# Fonctions Usuelles Fonctions Exponentielles

## MPSI 2

#### Definition 0.0.1

- La fonction exponentielle est l'application reciproque de ln, notee exp.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$ , la fonction exponentielle en base a est l'application reciproque de  $log_a$ . On note  $exp_e = exp$

## Propriete 0.0.1

- exp realise une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ exp'_a(x) = ln(a) \ exp_a(x)$
- $exp_a$  est de classe  $C^{\infty}$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Par le theoreme des fonctions reciproques.
  - Par reccuerence.

## Valeurs remarquables:

- $exp_a(0) = 1$
- $exp_a(1) = a$

#### Propriete 0.0.2

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ exp_a(x+y) = exp_a(x) \ exp_a(y)$
- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\})^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $exp_{ab}(x) = exp_a(x) \ exp_b(x)$

Application de log aux quantites:

1/ Soit a et b deux reels:

$$log_a(exp_a(x+y)) = x + y$$
  

$$log_a(exp_a(x) exp_a(y)) = log_a(exp_a(x)) + log_a(exp_a(y))$$
  

$$= x + y$$

Les deux quantites sont egales et **log est bijective** donc:  $exp_a(x+y) = exp_a(x) \ exp_a(y)$ 

2/ On utilise  $log_{ab}$ 

$$log_{ab}(x) = x$$

$$log_{ab}(exp_a(x \ exp_b(x)) = log_{ab}(exp_a(x)) + log_{ab}(exp_b(x))$$

$$= \frac{ln(a)}{ln(ab)}x + \frac{ln(b)}{ln(ab)}x$$

$$= \frac{ln(a) + ln(b)}{ln(ab)}x$$

Les deux quantites sont egales, donc:

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\})^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ exp_{ab}(x) = exp_a(x) \ exp_b(x)$$

Remarques

- $exp_a(x) = exp(x ln(a))$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ a^x = exp_a(x)$ D'ou les proprietes classiques sur les exposants