EDL
Equations Differentielles Lineaires du second ordre

MPSI 2

1 Generalites

Définition 1.0.1
Soit $\mathcal{I}$ un intervalle reel. a,b,c,d des applications definies sur $\mathcal{I}$ a valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues sur $\mathcal{I}$. On appelle equation differentielle lineaire du second ordre toute relation du type :

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = d(x)$$

d'inconnue y

Définition 1.0.2
Une solution particuliere sur $\mathcal{I}$ de l'equation differentielle precedente est une application $\phi \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :
- *ϕ est deux foix derivable sur $\mathcal{I}$.*
- $\forall x \in \mathcal{I}, a(x)\, \phi''(x) + b(x)\, \phi'(x) + c(x)\, \phi(x) = d(x)$

Remarque : L'ensemble des solutions de l'equation differentielle lineaire du second ordre homogene

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = 0$$

a une structure d'espace vectoriel (non vide et stable par combinaisons lineaires).

2 Equation Differentielle Lineaire du second ordre a coefficients constants

2.1 Definitions

Définition 2.1.1
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que $a \neq 0$. Soit $d \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue sur $\mathcal{I}$. On appelle equation differentielle lineaire du second ordre a coefficients constants une relation du type :

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

2.2 Etude de l'equation homogene associee

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$
$$\text{avec } (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$$

Propriété 2.2.1
(Solutions reelles)
On suppose a, b, c reels et $a \neq 0$
Soit l'equation differentielle homogene associee :

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (2)$$

On considere l'equation $ar^2 + br + c = 0$ (E) d'inconnue r.
(E) s'appelle l'equation caracteristique associee a (2)
Cas 1 : *(E) admet deux solutions reelles distinctes r_1 et r_2.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

Cas 2 : *(E) admet une unique solution reelle r_0.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

Cas 3 : *(E) admet deux solutions complexes non reelles conjuguees $\alpha \pm \imath\beta$.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x}(a \cos \beta x + \imath \sin \beta x)$$

Propriété 2.2.2
(moins importante, solutions complexes)
On suppose a, b, c complexes et $a \neq 0$.
Cas 1 : *(E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

Cas 2 : *(E) admet une unique solution r_0.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_2 x}$$

Soit $(a,b,c) \in (C)^3$ et $a \neq 0$.
Soit l'equation differentielle homogene :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (2)$$

- Recherche d'une solution exponentielle.
  Soit $r \in \mathbb{C}$ fixe.
  Soit $z_0 : x \longmapsto e^{rx}$ une application deux foix derivable.

$$\begin{aligned} z_0(x) &= e^{rx} \\ z_0'(x) &= re^{rx} \\ z_0''(x) &= r^2 e^{rx} \end{aligned}$$

  z_0 est solution de (2) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, az_0''(x) + bz_0'(x) + cz_0(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, ar^2 + br + c = 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{rx} > 0 \end{aligned}$$

  Conclusion : z_0 est solution de (2) ssi r est racine de l'equation caracteristique.
- Determination des autres solutions.
  Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application deux foix derivable sur $\mathbb{R}$.
  Alors il existe une application u definie sur $\mathbb{R}$ a valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y(x) &= u(x)e^{rx} \\ y(x) &= e^{rx}u(x) \\ y'(x) &= e^{rx}\left(ru(x) + u'(x)\right) \\ y''(x) &= e^{rx}\left(r^2u(x) + 2ru'(x) + u''(x)\right) \end{aligned}$$

  y est solution de (2) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, a\left(r^2u(x) + ru'(x) + u''(x)\right) + b\left(ru(x) + u'(x)\right) + cu(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, au''(x) + (2ra+b)u'(x) + \left(ar^2 + br + c\right)u(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, au''(x) + (2ra+b)u'(x) = 0 \end{aligned}$$

  On pose $v = u'$ pour obtenir une equation differentielle d'ordre un.
  y est solution de (2) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, av'(x) + (2ra+b)v(x) = 0 \\ &\forall x \in \mathbb{R}, av'(x) = -\frac{2ra+b}{a}v(x) \\ &\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \lambda \exp\left(-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x\right) \end{aligned}$$

  Cas 1 : L'equation caracteristique admet deux racines r_1 et r_2.

On applique ce qui precede avec $r = r_1$ et $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.
y est solution de (2) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, && v(x) = \lambda e^{\left(-2r_1 + r_1 + r_2\right)x} \\
&\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, && v(x) = \lambda e^{\left(-r_1 + r_2\right)x} \\
&\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \exists \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, && u(x) = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{\left(r_2 - r_1\right)x} + \mu \\
&\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, && y(x) = \frac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x} \\
&\Longleftrightarrow \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, && y(x) = k_1 e^{r_2 x} + k_2 e^{r_1 x}
\end{aligned}$$

Cas 2: L'equation caracteristique admet une racine unique r_0.
Alors $r_0 = -\frac{b}{2a}$. On applique ce qui precede le cas 1 avec $r = r_0$.
y est solution de (2) sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, && v(x) = \lambda \\
&\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, && u(x) = \lambda x + \mu \\
&\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, && y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}
\end{aligned}$$

Conclusion : Ceci demontre :
- La propriete sur les solutions complexes
- Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la propriete sur les solutions reelles dans les deux premiers cas, en remplacant "$\exists \lambda \in \mathbb{C} / \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 / \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$" par "$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$"

$\square$

Structure de l'ensemble des solutions de (2)

Cas reel : $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$

L'ensemble des solutions reelles de (2) est un espace vectoriel reel de dimension deux dont une base est (z_1, z_2) non vide et stable par combinaisons lineaires a coefficients reels avec :

- $z_1 : x \longmapsto e^{r_1 x}$ et $z_2 : x \longmapsto e^{r_2 x}$ si l'equation caracteristique admet deux racines reelles r_1 et r_2
$$\mathcal{S} = \left\{ y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, y = k_1 z_1 + k_2 z_2 \text{ sur } \mathbb{R} \right\}$$
- $z_1 : x \longmapsto e^{r_0 x}$ et $z_2 : x \longmapsto x e^{r_0 x}$ si l'equation caracteristique admet une racine reelle unique r_0
$$\mathcal{S} = \left\{ \lambda z_1 + \mu z_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- $z_1 : x \longmapsto e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $z_2 : x \longmapsto e^{\alpha x} \sin \beta x$ si l'equation caracteristique admet deux racine complexes conjuguees $\alpha \pm \imath \beta$
$$\mathcal{S} = \left\{ A z_1 + B z_2, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Cas complexe : $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$

L'ensemble des solutions complexes de (2) est un espace vectoriel complexe de dimension deux dont une base est (z_1, z_2) avec :

- $z_1 : x \longmapsto e^{r_1 x}$ et $z_2 : x \longmapsto e^{r_2 x}$ si l'equation caracteristique admet deux racines r_1 et r_2
- $z_1 : x \longmapsto e^{r_0 x}$ et $z_2 : x \longmapsto xe^{r_0 x}$ si l'equation caracteristique admet une racine unique r_0

Remarque : Toute solution de (2) sur $\mathbb{R}$ existe de maniere unique comme combinaison lineaire de z_1 et z_2

2.3 Resolution de l'equation differentielle

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \quad (1)$$

$$\text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$$

$$d\colon \mathcal{I} \longmapsto \mathbb{K} \text{ continue}$$

2.3.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit y_0 une solution particuliere de (1) sur $\mathcal{I}$.
Soit y ube application definie sur $\mathcal{I}$ a valeurs dans $\mathbb{K}$, deux foix derivable sur $\mathcal{I}$. y est solution de (1) sur $\mathcal{I}$:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = b(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = ay_0''(x) + by_0'(x) + cy_0(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathcal{I}, a(y-y_0)''(x) + b(y-y_0)'(x) + c(y-y_0)(x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow y - y_0 \text{ est solution de } (2) \text{ sur } \mathcal{I} \\
&\Longleftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, y - y_0 = \lambda z_1 + \mu z_2 \text{ sur } \mathcal{I} \\
&\Longleftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in \mathcal{I}, y(x) = y_0(x) + \lambda z_1(x) + \mu z_2(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble S des solutions de (1) sur $\mathcal{I}$ est :

$$S = \left\{ y_0 + \lambda z_1 + \mu z_2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

Structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent l'ensemble S des solutions de l'equation differentielle homogene associee (2).

2.3.2 Etude de d

- Si d est une fonction polynomiale, on cherche y_0 sous forme polynomiale de degre $\deg(d) +$ un nombre dependant de a, b et c.