Las matemáticas también traducen: Polinomios

POLINOMIOS. Expresiones algebraicas. Valor numérico de una expresión algebraica. Polinomios. Valor numérico de un polinomio. Sus elementos principales. Suma y resta de polinomios. Multiplicación de polinomios. Factor común. Potencia de un polinomio. Identidades notables. División de polinomios. Regla de Ruffini. Descomposición en factores de un polinomio.

Expresiones algebraicas

Trabajar en álgebra consiste en manejar relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades se llaman variables, incógnitas o indeterminadas y se representan por letras.

Llamaremos expresión algebraica a cualquier expresión matemática que se construya con números reales, letras y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división.

Valor numérico de una expresión algebraica.

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras de la misma por números determinados y efectuar las operaciones indicadas en la expresión.

Monomios

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y la potencia de exponente natural.

El coeficiente del monomio es el número que aparece multiplicando a las variables.

La parte literal está constituida por las letras y sus exponentes.

El grado de un monomio es la suma de todos los exponentes de las letras o variables.

Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Operaciones con monomios

- **Suma de Monomios:** Sólo podemos sumar monomios semejantes. La suma de los monomios es otro monomio que tiene la misma parte literal y cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.
- **Producto de monomios:** El producto de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tenga la misma base.
- **Cociente de monomios:** El cociente de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.

Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica de la forma:

$P(x) = a_n x^{n} + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^{1} + a_0$

- Siendo a_n, $a_{n-1} \ldots a_1$, a_o números, llamados coeficientes.
- n: un número natural.
- x: la variable o indeterminada.
- a_o: es el término independiente.

Ie: es una expresión formada por la suma o resta de monomios.

Grado de un polinomio: El grado de un polinomio P(x) es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x.

Polinomio completo: Es aquel que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

Polinomio ordenado: Un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

Valor numérico de un polinomio: Es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera.

Operaciones con polinomios

- **Suma de polinomios:** Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado. La diferencia consiste en sumar el opuesto del sustraendo.

- **Multiplicación de polinomios:**
  - ✓ **Producto de un número por un polinomio:** Es otro polinomio que tiene de grado el mismo del polinomio y como coeficientes el producto de los coeficientes del polinomio por el número.
  - ✓ **Producto de un monomio por un polinomio:** Se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.
  - ✓ **Producto de polinomios:** Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio y se suman los monomios del mismo grado.
  - ✓ **Sacar factor común:** consiste en expresar el polinomio de forma que lo que está repetido en todos los términos del polinomio aparezca solo una vez multiplicando al resto del polinomio. Es decir, estamos aplicando la propiedad distributiva. $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a\,(b + c + d)$

- **Potencia de polinomios. Identidades notables.**
  - ✓ Binomio al cuadrado: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$
  - ✓ Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
  - ✓ Binomio al cubo: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$

- **División de polinomios: P(x) : Q(x)**

A la izquierda situamos el dividendo en orden decreciente. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan. A la derecha situamos el divisor dentro de una caja (también en orden decreciente). Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo.

Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

Repetimos el proceso anterior hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor, y por tanto no se puede continuar dividiendo.

Para comprobar si la operación es correcta, utilizaríamos la prueba de la división: D = d · c + r

- ✓ **Regla de Ruffini**

Si el divisor es un binomio de la forma x - a, entonces utilizamos un método más breve para hacer la división, llamado regla de Ruffini. Ej.: $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

a) Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.
b) Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.
c) Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor.
d) Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.
e) Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.
f) Sumamos los dos coeficientes.
g) Repetimos los pasos 5 y 6 las veces que fuera necesarias.
h) El último número obtenido es el resto.
i) El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

Factorización de un polinomio

- **Teorema del resto:** El resto de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma x - a es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = a.
- **Teorema del factor:** El polinomio P(x) es divisible por un polinomio de la forma (x – a) si y sólo si P(x = a) = 0. Al valor x = a se le llama raíz o cero de P(x).

Observaciones:

- Los ceros o raíces son divisores del término independiente del polinomio.
- A cada raíz del tipo x = a le corresponde un binomio del tipo (x −a).

- Podemos expresar un polinomio en factores al escribirlo como producto de todos los binomios del tipo (x –a), que se correspondan a las raíces x = a que se obtengan.
- La suma de los exponentes de los binomios ha de ser igual al grado del polinomio.
- Todo polinomio que no tenga término independiente admite como raíz x = 0, ó lo que es lo mismo, admite como factor x.
- Un polinomio se llama irreducible o primo cuando no puede descomponerse en factores.

Métodos para factorizar un polinomio

- Sacar factor común: $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d = a\,(b + c + d)$
- Identidades notables:
- Polinomio de grado superior a dos: Utilizamos el teorema del resto y la regla de Ruffini.
    1. Tomamos los divisores del término independiente: ±1, ±2, ±3.
    2. Aplicando el teorema del resto sabremos para qué valores la división es exacta.
    3. Dividimos por Ruffini.
    4. Por ser la división exacta, $D = d \cdot c$
    5. Continuamos realizando las mismas operaciones al segundo factor, y los nuevos que obtengamos, hasta que sea de grado uno o no se pueda descomponer en factores reales.