Espaces Vectoriels
de Dimension finie
Espaces Vectoriels

MPSI 2

1 Structure d'espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.0.1
E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si:
- $(E, +)$ *est un groupe ablien.*
- $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ *est un loi interne telle que:*

  $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$

  $\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:
  - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
  - $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Rgles de calcul dans un espace vectoriel:
- $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$
- $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$
- $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

2 Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$, soit F un sous-ensemble non vide de E.

Définition 2.0.2
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si il est stable par les lois de E et si, muni des restrictions de ces lois, F est un $\mathbb{K}_{EV}$

Critres de S_{EV}
- Critre 1: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par les lois de E.
  - $0_E \in F$
  - $\forall (x,y) \in F^2,\ x + y \in F$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$
- Critre 2: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par combinaison linaire.
  - $0_E \in F$
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$