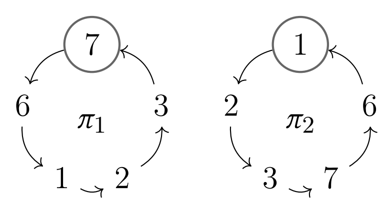
7 Комбинаторика

- **Алфавит** Σ (или X, *Ex.* $X = \{a, b, c\}$) - множество символов
- **Диапазон** $[n] = \{1, \dots, n\}$ - конечное множество последовательных натуральных чисел
- **Расстановка** - последовательность каких-либо элементов (кортеж) *тык*
  Ex. $x = (a, b, c, d, b, b, c) \quad |x| = n$
  Расстановку можно представить как функцию $f : [n] \to \Sigma$
- **Перестановка** - $\pi : [n] \to \Sigma$, где $n = |\Sigma|$ *тык*
  Расстановка π - биекция между $[n]$ и Σ
  Ex. $\pi = 2713546$

i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	2	7	1	3	5	4	6

- **k-перестановка** - расстановка из k различных элементов из Σ
  Ex. 5-перестановка из $\Sigma = [7]$ - $|31475| = 5$
  k-перестановка - это инъекция $\pi : [k] \to \Sigma$ $(k \le n = |\Sigma|)$
- $P(n, k)$ - множество всех k-перестановок алфавита $\Sigma = [n]$ (если исходный алфавит не состоит из чисел, то мы можем сделать биекцию между ним и $[n]$)
  $P(n, k) = \{f \mid f : [k] \to [n]\}$
- $S_n = P_n = P(n, n)$ - множество всех перестановок.
  $|S_n| = n!$ - всего существует $n!$ перестановок
  $$\boxed{|P(n, k)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$
- **Циклические k-перестановки** *тык*
  $\pi_1, \pi_2 \in P(n, k)$ - циклически эквивалентны тогда и только тогда:
  $\boxed{\exists s \mid \forall i \ \pi_1((i+s)\%k) = \pi_2(i)}$
  $P_C(n, k)$ - множество всех циклических k-перестановок в Σ
  $|P_C(n, k)| \cdot k = |P(n, k)|$
  $$\boxed{|P_C(n, k)| = \frac{|P(n, k)|}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}}$$



Ex. $\pi_1 = 76123, \pi_2 = 12376$

- **Неупорядоченная расстановка k элементов** - мультимножество Σ^* размера k
  Ex. $\Sigma^* = \{\triangle, \triangle, \square, \triangle, \circ, \square\}^* = \{3 \cdot \triangle, 2 \cdot \square, 1 \cdot \circ\} = (\Sigma, r)$
  Неупорядоченную расстановку можно представить как функцию:
  $r : \Sigma \to \mathbb{N}, \quad r(x)$ - кол-во повторений объекта x
- **k-сочетание** - неупорядоченная перестановка из k различных элементов из Σ (еще называют k-подмножеством, k-subset) *тык*
  Соответственно $C(n, k)$ - множество всех таких k-сочетаний
  $$\boxed{|C(n, k)| = C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad |P(n, k)| = C(n, k) \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k!$$
- **Th. Биномиальная теорема**:
  $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$
  где $\binom{n}{k}$ - биномиальный коэффициент *тык*

- **Th. Мультиномиальная теорема**:

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{k_i \in 1..n, \\ k_1 + \cdots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_r^{k_r}$$

где $\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \dfrac{n!}{k_1! \ldots k_r!}$ - мультиномиальный коэффициент *тык*

- **Перестановка мультимножества** Σ^* *тык*
$\Sigma^* = \{\triangle^1, \triangle^2, \square, \star\} = (\Sigma, r) \quad r : \Sigma \longrightarrow \mathbb{N}_0 \quad n = |\Sigma^*| = 4 \quad s = |\Sigma| = 3$
Nota. $\begin{cases} \triangle^1, \triangle^2, \square, \star \\ \triangle^2, \triangle^1, \square, \star \end{cases}$ считаются равными перестановками
$|P^*(\Sigma^*, n)| = \dfrac{n!}{r_1! \ldots r_s!} = \binom{n}{r_1, \ldots, r_s}$ - количество перестановок мультимножества, где r_i - количество i-ого элемента в мультимножестве
- **k-сочетание бесконечного мультимножества** - такое подмультимножество размера k, содержащее элементы из исходного мультимножества Σ^*. При этом соблюдается, что количество какого-либо элемента r_i в исходном мультимножестве не больше размера сочетания k *тык*
$\boxed{\dfrac{(k+s-1)!}{k!(s-1)!} = \binom{k+s-1}{k, s-1} = \binom{k+s-1}{k} = \binom{k+s-1}{s-1},}$
где k - размер сочетания, $s = |\Sigma|$ - количество уникальных элементов в множестве
- **Слабая композиция** неотрицательного целого числа n в k частей - это решение $(b_1, \ldots, b_k)$ уравнение $b_1 + \cdots + b_k = n$, где $b_i \geq 0$
$|\{\text{слабая композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n+k-1}{n, k-1}$
- **Композиция** - решение для $b_1 + \cdots + b_k = n$, где $b_i > 0$
$|\{\text{композиция } n \text{ в } k \text{ частей}\}| = \binom{n-k+k-1}{n-k, k-1}$
- **Число всех композиций n в некоторой число частей**:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

- **Разбиения множества** - множество размера k непересекающихся непустых подмножеств *тык*
$|\{\text{разбиение } n \text{ элементов в } k \text{ частей}\}| = \left\{ {n \atop k} \right\} = S_k^{II}(n) = S(n,k)$ - число Стирлинга второго рода *тык*
- **Формула Паскаля**: *тык*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- **Рекуррентное отношение для чисел Стирлинга**:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

- **Число Белла** - количество всех неупорядоченных разбиений множества размера n *тык*

Число Белла вычисляется по формуле: $B_n = \sum_{m=0}^{n} S(n,m)$

- **Целочисленное разбиение** - решение для $a_1 + \dots + a_k = n$, где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$
  $p(n,k)$ - число целочисленных разбиений n в k частей
  $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n,k)$ - число всех разбиений для n
  Ex. $5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$
- **Принцип включений/исключений**: *тык*
  - X - начальное множество элементов
  - $P_1, \dots, P_m$ - свойства
  - Пусть $X_i = \{x \in X \mid P_i$ - свойство для $x\}$
  - Пусть $S \in [m]$ - множество свойств
  - Пусть $N(S) = \bigcap_{i \in S} X_i = \{x \in X \mid x$ имеет все свойства $P_1, \dots, P_m\}$

  Ex. $N(\varnothing) = X \quad |N(\varnothing)| = |X| = n$
- **Формула включений/исключений**: *тык*
  $|X \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)|$ - количество элементов множества X, не имеющих никакое из свойств
- **Следствие**:
  $|\bigcup_{i \in [m]} X_i| = |X| - \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| = \sum_{S \subseteq [m], S \neq \varnothing} (-1)^{|S|-1} |N(S)|$
- **Приложения**:
  * Определяем «плохие» свойства $P_1, \dots, P_m$
  * Посчитываем $N(S)$
  * Применяем ПВ/И
- **Количество сюръекций (правототальных функций)**:
  * $X = \{$функция $f : [k] \to [n]\}$
  * Плохое свойство $P_i \;:\; X_i = \{f : [k] \to [n] \mid \nexists j \in [k] : f(j) = i\}$
  * $|\{$сюръекции $f : [k] \to [n]\}| = |X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_m)| = \sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} |N(S)| =$
  $\sum_{S \subseteq [m]} (-1)^{|S|} (n - |S|)^k = \boxed{\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n} = S_n^{(II)}(k)$ - число Стирлинга второго рода
- **Количество биекций**:

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^n$$

- **Беспорядки** - перестановка без фиксированных точек *тык*
  Если $f(i) = i$, то i - фиксированная точка
  * $X =$ все $n!$ перестановок
  * Плохие свойства $P_1, \dots, P_m : \pi \in X$ имеет свойство $P_i \iff \pi(i) = i$
  * Посчитаем $N(S) : \quad N(S) = (n - |S|)!$
  * Применяем ПВ/И: $X \setminus (X_1 \cup \ldots \cup X_n) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} N(S) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} (n - |S|)! =$
  $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)!$