

Suites Réelles

Opérations sur les suites

MPSI 2

1 Structure d'algèbre des suites

Soit \mathcal{E} l'ensemble des suites réelles.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Addition

On pose $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(\mathcal{E}, +)$ est un groupe abélien (commutatif):

- Il possède un élément neutre: $(0)_{n \in \mathbb{N}}$
- Il possède un élément symétrique: $-u_n = (-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Multiplication

On pose $u \times v = (u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

\times est associative

\times est distributive sur $+$

\times admet un élément neutre: $(1)_{n \in \mathbb{N}}$

On dit que $(\mathcal{E}, +, \times)$ est un anneau commutatif (car pas complètement symétrique)

Multiplication externe

On pose $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u = (\lambda \times u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a de plus $\lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (v \cdot \lambda)$

On dit que $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

On dit que $(\mathcal{E}, +, \times, \cdot)$ est une algèbre commutative.

Propriété 1.0.1

On note \mathcal{E}_b l'ensemble des suites bornées.

On note \mathcal{E}_c l'ensemble des suites convergentes.

On a:

- $\mathcal{E}_c \subset \mathcal{E}_b \subset \mathcal{E}$
- $(\mathcal{E}_b, +, \times, \cdot)$ et $(\mathcal{E}_c, +, \times, \cdot)$ sont des algèbres commutatives.

Limites Réelles

Propriété 1.0.2

- Si u converge vers l et v converge vers l' , alors $u + v$ converge vers $l + l'$.
- Si u converge vers l et v converge vers l' , alors $u \times v$ converge vers $l \times l'$.
- Si u converge vers l et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot u$ converge vers λl

- Si u converge vers $l \neq 0$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ ait un sens, et $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{l}$
- Si u converge vers l et v converge vers $l' \neq 0$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ ait un sens, et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{l}{l'}$

- **Premier point:**

Utiliser les définitions des limites avec $\frac{\varepsilon}{2}$, à ε fixé.

Puis, avec l'addition des deux, utiliser l'inégalité triangulaire.

- **Deuxième point:**

Soit u et v tendant vers l et l' .

Montrer que $u v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l l'$

Soit ε un réel strictement positif.

Montrer que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n v_n - l l'| < \varepsilon$

De plus: $|u_n v_n - l l'| = |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - l l'|$ u est convergente, donc bornée.

$$= |u_n(v_n - l) + l'(u_n - l)|$$

$$|u_n v_n - l l'| \leq |u_n| |v_n - l| + |l'| |u_n - l|$$

Soit M le majorant de $|u|$.

Donc $|u_n v_n - l l'| \leq M |v_n - l| + |l'| |u_n - l|$

On utilise ensuite la convergence de u avec $\frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$ et de v avec $\frac{\varepsilon}{2(M+1)}$

Donc: $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$ Soit n_1 et n_2 deux tels

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$$

réels. Posons $n_0 = \max(\{n_1, n_2\})$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n v_n - l l'| < M \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |l'| \frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Ce raisonnement étant vrai pour tout ε , $u v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l l'$

- **Quatrième point:**

Soit u une suite tendant vers un réel l différent de 0.

– Démontrer l'existence de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow \frac{|l|}{2} < u_n < \frac{3|l|}{2}$$

Donc il existe un rang n_0 tel que l'inverse de u_n soit défini.

– Montrer que: $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ converge vers $\frac{1}{l}$

$$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right|$$

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l - u_n}{l u_n} \right| = \frac{|l - u_n|}{|u_n| |l|}$$

Or $|u_n| > \frac{|l|}{2}$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| < \frac{\frac{|u_n - l|}{2} \times |l|}{|l|^2} \leq \frac{2}{|l|^2} |u_n - l|$$

On applique la convergence de u avec $\frac{|l|^2}{2} \varepsilon$

$$\text{Donc } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| < \frac{2}{|l|^2} \times \frac{|l|^2}{2} \varepsilon \leq \varepsilon$$

Donc il existe un rang n_1 à partir duquel $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right|$ est inférieur à ε

Cela étant vrai pour tout ε , $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$

□

Corollaire 1.0.1

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \iff u_n - l \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\iff \frac{u_n}{l} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Limites Infinies

Propriété 1.0.3

Somme:

- Si $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
 - Si v est minorée dans \mathbb{R} , $u + v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
 - En particulier si $v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ou si $v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ avec $l \in \mathbb{R}$
 - On ne peut pas conclure immédiatement si $v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
- De même avec $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

Produit

- Si $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
 - Si v n'admet pas 0 pour limite, et si v_n garde un signe constant à partir d'un certain rang, alors:
 - Si $v_n < 0$, $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
 - Si $v_n > 0$, $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
 - Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on ne peut pas conclure a priori,
 - Sauf si** $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n = 0$ Dans ce cas, $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- De même avec $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

Inverse

- Si $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors il existe un rang n_0 à partir duquel $\left(\frac{1}{u_n} \right)_{n \geq n_0}$ existe et
 - $\left(\frac{1}{u_n} \right)_{n \geq n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 - Cela s'applique aussi à $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
- Si $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- Si à partir d'un certain rang n_0 , tous les u_n sont non nuls, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ existe.
- Si de plus u_n garde un signe constant à partir d'un rang $n_1 \geq n_0$, $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \rightarrow +\infty} \longrightarrow \pm\infty$ selon le signe de u_n

Inverse

Montrer que si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et, à partir d'un certain rang, $u_n < 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Soit u une suite convergeant vers 0 et strictement négative à partir d'un rang n_1 .

Donc: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$

Soit n_2 un tel réel, ε un réel positif, et $n_3 = \max(\{n_1, n_2\})$

Pour tout n supérieur à n_3 , $\frac{1}{u_n}$ existe.

Montrer que $\frac{1}{u_n}$ diverge vers $-\infty$

Soit K un réel.

- Si $K \geq 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_3 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < 0 \leq K$
- Si $K < 0$

En appliquant la convergence de u avec le réel $\frac{1}{|K|}$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_4 \Rightarrow -\frac{1}{|K|} < u_n < \frac{1}{u_n}$

Soit n_0 un tel réel.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 &\Rightarrow \frac{1}{K} < u_n \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n} < K \end{aligned}$$

Ce raisonnement étant valable pour tout K réel, $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ □

Propriété 1.0.4

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}, (\forall n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q})$ et $(q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x)$

Soit x un réel.

- Existence de la suite:

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}

Donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists q \in \mathbb{R}, x - \varepsilon < q < x + \varepsilon$

Pour tout n non nul, posons $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Soit q_n un rationnel vérifiant $q_n \in \mathbb{Q}, x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}$

Ce raisonnement étant valable pour tout n non nul, on obtient une suite q sur \mathbb{N}^* à valeurs dans \mathbb{Q}

- Convergence vers x

Soit ε un réel strictement positif.

$(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Soit n_0 un tel entier.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |q_n - x| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Cela étant valable pour tout ε strictement positif, on conclut que q converge vers x

□

2 Relations de comparaison

Propriété 2.0.5

Soit u et v deux suites telles que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$

- Si $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- Si $v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, alors $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$
- Si u et v à termes positifs à partir d'un certain rang, et si $v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Propriété 2.0.6

Propriété d'encadrement

Soit u, v et w trois suites telles que $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$

Si u et w convergent vers une même limite l , alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

Définition 2.0.1

Soit u et v deux suites réelles.

- $u_n = O(v_n)$: " u_n est Grand O de v_n "

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M |v_n|$$

- $u_n = o(v_n)$: " u_n est Petit o de v_n "

$$\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon_n |v_n|)$$

Propriété 2.0.7

Si $u_n = O(v_n)$ et $w_n = O(v_n)$

alors $u_n + w_n = O(v_n)$

Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$
 alors $u_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$

Remarque:

- ① $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n) \iff$ la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 On dit que v domine u .
- ② $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \iff$ la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 On dit que u est négligeable devant v

Définition 2.0.2

Soit u et v deux suites réelles.

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$: " u est équivalente à v ."

$$\exists (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$$

Remarque:

- Si v_n tous non nuls à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
- "Être équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites dont pour tout rang il existe un terme de rang supérieur non nul.

Propriété 2.0.8

Soit u et v deux suites réelles.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et si $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ et $l \in \mathbb{R}^*$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

Remarque:

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n &\iff \exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}, (\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n) \\ &\iff \exists \varepsilon \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}, (\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n = \varepsilon_n v_n) \\ &\iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \end{aligned}$$

Propriété 2.0.9

Soit u , v , x et y quatre suites réelles.

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y_n$
alors $u_n x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n y_n$
- Si de plus x_n et y_n tous non nuls à partir d'un certain rang,
alors $\frac{u_n}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{y_n}$

Remarque: ce n'est généralement pas compatible avec l'addition.