

# Suites Réelles

## Brève extension aux autres suites

### MPSI 2

## 1 Familles indexées par $\mathbb{Z}$

Soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

On se ramène à l'étude de deux suites:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = c_n \\ b_n = c_{-n} \end{cases}$$

## 2 Suites a valeurs complexes

On a:  $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$n \longmapsto z_n$$

Avec  $z_n = x_n + i y_n$ ,  $x$  et  $y$  deux suites réelles composantes.

### Définition 2.0.1

Soit  $z$  une suite a valeurs complexes, avec  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + i y_n$

On dit que  $z$  converge vers  $a + i b$  si et seulement si  $x$  tend vers  $a$  et  $y$  tend vers  $b$ .

### Propriété 2.0.1

$z$  converge vers  $\alpha$  ssi  $(|z_n - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0

- ① Supposons que  $z$  converge vers  $\alpha = a + i b$

Montrer que  $(|z_n - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0

$$|z_n - \alpha| = |x_n - a + i(y_n - b)|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Or,  $x$  tend vers  $a$  et  $y$  tend vers  $b$

Donc par encadrement, on a:  $(|z_n - \alpha|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

- ② Supposons que  $(|z_n - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Montrons que  $z$  converge vers  $\alpha = a + i b$

Sachant que  $z = x + i y \Rightarrow (x \leq |x| \leq |z|)$  et  $(y \leq |y| \leq |z|)$

$$\text{On obtient: } \begin{cases} 0 \leq |x_n - a| \leq |z_n - \alpha| \\ 0 \leq |y_n - b| \leq |z_n - \alpha| \end{cases}$$

Donc par encadrement,  $x$  tend vers  $a$  et  $y$  tend vers  $b$ .

□

**Remarque:** une suite complexe est bornée si son module est majoré.

### Propriété 2.0.2

*Si  $z$  converge vers  $\lambda$ , alors:*

- $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\lambda|$
- $\overline{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \overline{\lambda}$

### Propriété 2.0.3

*Soit  $z$  une suite complexe bornée.*

*Alors il existe une suite extraite de  $z$  convergente.*

- D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de  $x$  convergente.

Soit  $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une telle suite, et  $l_1$  sa limite.

- Notons  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = y_{\phi(n)}$

$y$  est bornée, donc  $v$  est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de  $v$  convergente.

Soit  $(v_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  une telle suite, et  $l_2$  sa limite.

$\phi \circ \psi$  est définie dans  $\mathbb{N}$  a valeurs dans  $N$  et strictement croissante

Donc  $(y_{\phi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de  $y$  et convergeant vers  $l_2$ .

- $(x_{\phi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de  $x$ , Donc elle converge vers  $l_1$

- Donc: 
$$\begin{cases} x_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 \\ y_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2 \end{cases}$$

Donc par définition de la convergence complexe,  $z_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 + i l_2$

□