Th. $A' = T_{e\to e'} A T^{-1}_{e\to e'}$

Nota. $C = A + \lambda B$

Следствия:
1) $TCT^{-1} = T(A+\lambda B)T^{-1} = TAT^{-1} + \lambda TBT^{-1}$
2) $B = I \quad TBT^{-1} = TIT^{-1} = I$, т. к. $TI = T, TT^{-1} = I$
3) $\det A^{-1} = \det(TAT^{-1}) = \det T \det A \det T^{-1} = \det A \cdot 1$

Nota: То есть характеристика нашего объекта - инвариант при преобразовании T

Def: Матрица A называется ортогональной если $A^{-1} = A^T$
Следствие: $AA^{-1} = AA^T = I$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
$\forall i \Sigma_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} = (A_i, A_i) = 1 \ \forall i, j (i \neq j) \Sigma_{kk=1}^n a_{ik} a_{jk} = (A_i, A_j) = 0$

В общем $(A_i, A_j) = \left[\begin{matrix} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{matrix}\right.$

Def. Оператор $\mathcal{A}$ называется ортогональным, если его матрица ортогональна
? A ортогональна в каком-либо базисе или во всех?
Свойство. $\mathcal{A}$ - ортогонален, то $\det A = \pm 1$ (следует из определения $\det(AA^T) = \det^2(A) = \det(I)$)

Th. $T_{e\to e'}$ - преобразование координат в V^n. Тогда T - ортогональный оператор
Базис e - ортонормированный базис

$\square \quad \exists$ в базисе e матрица $T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ - неортогональна

Тогда $e'_1 = \Sigma_{i=1}^n \tau_{1i} e_i \quad \Big| \cdot e'_1$

$1 = (e'_1, e'_1) = (\Sigma_{i=1}^n \tau_{1i} e_i)^2 = \tau_{11}^2 e_1^2 + \tau_{11} e_1 \tau_{12} e_2 + \dots = \tau_{11}^2 + \dots + \tau_{1n}^2 = 1$ - то есть строка - единичный вектор

$0 = (e'_1, e'_2) = (\tau_{11} e_1 + \tau_{12} e_1 + \dots) \cdot (\tau_{21} e_1 + \tau_{22} e_2 + \dots)$ = произведение 1-ой строки на 2-ую, то есть строки ортогональны

Таким образом, матрица T - ортогональна

Nota. Тогда $A' = TAT^{-1} = TAT^T$

2.7. Собственные векторы и значения оператора

Def. Инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A} : V \to V$ - это $U = \{x \in V_1 \in V | \mathcal{A}x \in V_1\}$

Ex. $V = \mathcal{P}_n(t)$ - пространство многочленов степени $\leq n$ на $[a; b]$, $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dt}$

Nota. $Ker\mathcal{A}, Im\mathcal{A}$ - инвариантные $(A : V \to V)$

Def. Характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}: V \to V$ ($\mathcal{A}x = Ax, A$ - матрица в неком базисе)
$\xi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

Nota. Матрица $A - \lambda I$:
$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

Nota. Уравнение $\xi(\lambda) = 0$ называется вековым

Def. Собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению λ, называется $x \neq 0 \mid \mathcal{A}x = \lambda x$

Def. Собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее числу λ_i,
$U_{\lambda_i} = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda_i x\} \cup \{0\}$

Def. $\dim U_{\lambda_i} = \beta$ - геометрическая кратность число λ_i

Th. $\mathcal{A}x = \lambda x \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0, \quad A : V^n \to V^n$
$\square \Longleftrightarrow |A - \lambda I| = 0 \Longleftrightarrow rang(A - \lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim Im(A - \lambda I) < n \Longleftrightarrow \dim Ker(A - \lambda I) \geq 1$
$\exists x \in Ker(A - \lambda I), x \neq 0 \mid (A - \lambda I)x = 0 \Longleftrightarrow Ax - \lambda Ix = 0 \Longleftrightarrow Ax = \lambda x$

Nota. По основной теореме алгебры вековое уравнение имеет n корней (не всех из них вещественные). В конкретном множестве $\mathcal{K} \ni \lambda$ их может не быть

Def. Кратность корня λ_i называется алгебраической кратностью

Th. $\lambda_1 \neq \lambda_2 (\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2) \Longrightarrow x_1, x_2$ - линейно независимы
$\square$ Составим комбинацию: $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \quad \Big| \cdot \mathcal{A}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0, \sqsupset \lambda_2 \neq 0$
$c_1 \mathcal{A}x_1 + c_2 \mathcal{A}x_2 = 0 \Longleftrightarrow c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$
Умножим $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ на λ_2: $c_1 \lambda_2 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$
$c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 - c_1 \lambda_2 x_1 - c_2 \lambda_2 x_2 = 0$
$c_1 x_1 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$
Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$ по условию, $x_1 \neq 0$ - собственный вектор, поэтому $c_1 = 0$, а комбинация линейно независима
Если $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$: $c_2 \lambda_2 x_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$

Nota. Приняв доказательство за базу индукции, можно доказать линейную независимость для k-ой системы собственных векторов для попарно различных k чисел λ