$\square$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_n + \dots$

$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

Все слагаемые в скобках будут больше нуля, тогда частичные суммы будут возрастать

$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$

Здесь же тоже все слагаемые больше нуля - их мы вычитаем из u_1 и получаем число гарантированно меньшее u_1

По **Th.** о монотонности и ограниченности последовательность $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$

$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1};\qquad \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \cancel{\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}}^{\,0} = S \in \mathbb{R}$

$\square$

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dots$

$u_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\qquad \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} \Longrightarrow$ ряд сходится

Nota. Оценка остатка ряда

Запишем ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots \pm u_n \mp u_{n+1} = S + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k = S_n + P_n$ - остаток ряда

В доказательстве **Th.** было установлено, что сумма ряда не превышает своего первого члена

$$R_{n+1} < |(-1)^{k+1}u_k| = u_k = u_{n+1}$$

Ex. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} \underbrace{- \dfrac{1}{32} + \dots}_{R_4} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n}$

$|R_4| < \dfrac{1}{32}$

Проверка: $-(\dfrac{1}{32} - \dfrac{1}{64}) - (\dfrac{1}{128} - \dfrac{1}{256}) - \dots = -\sum\limits_{k=3}^{\infty}\dfrac{1}{2^{2k}}$ - Lab. досчитать и сравнить с $\dfrac{1}{32}$

Nota. Оценка не работает в знакоположительных рядах

$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dots$

$R_3 = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{64} + \dots = \dfrac{1}{16}(1 + \dfrac{1}{2} + \dots) = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{16}$

Def. Знакопеременный ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где u_n - любого знака и не все u_n одного знака

Ex. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} + \dots$

Nota. Исследование таких рядов (в том числе знакочередующихся) на сходимость можно проводить при помощи ряда из модулей

Th. Абсолютная сходимость
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится

Mem. См. абсолютную сходимость в несобственных интегралах

□

По критерию Коши:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится $\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \underset{n_0=n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall m > n > n_0 \quad ||u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m|| < \varepsilon$
По неравенству треугольника:
$|u_n| + |u_{n+1} + \dots + u_m| < |u_n| + |u_{n+1}| + \dots + |u_m| < \varepsilon$

□

Nota. Обратное неверно!

Ex. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ сходится
Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ сходится, он называется **абсолютно сходящимся**
Def. Если $\sum u_n$ сходится, при том что $\sum |u_n|$ расходится, он называется **условно сходящимся**
Nota. Для абсолютно сходящихся рядов перестановка членов безболезнена и сохраняет сумму ряда
Nota. На абсолютно сходящиеся ряды распространяются признаки сходимости знакоположительных рядов
1) Признак сравнения: $|u_n| < |v_n|$: $\sum |v_n|$ сходится $\Longrightarrow \sum |u_n|$ сходится
2) Предельный признак: $\lim |\frac{u_n}{v_n}| = q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3) $D = \lim |\frac{u_{n+1}}{u_n}| < 1$
4) $K = \lim \sqrt[n]{|u_n|} < 1$
5) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сравнивается с $\sum |u_n|$

§2. Функциональные ряды

1. Определения

Def. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $u_n(x): E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функциональным

Nota. При фиксации переменной x ряд становится числовым

Ex. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

$x = 2 \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n$ расходится

$x = \frac{1}{2} \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ сходится

Таким образом для $|x| < 1$ ряд будет сходящимся, для $|x| > 1$ расходящимся

Def. Множество значений x, при которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, называется областью сходимости

Def. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при всех x из некоторого множества E, то сумма ряда - функция $S(x)$

Nota. То есть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Запишем остаток: $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Часто удобно исследовать $R_n(x) \to 0$. Также работает критерий Коши

Th. Критерий Коши

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области $D \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon, x)}{n_0 \in \mathbb{N}} \ | \ \forall m > n > n_0 \ |u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x)| < \varepsilon$

Nota. Очень неприятно, что n_0 зависит от ε и всякого x

Def. Равномерная сходимость ряда

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области $D \overset{def}{\iff}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{n_0 \in \mathbb{N}} \ | \ \forall n > n_0 \ |R_n(x)| < \varepsilon$

Nota. Доказательства равномерной сходимости по определению сложно, пользуются другими способами

Th. Признак Вейерштрасса

$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ - числовой ряд такой, что $\alpha_n > 0$, $\sum \alpha_n$ сходится, $|u_n(x)| \le \alpha_n \ \forall n$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходящийся

Nota. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ называется мажорирующим

□

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \underset{n_0 = n_0(\varepsilon)}{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \mid \forall n > n_0 \ |R_n^\alpha| < \varepsilon$

Заменим на условие $|\alpha_n + \dots + \alpha_m| < \varepsilon$ (кр. Коши)

$|u_n(x) + \dots + u_m(x)| \le |u_n(x)| + \dots + |u_m(x)| \le \alpha_n + \dots + \alpha_m \le \varepsilon$

При этом номер n_0 зависит только от ε

□

Nota. Таким образом всякий мажорирующий ряд равномерно сходится, но не всякий равномерно сходящийся ряд мажорируем

Nota. Установим свойство суммы равномерно сходящегося ряда

Ex. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) = (x^{\frac{1}{3}} - x^1) + (x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}) + (x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}) + \dots;$

$S_n = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$

При $x > 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}} - x) = 1 - x$

При $x < 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-\sqrt[2n+1]{|x|} - x) = -1 - x$

При $x = 0$ $\quad S_n = 0$