

# Suites Réelles

## Comparaison avec une suite géométrique

### MPSI 2

## 1 Suites et séries géométriques

### Définition 1.0.1

On appelle suite géométrique de raison  $a$  toute suite telle que:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n \end{cases}$$

### Remarques:

- C'est équivalent à dire  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0$
- Si  $u_0 = 0$  alors la suite est nulle.
- Si  $u_0 \neq 0$  alors l'étude de la suite est ramenée à l'étude de  $a^n$  à une constante multiplicative près.

### étude de $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Si  $a > 1$  alors  $\exists h \in \mathbb{R}^{+*}, a = 1 + h$

$$\text{De plus, } (h+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$$

$$\text{En particulier, } (1+h)^n \geq nh$$

$$\text{Or par minoration, } a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

- Si  $a = 1$  alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire à 1.

- Si  $a = -1$  alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

- Si  $-1 < a < 1$  alors  $|a|^n = \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$

$$\text{et } \frac{1}{|a|^n} > 1 \text{ donc d'après le premier point, } \frac{1}{|a|^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{D'où } |a|^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{Ainsi, comme } |a|^n = |a^n|, a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

- Si  $a < -1$  alors  $|a|^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $a^n$  change de signe en fonction de la parité de  $n$ .

Donc  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

### Définition 1.0.2

On appelle série géométrique toute suite de terme général:

$$\begin{cases} u_n = \sum_{k=0}^n a^k \\ n \in \mathbb{N} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Étude de  $u_n$** 

- Si  $a = 1$  alors  $u_n = n + 1$  et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- Si  $a \neq 1$  alors  $u_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ 
  - Si  $-1 < a < 1$  alors  $a^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$   
Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
  - Si  $1 < a$  alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
  - Si  $a < -1$  alors  $u_n$  diverge.

**2 Exemples de comparaison**

Soit  $u$  une suite à termes positifs.

- Si  $\exists K \in ]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \leq K u_n$   
Alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Si  $\exists K \in ]1, +\infty[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \geq K u_n$   
Alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

**3 Echelle de comparaison**

Par ordre de négligeabilité:

$$a^n \left| \begin{array}{c} (\ln(n))^\alpha \\ 0 < \alpha \end{array} \right| n^\beta \left| \begin{array}{c} n! \\ 0 < \beta \end{array} \right| n^n$$