

Fonctions Numériques

Limites de fonctions

MPSI 2

1 Définitions

Définition 1.0.1

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité de I .

Soit $l \in \mathbb{R}$

• $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Définition 1.0.2

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $x_0 \in I$ ou x_0 est une extrémité de I .

• $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 :

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$$

• $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 :

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < K$$

Propriété 1.0.1

Si $x_0 \in I$, alors la seule limite éventuelle de $f(x)$ en x_0 est $f(x_0)$

On suppose qu'il existe l dans \mathbb{R} , tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

HA $l \neq f(x_0)$

① $l \in \mathbb{R}$

Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Supposons $l > f(x_0)$

Posons $\varepsilon = \frac{l - f(x_0)}{2}$

Alors $f(x_0) \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Soit α vérifiant les conditions de limites.

Donc $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

On a donc une contradiction.

② $l = +\infty$

Alors $\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$

Soit K un réel strictement supérieur à $f(x_0)$

Soit α un réel vérifiant les condition de limites.

Donc $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$

En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) > K$

On a donc une contradiction.

③ $l = -\infty$

On procède de même.

Conclusion: $l = f(x_0)$

□

Définition 1.0.3

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) > K$$

Propriété 1.0.2

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que x_0 soit un élément de I ou une extrémité de I .

Soit $(l, l') \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Si f admet l et l' comme limite en x_0 , alors $l = l'$

Notations: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = l$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}]{} l$

Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$

① : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

② : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$

Supposons $l \neq l'$, et $l > l'$

Posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$

On a donc $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\cap]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[= \emptyset$

Soit α_1 et α_2 vérifiant ① et ②.

Soit $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$

Alors $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - l'| < \varepsilon)$

Autrement dit: $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\cap]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[$

On a donc une contradiction.

Conclusion: $l = l'$

□

Remarques:

- Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} l \iff f(x) - l \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} 0$
- Soit $l \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} l \iff \frac{f(x)}{l} \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} 1$
- Soit $x_0 \in I$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} l \iff f(x_0 + h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{x_0 + h \in I} l$

Propriété 1.0.3

On suppose que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $x_0 \in I$.

- Si $f(x) \in [a, b]$ au voisinage de x_0 , alors $l \in [a, b]$.
- Au voisinage de x_0 : $l - 1 < f(x) < l + 1$
- Si $l \neq 0$ alors au voisinage de x_0 : $\frac{|l|}{2} < |f(x)| < \frac{3|l|}{2}$

1^{er} point dans le cas où $x_0 = +\infty$

Donc ①: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On suppose $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) \in [a, b]$

Montrer que $l \in [a, b]$

HA $l \notin [a, b]$. Donc $l < a$ ou $l > b$.

- Si $l < a$

Soit $\varepsilon = a - l$ (car $l < a$)

Donc ②: $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) \in]2l - a, a[$

Soit k_1 et k_2 deux réels vérifiant ① et ②.

On pose $k = \min\{k_1, k_2\}$

D'après ① et ②: $\forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) \in]2l - a, a[\cap [a, b]$

Or, $]2l - a, a[\cap [a, b] = \emptyset$

On a donc une contradiction.

- Si $l > b$, on procède de même.

On conclut que $l \in [a, b]$

2^{ème} point: On revient aux définitions avec $\varepsilon = 1$

3^{ème} point: On revient aux définitions et on prend $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$

□

Propriété 1.0.4

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$, avec $l \in \mathbb{R}$,
Alors f est bornée au voisinage de x_0 .
- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$, avec $l \in \mathbb{R}^*$,
Alors $|f(x)|$ est minoré par un nombre strictement positif au voisinage de x_0 .
- Si $f(x)$ est de signe constant au voisinage de $+\infty$, et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$,
Alors l est du même signe.

Utilisation des propriétés précédentes. □

Définition 1.0.4

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit $x_0 \in I$.

On note $I^+ = I \cap]x_0, +\infty[$ et $I^- = I \cap]-\infty, x_0[$

- On appelle limite à droite de $f(x)$ en x_0 la limite finie, si elle existe, de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 sur I^+
- On appelle limite à gauche de $f(x)$ en x_0 la limite finie, si elle existe, de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 sur I^-

Notations: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I^+}} f(x) = f(x_0^+)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I^-}} f(x) = f(x_0^-)$

Propriété 1.0.5

Soit $x_0 \in I$

- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$, alors $f(x_0^+) = f(x_0^-) = l$.
- Si $f(x)$ admet une limite à droite et à gauche en x_0 , et si $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$,
Alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$.

1^{er} point: On suppose $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Alors: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Et: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Donc $f(x)$ admet une limite à droite et à gauche en x_0 , et $f(x_0^+) = f(x_0^-) = l$

2^{ème} point: On suppose que $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé.

On a: $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Et: $\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Soit α_1 et α_2 deux tels réels.

Soit $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$

D'où: $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Par ailleurs, pour $x = x_0$: $|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Donc: $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ce raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on conclut que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$

□

2 Limites et continuité

Définition 2.0.5

Soit I un intervalle non vide.

Soit f une fonction numérique définie sur I .

Soit x_0 un élément de I .

On dit que f est continue en x_0 si:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Remarque: on peut prolonger certaines fonctions par continuité.

3 Limite de fonction et convergence de suites

Propriété 3.0.6

Caractérisation séquentielle de la limite

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit x_0 et l deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$

On a équivalence entre:

- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$
- Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0 , $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

- On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$.

Donc ① : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers x_0 .

Montrer que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

Soit ε un réel strictement positif.

Soit α un réel vérifiant ① pour ε .

De plus, (x_n) converge: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \alpha$

Soit n_0 un tel entier.

D'où: $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|x_n - x_0| < \alpha) \Rightarrow (|f(x_n) - l| < \varepsilon)$

Donc $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

C'est vrai pour toute suite d'éléments de I convergeant vers x_0 ,

Donc la proposition 2 est vérifiée.

- On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0 , on ait: $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

HA Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers l quand x tend vers x_0

Alors $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in I, |x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

Soit ε un tel rel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha = \frac{1}{n}$: $\exists x \in I, |x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

Soit x_n un tel rel.

On procède de même pour tout n de \mathbb{N}^* . On construit donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

On a: • $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de I

• $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers x_0

• $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers l

On contredit l'hypothèse de départ, donc HA est fausse.

Donc $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

□

4 Liens entre notion de limite et de monotonie

Propriété 4.0.7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application monotone sur I .

Alors $f(x)$ admet une limite à droite et à gauche en tout point de I .

Soit x_0 un élément de I qui ne soit pas une extrémité de I

□