

# Dénombrements

## Propriétés des coefficients binomiaux

### MPSI 2

#### Propriété 0.0.1

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

#### Propriété 0.0.2

*Triangle de Pascal*

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$

#### Propriété 0.0.3

*Généralisation du triangle de Pascal*

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

#### Propriété 0.0.4

*Formule du binôme*

Soit  $A$  est un anneau, et  $a$  et  $b$  deux éléments de  $A$  qui commutent.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{Alors } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Propriété 0.0.5****Formule de Vandermonde**

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k}$$

—  $\binom{n+m}{p}$  est le coefficient du terme de degré  $p$  dans  $(1+x)^{n+m}$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+m} &= (1+x)^n (1+x)^m \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket \times \llbracket 0,m \rrbracket} \binom{n}{i} \binom{m}{j} x^i x^j \end{aligned}$$

On veut procéder par identification, on réécrit donc la somme :

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+m} &= \sum_{p=0}^{n+m} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} x^p \\ &= \sum_{p=0}^{n+m} \left( \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} \right) x^p \end{aligned}$$

D'où le coefficient du terme de degré  $p$ .

N.B. Les termes limites de la somme sont nuls.

□