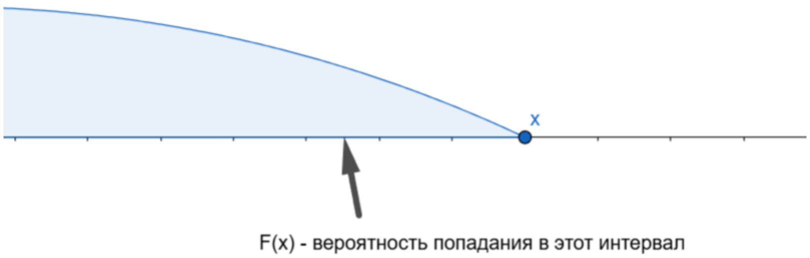
# Лекция 8

## Функция распределения

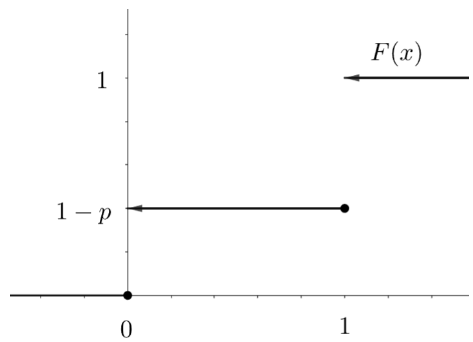
**Def.** Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины $\xi$ называется функция $F_\xi(x) = P(\xi < x)$




*Ex.* $\xi \in B_p$

| $\xi$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p$ | $1-p$ | $p$ |

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1-p & 0 < x \le 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

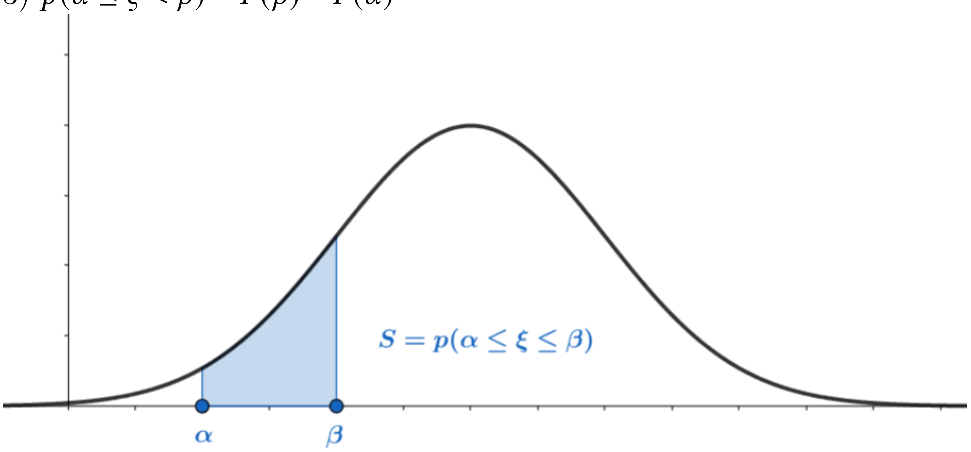



### Свойства функции распределения

1) $F(x)$ ограничена $0 \le F(x) \le 1$
2) $F(x)$ неубывающая функция: $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

$x_1 < x_2 \Longrightarrow \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \Longrightarrow p(\xi < x_1) \le p(\xi < x_2)$, то есть $F(x_1) \le F(x_2)$

3) $p(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$



$p(\xi < \beta) = p(\xi < \alpha) + p(\alpha \le \xi < \beta) \Longrightarrow F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha \le \xi < \beta)$

*Nota.* Функция распределения $F(x)$ - вероятность попадания в интервал $(-\infty; x)$. Так как Борелевская $\sigma$-алгебра порождается такими интервалами, то распределение полностью задается этой функцией

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0; \quad \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Так как $F(x)$ монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать эти пределы для некоторой последовательности $x_n \to \pm\infty$

$\sqsupset A_n = \{n-1 \le \xi < n, n \in v\}$ - несовместные события, так как $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, то по аксиоме счетной аддитивности, вероятность $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} p(n-1 \le \xi < n) =$

$\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} (F(n) - F(n-1)) = \lim\limits_{N\to\infty} (F(N) - F(-N-1)) = \lim\limits_{N\to\infty} F(N) - \lim\limits_{N\to-\infty} F(N) = 1$

$\Longrightarrow \lim\limits_{N\to\infty} F(N) = 1 + \lim\limits_{N\to-\infty} F(N)$

Так как $\lim\limits_{N\to\infty} F(N) \le 1$ и $\lim\limits_{N\to-\infty} F(N) \ge 0$, то $\lim\limits_{N\to\infty} F(N) = 1$ и $\lim\limits_{N\to-\infty} = 0$

5) $F(x)$ непрерывна слева: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \le \xi < x_0, n \in Z\}$

Так как $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$

То по аксиоме непрерывности $p(B_n) \to 0$

$P(B_n) = F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \to 0$

$F(x_0 - \frac{1}{n}) \to F(x_0)$

$\lim\limits_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0)$

6) Скачок в точке $x_0$ равен вероятности попадания в данную точку: $F(x_0+0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$ или $F(x_0+0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \le x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий $C_n = \{x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}, n \in Z\}$

Так как $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing$

То по аксиоме непрерывности $p(C_n) \to 0$

$$P(C_n) = F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \to 0$$
$$p(x_0 \le \xi < x_0 + \frac{1}{n}) + p(\xi = x_0) \to p(\xi = x_0)$$
$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \to p(\xi = x_0)$$
$$F(x_0 + 0) - F(x_0) \to p(\xi = x_0)$$

7) Если функция распределения непрерывна в точке $x = x_0$, то очевидно, что вероятность попадания в эту точка $p(\xi = x_0) = 0$ (следствие из 6 пункта)

8) Если $F(x)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$, то $p(\alpha \le \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \le \xi \le \beta) = p(\alpha < \xi \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

**Th.** Случайная величина $\xi$ имеет дискретное распределение тогда и только тогда, когда ее функция распределения имеет ступенчатый вид

## Абсолютно непрерывное распределение

**Def.** Случайная величина $\xi$ имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует $f_\xi(x)$ такая, что $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $p(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x)dx$

Функция $f_\xi$ называется плотностью распределения случайной величины

(в определении использует интеграл Лебега, так как $B$ может быть не просто интервалом на $\mathbb{R}$)

### Свойства плотности и функции распределения абсолютно непрерывного распределения

1) Вероятносто-геометрический смысл плотности: $p(\alpha \le \xi < \beta) = \int_\alpha^\beta f_\xi(x)dx$

2) Условие нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$

Из определения, если $B = \mathbb{R}$

3) $F_\xi(x) = \int_B f_\xi(x)dx$

Если $B = (-\infty; x)$, то $F_\xi(x) = p(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx$

4) $F_\xi(x)$ непрерывна

Из свойства непрерывности интеграла с верхним переменным пределом

5) $F_\xi(x)$ дифференцируема почти везде и $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$ для почти всех $x$

По теореме Барроу

6) $f_\xi(x) \geq 0$ по определению и как производная неубывающей $F_\xi(x)$
7) $p(\xi = x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ - так как $F_\xi(x)$ непрерывна
8) $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$
9) **Th.** Если $f(x) \leq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ (выполнены свойства 2 и 6), то $f(x)$ - плотность некоторого распределения

### Числовые характеристики

**Def.** Математическим ожиданием $E\xi$ случайной абсолютно непрерывной величины $\xi$ называется величина $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx$ при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx < \infty$

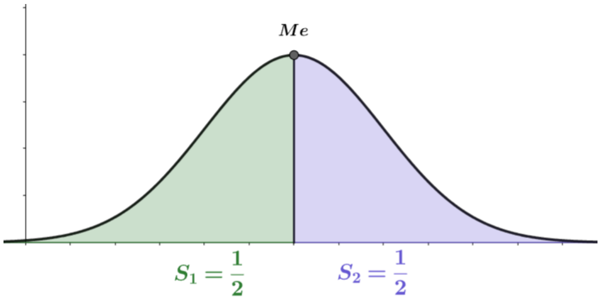
**Def.** Дисперсией $D\xi$ случайной величины $\xi$ называется величина $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_\xi(x)dx$ при условии, что данный интеграл сходится
*Nota.* Вычислять удобно по формуле $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (E\xi)^2$

**Def.** Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$ определяется, как корень дисперсии
Смысл этих величин такой же, как и при дискретном распределении. Также свойства аналогичны тем, что и при дискретном распределении

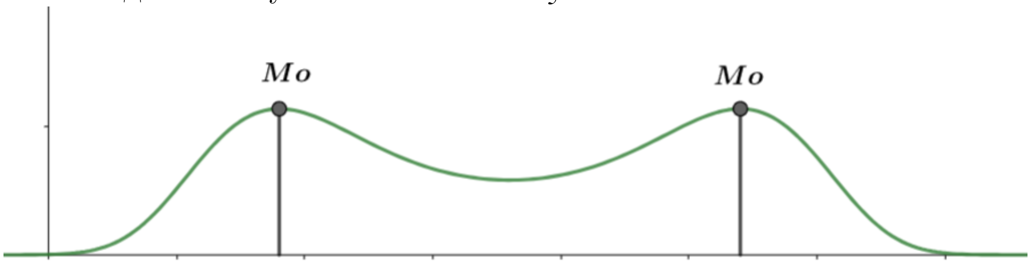
### Другие числовые характеристики

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_\xi(x)dx$ - момент $k$-ого порядка
$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_\xi(x)dx$ - центральный момент $k$-ого порядка

**Def.** Медианой $Me$ абсолютно непрерывной случайной величины $\xi$ называется значение случайной величины $\xi$, такое что $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$




**Def.** Модой $Mo$ случайной величины $\xi$ называется точка локального максимума плотности




## Сингулярное распределение

**Def.** Случайная величина $\xi$ имеет случайное распределение, если $\exists B$ - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега $\lambda(B) = 0$, такое что $p(\xi \in B) \in 1$, но $P(\xi = x) = 0 \ \ \forall x \in B$

*Nota.* Такое Борелевское множество состоит из несчетного множества точек, так как в противном случае по аксиоме счетной аддитивности $p(\xi \in B) = 0$. То есть при сингулярном распределении случайная величина $\xi$ распределена на несчетном множестве меры 0

*Nota.* Так как $p(\xi = x) = 0 \ \forall x$, $F_\xi$ непрерывна.

*Ex.* Сингулярное распределение получим, если возьмем случайную величину, функция распределения которой - лестница Кантора

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 \quad x \le 0, \\ \frac{1}{2}F(3x) \quad 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x-2) \quad \frac{2}{3} < x \le 1, \\ 1 \quad x > 1 \end{cases}$$

**Th. Лебега.**

$\sqsupset F_\xi(x)$ - функция распределения $\xi$. Тогда $F_\xi(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$, где $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$F_1$ - функция дискретного распределения

$F_2$ - функция абсолютно непрерывного распределения

$F_3$ - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси