получается мультиномиальный коэффицц322иент $\binom{n}{k_1,\dots,k_r}$ будет равен количество способов поставить k_1 единиц в индексы в $x^1_{i_1}\cdot\dots\cdot x^1_{i_n}$, k_2 двоек в индексы и так далее

У нас есть $\binom{n}{k_1}$ способов поставить единицу в индексы в одночлен, $\binom{n-k_1}{k_2}$ способов поставить двойку и т. д., получаем:

$$\binom{n}{k_1,\dots,k_r} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{r-1}}{k_r} = [n-k_1-\dots-k_r=0] = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\dots\frac{(n-k_1-\dots-k_{r-1})!}{k_r!0!} = \frac{n!}{k_1!\dots k_r!}$$

$\square$

- **Перестановка мультимножества** Σ^* (Permutations of a multiset Σ^*)
  $\Sigma^* = \{\triangle^1, \triangle^2, \square, \star\} = (\Sigma, r) \quad r:\Sigma\longrightarrow\mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$

  Nota. $\begin{cases}\triangle^1, \triangle^2, \square, \star\\ \triangle^2, \triangle^1, \square, \star\end{cases}$ считаются равными перестановками

  $|P^*(\Sigma^*, n)| = \dfrac{n!}{r_1!\dots r_s!} = \dbinom{n}{r_1,\dots,r_s}$ - количество перестановок мультимножества, где r_i - количество i-ого элемента в мультимножестве
- **k-комбинация бесконечного мультимножества** (k-combinations of infinite multiset) - такое субмультимножество размера k, содержащее элементы из исходного мультимножества. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента r_i в исходном мультимножестве не больше размера комбинации k
  $\Sigma^* = \{\infty\cdot\triangle, \infty\cdot\square, \infty\cdot\star, \infty\cdot\text{🐈}\}^* \quad n = |\Sigma^*| = \infty$
  $\Sigma = \{\triangle, \square, \star, \text{🐈}\} \quad s = |\Sigma| = 4$

  Ex. 5-комбинация: $\{\triangle, \star, \square, \star, \square\}$
  Разделяем на группы по Σ палочками:
  $\triangle\Big|\square\square\Big|\star\star\Big|$
  Заменяем элементы на точечки - нам уже не так важен тип элемента, потому что мы знаем из разделения:
  $\bullet\Big|\bullet\bullet\Big|\bullet\bullet\Big|$
  (другой *Ex.* $\bullet\bullet\bullet\bullet\Big|\Big|\Big|\bullet = \{4\cdot\triangle, 1\cdot\text{🐈}\}$)
  Получается всего k точечек и $s-1$ палочек, всего $k+s-1$ объектов. Получаем мультимножество $\{k\cdot\bullet, (s-1)\cdot\Big|\}$ (*Star and Bars method*)

Получаем количество перестановок этого мультимножества: $\dfrac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} = \dbinom{k+s-1}{k, s-1} = \dbinom{k+s-1}{k} = \dbinom{k+s-1}{s-1}$
что и является количеством возможных k-комбинаций бесконечного мультимножества

- **Слабая композиция** (Weak composition) неотрицательного целого числа n в k частей - это решение $(b_1, \dots, b_k)$ уравнение $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i \geq 0$
  $|\{$слабая композиция n в k частей$\}| = \dbinom{n+k-1}{n, k-1}$
  Для решения воспользуемся аналогичным из доказательства мультиномиальной теоремы приемом:
  $n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$
  Поставим палочки:
  $n = 1 + 1 \Big| 1 \Big| \dots + 1$
  Получаем задачу поиска количеств k-комбинаций в мультимножестве: $\{n \cdot 1, (k-1) \cdot \Big|\}$;
  получаем $\dbinom{n+k-1}{n, k-1}$
- **Композиция** (Composition) - решение для $b_1 + \dots + b_k = n$, где $b_i > 0$
  $|\{$композиция n в k частей$\}| = \dbinom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$
  Мы знаем, что одну единичку получит каждая b_i, поэтому мы решаем это как слабую композицию для $n-k$ в k частей
- **Число композиций n в некоторой число частей** (Number of all compositions into some number of positive parts)
  $\sum\limits_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$
  Пусть $t = k-1$, тогда $\sum\limits_{t=0}^{n-1} \dbinom{n-1}{t} = 2^{n-1}$
- **Разбиения множества** (Set partitions) - множество размера k непересекающихся непустых подмножеств
  Ex. $\{1, 2, 3, 4\}, n = 4, k = 2 \longrightarrow$ [разбиение в 2 части] $\longrightarrow$ $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$,
  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$,
  $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$,
  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$,
  $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$,
  $\{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}$,
  $\{\{3\}, \{1, 2, 4\}\}$
  $|\{$разбиение n элементов в k частей$\}| = \left\{ {n \atop k} \right\} = S_k^{II}(n) = S(n, k)$ - число Стирлинга второго рода
  Для примера выше число Стирлинга $S(4, 2) = \left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$
  Согласно Википедии для формулы Стирлинга есть формула: $S(n, k) = \dfrac{1}{k!} \sum\limits_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \dbinom{k}{j} j^n$

- **Формула Паскаля** (Pascal's formula)
  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга** (Recurrence relation for Stirling$^{(2)}$ number):
  $\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$
  Возьмем какое-либо разбиение для $n-1$ элементов на k частей, тогда возможны два случая:
  1) В k-ое множество нет ни одного элемента, тогда мы обязаны в него положить наш n-ый элемент по определению, количество перестановок будет равно $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\} \cdot 1$
  2) В k-ом множестве уже есть элементы, тогда все множества будут заполнены и у нас будет выбор из k множеств, куда положить k-ый элемент, то есть $k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$
  Эти два случая независимы, поэтому получаем $\left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k \cdot \left\{{n-1 \atop k}\right\}$
- **Число Белла** (Bell number) - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера n
  Число Белла вычисляется по формуле: $B_n = \sum_{m=0}^{n} S(n, m)$
- **Целочисленное разбиение** (Integer partition) - решение для $a_1 + \cdots + a_k = n$, где $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$
  $p(n, k)$ - число целочисленных разбиений n в k частей
  $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n, k)$ - число всех разбиений для n

  Ex. $5 = 5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$