Dénombrements
Opérations sur les cardinaux
MPSI 2

Propriété 0.0.1
Soit E et F deux ensembles finis de cardinal n et p respectivement.
Alors $E \times F$ est fini et son cardinal est $n\,p$

Remarque: On démontre par récurrence le cardinal de $E_1 \times ... \times E_n$

Soit deux applications bijectives f et g telles que $f : [\![1,n]\!] \to E$ et $g : [\![1,p]\!] \to F$

Soit $\phi \colon \begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & E \times F \\ (i,j) & \longmapsto & (f(i), g(j)) \end{array}$

ϕ réalise une bijection de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ sur $E \times F$ car f et g sont bijectives.

Reste a construire une bijection de $[\![1,n\,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

Soit $\psi \colon \begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & [\![1,n\,p]\!] \\ (i,j) & \longmapsto & (i-1)p + j \end{array}$

Montrons que ψ est bijective.

Application réciproque.

Soit $k \in [\![1,n\,p]\!]$

<u>1$^{\text{er}}$ cas:</u> $p|k$

Donc $\exists q \in [\![1,n]\!],\ k = q\,p$

Alors $i = q$ et $j = p$.

<u>2$^{\text{ème}}$ cas:</u> k n'est pas multiple de p.

Division euclidienne de k par p:

$\exists (q,r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} k = q\,p + r \\ 0 \leqslant r < p \end{cases}$

Alors $i = q + 1$ et $j = r$

D'après ces résultats, soit $\gamma \colon \begin{array}{rcl} [\![1,n\,p]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} (q,p) & \text{si } k = q\,p \\ (q+1,p) & \text{si } k = qp + r \text{ et } r \neq 0 \end{cases} \end{array}$

On vérifie que : ψ est a valeurs dans $[\![1,n\,p]\!]$

γ est a valeurs dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

$\psi \circ \gamma = \mathrm{Id}_{[\![1,n\,p]\!]}$ et $\gamma \circ \psi = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$

Conclusion: $\phi \circ \gamma$ réalise une bijection de $[\![1,n\,p]\!]$ sur $E \times F$, d'où $E \times F$ est un ensemble fini de cardinal $n\,p$ $\square$

Propriété 0.0.2
Soit A et B deux sous-ensembles finis et disjoints d'un ensemble E.
Alors $A \cup B$ est fini et card$(A \cup B) =$ card$(A) +$ card(B)

Corollaire 0.0.1
Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints d'un ensemble E.
Alors $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (A_i)$ est fini et card$(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (A_i)) = \sum\limits_{k=1}^{n}$ card(A_i)

Corollaire 0.0.2
Soit A et B deux sous-ensembles finis d'un ensemble E.
Alors $A \cup B$ est fini et card$(A \cup B) =$ card$(A) +$ card$(B) -$ card$(A \cap B)$

Il existe deux bijections: $f : [\![1,n]\!] \to A$ et $g : [\![1,p]\!] \to B$
Soit ϕ: $[\![1,n+p]\!] \longrightarrow A \cup B$

$$i \longmapsto \begin{cases} f(i) & \text{si } i \in [\![1,n]\!] \\ g(n-i) & \text{si } i \in [\![n+1,n+p]\!] \end{cases}$$

ϕ est bien définie, car f l'est sur $[\![1,n]\!]$, et g sur $[\![1,p]\!]$.
ϕ est a valeurs dans $A \cup B$ car f est a valeurs dans A et g dans B.

Montrer que ϕ réalise une bijection de $[\![1,n+p]\!]$ sur $A \cup B$.
- ϕ est surjective car f et g le sont.
- Montrer que ϕ est injective.
  Soit $(i,i') \in [\![1,n+p]\!]^2$ tel que $\phi(i) = \phi(i')$
  <u>1^er^ cas:</u> $f(i) = f(i')$
  Alors $i = i'$ car f est injective.
  <u>2^ème^ cas:</u> $g(i-n) = g(i'-n)$
  Alors $i = i'$ car g est injective.
  <u>3^ème^ cas:</u> $f(i) = g(i-n)$
  Impossible car f est a valeurs dans A et g dans B et $A \cap B = \varnothing$

$\square$

Par récurrence. $\square$

Soit A et B deux ensembles finis de E.
On considère $D = C_B\ A \cap B$
Donc $A \cup B = A \cup B$
$B = (A \cap B) \cup D$ et cette réunion est disjointe.
Donc $\text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(D)$
D'où $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ $\square$

Propriété 0.0.3
Formule du crible ou de Poincaré
Soit $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille d'ensembles finis.
$$card\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} card\left(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}\right)$$

Propriété 0.0.4
Soir E, F deux sous-ensembles tels que F soit fini.
Soit $f : E \to F$ une application telle que $\exists r \in \mathbb{N}^*,\ \forall y \in F,\ card(f^{-1} < \{y\} >) = r$
Alors E est fini et $card(E) = r \times card(F)$

Montrons que $(f^{-1} < \{y\} >)_{y \in F}$ est une partition de E

- $\forall y \in F,\ f^{-1} < \{y\} > \subset E$ et $f^{-1} < \{y\} > \neq \varnothing$

- Si y et y' deux éléments distincts de F, alors $f^{-1} < \{y\} > \cap f^{-1} < \{y'\} >= \varnothing$
  En effet, supposons $f^{-1} < \{y\} > \cap f^{-1} < \{y'\} > \neq \varnothing$
  Soit x_0 un élément de E tel que $x_0 \in f^{-1} < \{y\} > \cap f^{-1} < \{y'\} > \neq \varnothing$
  Donc $f(x_0) = y$ et $f(x_0) = y'$, d'où $y = y'$ car f est une application.
  Conclusion: $\forall (y, y') \in F^2,\ f^{-1} < \{y\} > \cap f^{-1} < \{y'\} > \neq \varnothing \Rightarrow y = y'$

- Montrer que $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1} < \{y\} >$
  - $\bigcup_{y \in F} f^{-1} < \{y\} > \subset E$
    Par réunions de sous-ensembles de E.
  - Montrer que $E \subset \bigcup_{y \in F} f^{-1} < \{y\} >$
    C'est à dire $\forall x \in E,\ existsy \in F,\ x \in f^{-1} < \{y\} >$
    Soit x un élément de E. Posons $y = f(x)$
    f est a valeurs dans F donc $y \in F$ et $y = f(x)$
    Ceci est vrai pour tout x de E, donc $E \subset \bigcup_{y \in F} f^{-1} < \{y\} >$

  Donc $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1} < \{y\} >$

Conclusion: $(f^{-1} < \{y\} >)_{y \in F}$ est une partition de E de sous-ensembles deux à deux disjoints.

Donc, sachant les sous-ensembles disjoints et finis, on a:

- E est un ensemble fini.
- $$\begin{aligned} \mathrm{card}(E) &= \mathrm{card}\left(\bigcup_{y \in F} f^{-1} < \{y\} >\right) \\ &= \sum_{y \in F} \mathrm{card}\left(f^{-1} < \{y\} >\right) \\ &= \sum_{y \in F} r \\ &= r \times \mathrm{card}(F) \end{aligned}$$

$\square$