

# Elements de Theorie des Ensembles

## Graphes et Applications

MPSI 2

### 1 Graphes de $E$ vers $F$

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.

On note  $E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$

#### **Definition 1.0.1**

*On appelle graphe de  $E$  dans  $F$  tout sous ensemble  $G$  de  $E \times F$*

#### **Definition 1.0.2**

*On appelle correspondance de  $E$  vers  $F$  tout triplet  $(G, E, F)$  où  $E$  et  $F$  sont deux ensembles et  $G$  un graphe de  $E$  vers  $F$ .*

#### **Definition 1.0.3**

*Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles.*

*Soit  $(G, E, F)$  une correspondance de  $E$  vers  $F$ , On dit que  $(G, E, F)$  est une application de  $E$  dans  $F$  si pour tout element de  $E$ , l'ensemble des  $y$  de  $F$  tels que  $(x, y)$  soit dans  $G$  est reduit a un et un seul element.*

#### **Notations :**

$f: (G, E, F)$  ou  $f: E \longrightarrow F$

$x \longmapsto y$  tel que  $(x, y) \in G$

Pour tout  $x$  de  $E$ , l'ensemble  $\{y \in F, (x, y) \in G\}$  est reduit a un seul element. On notera cet element  $f(x)$ .

#### **Definition 1.0.4**

*Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .*

*Soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .*

*L'ensemble  $f(A) = \{f(x), x \in A\}$  est un sous-ensemble de  $F$  que l'on appelle image de  $A$  par  $f$ .*

**Remarques :**

- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $f(E)$  s'appelle l'image de  $f$ .

**Definition 1.0.5**

Soit  $f: E \longrightarrow F$  une application.

Soit  $B$  un sous-ensemble de  $F$ .

On appelle image reciproque de  $B$  par  $f$  le sous-ensemble de  $E$  note  $f^{-1}(B)$  tel que  $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ .

**Remarques :**

- $f^{-1}(F) = E$
- Soit  $y$  un element de  $F$ . On prend  $B = \{y\}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(\{y\}) \\ &= \{x \in E, f(x) = y\} \end{aligned}$$

**Definition 1.0.6**

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- $f$  est dite injective si deux element distincts de  $E$  ont des images distinctes par  $f$ .
- $f$  est dite surjective si tout element de  $F$  est dans  $f(E)$ .
- $f$  est dite bijective si elle est surjective et injective.

**Definition 1.0.7**

- Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .

On appelle restriction de  $f$  a  $A$  l'application notee  $f|_A$  telle que :

$$\begin{aligned} f|_A: A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

Soit  $E'$  un ensemble tel que  $E$  soit un sous-ensemble de  $E'$ . Soit  $g$  une application de  $E'$  dans  $F$ .

On dit que  $g$  est un prolongement de  $f$  par  $E'$  si  $g|_E = f$

### Definition 1.0.8

*Soit  $E$  un ensemble.*

*Soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$ .*

*On appelle application caractéristique de  $A$  (fonction indicatrice de  $A$ ) l'unique application notée  $\mathbb{1}_A$  et définie par :*

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A: E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto (x \in A)\end{aligned}$$

### Propriete 1.0.1

*Notons  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ .*

*Notons  $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$  l'ensemble des applications définies sur  $E$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ .*

*L'application  $\phi: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$  réalise une bijection de  $\mathcal{P}(E)$  sur*

$$A \longmapsto \mathbb{1}_A$$

*$\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ .*