

# EDL

## Equations Differentielles Lineaires du second ordre

### MPSI 2

## 1 Generalites

### Définition 1.0.1

Soit  $\mathcal{I}$  un intervalle reel.  $a, b, c, d$  des applications definies sur  $\mathcal{I}$  a valeurs dans  $\mathbb{K}$  et continues sur  $\mathcal{I}$ . On appelle equation differentielle lineaire du second ordre toute relation du type :

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) = d(x)$$

*d'inconnue y*

### Définition 1.0.2

Une solution particuliere sur  $\mathcal{I}$  de l'equation differentielle precedente est une application  $\phi: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$  telle que :

- $\phi$  est deux fois derivable sur  $\mathcal{I}$ .
- $\forall x \in \mathcal{I}, a(x) \phi''(x) + b(x) \phi'(x) + c(x) \phi(x) = d(x)$

**Remarque :** L'ensemble des solutions de l'equation differentielle lineaire du second ordre homogene

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) = 0$$

a une structure d'espace vectoriel (non vide et stable par combinaisons lineaires).

## 2 Equation Differentielle Lineaire du second ordre a coefficients constants

### 2.1 Definitions

#### Définition 2.1.1

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$  tels que  $a \neq 0$ . Soit  $d: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$  une application continue sur  $\mathcal{I}$ . On appelle equation differentielle lineaire du second ordre a coefficients constants une relation du type :

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

## 2.2 Etude de l'equation homogene associee

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

avec  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$

### Propriété 2.2.1

*(Solutions reelles)*

On suppose  $a, b, c$  reels et  $a \neq 0$

Soit l'equation differentielle homogene associee :

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (2)$$

On considere l'equation  $ar^2 + br + c = 0$  (E) d'inconnue  $r$ .

(E) s'appelle l'equation caracteristique associee a (2)

**Cas 1 :** (E) admet deux solutions reelles distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

$y$  est solution de (2) ssi:

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

**Cas 2 :** (E) admet une unique solution reelle  $r_0$ .

$y$  est solution de (2) ssi:

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

**Cas 3 :** (E) admet deux solutions complexes non reelles conjuguees  $\alpha \pm i\beta$ .

$y$  est solution de (2) ssi:

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x} (a \cos \beta x + i \sin \beta x)$$

### Propriété 2.2.2

*(moins importante, solutions complexes)*

On suppose  $a, b, c$  complexes et  $a \neq 0$ .

**Cas 1 :** (E) admet deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$ .

$y$  est solution de (2) ssi:

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

**Cas 2 :** (E) admet une unique solution  $r_0$ .

$y$  est solution de (2) ssi:

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

Soit  $(a, b, c) \in (C)^3$  et  $a \neq 0$ .

Soit l'équation différentielle homogène :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (2)$$

- Recherche d'une solution exponentielle.

Soit  $r \in \mathbb{C}$  fixe.

Soit  $z_0 : x \mapsto e^{rx}$  une application deux fois dérivable.

$$\begin{aligned} z_0(x) &= e^{rx} \\ z_0'(x) &= re^{rx} \\ z_0''(x) &= r^2 e^{rx} \end{aligned}$$

$z_0$  est solution de (2) sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \iff \forall x \in \mathbb{R}, az_0''(x) + bz_0'(x) + cz_0(x) &= 0 \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{rx} (ar^2 + br + c) &= 0 \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, ar^2 + br + c = 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{rx} > 0 \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $z_0$  est solution de (2) ssi  $r$  est racine de l'équation caractéristique.

- Détermination des autres solutions.

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une application deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Alors il existe une application  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  telle que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y(x) &= u(x) e^{rx} \\ y(x) &= e^{rx} u(x) \\ y'(x) &= e^{rx} (ru(x) + u'(x)) \\ y''(x) &= e^{rx} (r^2 u(x) + 2ru'(x) + u''(x)) \end{aligned}$$

$y$  est solution de (2) sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \iff \forall x \in \mathbb{R}, a(r^2 u(x) + ru'(x) + u''(x)) + b(ru(x) + u'(x)) + cu(x) &= 0 \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, au''(x) + (2ra + b)u'(x) + (ar^2 + br + c)u(x) &= 0 \\ \iff \forall x \in \mathbb{R}, au''(x) + (2ra + b)u'(x) &= 0 \end{aligned}$$

On pose  $v = u'$  pour obtenir une équation différentielle d'ordre un.

$y$  est solution de (2) sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, av'(x) + (2ra + b)v(x) &= 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, av'(x) &= -\frac{2ra + b}{a}v(x) \\ \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, v(x) &= \lambda \exp\left(-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x\right) \end{aligned}$$

**Cas 1 :** L'équation caractéristique admet deux racines  $r_1$  et  $r_2$ .

On applique ce qui precede avec  $r = r_1$  et  $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ .  
 $y$  est solution de (2) sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & v(x) &= \lambda e^{(-2r_1+r_1+r_2)x} \\ &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & v(x) &= \lambda e^{(-r_1+r_2)x} \\ &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \exists \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & u(x) &= \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{(r_2-r_1)x} + \mu \\ &\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & y(x) &= \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x} \\ &\Longleftrightarrow \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & y(x) &= k_1 e^{r_2 x} + k_2 e^{r_1 x} \end{aligned}$$

**Cas 2:** L'equation caracteristique admet une racine unique  $r_0$ .

Alors  $r_0 = -\frac{b}{2a}$ . On applique ce qui precede le cas 1 avec  $r = r_0$ .  
 $y$  est solution de (2) sur  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & v(x) &= \lambda \\ &\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & u(x) &= \lambda x + \mu \\ &\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & y(x) &= (\lambda x + \mu) e^{r_0 x} \end{aligned}$$

**Conclusion :** Ceci demontre :

- La propriete sur les solutions complexes
- Si  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , la propriete sur les solutions reelles dans les deux premiers cas, en remplaçant " $\exists \lambda \in \mathbb{C} / \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 / \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$ " par " $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ "

□

### Structure de l'ensemble des solutions de (2)

**Cas reel :**  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$

L'ensemble des solutions reelles de (2) est un espace vectoriel reel de dimension deux dont une base est  $(z_1, z_2)$  non vide et stable par combinaisons lineaires a coefficients reels avec :

- $z_1 : x \mapsto e^{r_1 x}$  et  $z_2 : x \mapsto e^{r_2 x}$  si l'equation caracteristique admet deux racines reelles  $r_1$  et  $r_2$

$$\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, y = k_1 z_1 + k_2 z_2 \text{ sur } \mathbb{R}\}$$

- $z_1 : x \mapsto e^{r_0 x}$  et  $z_2 : x \mapsto x e^{r_0 x}$  si l'equation caracteristique admet une racine reelle unique  $r_0$

$$\mathcal{S} = \{\lambda z_1 + \mu z_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

- $z_1 : x \mapsto e^{\alpha x} \cos \beta x$  et  $z_2 : x \mapsto e^{\alpha x} \sin \beta x$  si l'equation caracteristique admet deux racine complexes conjuguees  $\alpha \pm i\beta$

$$\mathcal{S} = \{A z_1 + B z_2, (A, B) \in \mathbb{C}^2\}$$

**Cas complexe :**  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$

L'ensemble des solutions complexes de (2) est un espace vectoriel complexe de dimension deux dont une base est  $(z_1, z_2)$  avec :

- $z_1: x \mapsto e^{r_1 x}$  et  $z_2: x \mapsto e^{r_2 x}$  si l'equation caracteristique admet deux racines  $r_1$  et  $r_2$
- $z_1: x \mapsto e^{r_0 x}$  et  $z_2: x \mapsto x e^{r_0 x}$  si l'equation caracteristique admet une racine unique  $r_0$

**Remarque :** Toute solution de (2) sur  $\mathbb{R}$  existe de maniere unique comme combinaison lineaire de  $z_1$  et  $z_2$

## 2.3 Resolution de l'equation differentielle

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \quad (1)$$

avec  $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$

$d: \mathcal{I} \mapsto \mathbb{K}$  continue

### 2.3.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit  $y_0$  une solution particuliere de (1) sur  $\mathcal{I}$ .

Soit  $y$  une application definie sur  $\mathcal{I}$  a valeurs dans  $\mathbb{K}$ , deux fois derivable sur  $\mathcal{I}$ .  $y$  est solution de (1) sur  $\mathcal{I}$  :

$$\begin{aligned} &\iff \forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \\ &\iff \forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = ay_0''(x) + by_0'(x) + cy_0(x) \\ &\iff \forall x \in \mathcal{I}, a(y - y_0)''(x) + b(y - y_0)'(x) + c(y - y_0)(x) = 0 \\ &\iff y - y_0 \text{ est solution de (2) sur } \mathcal{I} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, y - y_0 = \lambda z_1 + \mu z_2 \text{ sur } \mathcal{I} \\ &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in \mathcal{I}, y(x) = y_0(x) + \lambda z_1(x) + \mu z_2(x) \end{aligned}$$

**Conclusion :** L'ensemble  $S$  des solutions de (1) sur  $\mathcal{I}$  est :

$$S = \{y_0 + \lambda z_1 + \mu z_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$$

Structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent l'ensemble  $S$  des solutions de l'equation differentielle homogene associee (2).

### 2.3.2 Etude de $d$

- Si  $d$  est une fonction polynomiale, on cherche  $y_0$  sous forme polynomiale de degre  $\deg(d) + 1$  un nombre dependant de  $a, b$  et  $c$ .