

## Функция распределения

**Def.** Функция распределения  $F_\xi(x)$  случайной величины  $\xi$  называется функция  $F_\xi(x) = P(\xi < x)$   
 $F(x)$  - вероятность попадания в этот интервал

$$\text{Ex. } \xi \in B_p \quad \begin{array}{c|c|c} \xi & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array} \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1-p & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

### Свойства функции распределения

- 1)  $F(x)$  ограничена  $0 \leq F(x) \leq 1$
- 2)  $F(x)$  неубывающая функция:  $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leq F(x_2)$

$$x_1 < x_2 \implies \{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\} \implies p(\xi < x_1) \leq p(\xi < x_2), \text{ то есть } F(x_1) \leq F(x_2)$$

- 3)  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$p(\xi < \beta) = p(\xi < \alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta) \implies F(\beta) = F(\alpha) + p(\alpha \leq \xi < \beta)$$

*Nota.* Функция распределения  $F(x)$  - вероятность попадания в интервал  $(-\infty; x)$ . Так как Борелевская  $\sigma$ -алгебра порождается такими интервалами, то распределение полностью задается этой функцией

- 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

Так как  $F(x)$  монотонна и ограничена, то эти пределы существуют. Поэтому достаточно доказать эти пределы для некоторой последовательности  $x_n \rightarrow \pm\infty$

$\square A_n = \{n-1 \leq \xi < n, n \in \mathbb{N}\}$  - несовместные события, так как  $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} A_n$ , то по аксиоме счетной аддитивности, вероятность  $p(\xi \in \mathbb{R}) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N p(n-1 \leq \xi < n) =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N (F(n) - F(n-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} (F(N) - F(-N-1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) - \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 1$$

$$\implies \lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1 + \lim_{N \rightarrow -\infty} F(N)$$

Так как  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) \leq 1$  и  $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) \geq 0$ , то  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 1$  и  $\lim_{N \rightarrow -\infty} F(N) = 0$

- 5)  $F(x)$  непрерывна слева:  $F(x_0 - 0) = F(x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий  $B_n = \{x_0 - \frac{1}{n} \leq \xi < x_0, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как  $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности  $p(B_n) \rightarrow 0$

$$P(B_n) = F(x_0) - F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow 0$$

$$F(x_0 - \frac{1}{n}) \rightarrow F(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$$

6) Скачок в точке  $x_0$  равен вероятности попадания в данную точку:  $F(x_0 + 0) - F(x_0) = p(\xi = x_0)$  или  $F(x_0 + 0) = p(\xi = x_0) + p(\xi < x_0) = p(\xi \leq x_0)$

Этот предел существует в силу монотонности и ограниченности функции, поэтому рассмотрим последовательность событий  $C_n = \{x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\}$

Так как  $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$

То по аксиоме непрерывности  $p(C_n) \rightarrow 0$

$$P(C_n) = F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow 0$$

$$p(x_0 \leq \xi < x_0 + \frac{1}{n}) + p(\xi = x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

$$F(x_0 + 0) - F(x_0) \rightarrow p(\xi = x_0)$$

7) Если функция распределения непрерывна в точка  $x = x_0$ , то очевидно, что вероятность попадания в эту точка  $p(\xi = x_0) = 0$  (следствие из 6 пункта)

8) Если  $F(x)$  непрерывна  $\forall x \in \mathbb{R}$ , то  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

**Th.** Случайная величина  $\xi$  имеет дискретное распределение тогда и только тогда, когда ее функция распределения имеет ступенчатый вид

## Абсолютно непрерывное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует

$$f_{\xi}(x) \text{ такая, что } \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad p(\xi \in B) = \int_B f_{\xi}(x) dx$$

Функция  $f_{\xi}$  называется плотностью распределения случайной величины

(в определении использует интеграл Лебега, так как  $B$  может быть не просто интервалом на  $\mathbb{R}$ )

### Свойства плотности и функции распределения абсолютно непрерывного распределения

1) Вероятностно-геометрический смысл плотности:  $p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x) dx$

2) Условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = 1$

Док-во: из определения, если  $B = \mathbb{R}$

3)  $F_{\xi}(x) = \int_B f_{\xi}(x) dx$

Док-во, если  $B = (-\infty; x)$ , то  $F_{\xi}(x) = p(\xi \in (-\infty; x)) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(x) dx$

4)  $F_{\xi}(x)$  непрерывна (из свойства непрерывности интеграла с верхним переменным пределом)

5)  $F_{\xi}(x)$  дифференцируема почти везде и  $f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$  для почти всех  $x$  (по теореме Барроу)

6)  $f_{\xi}(x) \geq 0$  по определению и как производная неубывающей  $F_{\xi}(x)$

7)  $p(\xi = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  - так как  $F_{\xi}(x)$  непрерывна

8)  $p(\alpha \leq \xi < \beta) = p(\alpha < \xi < \beta) = p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = p(\alpha < \xi \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

9) **Th.** Если  $f(x) \geq 0$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  (выполнены свойства 2 и 6), то  $f(x)$  - плотность некоторого распределения

### Числовые характеристики

**Def.** Математическим ожиданием  $E\xi$  случайной абсолютно непрерывной величины  $\xi$  называется величина  $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$  при условии, что данный интеграл сходится абсолютно, то есть  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx < \infty$

**Def.** Дисперсией  $D\xi$  случайной величины  $\xi$  называется величина  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f_{\xi}(x) dx$  при условии, что данный интеграл сходится

*Nota.* Вычислять удобно по формуле  $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx - (E\xi)^2$

**Def.** Среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$  определяется, как корень дисперсии

Смысл этих величин такой же, как и при дискретном распределении. Также свойства аналогичны тем, что и при дискретном распределении

## Другие числовые характеристики

$m_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx$  - момент  $k$ -ого порядка

$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k f_{\xi}(x) dx$  - центральный момент  $k$ -ого порядка

**Def.** Медианой  $Me$  абсолютно непрерывной случайной величины  $\xi$  называется значение случайной величины  $\xi$ , такое что  $p(\xi < Me) = p(\xi > Me) = \frac{1}{2}$

**Def.** Модой  $Mo$  случайной величины  $\xi$  называется точка локального максимума плотности

## Сингулярное распределение

**Def.** Случайная величина  $\xi$  имеет случайное распределение, если  $\exists B$  - Борелевское множество с нулевой мерой Лебега  $\lambda(B) = 0$ , такое что  $p(\xi \in B) \in (0, 1]$ , но  $P(\xi = x) = 0 \forall x \in B$

*Nota.* Такое Борелевское множество состоит из несчетного множества точек, так как в противном случае по аксиоме счетной аддитивности  $p(\xi \in B) = 0$ . То есть при сингулярном распределении случайная величина  $\xi$  распределена на несчетном множестве меры 0

*Nota.* Так как  $p(\xi = x) = 0 \forall x$ ,  $F_{\xi}$  непрерывна.

*Ex.* Сингулярное распределение получим, если возьмем случайную величину, функция распределения которой

- лестница Кантора

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}F(3x) & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(3x - 2) & \frac{2}{3} < x \leq 1, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



### Th. Лебега.

$\square F_{\xi}(x)$  - функция распределения  $\xi$ . Тогда  $F_{\xi}(x) = p_1 F_1(x) + p_2 F_2(x) + p_3 F_3(x)$ , где  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$F_1$  - функция дискретного распределения

$F_2$  - функция абсолютно непрерывного распределения

$F_3$  - функция сингулярного распределения

То есть существуют только дискретное, абсолютно непрерывное, сингулярное распределения и их смеси