Complexes
Applications Geometriques des Complexes

MPSI 2

1 Modules et Arguments

Soit A, B et M trois points du plan deux a deux distincts d'affixe respectives a, b et z.

- $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \frac{\left\|\vec{AM}\right\|}{\left\|\vec{BM}\right\|} = \frac{AM}{BM}$
- Soit r un reel strictement positif :

$$\begin{array}{ll} \{z \in \mathbb{C}, |z-a| = r\} & \text{est le cercle de centre } A \text{ et de rayon } r \\ \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\} & \text{est le disque ouvert de centre } A \text{ et de rayon } r \end{array}$$

- $$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) &\equiv \arg(z-a) - \arg(z-b) \ \ [2\pi] \\ &\equiv mes\left(\vec{i}, \vec{AM}\right) - mes\left(\vec{i}, \vec{BM}\right) \ \ [2\pi] \\ &\equiv mes\left(\vec{BM}, \vec{AM}\right) \ \ [2\pi] \\ &\equiv mes\left(\vec{MB}, \vec{MA}\right) \ \ [2\pi] \end{aligned}$$

2 Interpretation geometrique des operations dans $\mathbb{C}$

- $z \longmapsto z + b$

$$\begin{array}{ll} \text{Notons } M & \text{l'image affine de } z \\ M' & \text{l'image affine de } z' \\ B & \text{l'image affine de } b \end{array}$$

$$\begin{aligned} z' = z + b &\iff z' - z = b \\ &\iff \vec{MM'} = \vec{OB} \end{aligned}$$

Translation par le vecteur $\vec{OB}$.

- $z \longmapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}$

Cas 1 : $a \in \mathbb{R}^*$

$$z' = az \iff \vec{OM'} = a\vec{OM}$$

M' est l'image de M par l'homothetie de centre $\mathcal{O}$ et de rapport $|a|$.

Cas 2 : $|a| = 1 \quad \exists\theta \in \mathbb{R}, a = e^{\imath\theta}$

$$\begin{aligned} z' = az &\iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') \equiv \arg(a) + \arg(z) \quad [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} OM' = OM \\ mes\left(\vec{OM}, \vec{OM'}\right) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

M' est l'image de M par la rotation de centre $\mathcal{O}$ et d'angle de mesure θ.

Cas 3 : $a \in \mathbb{C}^*$

M' est l'image de M par la similitude de centre $\mathcal{O}$, de rapport $|a|$ et d'angle de mesure θ.

Retour sur l'equation $z^n = a$

$$z^n = a \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{\imath \frac{\alpha}{n}} \omega_k$$
$$z \longmapsto z_0 \times z$$

Les images affines des solutions de $z^n = a$ sont les images par la similitude de centre $\mathcal{O}$, de rapport $\rho_0^{\frac{1}{n}}$ et d'angle de mesure $\frac{\alpha}{n}$ des images affines des racines^n de l'unite.

Plus generalement

- L'homothetie de centre $\mathcal{A}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est la transformation du plan affine qui a un point M associe le point M' tel que $A\vec{M}' = \lambda A\vec{M}$.
  Expression analytique de l'homothetie :

$$\begin{aligned} A\vec{M}' = \lambda A\vec{M} &\iff \begin{cases} x' - x_0 = \lambda (x - x_0) \\ y' - y_0 = \lambda (y - y_0) \end{cases} \\ &\iff z' - a = \lambda (z - a) \\ &\iff z' = \lambda (z - a) + a \end{aligned}$$

- La rotation de centre $\mathcal{A}$ et d'angle de mesure θ est la transformation du plan affine qui a un point M associe le point M' :

$$\begin{cases} AM = AM' \\ mes\left(A\vec{M}, A\vec{M}'\right) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z - a| = |z' - a| \\ \arg(z' - a) \equiv \arg(z - a) + \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

- $z' = az + b \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2, b \neq 0$
  Recherche de points fixes : $z_0 = az + b$

$$z = az + b \iff (a - 1) z = -b$$

Cas 1 : $a = 1 \Rightarrow 0 = -b$

On a $b \neq 0$, donc il n'y a pas de points fixes.

Cas 2 : $a \neq 1$

$$\begin{aligned} z = az + b \iff z &= \frac{-b}{a - 1} \\ &= \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Il existe un unique point fixe $x_0 = \frac{b}{1-a}$.

$$\begin{cases} z' = az + b \\ z_0 = az_0 + b \end{cases} \iff z' - z_0 = a (z - z_0)$$

$\Rightarrow$ Similitude de centre z_0, de rapport $|a|$ et d'angle de mesure $\arg(a)$.