

# Fonctions Numériques

## Limites de fonctions

### MPSI 2

## 1 Définitions

### Définition 1.0.1

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tel que  $x_0 \in I$  ou  $x_0$  est une extrémité de  $I$ .

Soit  $l \in \mathbb{R}$

•  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

### Définition 1.0.2

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tel que  $x_0 \in I$  ou  $x_0$  est une extrémité de  $I$ .

•  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ :

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$$

•  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ :

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < K$$

### Propriété 1.0.1

Si  $x_0 \in I$ , alors la seule limite éventuelle de  $f(x)$  en  $x_0$  est  $f(x_0)$

On suppose qu'il existe  $l$  dans  $\mathbb{R}$ , tel que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$

HA  $l \neq f(x_0)$

①  $l \in \mathbb{R}$

Alors  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Supposons  $l > f(x_0)$

Posons  $\varepsilon = \frac{l - f(x_0)}{2}$

Alors  $f(x_0) \notin ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ .

Soit  $\alpha$  vérifiant les conditions de limites.

Donc  $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

En particulier, avec  $x = x_0$ , on a  $f(x_0) \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

On a donc une contradiction.

②  $l = +\infty$

Alors  $\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$

Soit  $K$  un réel strictement supérieur à  $f(x_0)$

Soit  $\alpha$  un réel vérifiant les condition de limites.

Donc  $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$

En particulier, avec  $x = x_0$ , on a  $f(x_0) > K$

On a donc une contradiction.

③  $l = -\infty$

On procède de même.

**Conclusion:**  $l = f(x_0)$

□

### Définition 1.0.3

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- $f(x)$  tend vers  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ :

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) > K$$

### Propriété 1.0.2

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

Soit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $x_0$  soit un élément de  $I$  ou une extrémité de  $I$ .

Soit  $(l, l') \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ .

Si  $f$  admet  $l$  et  $l'$  comme limite en  $x_0$ , alors  $l = l'$

**Notations:**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} f(x) = l$  et  $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}]{} l$

Cas où  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $l \in \mathbb{R}$  et  $l' \in \mathbb{R}$

① :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

② :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$

Supposons  $l \neq l'$ , et  $l > l'$

Posons  $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$

On a donc  $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \cap ]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[ = \emptyset$

Soit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  vérifiant ① et ②.

Soit  $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$

Alors  $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon \text{ et } |f(x) - l'| < \varepsilon)$

Autrement dit:  $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \in ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[ \cap ]l' - \varepsilon, l' + \varepsilon[$

On a donc une contradiction.

**Conclusion:**  $l = l'$

□

### Remarques:

- Soit  $l \in \mathbb{R}$ . Alors  $f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} l \iff f(x) - l \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} 0$
- Soit  $l \in \mathbb{R}^{+*}$ . Alors  $f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} l \iff \frac{f(x)}{l} \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} 1$
- Soit  $x_0 \in I$ . Alors  $f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} l \iff f(x_0 + h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{x_0 + h \in I} l$

### Propriété 1.0.3

On suppose que  $f(x)$  tend vers  $l \in \overline{\mathbb{R}}$  quand  $x$  tend vers  $x_0 \in I$ .

- Si  $f(x) \in [a, b]$  au voisinage de  $x_0$ , alors  $l \in [a, b]$ .
- Au voisinage de  $x_0$ :  $l - 1 < f(x) < l + 1$
- Si  $l \neq 0$  alors au voisinage de  $x_0$ :  $\frac{|l|}{2} < |f(x)| < \frac{3|l|}{2}$

1<sup>er</sup> point dans le cas où  $x_0 = +\infty$

Donc ①:  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

On suppose  $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) \in [a, b]$

Montrer que  $l \in [a, b]$

HA  $l \notin [a, b]$ . Donc  $l < a$  ou  $l > b$ .

- Si  $l < a$

Soit  $\varepsilon = a - l$  (car  $l < a$ )

Donc ②:  $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) \in ]2l - a, a[$

Soit  $k_1$  et  $k_2$  deux réels vérifiant ① et ②.

On pose  $k = \min\{k_1, k_2\}$

D'après ① et ②:  $\forall x \in I, x > k \Rightarrow f(x) \in ]2l - a, a[ \cap [a, b]$

Or,  $]2l - a, a[ \cap [a, b] = \emptyset$

On a donc une contradiction.

- Si  $l > b$ , on procède de même.

On conclut que  $l \in [a, b]$

2<sup>ème</sup> point: On revient aux définitions avec  $\varepsilon = 1$

3<sup>ème</sup> point: On revient aux définitions et on prend  $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$

□

**Propriété 1.0.4**

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ , avec  $l \in \mathbb{R}$ ,  
Alors  $f$  est bornée au voisinage de  $x_0$ .
- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ , avec  $l \in \mathbb{R}^*$ ,  
Alors  $|f(x)|$  est minoré par un nombre strictement positif au voisinage de  $x_0$ .
- Si  $f(x)$  est de signe constant au voisinage de  $+\infty$ , et si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ ,  
Alors  $l$  est du même signe.

Utilisation des propriétés précédentes. □

**Définition 1.0.4**

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

Soit  $x_0 \in I$ .

On note  $I^+ = I \cap ]x_0, +\infty[$  et  $I^- = I \cap ]-\infty, x_0[$

- On appelle limite à droite de  $f(x)$  en  $x_0$  la limite finie, si elle existe, de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  sur  $I^+$
- On appelle limite à gauche de  $f(x)$  en  $x_0$  la limite finie, si elle existe, de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$  sur  $I^-$

**Notations:**  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I^+}} f(x) = f(x_0^+)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I^-}} f(x) = f(x_0^-)$

**Propriété 1.0.5**

Soit  $x_0 \in I$

- Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ , alors  $f(x_0^+) = f(x_0^-) = l$ .
- Si  $f(x)$  admet une limite à droite et à gauche en  $x_0$ , et si  $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$ ,  
Alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$ .

1<sup>er</sup> point: On suppose  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$   
Alors:  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$   
Et:  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$   
Donc  $f(x)$  admet une limite à droite et à gauche en  $x_0$ , et  $f(x_0^+) = f(x_0^-) = l$

2<sup>ème</sup> point: On suppose que  $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$ .

Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$  fixé.

On a:  $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Et:  $\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Soit  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux tels réels.

Soit  $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$

D'où:  $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Par ailleurs, pour  $x = x_0$ :  $|x - x_0| < \alpha$  et  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Donc:  $\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ , on conclut que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$

□

## 2 Limites et continuité

### Définition 2.0.5

Soit  $I$  un intervalle non vide.

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $I$ .

Soit  $x_0$  un élément de  $I$ .

On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  si:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

**Remarque:** on peut prolonger certaines fonctions par continuité.

## 3 Limite de fonction et convergence de suites

### Propriété 3.0.6

**Caractérisation séquentielle de la limite**

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

Soit  $x_0$  et  $l$  deux éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$

On a équivalence entre:

- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$
- Pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $I$  convergeant vers  $x_0$ ,  $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

- On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ .

Donc ① :  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $I$  convergeant vers  $x_0$ .

Montrer que  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Soit  $\alpha$  un réel vérifiant ① pour  $\varepsilon$ .

De plus,  $(x_n)$  converge:  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \alpha$

Soit  $n_0$  un tel entier.

D'où:  $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|x_n - x_0| < \alpha) \Rightarrow (|f(x_n) - l| < \varepsilon)$

Donc  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

C'est vrai pour toute suite d'éléments de  $I$  convergeant vers  $x_0$ ,

Donc la proposition 2 est vérifiée.

- On suppose que pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $I$  convergeant vers  $x_0$ , on ait:  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

**HA** Supposons que  $f(x)$  ne tende pas vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $x_0$

Alors  $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in I, |x - x_0| < \alpha$  et  $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

Soit  $\varepsilon$  un tel réel.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $\alpha = \frac{1}{n}$ :  $\exists x \in I, |x - x_0| < \alpha$  et  $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

Soit  $x_n$  un tel réel.

On procède de même pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ . On construit donc une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

On a: •  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite d'éléments de  $I$

•  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x_0$

•  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas vers  $l$

On contredit l'hypothèse de départ, donc HA est fausse.

Donc  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

□

## 4 Liens entre notion de limite et de monotonie

### Propriété 4.0.7

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application monotone sur  $I$ .

Alors  $f(x)$  admet une limite à droite et à gauche en tout point de  $I$ .

Soit  $x_0$  un élément de  $I$  qui ne soit pas une extrémité de  $I$

- Soit  $I^+ = I \cap ]x_0, +\infty[$  et  $I^- = I \cap ]-\infty, x_0[$

$I^+$  et  $I^-$  ne sont pas vides car  $x_0$  n'est pas une extrémité de  $I$ .

On considère  $A^+ = f(I^+)$  et  $A^- = f(I^-)$

$f$  est une application,  $I^+$  et  $I^-$  ne sont pas vides, donc  $A^+$  et  $A^-$  ne sont pas vides.

$f$  est croissante, donc pour tout  $x$  de  $I$ :

$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$

Ainsi,  $f(x_0)$  est un minorant de  $A^+$  et un majorant de  $A^-$ .

Donc  $A^+$  admet une borne inf notée  $M$ , et  $A^-$  admet une borne sup notée  $m$ .

On a ainsi  $m \leq f(x_0) \leq M$

- Montrer que  $f(x)$  admet une limite à droite en  $x_0$ , et que  $f(x_0^+) = M$   
 Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$  fixé.  
 Critère de borne inf avec  $\varepsilon$ :  
 $\exists x_1 \in I^+, M \leq f(x_1) < M + \varepsilon$   
 Soit  $x_1$  un tel réel.  
 Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, (x_0 < x < x_1) \Rightarrow M \leq f(x) \leq f(x_1) < M + \varepsilon$   
 Posons  $\alpha = x_1 - x_0$   
 Alors  $\begin{cases} x_0 < x < x_1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x - x_0 < \alpha \\ x \in I^+ \end{cases} \iff \begin{cases} |x - x_0| < \alpha \\ x \in I^+ \end{cases}$   
 Finalement:  $\forall x \in I^+, (|x - x_0| < \alpha) \Rightarrow (M \leq f(x) < M + \varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - M| < \varepsilon)$   
 Ce raisonnement est valable pour tout  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  
 Donc on conclut que  $f(x)$  admet une limite à droite, et que  $f(x_0^+) = M$
- De même, on montre que  $f(x_0^-)$  existe et vaut  $m$ .  
 Ce raisonnement est vrai en tout point  $x_0$  de  $I$ .  
 On en conclut que  $f(x)$  admet une limite à droite et à gauche en tout point de  $I$ .  $\square$

### Propriété 4.0.8

Soit  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique croissante.

De deux choses l'une:

- $f$  admet un majorant  $K$ .  
 Alors  $f(x)$  admet une limite  $l$  en  $+\infty$ , et  $l \leq K$
- $f$  n'est pas majorée.  
 Alors  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .