

Eléments de Théorie des Ensembles

Graphes et Applications

MPSI 2

1 Graphes de E vers F

Soit E et F deux ensembles.

On note $E \times F = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$

Définition 1.0.1

On appelle *graphe de E dans F* tout sous-ensemble G de $E \times F$

Définition 1.0.2

On appelle *correspondance de E vers F* tout triplet (G, E, F) où E et F sont deux ensembles et G un graphe de E vers F .

Définition 1.0.3

Soit E et F deux ensembles.

Soit (G, E, F) une correspondance de E vers F , On dit que (G, E, F) est une *application de E dans F* si pour tout élément de E , l'ensemble des y de F tels que (x, y) soit dans G est réduit à un et un seul élément

Notations :

$f: (G, E, F)$ ou $f: E \longrightarrow F$

$x \longmapsto y$ tel que $(x, y) \in G$

Pour tout x de E , l'ensemble $\{y \in F, (x, y) \in G\}$ est réduit à un seul élément On notera cet élément $f(x)$.

Définition 1.0.4

Soit f une application de E dans F .

Soit A un sous-ensemble de E .

L'ensemble $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ est un sous-ensemble de F que l'on appelle *image de A par f* .

Remarques :

- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $f(E)$ s'appelle l'image de f .

Définition 1.0.5

Soit $f: E \longrightarrow F$ une application.

Soit B un sous-ensemble de F .

On appelle image réciproque de B par f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$ tel que $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

Remarques :

- $f^{-1}(F) = E$
- Soit y un élément de F . On prend $B = \{y\}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= f^{-1}(\{y\}) \\ &= \{x \in E, f(x) = y\} \end{aligned}$$

Définition 1.0.6

Soit f une application de E dans F .

- f est dite injective si deux éléments distincts de E ont des images distinctes par f .
- f est dite surjective si tout élément de F est dans $f(E)$.
- f est dite bijective si elle est surjective et injective.

Définition 1.0.7

- Soit f une application de E dans F .

Soit A un sous-ensemble de E .

On appelle restriction de f à A l'application notée $f|_A$ telle que :

$$\begin{aligned} f|_A: A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- Soit f une application de E dans F .

Soit E' un ensemble tel que E soit un sous-ensemble de E' . Soit g une application de E' dans F .

On dit que g est un prolongement de f par E' si $g|_E = f$

Définition 1.0.8

Soit E un ensemble.

Soit A un sous-ensemble de E .

On appelle application caractéristique de A (fonction indicatrice de A) l'unique application notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A: E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto (x \in A)\end{aligned}$$

Propriété 1.0.1

Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E .

Notons $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ l'ensemble des applications définies sur E à valeurs dans $\{0, 1\}$.

L'application

$$\begin{aligned}\phi: \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\}) \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A\end{aligned}$$

réalise une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$.