

*Nota.* В строгом определении интегральная сумма строится так:

$M_{i-1}M_i$  - элементарная дуга

$\Delta l_i$  - длина элемента

$\Delta s_i$  - длина стягивающей дуги

$\Delta l_i \approx \Delta s_i$

$M_{\text{ср.}}(\xi_i, \eta_i)$  - ср. точка элемента

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

II рода. Задача (вычисление работы силы вдоль пути)

Вдоль пути  $\overline{AB}$  действует сила  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$

Найдем элементарную работу  $dA = \vec{F}_{\text{ср.}} \cdot d\vec{s}$ , где  $d\vec{s}$  - элементарное приращение

$d\vec{s} = (dx, dy) = (\cos \alpha ds, \sin \alpha ds)$

$\vec{F}_{\text{ср.}}$  - значение силы на эл. участке в какой-либо его точке

Тогда.  $dA = (P(x, y), Q(x, y)) \cdot (dx, dy) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

$A = \int_{AB} dA = \int_{AB} Pdx + Qdy$  - интеграл II рода (в проекциях)

*Nota.* В проекциях, потому что  $F_x = P, F_y = Q$ , таким образом скалярное произведение записано в проекциях

При этом часто рассматривают по отдельности

$$\int_{AB} f(x, y)dx \text{ и } \int_{AB} g(x, y)dy$$

*Nota.* Связь интегралов I и II рода

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P, Q)(dx, dy) = \int_L (P, Q)(\cos \alpha, \cos \beta) \underline{ds} \underset{\approx dl}{=} \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dl$$

Обозначим  $\vec{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta)$

По теореме Лагранжа  $\exists(\xi, \eta) \in$  элементарной дуге, касательная которой параллельна  $ds$

Тогда  $d\vec{s} = \vec{\tau} ds \approx \vec{\tau} dl$ , где  $\vec{\tau}$  - единичный вектор, касательной в  $(\xi, \eta)$

Тогда  $\int_L Pdx + Qdy \underset{\text{пред. в вект. форме}}{=} \int_L \vec{F} \vec{\tau} dl = \int_L \vec{F} \underset{\text{ориент. эл. дуги}}{\underline{dl}}$

Свойства:

*Nota.* Свойства, не зависящие от прохода дуги, аналогичны свойствам определенного интеграла  
Направление обхода.

I рода

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{BA} f(x, y)dl$$

II рода

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$$

**Def.** Часто рассматривают замкнутую дугу, называемую контур. Тогда интегралы обозначаются

$$\oint_K f dl \text{ и } \oint_K P dx + Q dy.$$

Если  $K$  (контур) обходят против ч. с., то обозн.  $\oint_{K^+}$

Вычисление. (Сведение к  $\int_a^b dx$  или  $\int_\alpha^\beta dy$  или  $\int_\tau^T dt$ )

1) Параметризация дуги  $L$ :

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \varphi, \psi \in C_{[\tau, T]}^1 \quad \begin{cases} A(x_A, y_A) = (\varphi(\tau), \psi(\tau)) \\ B(x_B, y_B) = (\varphi(T), \psi(T)) \end{cases}$$

При этом задании  $L$   $y = y(x), x \in [a, b]$  или  $x = x(y), y \in [\alpha, \beta]$  - частные случаи параметризации

2)

I рода

$$\int_L f(x, y) dl = \left[ dl = \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2} |dt| \right] = \int_\tau^T f(t) \sqrt{\varphi_t'^2 + \psi_t'^2} |dt|$$

II рода

$$\int_{L=AB} P dx + Q dy = [dx = \varphi_t' dt, dy = \psi_t' dt] = \int_\tau^T (P \varphi_t' + Q \psi_t') dt$$

Ex. Дуга  $L$  - отрезок прямой от  $A(1, 1)$  до  $B(3, 5)$

$$1) \int_{AB} (x+y) dl = \left[ \begin{array}{l} AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \text{или } y = 2x - 1, x \in [1, 3] \\ f(x, y) = x + 2x - 1 = 3x - 1 \\ dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx \end{array} \right] = \int_1^3 (3x - 1) \sqrt{5} dx = \sqrt{5} \left( \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 = \sqrt{5}(12 - 2) =$$

$10\sqrt{5}$

$$2) \int_{AB} (x+y) dx + (x+y) dy = \left[ \begin{array}{l} x \uparrow_1^3, y \uparrow_1^5 \\ y = 2x - 1, x = \frac{y+1}{2} \\ dx = dx, dy = dy \end{array} \right] = \int_1^3 (x + 2x - 1) dx + \int_1^5 \left( \frac{y+1}{2} + y \right) dy =$$

$$\left( \frac{3x^2}{2} - x \right) \Big|_1^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{3y^2}{2} + y \right) \Big|_1^5 = 10 + 20 = 30$$

**Th.** Формула Грина

$D \subset R^2$  - прав.  $\uparrow Ox, \uparrow Oy$

$K$  - гладкая замкнутая кривая (контур), которая ограничивает  $D$

В области  $D$  действует  $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$  - непрерывные дифференциалы

$$\text{Тогда } \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{K^+} P dx + Q dy$$

$$\square \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_\alpha^\beta dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$\int_\alpha^\beta \left( Q(x, y) \Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \right) dy - \int_a^b \left( P(x, y) \Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y)) dy - \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \int_{NST} Q dy - \int_{NMT} Q dy - \\
& \int_{MTS} P dx + \int_{MNS} P dx = \underbrace{\int_{NST} Q dy + \int_{TMN} Q dy}_{\oint_{K^+} Q dy} + \underbrace{\int_{STM} Q dy + \int_{MNS} Q dy}_{\oint_{K^+} P dx} = \oint_{K^+} P dx + Q dy
\end{aligned}$$

□