

Complexes

Applications Geometriques des Complexes

MPSI 2

1 Modules et Arguments

Soit A, B et M trois points du plan deux a deux distincts d'affixe respectives a, b et z .

- $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{\| \vec{AM} \|}{\| \vec{BM} \|} = \frac{AM}{BM}$

- Soit r un reel strictement positif :

$\{z \in \mathbb{C}, |z-a| = r\}$ est le cercle de centre A et de rayon r

$\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ est le disque ouvert de centre A et de rayon r

- $\arg \left(\frac{z-a}{z-b} \right) \equiv \arg(z-a) - \arg(z-b) \quad [2\pi]$
 $\equiv \text{mes}(\vec{i}, \vec{AM}) - \text{mes}(\vec{i}, \vec{BM}) \quad [2\pi]$
 $\equiv \text{mes}(\vec{BM}, \vec{AM}) \quad [2\pi]$
 $\equiv \text{mes}(\vec{MB}, \vec{MA}) \quad [2\pi]$

2 Interpretation geometrique des operations dans \mathbb{C}

- $z \mapsto z + b$
Notons M l'image affine de z
 M' l'image affine de z'
 B l'image affine de b

$$\begin{aligned} z' = z + b &\iff z' - z = b \\ &\iff \vec{MM'} = \vec{OB} \end{aligned}$$

Translation par le vecteur \vec{OB} .

- $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}$

Cas 1 : $a \in \mathbb{R}^*$

$$z' = az \iff \vec{OM'} = a\vec{OM}$$

M' est l'image de M par l'homothetie de centre \mathcal{O} et de rapport $|a|$.

Cas 2 : $|a| = 1 \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, a = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z' = az &\iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') \equiv \arg(a) + \arg(z) \quad [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \vec{OM'} = \vec{OM} \\ \text{mes}(\vec{OM}, \vec{OM'}) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

M' est l'image de M par la rotation de centre \mathcal{O} et d'angle de mesure θ .

Cas 3 : $a \in \mathbb{C}^*$

M' est l'image de M par la similitude de centre \mathcal{O} , de rapport $|a|$ et d'angle de mesure θ .

Retour sur l'équation $z^n = a$

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k \\ z &\longmapsto z_0 \times z \end{aligned}$$

Les images affines des solutions de $z^n = a$ sont les images par la similitude de centre \mathcal{O} , de rapport $\rho_0^{\frac{1}{n}}$ et d'angle de mesure $\frac{\alpha}{n}$ des images affines des racinesⁿ de l'unité.

Plus généralement

- L'homothétie de centre \mathcal{A} et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est la transformation du plan affine qui a un point M associe le point M' tel que $\vec{AM}' = \lambda \vec{AM}$.
Expression analytique de l'homothétie :

$$\begin{aligned} \vec{AM}' = \lambda \vec{AM} &\iff \begin{cases} x' - x_0 = \lambda(x - x_0) \\ y' - y_0 = \lambda(y - y_0) \end{cases} \\ &\iff z' - a = \lambda(z - a) \\ &\iff z' = \lambda(z - a) + a \end{aligned}$$

- La rotation de centre \mathcal{A} et d'angle de mesure θ est la transformation du plan affine qui a un point M associe le point M' :

$$\begin{cases} AM = AM' \\ \arg(\vec{AM}, \vec{AM}') \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z - a| = |z' - a| \\ \arg(z' - a) \equiv \arg(z - a) + \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

- $z' = az + b \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2, b \neq 0$

Recherche de points fixes : $z_0 = az + b$

$$z = az + b \iff (a - 1)z = -b$$

Cas 1 : $a = 1 \Rightarrow 0 = -b$

On a $b \neq 0$, donc il n'y a pas de points fixes.

Cas 2 : $a \neq 1$

$$\begin{aligned} z = az + b &\iff z = \frac{-b}{a - 1} \\ &= \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Il existe un unique point fixe $x_0 = \frac{b}{1-a}$.

$$\begin{cases} z' = az + b \\ z_0 = az_0 + b \end{cases} \iff z' - z_0 = a(z - z_0)$$

\Rightarrow Similitude de centre z_0 , de rapport $|a|$ et d'angle de mesure $\arg(a)$.