Содержание

1. Ряды

1.1 Числовые ряды

1. Определения

Mem. Числовая последовательность: $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$

Ex. 1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $u_n = bq^n$, $\quad \frac{1}{2^n} \overset{n=0,1,\dots}{=} \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$

Ex. 2. $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

Def. $\{u_n\}$ - последовательность

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется числовым рядом

Nota. Начальное значение n произвольно (целое)

Ex. $u_n = \dfrac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$

$u_n = \dfrac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$

Nota. u_n называется общим членом ряда

Nota. Существует ли сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и в каком смысле?

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$ - существует, но бесконечная

Ex. 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \left[\begin{array}{l} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{array}\right.$

Ex. 5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dots = 2$

Def. Частичная сумма ряда $S_n \overset{def}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

Nota. Последовательность частичных сумм - $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

Ex. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dots$

$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \dfrac{3}{2} \quad S_3 = \dfrac{7}{4} \quad S_4 = \dfrac{15}{8}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = ?$, но проблема заключается в том, что бы найти формулу для S_n

Def. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Nota. В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный): $\sum\limits_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} bq^k = b(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) = b\frac{1-q^n}{1-q}$$

Исследуем предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$|q| < 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q} \lim\limits_{n\to\infty} (1 - q^n) = \dfrac{b}{1-q}$

$|q| > 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty (q^n \to \infty)$

$|q| = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} b\dfrac{0}{0}? \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$

$q = -1 \qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} b(-1)^n$ - расходится (из четвертого примера)

<u>Lab.</u> Доказать при $q = -1$ по def ($S_n = ?$)

2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

Th. 1. Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=k>1}^{\infty} u_n$ одновременно сходятся или расходятся

□

$$S_n^u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$

$$S_n^v = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \qquad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$$

$$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^u = \lim_{n\to\infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim_{n+\infty} S_n^v$$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

Th. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

Th. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$ - сходится

□ По свойству пределов $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma$ □

Nota. Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$, но: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}$ расходятся

Nota. Докажем расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$

Ex. Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\dots=$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{1}{4}\cdot2+\frac{1}{8}\cdot4+\frac{1}{16}\cdot8+\dots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty$$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как $u_n\geq v_n$, то $S_n\geq\sigma_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$

$\sigma_n=1+\dfrac{1}{2}\cdot n\to\infty\Longrightarrow S_n\to\infty$

Th. 4. Если ряд сходится к числу S, то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна S

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, то $\lim\limits_{k\to\infty}S_n^{(k)}=S$, где $S_n^{(k)}$ - подпоследовательность S_n

□

Ex. Было $\sum(-1)^n=1-1+1-1+1-1+1-\dots=\left[\begin{array}{l}0,\\1,\end{array}\right.$ так как ряд расходится

Nota. В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{15}+\dots$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{14}\right)-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{18}\right)+\dots$$

$$S=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=1+\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots\right)=1+\frac{1}{2}\left(-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\dots\right)=\frac{1}{2}S\quad ?!$$

Nota. Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

Nota. Сходящиеся ряды допускают умножение, но непочленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S, \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$

Тогда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$

3. Условия сходимости рядов

3.1. Необходимое

Th. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\square$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$

$\square$

Nota. Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+3)\sin\dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (2n+3)\sin\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (2+\dfrac{3}{n}) = 2 \neq 0$

3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

Мет. Критерий Коши для последовательности: $\{x_n\}$ сходится $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0\ |x_m - x_k| < \varepsilon$

Th. (без док-ва) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0\ \underset{|S_m - S_k| < \varepsilon}{|u_n + \dots + u_m| < \varepsilon}$

Nota. Хвост ряда попадает в ε-трубу

Nota. Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличии от признаков

3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Далее $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ - вспомогательный (уже исследован на сходимость), для простоты $v_n, u_n > 0$ (для отрицательных доказывается аналогично)

Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)
а) $\exists 0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\Longrightarrow \sum u_n$ сходится
б) $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\Longrightarrow \sum u_n$ расходится

$\square$
а) Строим частичные суммы:
$\sum v_n$ сходится $\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$
S_n, σ_n возрастают и обе ограничены числом σ
Следовательно $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leq \sigma$
Аналогично пункт б)
$\square$

Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \left[\begin{array}{l} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{array}\right.$$

$\square$
По определению предела
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |\dfrac{u_n}{v_n} - q| < \varepsilon$
$|\dfrac{u_n}{v_n} - q| < \varepsilon \Longleftrightarrow q - \varepsilon < \dfrac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$
$(q-\varepsilon)v_n < u_n < (q+\varepsilon)v_n$

а) Если $\sum v_n$ сходится, то из правой части неравенства: $0 < u_n < (q+\varepsilon)v_n$
По признаку сравнения $\sum u_n$ также сходится
б) Если $\sum v_n$ расходится, то из левой части неравенства: $0 < (q-\varepsilon)v_n < u_n$
Тогда по пункту б) **Th. 1.** $\sum u_n$ расходится
$\square$

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится
$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится по признаку сравнения

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится
Начиная с некоторого n_0 $n! > 2^n$. Тогда $u_n < v_n$ при $n > n_0$, по признаку сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится

Ex. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1_{\overline{n}}$

Nota. Члены рядов u_n и v_n - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если u_n и v_n одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд
$u_n = \arcsin\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n \qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

Th. 3. Признак Даламбера
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый, $\exists \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$
а) $0 \le \mathcal{D} < 1 \implies \sum u_n$ сходится
б) $\mathcal{D} > 1 \implies \sum u_n$ расходится
в) $\mathcal{D} = 1 \implies$ ничего не следует, требуется другое исследование

□

а) По определению предела $\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $0 \le \mathcal{D} < 1 \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D}| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D} - \varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$

Так как $0 \le \mathcal{D} < 1$, можно втиснуть число r между $\mathcal{D}$ и 1: $\mathcal{D} < r < 1$

Положим $\varepsilon = r - \mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < r$ для $\forall n > n_0$, где $n_0 = n_0(\varepsilon), \varepsilon = r - \mathcal{D}$

$u_{n_0+1} < r u_{n_0}$

$u_{n_0+2} < r u_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$

$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1}}_{k} + u_{n_0} + \dots = k + \sum\limits_{m=1}^{\infty} v_m$

Члены $v_m < r^l u_{n_0}$; u_{n_0} - фикс. число, а $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l$ сходится как геометрический при $|r| < 1$

Итак ряд $\sum\limits_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$ сходится и почленно превышает $\sum v_m = (\sum u_n) - k$

То есть $\sum u_n$ сходится

б) Lab. (взять r между $\mathcal{D}$ и 1, $1 < r < \mathcal{D}$, $\mathcal{D} - r = \varepsilon$)

Сравнить $\sum u_n$ с $\sum r^l$ (расходящимся)

□

Ex. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \qquad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ - сходится

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \qquad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ - расходится

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} \qquad \mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ - сходится

Th. 4. Радикальный признак Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \qquad u_n \ge 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$

а) $0 \le K < 1 \Longrightarrow \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \Longrightarrow \sum u_n$ расходится

Nota. $K = 1$ - ничего не следует

□

а) По определению предела $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0\ |\sqrt[n]{u_n} - K| < \varepsilon$

$\iff k - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon$ Положим $\varepsilon = r - K$, где $K < r < 1$

$\implies 0 \le u_n < r^n$ - геом. ряд с $|r| < 1$, то есть $\sum r^n$ сходится

б) Аналогично

□

Ex. 1. $\sum\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \qquad K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$

$\mathcal{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ - необходимое условие не выполняется

Ex. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad K = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-1} < 1$ - сходится

Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \to \mathbb{R}^+, f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

□

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)dx$$

$$\sum_{n=2}^{b} u_n = u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x)dx < u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n$$

Обозначим $\sum\limits_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}, \quad \sum\limits_{n=2}^{b} u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x)dx < S_{b-1}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если $\displaystyle\int$ сходится, то смотрим правую часть

Если $\displaystyle\int$ расходится, то смотрим левую часть неравенства

□

4. Знакочередующиеся ряды

Def. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ $(u_n > 0)$ - знакочередующийся ряд

Th. Признак Лейбница

Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ верно, что $\underset{n\to\infty}{u_n \to 0}$ и $|u_1| > |u_2| > \cdots > |u_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ сходится