Suites Réelles
Brève extention aux autres suites
MPSI 2

1 Familles indexées par $\mathbb{Z}$

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$
On se ramène à l'étude de deux suites:
$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_n = c_n \\ b_n = c_{-n} \end{cases}$

2 Suites a valeurs complexes

On a: $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & z_n \end{array}$
Avec $z_n = x_n + i\,y_n$, x et y deux suites réelles composantes.

Définition 2.0.1
Soit z une suite a valeurs complexes, avec $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = x_n + i,y_n$
On dit que z converge vers $a + i\,b$ si et seulement si x tend vers a et y tend vers b.

Propriété 2.0.1
z converge vers α ssi $(|z_n - \alpha|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

① Supposons que z converge vers $\alpha = a + i\,b$
Montrer que $(|z_n - \alpha|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0
$|z_n - \alpha| = |x_n - a + i(y_n - b)|$
$\Rightarrow 0 \leqslant |z_n - \alpha| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|$
Or, x tend vers a et y tend vers b
Donc par encadrement, on a: $(|z_n - \alpha|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
② Supposons que $(|z_n - \alpha|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Montrons que z converge vers $\alpha = a + i\,b$
Sachant que $z = x + i\,y \Rightarrow (x \leqslant |x| \leqslant |z|)$ et $(y \leqslant |y| \leqslant |z|)$
On obtient: $\begin{cases} \\ 0 \leqslant |x_n - a| \leqslant |z_n - \alpha| \\ 0 \leqslant |y_n - b| \leqslant |z_n - \alpha| \end{cases}$
Donc par encadrement, x tend vers a et y tend vers b.
□

Remarque: une suite complexe est bornée si son module est majoré.

Propriété 2.0.2
Si z converge vers λ, alors:
•$|z_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\lambda|$
•$\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\lambda}$

Propriété 2.0.3
Soit z une suite complexe bornée.
Alors il existe une suite extraite de z convergente.

- D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de x convergente.
  Soit $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite, et l_1 sa limite.
- Notons $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = y_{\phi(n)}$
  y est bornée, donc v est bornée.
  D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de v convergente.
  Soit $(v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite, et l_2 sa limite.
  $\phi \circ \psi$ est définie dans $\mathbb{N}$ a valeurs dans N et strictement croissante
  Donc $(y_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de y et convergeant vers l_2.
- $(x_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de x, Donc elle converge vers l_1
- Donc: $\begin{cases} x_{\phi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1 \\ y_{\phi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2 \end{cases}$

Donc par définition de la convergence complexe, $z_{\phi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1 + i\,l_2$

□