Relations Binaires
Relations d'ordre
MPSI 2

1 Définition

Soit E un ensemble non vide.
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Définition 1.0.1
$\mathcal{R}$ est une <u>relation d'ordre</u> sur E si:
- *$\mathcal{R}$ est réflexive.*
- *$\mathcal{R}$ est antisymétrique:* $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \Rightarrow (x = y)$
- *$\mathcal{R}$ est transitive.*

Notations: $x \,\mathcal{R}\, y$, $x \leq y$
Se note aussi $x \preccurlyeq y$

Définition 1.0.2
Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

- *On dit que l'ordre est <u>total</u> si deux éléments de E sont toujours en relation:* $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \preccurlyeq y) \text{ ou } (y \preccurlyeq x)$.
- *Sinon, on dit que l'ordre est partiel.*

Définition 1.0.3
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
- *$m \in E$ est le <u>plus petit élément</u> de E si:* $\forall x \in E,\ m \preccurlyeq x$
- *$M \in E$ est le <u>plus grand élément</u> de E si:* $\forall x \in E,\ x \preccurlyeq M$

Définition 1.0.4
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
- *$m \in E$ est un <u>élément minimal</u> de E si:*
  $\forall x \in E,\ (x \preccurlyeq m) \Rightarrow (x = m)$
- *$M \in E$ est un <u>élément maximal</u> de E si:*
  $\forall x \in E,\ (M \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = M)$

Définition 1.0.5
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
Soit A un sous-ensemble de E
- *$\alpha \in E$ est un <u>minorant de A dans E</u> si:*
  $\forall x \in E,\ (x \in A) \Rightarrow (\alpha \preccurlyeq x)$
- *$\beta \in E$ est un <u>majorant de A dans E</u> si:*
  $\forall x \in E,\ (x \in A) \Rightarrow (x \preccurlyeq \beta)$

2 Ordre naturel sur $\mathbb{N}$

Définition 2.0.6
$\forall (x, y) \in \mathbb{N},\ x \leqslant y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x + n$

C'est un ordre total de plus petit élément 0.

Propriété 2.0.1
Propriété caractéristique de $\mathbb{N}$:
Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Corollaire 2.0.1
Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$.
On considère B l'ensemble des majorants de A.
$B = \{x \in \mathbb{N},\ \forall a \in A, x \geqslant a\}$
A est majoré donc B est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.
D'après la propriété caractéristique de $\mathbb{N}$ B admet un plus petit élément que l'on note α

On a: $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{N} \\ \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \end{cases}$

Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$
<u>HA</u>: $\alpha \notin A$
Alors $\forall x \in A,\ a < \alpha$
Ou encore, puisque α est entier: $\forall a \in A,\ a \leqslant \alpha - 1$
On a donc $\alpha - 1$ entier naturel et $\alpha - 1$ majorant de A.

Donc $\alpha \in B$ et $\alpha - 1 < \alpha$, ce qui contredit α plus petit élément de B.

Donc $\alpha \in A$
Conclusion: α est le plus grand élément de A. $\square$

Corollaire 2.0.2
Principe de récurrence

Soit P une proposition portant sue les entiers naturels.
Soit $P(n)$ le prédicat associé a n.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ [P(n_0)\ \textit{et}\ (\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(n)]$$

$\underline{\mathrm{H}_1}$: Soit n_0 un entier naturel tel que $(\underline{\mathrm{H}'_1})$ $P(n_0)$ et $(\underline{\mathrm{H}''_1})$ $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(n)$
On considère l'ensemble E, ensemble des $n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0$ et $\neg P(n))$
Montrer que $E = \varnothing$
<u>HA</u>: Supposons E non vide.
D'après la propriété caractéristique, E admet un plus petit élément, poté p_0.
p_0 vérifie: $p_0 \in \mathbb{N}$
$p_0 \geqslant n_0$
$P(p_0)$ est Faux
Par ailleurs, $P(n_0)$ est Vrai, donc $p_0 > n_0$, ou encore $p_0 - 1 \geqslant n_0$
Or, $p_0 > p_0 - 1$, donc $p_0 - 1$ n'est pas dans E, donc $P(p_0 - 1)$ est Vrai.
D'après H''_1, avec $n = p_0 - 1$, $P(p_0)$ est Vrai, ce qui est en contradiction avec HA.
Donc HA est fausse, $E = \varnothing$
Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(n)$ $\square$

3 Ordre sur $\mathbb{R}$

Ordre sur $\mathbb{R}$: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$. Il est total.

Propriété 3.0.2
$(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ *est un <u>corps totalement ordonné</u>.*

- $(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe commutatif car:*
  $+$ *est associative:* $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + (y + z) = (x + y) + z$
  $+$ *admet in élément neutre:* $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = x$

$+$ octroie un élément symétrique: $-x$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ x+(-x)=0$)
$+$ est commutative: $\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ x+y=y+x$

- *$(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif car:*
  $\times$ est associative: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
  $\times$ admet in élément neutre: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 1 = x$
  $\times$ octroie un élément symétrique: $\frac{1}{x}$ (car $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times \frac{1}{x} = 1$)
  $\times$ est commutative: $\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ xy = yx$
- *La relation d'ordre est compatible avec les opérateurs:*
  $\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \text{ et } x' \leqslant y') \Rightarrow (x+x' \leqslant y+y')$
  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ (x \leqslant y) \Rightarrow (z\,x \leqslant z\,y)$

Définition 3.0.7
Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

- *Soit A une partie de E non vide et majorée, B l'ensemble des majorants de A.*
  $B = \{x \in E,\ \forall a \in E,\ (a \in A \Rightarrow a \leqslant x)\}$
  On appelle <u>borne supérieure de A</u> le plus petit élément de B (lorsqu'il existe).
- *Soit A une partie de E non vide et minorée, B l'ensemble des minorants de A.*
  $B = \{x \in E,\ \forall a \in E,\ (a \in A \Rightarrow a \geqslant x)\}$
  On appelle <u>borne inférieure de A</u> le plus grand élément de B (lorsqu'il existe).

Notation: $Sup(A)$, $Inf(A)$

Propriété 3.0.3
Propriété caractéristique de $\mathbb{R}$:

- *Propriété de la borne supérieure:*
  Tout ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- *Propriété de la borne inférieure:*
  Tout ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque: Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (minorée), et α sa borne supérieure (inférieure).
α est caractérisé par:
- α est un majorant (minorant) de A
- si β est strictement inférieur (supérieur) a α, il n'est pas majorant (minorant) de A

- **Critère 1:** α est la borne supérieure de A si et seulement si:
  $$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \leqslant \alpha \\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ (\beta \leqslant \alpha) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R},\ x \in A \text{ et } \beta < x \leqslant \alpha) \end{cases}$$
- **Critère 2:** α est la borne supérieure de A si et seulement si:
  $$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \leqslant \alpha \\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in \mathbb{R},\ (x \in A \text{ et } x - \epsilon < x \leqslant \alpha) \end{cases}$$

Corollaire 3.0.3
$\mathbb{R}$ *est* *Archimédien:* $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ n > x)$

Corollaire 3.0.4
$\forall (a,b) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\, a > b$

Corollaire 1:
Soit x un réel positif.
On considère $A = \{n \in \mathbb{N},\ n > x\}$
Montrer que $A \neq \varnothing$
HA: $A = \varnothing$
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant x$
Donc $\mathbb{N}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Donc A admet une borne supérieure, que l'on note α
En utilisant le critre 2 avec $\epsilon = \frac{1}{2}$:
$\exists x' \in \mathbb{N},\ \alpha - \frac{1}{2} < x \leqslant \alpha$
Or $x' + 1$ est un entier naturel vérifiant $\alpha + \frac{1}{2} < x' + 1$
Ce qui contredit le fait que α soit le majorant de $\mathbb{N}$.
Conclusion: $A \neq \varnothing$
Conclusion générale: $\mathbb{R}$ est Archimédien.

Corollaire 2: prendre $x = \frac{b}{a}$ $\square$

Corollaire 3.0.5
Partie Entire: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},$ *unique*, $n \leqslant x < n+1$

Éxistance:
Soit x un rel positif.
Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ n > x\}$
A est non vide car $\mathbb{R}$ est archimdien
Donc A admet un plus petit lment, not n_0.
On a: $0 \leqslant x < n_0$ donc $1 \leqslant n_0$. Donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin A$
Donc $n_0 - 1 \leqslant x < n_0$.
En posant $n = n_0 - 1$, on a: $n \leqslant x < n+1$

Soit x un rel strictement ngatif.
$-x \in \mathbb{R}^+$, donc on applique la partie prcdente.
$\exists p \in \mathbb{N}, p \leqslant -x < p+1$
Soit p_0 cet entier.
Donc $-p_0 - 1 < x \leqslant p_0$

- $x = -p_0$
  On peut alors crire $-p_0 \leqslant x < -p_0 + 1$
  On note $n = -p_0$
- $x \neq -p_0$
  On peut alors crire $-p_0 - 1 \leqslant x < -p_0$
  On note $n = -p_0 - 1$

Unicit:
Supposons qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que:
$$\begin{cases} n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \\ n_2 \leqslant x < n_2 + 1 \\ n_1 < n_2 \end{cases}$$
$n_1 < n_2$ donc $x < n_1 + 1 \leqslant n_2 \leqslant x$
Donc n est unique.

$\square$