

Содержание

§1. Ряды	2
1. Числовые ряды. Определения	2
2. Свойства числовых рядов	3
3. Условия сходимости рядов	6
3.1. Необходимое	6
3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)	6
3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)	6
4. Знакопередающие ряды	10
§2. Функциональные ряды	13
1. Определения	13

§1. Ряды

1. Числовые ряды. Определения

Mem. Числовая последовательность: $\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}, u_n \in \mathbb{R}$

Ex. 1. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $u_n = bq^n$, $\frac{1}{2^n} \stackrel{n=0,1,\dots}{=} \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$

Ex. 2. $u_n = 1, -1, 1, -1, \dots$

Def. $\{u_n\}$ - последовательность

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ называется числовым рядом

Nota. Начальное значение n произвольно (целое)

Ex. $u_n = \frac{1}{(n-4)^3}, \quad n = 5, 6, \dots$

$u_n = \frac{1}{n^3}, \quad n = 2024, 2025, \dots$

Nota. u_n называется общим членом ряда

Nota. Существует ли сумма $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и в каком смысле?

Ex. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$ - существует, но бесконечная

Ex. 4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \begin{cases} 0 + 0 + \dots = 0 \\ 1 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{cases}$

Ex. 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$

Def. Частичная сумма ряда $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n u_k$

Nota. Последовательность частичных сумм - $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

Ex. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

$S_1 = u_1 = 1 \quad S_2 = \frac{3}{2} \quad S_3 = \frac{7}{4} \quad S_4 = \frac{15}{8}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ?$, но проблема заключается в том, что бы найти формулу для S_n

Def. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называют сходящимся, а S называют суммой ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$

Nota. В противном случае ряд расходится, суммы не может быть или она бесконечна

Ex. Поиск суммы по определению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nota. При исследовании на сходимость используются эталонные ряды

Ex. Геометрический ряд (эталонный): $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^n bq^k = b(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = b \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Исследуем предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:

$$|q| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^{n+1}) = \frac{b}{1 - q}$$

$$|q| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty (q^n \rightarrow \infty)$$

$$|q| = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b \frac{0}{0} ? \quad \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = \sum_{n=0}^{\infty} b = \infty \quad (b \neq 0)$$

$$q = -1 \quad \sum_{n=0}^{\infty} b(-1)^n - \text{расходится (из четвертого примера)}$$

Lab. Доказать при $q = -1$ по def ($S_n = ?$)

2. Свойства числовых рядов

Nota. Свойства рядов используются в арифметических операциях с рядами и при исследовании на сходимость

Th. 1. Отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость, но влияет на сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ и } \sum_{n=k>1}^{\infty} u_n \text{ одновременно сходятся или расходятся}$$

□

$$S_n^u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n + \dots$$

$$S_n^v = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \quad u_n = v_n \quad \forall n \geq k$$

$$S_n^u = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1}}_{\sigma \in \mathbb{R}} + \underbrace{u_k + \dots + u_n}_{S_n^v} = \sigma + S_n^v$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^u = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma + S_n^v) = \sigma + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^v$$

Оба предела либо существуют (либо конечны, либо нет), либо не существуют

□

Th. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Тогда $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha S$

□ По свойству пределов □

Th. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma \in \mathbb{R}$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = S \pm \sigma$ - сходится

□ По свойству пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S \pm \sigma$ □

Nota. Обратное неверно! Теорема разрешает складывать и вычитать сходящиеся ряды, но из сходимости суммы рядов не следует сходимость каждого из них

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, но: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ расходятся

Nota. Докажем расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Ex. Гармонический ряд (эталонный)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

А так как нижний ряд почленно меньше верхнего, а нижний расходится, то и верхний расходится

Так как $u_n \geq v_n$, то $S_n \geq \sigma_n$, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} \cdot n \rightarrow \infty \implies S_n \rightarrow \infty$$

Th. 4. Если ряд сходится к числу S , то члены ряда можно группировать произвольным образом, не переставляя, и сумма всех рядов будет равна S

Группировка означает выделение различных подпоследовательностей из последовательности частичных сумм

□

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} S_n^{(k)} = S$, где $S_n^{(k)}$ - подпоследовательность S_n

□

$$Ex. \text{ Было } \sum (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \text{ так как ряд расходится}$$

Nota. В условиях **Th.** важно, что переставлять члены ряда нельзя

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \dots$$

Далее будет доказано, что этот ряд сходится

Найдем сумму, переставив члены ряда

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\right) - \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{18}\right) + \dots$$

$$S = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots\right) = \frac{1}{2} S \quad ?!$$

Nota. Можно доказать, что в подобных рядах перестановкой членов можно получить любое наперед заданное число

Nota. Сходящиеся ряды допускают умножение, но почленное. В действительности используют формулы перемножения рядов (см. литературу)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$$

$$\text{Тогда } \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) = S\sigma$$

3. Условия сходимости рядов

3.1. Необходимое

$$\text{Th. } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

□

Nota. Обратное неверно! (см. гармонический ряд)

$$\text{Ex. } \sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \neq 0$$

3.2. Критерии (Необходимое и Достаточное условия)

Мет. Критерий Коши для последовательности: $\{x_n\}$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid x_m - x_n \mid < \varepsilon$

$$\text{Th. (без док-ва)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid u_n + \dots + u_m \mid < \varepsilon$$
$$\mid S_m - S_n \mid < \varepsilon$$

Nota. Хвост ряда попадает в ε -трубу

Nota. Критерий не удобен для непосредственного исследования на сходимость, в отличие от признаков

3.3. Достаточное условие (признаки сходимости)

Здесь мы рассмотрим:

1. Признак сравнения (в неравенствах)
2. Предельный признак сравнения
3. Признак Даламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Далее $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - исследуемый ряд, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - вспомогательный (уже исследован на сходимость),
для простоты $v_n, u_n > 0$ (для отрицательных доказывается аналогично)

Th. 1. Признак сравнения (в неравенствах)

- а) $\exists 0 < u_n \leq v_n$. Тогда $\sum v_n$ сходится $\implies \sum u_n$ сходится
б) $\exists 0 \leq v_n \leq u_n$. Тогда $\sum v_n$ расходится $\implies \sum u_n$ расходится

□

а) Строим частичные суммы:

$$\sum v_n \text{ сходится} \iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$$

S_n, σ_n возрастают и обе ограничены числом σ

$$\text{Следовательно } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq \sigma$$

Аналогично пункт б)

□

Th. 2. Предельный признак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies \begin{cases} \sum u_n \text{ сходится, если } \sum v_n \text{ сходится} \\ \sum u_n \text{ расходится, если } \sum v_n \text{ расходится} \end{cases}$$

□

По определению предела

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = q \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \frac{u_n}{v_n} - q \mid < \varepsilon$$

$$\mid \frac{u_n}{v_n} - q \mid < \varepsilon \iff q - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < q + \varepsilon$$

$$(q - \varepsilon)v_n < u_n < (q + \varepsilon)v_n$$

а) Если $\sum v_n$ сходится, то из правой части неравенства: $0 < u_n < (q + \varepsilon)v_n$

По признаку сравнения $\sum u_n$ также сходится

б) Если $\sum v_n$ расходится, то из левой части неравенства: $0 < (q - \varepsilon)v_n < u_n$

Тогда по пункту б) **Th. 1.** $\sum u_n$ расходится

□

Nota. При $q = 0$ можем говорить, что u_n - бесконечно малая высшего порядка, чем v_n , а значит, если ряд v_n сходится, то u_n сходится

$$Ex. 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2+n} > \frac{1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится по признаку сравнения}$$

Ex. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ сходится}$$

Начиная с некоторого n_0 $n! > 2^n$. Тогда $u_n < v_n$ при $n > n_0$, по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится

Ex. 3. $\sum_{n=1}^{\infty} 1_n$

Nota. Члены рядов u_n и v_n - бесконечно малые последовательности. Иначе ряды расходятся по необходимому условию. Тогда в **Th. 2.** сравниваются порядки бесконечно малых, и ряды одновременно сходятся или расходятся, если u_n и v_n одного порядка малости. По этому принципу подбирается вспомогательный ряд

$$u_n = \arcsin \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} = v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

Th. 3. Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{исследуемый, } \exists \mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \in \mathbb{R}^+$$

а) $0 \leq \mathcal{D} < 1 \implies \sum u_n \text{ сходится}$

б) $\mathcal{D} > 1 \implies \sum u_n \text{ расходится}$

в) $\mathcal{D} = 1 \implies \text{ничего не следует, требуется другое исследование}$

□

а) По определению предела $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $0 \leq \mathcal{D} < 1 \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \frac{u_{n+1}}{u_n} - \mathcal{D} < \varepsilon \iff \mathcal{D} - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \mathcal{D} + \varepsilon$$

Так как $0 \leq \mathcal{D} < 1$, можно втиснуть число r между \mathcal{D} и 1: $\mathcal{D} < r < 1$

Положим $\varepsilon = r - \mathcal{D}$, то есть $\mathcal{D} + \varepsilon = r$

Смотрим правую часть $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r$ для $\forall n > n_0$, где $n_0 = n_0(\varepsilon)$, $\varepsilon = r - \mathcal{D}$

$$u_{n_0+1} < r u_{n_0}$$

$$u_{n_0+2} < r u_{n_0+1} < r^2 u_{n_0}$$

$$u_{n_0+l} < r^l u_{n_0}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_{n_0-1} + u_{n_0} + \dots}_k = k + \sum_{m=1}^{\infty} v_m$$

Члены $v_m < r^l u_{n_0}$; u_{n_0} - фикс. число, а $\sum_{l=1}^{\infty} r^l$ сходится как геометрический при $|r| < 1$

Итак ряд $\sum_{l=1}^{\infty} r^l u_{n_0}$ сходится и почленно превышает $\sum v_m = (\sum u_n) - k$

То есть $\sum u_n$ сходится

б) Lab. (взять r между \mathcal{D} и 1, $1 < r < \mathcal{D}$, $\mathcal{D} - r = \varepsilon$)

Сравнить $\sum u_n$ с $\sum r^l$ (расходящимся)

□

Ex. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ - сходится

Ex. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ - расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ - сходится

Th. 4. Радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad u_n \geq 0 \text{ и } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = K \in \mathbb{R}$$

а) $0 \leq K < 1 \implies \sum u_n$ сходится

б) $K > 1 \implies \sum u_n$ расходится

Nota. $K = 1$ - ничего не следует

□

а) По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid \sqrt[n]{u_n} - K < \varepsilon$

$\iff k - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < k + \varepsilon$ Положим $\varepsilon = r - K$, где $K < r < 1$

$\implies 0 \leq u_n < r^n$ - геом. ряд с $|r| < 1$, то есть $\sum r^n$ сходится

б) Аналогично

□

Ex. 1. $\sum_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

$$\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}$$

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e^{-1} \neq 0$ - необходимое условие не выполняется

Ex. 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = e^{-1} < 1$ - сходится

Th. 5. Интегральный признак Коши

Если существует $f(x) : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x)$ монотонно убывает, $f(n) = u_n$, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \\ \sum_{n=2}^b u_n &= u_2 \cdot 1 + u_3 \cdot 1 + \dots < \int_1^b f(x) dx < u_1 \cdot 1 + u_2 \cdot 1 + \dots = \sum_{n=1}^{b-1} u_n \end{aligned}$$

Обозначим $\sum_{n=1}^{b-1} u_n = S_{b-1}$, $\sum_{n=2}^b u_n = S_{b-1} - u_1 + u_b$

$$0 < S_{b-1} - u_1 + u_b < \int_1^b f(x) dx < S_{b-1}$$

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} u_n - u_1 + u_b < \int_1^{\infty} f(x) dx < \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Если \int сходится, то смотрим правую часть

Если \int расходится, то смотрим левую часть неравенства

□

4. Знакопередающие ряды

Def. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ ($u_n > 0$) - знакопередающийся ряд

Th. Признак Лейбница

Если для знакопередающегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ верно, что $u_n \rightarrow 0$ и $|u_1| > |u_2| > \dots > |u_n|$,

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ сходится

$$\square \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из u_1 и получаем число гарантированно меньшее u_1

По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность $\square \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} \stackrel{0}{=} S \in \mathbb{R}$$

\square

$$Ex. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \implies \text{ряд сходится}$$

Nota. Оценка остатка ряда

Запишем ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k = S_n + P_n$ - остаток ряда

В доказательстве было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1} u_k| = u_k = u_{n+1}$$

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \underbrace{\frac{1}{32} + \dots}_{R_4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

$$|R_4| < \frac{1}{32}$$

$$\text{Проверка: } -\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) - \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{256}\right) - \dots = -\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} - \underline{\text{Lab.}} \text{ досчитать и сравнить с } \frac{1}{32}$$

Nota. Оценка не работает в знакоположительных рядах

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$R_3 = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots\right) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} > \frac{1}{16}$$

Def. Знакопеременный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n - любого знака и не все u_n одного знака

$$Ex. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

Nota. Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

Th. Абсолютная сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится} \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится}$$

Mem. См. абсолютную сходимость в [несобственных интегралах](#)

□

По критерию Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ сходится}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon)$

По неравенству треугольника:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$$

□

Nota. Обратное неверно!

$$\text{Ex. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ сходится}$$

$$\text{Но } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ расходится}$$

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ сходится, он называется **абсолютно сходящимся**

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ расходится, он называется **условно сходящимся**

Nota. Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезнена и сохраняет сумму ряда

Nota. На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов

1) Признак сравнения: $|u_n| < |v_n| : \sum |v_n| \text{ сходится} \implies \sum |u_n| \text{ сходится}$

2) Предельный признак: $\lim \left| \frac{u_n}{v_n} \right| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) $D = \lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$

4) $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$

5) $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сравнивается с $\sum |u_n|$

§2. Функциональные ряды

1. Определения

Def. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x) : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется функциональным

Nota. При фиксации переменной x ряд становится числовым

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$ расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходится

Таким образом для $|x| < 1$ ряд будет сходящимся, для $|x| > 1$ расходящимся

Def. Множество значений x , при которых $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости

Def. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E , то сумма ряда - функция $S(x)$

Nota. То есть $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток: $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Часто удобно исследовать $R_n(x) \rightarrow 0$. Также работает критерий Коши

Th. Критерий Коши

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall m > n > n_0 \mid u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x) \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$

Nota. Очень неприятно, что n_0 зависит от ε и всякого x

Def. Равномерная сходимость ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \stackrel{def}{\iff}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n(x) \mid < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Nota. Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

Th. Признак Вейерштрасса

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \leq \alpha_n \forall n$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся

Nota. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим

\square
 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \mid R_n^\alpha < \varepsilon$
 $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Заменим на условие $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$ (кр. Коши)

$$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \leq |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \leq \alpha_n + \dots + \alpha_m \leq \varepsilon$$

При этом номер n_0 зависит только от ε

\square

Nota. Таким образом всякий мажорирующий ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

Nota. Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

Ex. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$$

$$\text{При } x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$$

$$\text{При } x < 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$$

$$\text{При } x = 0 \quad S_n = 0$$