

## 6. Гироскоп. Механическая работа.

Повторим то, что было на прошлой лекции. Рассмотрим два типа движения:

### Поступательное движение

$$d\vec{r}; x, y, z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{p} = \text{const} \text{ при } \vec{F}_{\text{вн.}} = 0 \text{ (ЗСИ)}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

### Вращательное движение

$$d\vec{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$I \quad I_{\text{м.т.}} = mr^2,$$

$$I = \int r^2 dm$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \text{const} \text{ при } \vec{M}_{\text{вн.}} = 0 \text{ (ЗСМИ)}$$

$$M_z = I\beta_z$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}\vec{F}]$$

Теорема Штейнера: момент инерции  $I$  тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого тела  $I_0$  относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:

$$I = I_0 + md^2$$

Также мы рассмотрели моменты инерции для разных тел

### Гироскоп

Рассмотрим вращающийся волчок: вращаясь, он постепенно теряет энергию из-за трения и сопротивления воздуха, из-за чего его вращение замедляется, и его ось начинает вращаться по другой оси.

Обозначим за  $\vec{L}_\omega$  момент инерции волчка и за  $\vec{L}'$  момент инерции оси. Тогда:

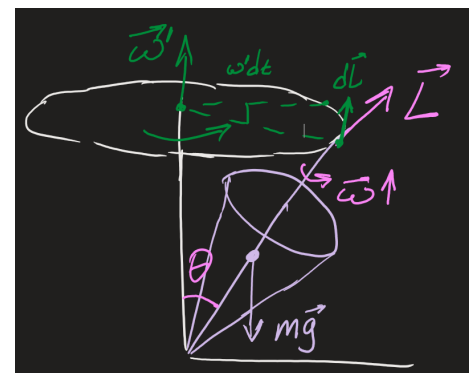
$$\vec{L} = \vec{L}_\omega + \vec{L}'$$

$$\vec{L}_\omega = I\vec{\omega}$$

Заметим, что в опыте скорость вращения волчка намного больше скорости вращения оси  $\omega \gg \omega'$

$$\text{Из этого } d\vec{L} = L \sin \theta \cdot \omega' dt$$

Thin hoop, radius $R$	Through center		$MR^2$
Thin hoop, radius $R$ width $w$	Through central diameter		$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
Solid cylinder, radius $R$	Through center		$\frac{1}{2}MR^2$
Hollow cylinder, inner radius $R_1$ outer radius $R_2$	Through center		$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Uniform sphere, radius $R$	Through center		$\frac{2}{5}MR^2$
Long uniform rod, length $\ell$	Through center		$\frac{1}{12}M\ell^2$
Long uniform rod, length $\ell$	Through end		$\frac{1}{3}M\ell^2$
Rectangular thin plate, length $\ell$ , width $w$	Through center		$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$



Или в векторной форме:

$$d\vec{L} = [\vec{\omega}\vec{L}]dt$$

$$\vec{M} = [\vec{\omega}\vec{L}]$$

Также заметим, что  $L_{\omega} \gg L'$

Способность сохранять положение вращающегося волчка используется в таком приборе, как гироскоп. Гироскоп применяется для определения положения аппарата (например, самолет, космического корабля) в авионике.

## Механическая работа

$d\vec{r}$  - элементарное перемещение, в пределах которого сила  $\vec{F}$  постоянна

$F_s$  - проекция силы на направление перемещения

$$d\vec{r} = ds$$

Элементарная работа силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F \cdot ds \cos \alpha = F_s ds$$

$$A = \sum dA = \int dA$$

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds$$

Допустим на тело действует несколько сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$$

$$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) d\vec{r}$$

Мощность - скалярная величина, равная работе силы, совершаемой за единицу времени.

Характеризует скорость, с которой совершается работа

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$$

$$A = \int N dt$$

$$\text{Работа силы упругости: } A = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$$

$$\text{Работа силы тяжести: } A = \int_1^2 m\vec{g}d\vec{r} = mgh_1 - mgh_2$$

$$\text{Работа силы тяготения: } A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Gm_1m_2}{r^2} dr = -\frac{Gm_1m_2}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{Gm_1m_2}{r_1} - \frac{Gm_1m_2}{r_2}$$

Силы, чья работа не зависит от траектории пути, будут называть *консервативными* (потенциальными)

Тогда из этого мы можем вывести потенциальную энергию:

$$\text{Потенциальная энергия для силы упругости: } U = \frac{kx^2}{2}$$

$$\text{Потенциальная энергия для силы тяжести: } U = mgh$$

$$\text{Потенциальная энергия для силы тяготения: } U = \frac{Gm_1m_2}{r}$$

В общем виде получаем  $A = U_1 - U_2$

$$\begin{aligned}dA &= -dU & \vec{F}d\vec{r} &= -dU \\ \vec{F} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) \\ \vec{F} &= -\text{grad } U = -\nabla U\end{aligned}$$