

Fonctions Usuelles

Fonctions Puissance

MPSI 2

1 Définition

1.1 Définition

Definition 1.1.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

f_α s'appelle la fonction puissance α

Propriete 1.1.1

Pour tout (x, y) strictement positifs, pour tout (α, β) reels:

- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

1.2 Etude de f_α

Derivabilite f est derivable par composee de fonctions derivables

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln(x)) \\ &= \alpha \exp((\alpha - 1) \ln(x)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Etude des limites

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x))$$

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$

De quelle maniere f_α tend-t-elle vers $+\infty$?

$$\text{On etudie } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$$

$$\text{Or } \frac{f_\alpha(x)}{x} = \exp((\alpha - 1) \ln(x))$$

$$- \text{ Si } 0 < \alpha < 1 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = 0,$$

Donc \mathcal{C}_{f_α} admet une **branche parabolique de direction asymptotique Oy**

$$- \text{ Si } 1 < \alpha \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = 0,$$

Donc \mathcal{C}_{f_α} admet une **branche parabolique de direction asymptotique Ox**

Etude en 0

- Si $\alpha < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = +\infty$
- Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$

Dans ce cas, notons \tilde{f}_α l'application définie sur \mathbb{R} par:

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

D'après le taux d'accroissement:

- Si $\alpha > 1$, $\tilde{f}'_\alpha(0) = 0$, donc $\mathcal{C}_{\tilde{f}_\alpha}$ admet une demi-tangente d'équation $y = 0$
- Si $0 < \alpha < 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \exp((\alpha - 1)\ln(x)) = +\infty$, donc $\mathcal{C}_{\tilde{f}_\alpha}$ admet une demi-tangente d'équation $x = 0$

2 Fonctions Puissance Vs. Fonctions racinesⁿ

- Soit n un entier **pair** non nul

$$g_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^n$$

g_n réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+

Son application réciproque s'appelle la fonction **racineⁿ** : $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

- Soit n un entier **impair** non nul

$$g_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^n$$

g_n réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}

Son application réciproque s'appelle la fonction **racineⁿ** : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

- Par ailleurs, pour tout n entier naturel non nul, $f_{\frac{1}{n}}$ est l'application réciproque de

$$f_n: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

Donc par unicité de la réciproque on peut écrire: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

3 Theoreme de comparaison**Propriete 3.0.1**

Soient α et β deux reals strictement positifs.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\exp(x))^\alpha}{x^\beta} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (\exp(x))^\alpha = 0$

- Pour $t \geq 1$, on a: $0 < \sqrt{t} \leq t$

$$0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Donc pour $x \geq 1$ on a:
$$0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq 2 \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\iff 0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$

$$\iff 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x} - 2}{x}$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

- Soient α et β deux reels strictement positifs. Pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} &= \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta \\ &= \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha} \ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta \\ &= \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^\beta \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta \end{aligned}$$

de plus:

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$$

$$- \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$- \lim_{u \rightarrow 0} u^\beta = 0$$

Donc par composees de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$

- Passage a l'exponentielle et passage a l'inverse.
- etc.

□