

# Fonctions Usuelles

## Fonctions Logarithme

### MPSI 2

## 1 Logarithme Neperien

### Définition 1.0.1

Le logarithme neperien est l'unique primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  qui s'annule en 0:

$$\begin{aligned} \ln: \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

### Propriété 1.0.1

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

On considere l'application  $h: \mathbb{R}^{+*2} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x; y) \longmapsto \ln(xy)$$

Soit  $y \in \mathbb{R}^{+*}$  fixe.

Soit  $h_y$  l'application dfinie par  $h_y: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$X \longmapsto \ln(xy)$$

$h_y$  est derivable car  $\ln$  est derivable,  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h'_y = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \ln$  et  $h_y$  sont des primitives de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ , donc elles different d'une constante.

$$\begin{aligned} \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h_y(x) &= \ln(x) + K \\ \iff h_y(x) - \ln(x) &= K \\ \iff h_y(1) - \ln(1) &= K \\ \iff \ln(y) &= K \end{aligned}$$

**Conclusion:**  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h_y(x) = \ln(x) + \ln(y)$

Or, ce raisonnement est valable pour tout  $y$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ , donc:

**Conclusion Generale:**  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*2}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

□

**Corollaire 1.0.1**

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n \ln(x)$

**Propriété 1.0.2**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

1/ Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $U_n = 2^n$ .

$$\ln(U_n) = n \ln(2)$$

**Donc:**  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \ln(U_n) > A$

2/ De plus,  $\ln$  est croissante, donc si  $x \geq U_{n_0}$ , alors:

$$\ln(x) \geq \ln(U_{n_0}) > A$$

Posons  $x_0 = U_{n_0}$

**Donc:**  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, x \geq x_0 \implies \ln(x) > A$

**Donc:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

3/ En  $-\infty$ :

$$\begin{cases} \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ , donc par composition de limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

□

**Propriété 1.0.3**

- $\ln$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}$ . (Th de la bijection)
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$ , par définition.
- $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  (Par récurrence)

## 2 Logarithme en base $a$

### Définition 2.0.2

Soit  $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$

Le logarithme en base  $a$  est l'application définie par:

$$\begin{aligned} \log_a: \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

- Si  $a = 10$ ,  $\log_a$  est noté  $\log$
- On note  $e$  l'unique réel tel que  $\log_e = \ln$

### Propriété 2.0.4

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
- Si  $a > 1$ ,
  - $\log_a$  est croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty$
- Si  $0 < a < 1$ ,
  - $\log_a$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$
  - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty$
- $\log_a$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^{+*}$  sur  $\mathbb{R}$