

Structures Algébriques

Structure de Groupe

MPSI 2

1 Définition

Définition 1.0.1

Soit $(G, *)$ un magma.

On dit que $(G, *)$ est un groupe si:

- $*$ est associative
- $*$ admet un élément neutre
- tout élément de G est symétrisable par $*$

Si de plus, $*$ est commutative sur G , on dit que $(G, *)$ est un groupe abélien.

Conséquences:

- Règle de simplification: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ Démonstration:
Soit a, x et y trois éléments de G tels que $a * x = a * y$
Notons a' le symétrique de a (car G est un groupe)
On a alors: $a' * (a * x) = a' * (a * y)$
Par associativité, on a: $(a' * a) * x = (a' * a) * y$
Par symétrie, on a: $e * x = e * y$
Par définition de l'élément neutre: $x = y$
- Résolution d'équations: $a * x = b \iff x = a' * b$

2 Sous-groupes

2.1 Définition et critères

Soit $(G, *)$ un groupe.

Définition 2.1.1

Soit F un sous-ensemble de G

On dit que $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si:

- $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
- $(F, *')$ est un groupe où $*$ est la loi induite de G sur F .

Remarques: Soit $(F, *')$ un sous-groupe de $(G, *)$

- $e_G = e_F$
- F est non vide: $e \in F$
- Si x' et x'' sont les symétriques de $x \in F$ dans $(G, *)$ et $(F, *')$ respectivement,
Alors $x' = x''$

Critères de sous-groupe

Soit F un sous-ensemble non vide de G .

- Critère 0: F est un sous-groupe de G ssi:
 - ① $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
 - ② $e \in F$
 - ③ $\forall x \in G, (x \in F) \Rightarrow (x^{-1} \in F)$
- Critère 1: F est un sous-groupe de G ssi:
 - ① $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
 - ② $\forall x \in G, (x \in F) \Rightarrow (x^{-1} \in F)$
- Critère 2: F est un sous-groupe de G ssi:
 - ① $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y^{-1} \in F)$

Démonstration des critères de sous-groupe

- Critère 1: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 1.
 D'après ②, $x^{-1} \in F$
 D'après ①, $x * x^{-1} \in F$
 Or $x * x^{-1} = e$, donc $e \in F$. On a vérifié le critère 0, donc $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- Critère 2: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 2.
 - F est non vide: Soit x un élément de F
 D'après ①, $x * x^{-1} \in F \Rightarrow e \in F$
 Le point ② du critère 0 est vérifié.
 - D'après ① avec e et x : $e * x^{-1} \in F \Rightarrow x^{-1} \in F$
 Le point ③ du critère 0 est vérifié.
 - Soit x et y deux éléments de F . De plus, $y^{-1} \in F$
 donc $x * (y^{-1})^{-1} \in F \rightarrow x * y \in F$

□

2.2 Propriétés des sous-groupes

Soit $(G, *)$ un groupe.

Propriété 2.2.1

- Si F et H sont des sous-groupes de $(G, *)$,
 Alors $F \cap H$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de $(G, *)$,
 Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-groupe de $(G, *)$

- $f \cap H$ est non vide: $e \in F \cap H$
- Montrer que $\forall (x, y) \in G \times G$, $(x \in F \cap H)$ et $(y \in F \cap H) \Rightarrow (x * y^{-1}) \in F \cap H$
 Soit $(x, y) \in F \cap H$
 x et y sont éléments de F et F est un groupe: $x * y^{-1} \in F$
 De même, $x * y^{-1} \in H$
 Donc $x * y^{-1} \in F \cap H$
 Vrai pour tout (x, y) de $(F \cap H)^2$, donc on en déduit que $F \cap H$ est un sous-groupe de $(G, *)$

□

Définition 2.2.1

Soit $(G, *)$ un groupe.

Soit B une partie non vide de G .

On appelle sous-groupe de g engendré par B le plus petit sous groupe de $(G, *)$ contenant B , au sens de l'inclusion.

Justification: On munit $\mathcal{P}(G)$ de la relation d'inclusion: $(\mathcal{P}(G), \subset)$ est un ensemble ordonné.

Soit \mathcal{F} l'ensemble des groupes contenant B .

- \mathcal{F} est non vide car $G \in \mathcal{F}$
- D'après la propriété précédente, $H = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

$\forall f \in \mathcal{F}$, $B \subset F$, donc $B \subset H$

- Reste à montrer que H est le plus petit élément de \mathcal{F}

Donc montrer que $\forall F \in \mathcal{F}$, $H \subset F$

Par définition de H , la proposition précédente est vraie.

Notation:

- $\langle B \rangle$
- Si B est un singleton $b = \{b\}$, on écrit $\langle b \rangle$

2.3 Morphismes de groupes

Soit $(G, *)$ et $(G', *')$ deux groupes.

Soit $f : G \rightarrow G'$ une application.

Définition 2.3.1

- f est un homomorphisme de groupes si:
 $\forall (x, y) \in G \times G, f(x * y) = f(x) *' f(y)$
- f est un endomorphisme de groupes si:
 f est un homomorphisme de groupes et que $(G, *) = (G', *')$
- f est un isomorphisme de groupes si:
 f est un homomorphisme de groupes bijectif de G sur G'
- f est un automorphisme de groupes si:
 f est un endomorphisme de groupes bijectif de G sur G'

Remarques: Soit f un homomorphisme de groupes de G dans G'

- Soit e et e' les éléments neutres de G et G' respectivement.
 Alors $f(e * e) = f(e) *' f(e)$
 En utilisant le symétrique de $f(e)$ à gauche, on obtient:
 $f(e)^{-1} *' f(e) = f(e)^{-1} *' f(e) *' f'(e)$
 $\iff e' = f(e)$
- Soit x un élément de G .
 $f(x * x^{-1}) = f(x) *' f(x^{-1})$
 Par ailleurs, $f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$
 Donc $f(x) *' f(x^{-1}) = e$
 On en déduit que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Propriété 2.3.1

- Si F est un sous-groupe de $(G, *)$ et si f est un homomorphisme de groupes de G dans G' ,
 Alors $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$
- Si H' est un sous-groupe de $(G', *')$ et si f est un homomorphisme de groupes de G dans G' ,
 Alors $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(G, *)$

- 1^{er} point: Montrer que $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$
 Donc montrer que $\forall (x', y') \in f(F), x' *' y'^{-1} \in f(F)$
 F non vide, donc $f(F)$ non vide.
 Soit x' et y' deux éléments de $f(F)$.

Donc $\exists(x, y) \in F$, $f(x) = x'$ et $f(y) = y'$. Soit x et y deux tels éléments.

$$x' *' (y')^{-1} = f(x) *' f(y)^{-1}$$

$$= f(x * y^{-1})$$

Or, F est un groupe, donc $x * y^{-1} \in F$, donc $x' *' (y')^{-1} \in f(F)$

Cela étant vrai pour tout x' et y' de $f(F)$, on en conclut que $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$.

- 2^{ème} point: Montrer que $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

– f est un homomorphisme de groupes donc $f(e) = e'$

De plus, $e' \in H'$ car H' est un sous-groupe de $(G, *)$

Donc $e \in f^{-1} < H' >$, donc $f^{-1} < H' >$ est non vide.

– Montrer que $\forall(x, y) \in G \times G$, $(x \in f^{-1} < H' > \text{ et } y \in f^{-1} < H' >) \Rightarrow x * y^{-1} \in f^{-1} < H' >$ Soit x et y deux éléments de $f^{-1} < H' >$.

Donc montrons que $x * y^{-1} \in f^{-1} < H' >$

Donc montrons que $f(x * y^{-1}) \in H'$

$f(x * y^{-1}) = f(x) * f(y)^{-1}$ car f est un homomorphisme de groupes .

Or: - $f(x) \in H'$ car $x \in f^{-1} < H' >$

- $f(y) \in H'$ car $y \in f^{-1} < H' >$.

- De plus, H' est un sous-groupe donc $f(y)^{-1} \in H'$

Sachant H' un sous-groupe, $f(x * y^{-1}) \in H'$

Ce raisonnement étant valable pour tout x, y de $f^{-1} < H' >$, on en déduit que $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(G, *)$ d'après la critère 2.

□

Corollaire 2.3.1

- L'image $f(G)$ est un sous-groupe de $(G', *')$
- $f^{-1} < \{e\} >$ est un sous-groupe de $(G, *)$. On l'appelle le noyau de f

Notation: $\ker(f) = f^{-1} < \{e\} >$

Propriété 2.3.2

Soit f un homomorphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(G', *')$.

Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$

① Supposons f injective.

Montrer que $\ker(f) = \{e\}$

– $\ker(f)$ est un sous-groupe de $(G, *)$, donc $\{e\} \subset \ker(f)$

– montrer que $\ker(f) \subset \{e\}$

Donc montrer que $\forall x \in G, x \in \ker(f) \Rightarrow x = e$

Soit x un élément de $\ker(f)$

Montrer que $x = e$

$x \in \ker(f)$, donc $f(x) = e'$

f est un homomorphisme, donc $f(e) = e'$

D'où $f(x) = f(e)$

Donc, sachant f injective, $x = e$

Donc $\ker(f) = \{e\}$

② Supposons que $\ker(f) = \{e\}$

Montrer que $\forall (x, y) \in G \times G, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Soit x et y deux éléments de G tels que $f(x) = f(y)$

$f(x) = f(y) \iff f(x) *' f(y)^{-1} = e'$

$\iff f(x * y^{-1}) = e'$

Or, $\ker(f) = \{e\}$

Donc $x * y^{-1} = e$

Donc $x = y$

Ce raisonnement étant valable pour tout x et y de G , f est injective.

□