Dénombrements
Ensembles Finis

MPSI 2

Propriété 0.0.1
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit f une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

- *Si f est bijective, alors $n = p$*
- *Si f est injective, alors $n \leqslant p$*
- *Si f est surjective, alors $n \geqslant p$*

Définition 0.0.1
Soit E un ensemble non vide.
On dit que E est fini si il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E
Si un tel entier existe, il est unique et est le cardinal de E.

Notations: $\mathrm{card}(E)$, $\#E$, $|E|$
Convention: $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$

Propriété 0.0.2
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Soit F un sous-ensemble de E.
Alors F est également un ensemble fini et $card(F) \leqslant n$ et $(card(F) = n) \iff (E = F)$

On procède par récurrence sur le cardinal de E.
Lemme: Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$,
Et si a est un élément de E,
Alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n - 1$

Démonstration de la propriété
Soit $P(n)$: Pour tout ensemble E de cardinal n, pour tout sous-ensemble F de E,
F est fini et $\mathrm{card}(F) \leqslant n$ et $(\mathrm{card}(F) = n) \iff (E = F)$

$\underline{n = 0}$: $E = \varnothing$ et $F = \varnothing$ et $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n-1)$ soit vérifié.
Montrons $P(n)$
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Soit F une partie de E.
<u>1^er^ cas:</u> $F = E$ alors $\operatorname{card}(F) = n$
<u>2ème cas:</u> $F \neq E$
Alors $\exists a \in E,\ a \notin F$
Soit a un tel élément.
$a \notin F$ donc $F \subset E \setminus \{a\}$
Or, d'après la lemme, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n-1$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, F est fini <u>et</u> $\operatorname{card}(F) \leqslant n-1$

Finalement: $F = E \Rightarrow \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$
$F \neq E \Rightarrow \operatorname{card}(F) < \operatorname{card}(E)$
D'o $(\operatorname{card}(F) = n) \iff (E = F)$
Donc $P(n)$ est vérifié.
D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$

Démonstration du lemme
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.
Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E.
<u>1er cas:</u> $n = 1$

$$\begin{aligned} f : \{1\} &\longrightarrow E \\ 1 &\longmapsto f(1) \end{aligned}$$

$E = \{f(1)\}$, donc $E \setminus \{f(1)\} = \varnothing$, de cardinal 0.
<u>2ème cas:</u> $n \geqslant 2$
Soit a un élément de E.
f réalise une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E, donc $\exists i \in [\![1, n]\!]$, unique, $f(i) = a$

- <u>Si $i = n$</u> alors $f(n) = a$
  $f\big|_{[\![1,n-1]\!]}$ réalise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $f([\![1, n-1]\!])$
  Or $\begin{aligned} f([\![1, n-1]\!]) &= f([\![1, n]\!] \setminus \{n\}) \\ &= E \setminus \{a\} \end{aligned}$
  Donc $f\big|_{[\![1,n-1]\!]}$ réalise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.
  Donc E est de cardinal $n-1$
- <u>Si $i \neq n$</u>
  Notons i_0 l'unique élément de $[\![1, n-1]\!]$ tel que $f(i_0) = a$
  On considère $\tau : [\![1, n-1]\!] \longrightarrow [\![1, n-1]\!]$

$$i \longmapsto \begin{cases} i \text{ si } (i \neq i_0 \text{ et } i \neq n) \\ i_0 \text{ si } i = n \\ n \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

  τ réalise un bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
  On applique ensuite le premier cas avec $\tau([\![1, n]\!])$ au lieu de $[\![1, n]\!]$

$\square$

Propriété 0.0.3
Soit P une partie finie, non vide et incluse dans $\mathbb{N}$, de cardinal p.
Alors il existe une unique bijection strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ sur P.

Existence:
- P est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et admet un plus petit élément que l'on note y_1.
  On pose $\phi(1) = y_1$
- Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $(\phi(i))_{i \in [\![1,k]\!]}$ est défini et $\phi(1) < ... < \phi(k)$
  Soit $P_k = \{x \in \mathbb{N},\ x \in P \text{ et } x > \phi(k)\}$
  P_k est non vide car $k < p$, donc admet un plus petit élément. On le note $\phi(k+1)$

On construit alors ϕ par itération, et elle est strictement croissante.

Unicité: Soit ψ une application strictement croissante bijective de $[\![1, p]\!]$ sut P.
Alors $P = \{\psi(1), \psi(2), ..., \psi(p)\}$ et $\psi(1) < ... < \psi(p)$
- $\psi(1)$ est le plus petit élément de P, donc $\psi(1) = \phi(1)$
- $\psi(2)$ est le plus petit élément de $P \setminus \{\psi(1)\}$. Or $P \setminus \{\psi(1)\} = P_1$, donc par définition, $\phi(2) = \psi(2)$
- ...

Conclusion: $\phi = \psi$

$\square$

Propriété 0.0.4
Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On a alors équivalence entre:
1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective*

1. Supposons f injective.
   Montrer que f est surjective.
   Donc montrer que $f(E) = F$
   Soit $g\colon E \longrightarrow f(E)$ une application.
   $x \longmapsto f(x)$
   g réalise une bijection de E sur $f(E)$ par définition de l'espace d'arrivée.
   Par ailleurs, E est de cardinal n, donc il existe une bijection ϕ de $[\![1, n]\!]$ sur E.
   $g \circ \phi : [\![1, n]\!] \longrightarrow f(E)$
   $g \circ \phi$ est une bijection, donc $\mathrm{card}(f(E)) = n$

D'où, sachant $f(E) \subset F$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, $E = F$
Donc f est surjective.

② Supposons f surjective.
Montrer que f est bijective de E sur F.

a/ Montrer que $\exists h \in \mathcal{F}(F, E),\ f \circ h = \text{Id}_F$
Soit y un élément de F.
f est surjective, donc $f^{-1} < \{y\} >$ est non vide.
$\exists x \in E,\ x \in f^{-1} < \{y\} >$
Soit x_y un tel élément.
Posons $h(y) = x_y$
Ce raisonnement étant valable pour tout y de F, on définit une application h de F dans E.
Vérifions que $f \circ h = \text{Id}_F$:
$\forall y \in F,\ f \circ h(y) = f(x_y) = y$
Donc $f \circ h = \text{Id}_F$

b/ Montrer que h est injective.
Donc montrer que $\forall (y, y') \in F^2,\ h(y) = h(y') \Rightarrow y = y'$
Soit y et y' deux éléments de F tels que $h(y) = h(y')$
Alors $f(h(y)) = f(h(y'))$ car f est une application
$\iff y = y'$ car $f \circ h = \text{Id}_F$
Donc f est injective.

c/ Montrer que f est bijective.
$h : F \longrightarrow E$ est injective et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$
Donc h réalise une bijection de F sur E.
Par ailleurs, $f \circ h = \text{Id}_F$
$\iff f = h^{-1}$

Conclusion: f est bijective de E sur F.

Conclusion Générale: Les trois propositions sont équivalentes.

□