

# Fonctions Usuelles

## Fonctions Puissance

MPSI 2

## 1 Définition

### 1.1 Définition

#### Définition 1.1.1

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$f_\alpha: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

$f_\alpha$  s'appelle la fonction puissance  $\alpha$

#### Propriété 1.1.1

Pour tout  $(x, y)$  strictement positifs, pour tout  $(\alpha, \beta)$  réels:

- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

### 1.2 Étude de $f_\alpha$

**Dérivabilité**  $f$  est dérivable par composée de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln(x)) \\ &= \alpha \exp((\alpha - 1) \ln(x)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

#### Etude des limites

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x))$$

- Si  $\alpha < 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$
- Si  $\alpha > 0$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$

**De quelle manière  $f_\alpha$  tend-t-elle vers  $+\infty$ ?**

$$\text{On étudie } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$$

$$\text{Or } \frac{f_\alpha(x)}{x} = \exp((\alpha - 1) \ln(x))$$

$$- \text{ Si } 0 < \alpha < 1 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = 0,$$

Donc  $\mathcal{C}_{f_\alpha}$  admet une **branche parabolique de direction asymptotique  $Ox$**

$$- \text{ Si } 1 < \alpha \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \infty,$$

Donc  $\mathcal{C}_{f_\alpha}$  admet une **branche parabolique de direction asymptotique  $Oy$**

**Etude en 0**

- Si  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = +\infty$
- Si  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$

Dans ce cas, notons  $\tilde{f}_\alpha$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$\tilde{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

D'après le taux d'accroissement:

- Si  $\alpha > 1$ ,  $\tilde{f}'_\alpha(0) = 0$ , donc  $\mathcal{C}_{\tilde{f}_\alpha}$  admet une demi-tangente d'équation  $y = 0$
- Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp((\alpha - 1)\ln(x)) = +\infty$ , donc  $\mathcal{C}_{\tilde{f}_\alpha}$  admet une demi-tangente d'équation  $x = 0$

**2 Fonctions Puissance Vs. Fonctions racines<sup>n</sup>**

- Soit  $n$  un entier **pair non nul**

$$g_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^n$$

$g_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$

Son application réciproque s'appelle la fonction **racine<sup>n</sup>** :  $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

- Soit  $n$  un entier **impair non nul**

$$g_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^n$$

$g_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$

Son application réciproque s'appelle la fonction **racine<sup>n</sup>** :  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

- Par ailleurs, pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $f_{\frac{1}{n}}$  est l'application réciproque de

$$f_n: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

Donc par unicité de la réciproque on peut écrire:  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

**3 Théorème de comparaison****Propriété 3.0.1**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\exp(x))^\alpha}{x^\beta} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\beta (\exp(x))^\alpha = 0$

- Pour  $t \geq 1$ , on a:  $0 < \sqrt{t} \leq t$

$$0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Donc pour  $x \geq 1$  on a: 
$$0 \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq 2 \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\iff 0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$

$$\iff 0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x} - 2}{x}$$

Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

- Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs. Pour  $x > 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} &= \left( \frac{\ln(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta \\ &= \left( \frac{\frac{\beta}{\alpha} \ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta \\ &= \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^\beta \left( \frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta \end{aligned}$$

de plus:

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$$

$$- \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$- \lim_{u \rightarrow 0} u^\beta = 0$$

Donc par composées de limites,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$

- Passage à l'exponentielle et passage à l'inverse.
- etc.

□