Fonctions Puissance

MPSI 2

1 Definition

1.1 Definition

Definition 1.1.1
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f_\alpha : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = exp(\alpha\ ln(x)) \end{array}$$

f_α *s'appelle la fonction puissance* α

Propriete 1.1.1
Pour tout (x, y) *strictement positifs, pour tout* (α, β) *reels:*

- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha\ x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $ln\left(x^\alpha\right) = \alpha ln(x)$

1.2 Etude de f_α

Derivabilite f est derivable par composee de fonctions derivables

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{x} exp(\alpha ln(x)) \\ &= \alpha exp((\alpha - 1) ln(x)) \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

Etude des limites

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_\alpha(x) = exp(\alpha\ ln(x))$

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$

  De quelle maniere f_α **tend-t-elle vers** $+\infty$?

  On etudie $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$

  Or $\frac{f_\alpha(x)}{x} = exp((\alpha - 1)ln(x))$

  - Si $0 < \alpha < 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = 0$,

    Donc $\mathscr{C}_{f_\alpha}$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** Oy
  - Si $1 < \alpha$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = 0$,

    Donc $\mathscr{C}_{f_\alpha}$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** Ox

Etude en 0

- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x) = +\infty$
- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0$

  Dans ce cas, notons $\tilde{f}_\alpha$ l'application definie sur $\mathbb{R}$ par:
  $\tilde{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
  D'apres le taux d'accroissement:
  - Si $\alpha > 1$, $\tilde{f}'_\alpha(0) = 0$, donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}_\alpha}$ admet une demi-tangente d'equation $y = 0$
  - Si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{x\to 0} exp((\alpha - 1)ln(x)) = +\infty$, donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}_\alpha}$ admet une demi-tangente d'equation $x = 0$

2 Fonctions Puissance Vs. Fonctions racines^n

- Soit n un entier **pair non nul**
  $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x^n$
  g_n realise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$
  Son application reciproque s'appelle la fonction **racine**^{n} $: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
  $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
- Soit n un entier**impair non nul**
  $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto x^n$
  g_n realise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
  Son application reciproque s'appelle la fonction **racine**^{n} $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
- Par ailleurs, pour tout n entier naturel non nul, $f_{\frac{1}{n}}$ est l'application reciproque de
  $f_n : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$
  Donc par unicite de la reciproque on peut ecrire: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

3 Theoreme de comparaison

Propriete 3.0.1
Soient α et β deux reels strictement positifs.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(exp(x))^\alpha}{x^\beta} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \left|ln(x)\right|^\beta = 0$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^\beta \left(exp(x)\right)^\alpha = 0$

- Pour $t \geq 1$, on a: $0 < \sqrt{t} \leq t$

$$0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Donc pour $x \geq 1$ on a:
$$0 \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq 2\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dt$$
$$\Longleftrightarrow 0 \leq ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$
$$\Longleftrightarrow 0 \leq \frac{ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$$

Par consequent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$

- Soient α et β deux reels strictement positifs. Pour $x > 1$:

$$\frac{ln(x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{ln(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\,ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

de plus:
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{ln(t)}{t} = 0$
- $\lim\limits_{u\to 0} u^\beta = 0$

Donc par composees de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$

- Passage a l'exponentielle et passage a l'inverse.
- etc.

$\square$