Suites Réelles
Opérations sur les suites

MPSI 2

1 Structure d'algèbre des suites

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Addition
On pose $u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$(\mathcal{E},+)$ est un groupe abélien (commutatif):
- Il possède un élément neutre: $(0)_{n\in\mathbb{N}}$
- Il possède un élément symétrique: $-u_n=(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Multiplication
On pose $u\times v=(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\times$ est associative
$\times$ est distributive sur $+$
$\times$ admet un élément neutre: $(1)_{n\in\mathbb{N}}$
On dit que $(\mathcal{E},+,\times)$ est un anneau commutatif (car pas complétement symétrique)

Multiplication externe
On pose $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\cdot u=(\lambda\times u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
On a de plus $\lambda\cdot(u\times v)=(\lambda\cdot u)\times v=u\times(v\cdot\lambda)$
On dit que $(\mathcal{E},+,\cdot)$ est un espace vectoriel.
On dit que $(\mathcal{E},+,\times,\cdot)$ est une algébre commutative.

Propriété 1.0.1
On note $\mathcal{E}_b$ l'ensemble des suites bornées.
On note $\mathcal{E}_c$ l'ensemble des suites convergentes.
On a:
- $\mathcal{E}_c\subset\mathcal{E}_b\subset\mathcal{E}$
- $(\mathcal{E}_b,+,\times,\cdot)$ *et* $(\mathcal{E}_b,+,\times,\cdot)$ *sont des algébres commutatives.*

Limites Réelles

Propriété 1.0.2

- *Si u converge vers l et v converge vers l', alors $u+v$ converge vers $l+l'$.*
- *Si u converge vers l et v converge vers l', alors $u\times v$ converge vers $l\times l'$.*
- *Si u converge vers l et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\lambda\cdot u$ converge vers $\lambda\, l$*

- *Si u converge vers $l \neq 0$, alors il existe un rang n_0 a partir duquel $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ ait un sens, et $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{l}$*
- *Si u converge vers l et v converge vers $l' \neq 0$, alors il existe un rang n_0 a partir duquel $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ ait un sens, et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{l}{l'}$*

- **Premier point**:
  Utiliser les définitions des limites avec $\frac{\varepsilon}{2}$, à ε fixé.
  Puis, avec l'addition des deux, utiliser l'inégalité triangulaire.
- **Deuxiéme point**:
  Soit u et v tendant vers l et l'.
  Montrer que $u\,v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\,l'$
  Soit ε un réel strictement positif.
  Montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |_n\, v_n - l\,l'| < \varepsilon$
  De plus: $|u_n\, v_n - l\,l'| = |u_n\, v_n - u_n\, l' + u_n\, l' - l\,l'|$ u est convergente, donc bornée.
  $= |u_n(v_n - l) + l'(u_n - l)|$
  $|u_n\, v_n - l\,l'| \leqslant |u_n|\,|v_n - l| + |l'|\,|u_n - l|$
  Soit M le majorant de $|u|$.
  Donc $|u_n\, v_n - l\,l'| \leqslant M\,|v_n - l| + |l'|\,|u_n - l|$
  On utilise ensuite la convergence de u avec $\frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$ et de v avec $\frac{\varepsilon}{2(M+1)}$
  Donc: $\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$ Soit n_1 et n_2 deux tels
  $\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow |v_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$
  réels. Posons $n_0 = \max(\{n_1, n_2\})$
  Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |_n\, v_n - l\,l'| < M\frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |l'|\frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

  Ce raisonnement étant vrai pour tout ε, $u\,v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\,l'$
- **Quatriéme point**:
  Soit u une suite tendant vers un réel l différent de 0.

  - Démontrer l'existence de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_0}$
    $\exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow \frac{|l|}{2} < u_n < \frac{3\,|l|}{2}$
    Donc il existe un rang n_0 tel que l'inverse de u_n soit défini.
  - Montrer que: $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ converge vers $\dfrac{1}{l}$

    $$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right|$$

    $$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| = \left|\frac{l - u_n}{l\,u_n}\right| = \frac{|l - u_n|}{|u_n|\,|l|}$$

    Or $|u_n| > \frac{|l|}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| < \frac{|u_n - l|}{\frac{|l|}{2} \times |l|} \leqslant \frac{2}{|l|^2}|u_n - l|$

On applique la convergence de u avec $\frac{|l|^2}{2}\varepsilon$

Donc $\exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right| < \frac{2}{|l|^2} \times \frac{|l|^2}{2}\varepsilon \leqslant \varepsilon$

Donc il existe un rang n_1 a partir duquel $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}\right|$ est inférieur à ε

Cela étant vrai pour tout ε, $\frac{1}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$

$\square$

Corollaire 1.0.1

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l &\iff u_n - l \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\iff \frac{u_n}{l} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Limites Infinies

Propriété 1.0.3

<u>Somme</u>:

- *Si $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$*
  - *Si v est minorée dans $\mathbb{R}$, $u + v \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$*

    En particulier si $v \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou si $v \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ avec $l \in \mathbb{R}$
  - *On ne peut pas conclure immédiatement si $v \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$*
- *De même avec $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$*

<u>Produit</u>

- *Si $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$*
  - *Si v n'admet pas 0 pour limite, et si v_n garde un signe constant a partir d'un certain rang, alors:*

    Si $v_n < 0,\ u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

    Si $v_n > 0,\ u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  - *Si $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on ne peut pas conclure a priori,*

    Sauf si *$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n = 0$ Dans ce cas, $u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$*
- *De même avec $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$*

<u>Inverse</u>

- *Si $|u_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors il existe un rang n_0 a partir duquel $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ existe et $\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$*

  Cela s'applique aussi a $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$
- *Si $u \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$*

– *Si a partir d'un certain rang n_0, tous les u_n sont non nuls, alors* $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geqslant n_0}$ *existe.*
– *Si de plus u_n garde un signe constant a partir d'un rang $n_1 \geqslant n_0$,* $\left(\frac{1}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ *selon le signe de u_n*

Inverse
Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n < 0$, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
Soit u une suite convergeant vers 0 et strictement négative a partir d'un rang n_1.
Donc: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$
Soit n_2 un tel réel, ε un réel positif, et $n_3 = \max(\{n_1, n_2\})$
Pour tout n supérieur a n_3, $\frac{1}{u_n}$ existe.
Montrer que $\frac{1}{u_n}$ diverge vers $-\infty$
Soit K un réel.
- Si $K \geqslant 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_3 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < 0 \geqslant K$
- Si $K < 0$
  En appliquant la convergence de u avec le réel $\frac{1}{|K|}$:
  $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_4 \Rightarrow -\frac{1}{|K|} < u_n < \frac{1}{u_n}$
  Soit n_0 un tel réel.
  $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 &\Rightarrow \frac{1}{K} < u_n \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n} < K \end{aligned}$$

Ce raisonnement étant valable pour tout K réel, $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ □

Propriété 1.0.4
Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E},\ (\forall n \in \mathbb{N},\ q_n \in \mathbb{Q})$ et $(q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x)$
Soit x un réel.
- Existence de la suite:
  $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$
  Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists q \in \mathbb{R},\ x - \varepsilon < q < x + \varepsilon$
  Pour tout n non nul, posons $\varepsilon = \frac{1}{n}$
  Soit q_n un rationnel vérifiant $q_n \in \mathbb{Q},\ x - \frac{1}{n} < q < x + \frac{1}{n}$
  Ce raisonnement étant valable pour tout n non nul, on obtient une suite q sur $\mathbb{N}^*$ a valeurs dans $\mathbb{Q}$
- Convergence vers x
  Soit ε un réel strictement positif.

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0
Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$
Soit n_0 un tel entier.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |q_n - x| < \frac{1}{n} < \varepsilon$
Cela étant valable pour tout ε strictement positif, on conclut que q converge vers x
$\square$

2 Relations de comparaison

Propriété 2.0.5
Soit u et v deux suites telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow u_n \leqslant v_n$
- *Si $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$*
- *Si $v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$*
- *Si u et v à termes positifs à partir d'un certain rang, et si $v \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*

Propriété 2.0.6
Propriété d'encadrement
Soit u, v et w trois suites telles que $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
Si u et w convergent vers une même limite l, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

Définition 2.0.1
Soit u et v deux suites réelles.
- *$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$: "$u_n$ est Grand O de v_n"*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant M\ |v_n|$$

- *$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$: "$u_n$ est Petit o de v_n"*

$$\exists\, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\varepsilon \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0)\ \text{et}\ (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| \leqslant \varepsilon_n\ |v_n|)$$

Propriété 2.0.7

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$
alors $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ *et* $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
alors $u_n + w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$

Remarque:

① $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \iff$ la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in N}$ est bornée.
On dit que v domine u.

② $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff$ la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in N}$ converge vers 0.
On dit que u est négligeable devant v

Définition 2.0.2
Soit u et v deux suites réelles.
- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$: *"$u$ est équivalente a v.*

$$\exists(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1)\ et\ (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$$

Remarque:
- Si v_n tous non nuls a partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in N}$ converge vers 1.
- "Etre équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites dont pour tout rang il existe un terme de rang supérieur non nul.

Propriété 2.0.8
Soit u et v deux suites réelles.
- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ *et si* $l \in \overline{\mathbb{R}}$, *alors* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ *et* $l \in \mathbb{R}^*$, *alors* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

Remarque:

$$\begin{aligned}
u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n &\iff \exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}},\ (\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n \\
&\iff \exists \varepsilon \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}},\ (\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = \varepsilon_n v_n \\
&\iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)
\end{aligned}$$

Propriété 2.0.9
Soit u, v, x et y quatre suites réelles.

- *Si* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ *et* $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$
  alors $u_n\,x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n\,y_n$
- *Si de plus* x_n *et* y_n *tous non nuls a partir d'un certain rang,*
  alors $\frac{u_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{y_n}$

Remarque: ce n'est généralement pas compatible avec l'addition.