4.2 ДУ первого порядка (ДУ$_1$)

Nota. Среди ДУ$_1$ рассмотрим несколько типов точно интегрируемых ДУ
1) Уравнение с разделяющимися переменными (УРП)
2) Однородное уравнение (ОУ)
3) Уравнение полных дифференциалов (УПД)
4) Линейное дифференциальное уравнение первого порядка (ЛДУ$_1$)

Кроме этого интегрируются дифференциальные уравнения Бернулли, Лагранжа, Клеро, Рикатти и др. (см. литературу)

1* УРП

Def. $m(x)N(y)dx + M(x)n(y)dy = 0$

Решение : $N(y)M(x) \neq 0$

$\frac{m(x)}{M(x)}dx + \frac{n(y)}{N(y)}dy = 0 \quad y = y(x)$ - неизвестная функция (ее ищем, решая ДУ)

$(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y')dx = 0$

Интегрируем по dx:

$\int \left(\frac{m(x)}{M(x)} + \frac{n(y)}{N(y)}y'\right) dx = const$

По свойствам интеграла:

$\int \frac{m(x)}{M(x)}dx + \int \frac{n(y)}{N(y)}dy = const$

или: $\int \frac{m(x)}{M(x)}dx = \int \frac{-n(y)}{N(y)}dy$

Ex. $xdy - ydx = 0$

$xdy = ydx$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad (x, y \neq 0)$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = \ln|x| + \tilde{C} = \ln|\tilde{\tilde{C}}x|$

$|y| = |\tilde{\tilde{C}}x|$

$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$

Заметим, $x = y = 0$ - решение, но они учтены общим решением $y = Cx$, (при $C = 0, y = 0$) и подстановкой в ДУ $x = 0$

Nota. В процессе решения нужно проверить $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$

$M(x) = 0$ при $x = a$ и $N(y) = 0$ при $y = b$

$m(a)\underbrace{N(b)}_{=0}dx + n(b)\underbrace{M(a)}_{=0}dy = 0$

То есть $M(x) = 0$ и $N(y) = 0$ - решение

2* ОУ

Def. 1. Однородная функция n-ого порядка называется функция $f(x, y)$ такая, что

$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Ex. $f = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right), \cos(\dfrac{\lambda x}{\lambda y}) = \cos(\dfrac{x}{y})$ - нулевой порядок однородности
$f = \sqrt{x^2+y^2}$ - первый порядок

Def. 2. $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \text{ где } P(x,y), Q(x,y) \text{ - однородные функции одного порядка}}$ - ОУ

<u>Решение</u> $P(x,y) = P\left(x\cdot 1, x\cdot \dfrac{y}{x}\right) = x^k P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$
$Q(x,y) = x^k Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$
Тогда, $P\left(1, \dfrac{y}{x}\right)dx + Q\left(1, \dfrac{y}{x}\right)dy = 0.$
Обозначим $\dfrac{y}{x} = t, \quad y' = \dfrac{dy}{dx} \overset{y=tx}{=\!=} t'_x x + t x'_x = t'_x x + t$
$P(1,t) + Q(1,t)y' = P(1,t) + Q(1,t)(t'x+t) = 0$
$t'x + t = -\dfrac{P(1,t)}{Q(1,t)} \overset{\text{обозн}}{=} f(t)$
$t'x = f(t) - t$
$\dfrac{dt}{dx}x = f(t) - t \neq 0$
$\dfrac{dt}{f(t)-t} = \dfrac{dx}{x}$
$\displaystyle\int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x} = \ln|Cx|$
$Cx = e^{\int \frac{dt}{f(t)-t}} = \varphi(x,y)$ - общий интеграл
Если $f(t) - t = 0$, то пусть $t = k$ - корень, тогда $k = \dfrac{y}{x} \to y = kx$ - тоже решение

Ex. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$
$\dfrac{y}{x} = t \quad y' = t'x + t$
$y = tx \quad dy = (t'x+t)dx$
$(x+tx)dx + (x-tx)(t'x+t)dx = 0$
$(1+t) + (1-t)(t'x+t) = 0$
$t'(1-t)x + t - t^2 + 1 + t = 0$
$t'(1-t)x = t^2 - 2t - 1$
$\dfrac{(1-t)dx}{t^2-2t-1} = \dfrac{dx}{x}$ - УРП
$\dfrac{(1-t)dt}{(1-t)^2-2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d((1-t)^2)-2}{(1-t)^2-2} = -\dfrac{1}{2}\ln|(1-t)^2-2| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}} = \ln|Cx|$
$\tilde{C}x = \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)^2-2}} \Longleftrightarrow Cx^2 = \dfrac{1}{(1-t)^2-2} =\Longleftrightarrow Cx^2((1-t)^2-2) = 1$
$C((y-x)^2 - 2x^2) = 1$
$C(y^2 - 2xy - x^2) = 1$
$y^2 - 2xy - x^2 = C$ - гиперболы
$(t-1)^2 - 2 = 0 \quad \dfrac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2} \quad y = (1\pm\sqrt{2})x$ - асимптоты
3* Уравнение в полных дифференциалах

Def. $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$ - УПД

<u>Решение</u> *Мет.* **Th.** об интеграле НЗП $\exists \Phi(x,y) \mid d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$

Ex. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (x+y)dx + (x-y)dy = \int_{(0,0)}^{(x,0)} xdx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-y)dy = \frac{x^2}{2}\Big|_{(0,0)}^{(x,0)} + (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_{(x,0)}^{(x,y)} =$
$\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C$ - общий интеграл

$x^2 + 2xy - y^2 = C$

4* ЛДУ

Def. $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ - $ЛДУ_1$

$p, q \in C_{[a,b]}$

Nota. Будем решать методом Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

Принцип: если удалось найти частное решение $ДУ_{однор}$ (обозначим y_0), то общее решение $ДУ_{неод}$ можно искать в виде $y = C(x)y_0$

Def. Однородное (ЛОДУ): $y' + p(x)y = 0$

Def. Неоднородное (ЛНДУ): $y' + p(x)y = q(x)$

Ex. $\sqsupset y(x) = x^2e^{-x}$ - частное решение ЛНДУ

А $y_0 = xe^{-x}$, тогда $y = xxe^{-x} = C(x)xe^{-x}$

То есть $C(x)$ варьируется, чтобы получить решение $y = y(x)$

<u>Решение</u> а) $y' + p(x)y = 0$

$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ - УРП

$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$

$\ln|\tilde{C}y| = -\int p(x)dx$

$\overline{y} = Ce^{-\int p(x)dx} = Cy_0$

б) $y' + p(x)y = q(x)$

Ищем $y(x)$ в виде $y = C(x)y_0$

$C'(x)y_0 + C(x)y_0' + p(x)C(x)y_0 = q(x)$

$C'(x)y_0 + C(x)\underbrace{(y_0' + p(x)y_0)}_{=0} = q(x)$

$C'(x) = \frac{q(x)}{y_0} = q(x)e^{\int p(x)dx}$

$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$