Fonctions Numériques
Relations de comparaison
MPSI 2

Soit x_0 un lment de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 0.0.1
Soient f et g deux fonctions dfinies sur un voisinage V de x_0, sauf ventuellement en x_0. On dit que $\underline{f \text{ est ngligeable devant } g}$ si il existe une application $\varepsilon : V \to \mathbb{R}^+$ telle que:

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}}{\longrightarrow} 0 \\ \forall x \in V \setminus \{x_0\},\ |f(x)| < \varepsilon(x)\,|g(x)| \end{cases}$$

<u>Notation:</u> $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$

<u>Rsultats usuels:</u>
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{=} o(\frac{1}{x^\alpha})$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x)$

Définition 0.0.2
Soient f et g deux fonctions dfinies sur un voisinage V de x_0, sauf ventuellement en x_0. On dit que $\underline{f \text{ est domine par } g}$ si:

$$\exists M \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in V \setminus \{x_0\},\ |f(x)| < M\,|g(x)|$$

<u>Notation:</u> $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$

Définition 0.0.3
Soient f et g deux fonctions dfinies sur un voisinage V de x_0, sauf ventuellement en x_0. On dit que $\underline{f \text{ et } g \text{ sont équivalentes en } x_0}$ si il existe une application $h : V \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} h(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}}{\longrightarrow} 1 \\ \forall x \in V \setminus \{x_0\},\ f(x) = h(x)\,g(x) \end{cases}$$

<u>Notation:</u> $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$

Rsultats usuels en 0:

- $\sin(x) \sim x, \qquad \cos(x) \sim 1, \qquad 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \tan(x) \sim x$