Fonctions Usuelles
Fonctions Hyperboliques

MPSI 2

1 Cosinus hyperbolique et Sinus hyperbolique

Définition 1.0.1
On appelle cosinus et sinus hyperboliques les parties paires et impaires de l'exponentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch\left(x\right) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad et \quad sh\left(x\right) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

1.1 Parties paires et impaires d'une fonction

Propriété 1.1.1
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application definie sur $\mathbb{R}$ et a valeurs reelles.
Alors il existe un unique couple d'applications definies sur $\mathbb{R}$ et a valeurs dans $\mathbb{R}$, (g,h), telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f\left(x\right) = g\left(x\right) + h\left(x\right) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

L'application g s'appelle la partie paire de f et h la partie impaire de f.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application fixee.

① Supposons qu'il existe deux applications definies sur $\mathbb{R}$ a valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que:

$$\begin{cases} f\left(x\right) = g\left(x\right) + h\left(x\right) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Alors pour x reel,

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= g\left(x\right) + h\left(x\right) \\ f\left(-x\right) &= g\left(x\right) - h\left(x\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $g\left(x\right)$ et $h\left(x\right)$ verifient :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = g\left(x\right) + h\left(x\right) \\ f\left(-x\right) = g\left(x\right) - h\left(x\right) \end{cases}$$

Donc : $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Conclusion 1 :

Si g et h existent, alors :

$$g \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad h \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{array}$$

Conclusion 2 :

En particulier, si g et h existent, alors ils sont uniques.

② On considere g et h les deux applications definies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Montrer que g et h verifient :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Pour x reel :

- $g(x) + h(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} + \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$
  $= \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x)\right)$
  $= f(x)$
- $g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$
  $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$

Ceci etant valable pour tout x reel, on conclut que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Conclusion Generale :

Il existe un unique couple d'application (g, h) tel que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

$\square$

Retour aux fonctions hyperboliques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch\left(x\right) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh\left(x\right) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

D'apres la propriete precedente, ch est paire et sh est impaire.

Propriété 1.1.2

- $\forall x \in \mathbb{R}, ch\left(x\right) \geq 0$
- *ch et sh sont deux applications definies sur* $\mathbb{R}$ *et :* $ch' = sh$
  $sh' = ch$
- *ch et sh sont deux fonctions de classe* $\mathscr{C}^{\infty}$ *sur* $\mathbb{R}$

Etude de sh :

x	0		$+\infty$
$ch\left(x\right)$	1	$+$	
$sh\left(x\right)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Etude de ch :

x	0		$+\infty$
$sh\left(x\right)$	0	$+$	
$ch\left(x\right)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Propriété 1.1.3
Pour tout x *dans* $\mathbb{R}$ *:*
- $ch\left(x\right) + sh\left(x\right) = e^{x}$
- $ch\left(x\right) - sh\left(x\right) = e^{-x}$
- $ch^{2}\left(x\right) - sh^{2}\left(x\right) = 1$

2 Tangente hyperbolique

Définition 2.0.1
La fonction tangente hyperbolique est definie par $th = \frac{sh}{ch}$.
C'est une application definie sur $\mathbb{R}$ *car* $ch > 0$ *sur* $\mathbb{R}$.
On a, pour tout x *reel,*

$$\begin{aligned} th(x) &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \\ &= \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \end{aligned}$$

Etude de th :

x	0		$+\infty$
$th'(x)$	1	$+$	
$th(x)$	0	$\nearrow$	1

3 Fonctions circulaires reciproques

3.1 arcsinus et arccosinus

sin est definie continue strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
Donc sin realise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 3.1.1
La fonction arcsinus est la fonction reciproque de $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$.

$$\begin{aligned} \arcsin\colon [-1,1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

cos est definie continue strictement decroissante sur $[0, \pi]$ et $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$.
Donc cos realise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 3.1.2
La fonction arccosinus est la fonction reciproque de $\cos_{|[0,\pi]}$.

$$\begin{aligned} \arccos\colon [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longmapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Remarques :
- $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta$
- Si α appartient a $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\alpha)) = \pi - \alpha$
- $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$
- $\forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta$
- Si α appartient a $[-\pi, 0], \arccos(\cos(\alpha)) = -\alpha$
- Pour x dans $[-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- Pour x dans $[-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.2 arctangente

tan realise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.1
La fonction arctangente est la fonction reciproque de $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$.

$$\begin{aligned} \arctan\colon [-1,1] &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\longmapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

Remarques :
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$
- $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta$
- Pour x reel, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$