Suites Réelles
Généralités

MPSI 2

1 Droite numrique acheve $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.0.1
On note $\overline{\mathbb{R}}$ la runion de $\mathbb{R}$ et de deux lments distincts: $-\infty$ et $+\infty$
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- On peut prolonger partiellement les lois internes $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$, mais il existe des opration indfinies.
- On peut prolonger la relation d'ordre naturelle de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$: $\overline{\mathbb{R}}$ est ordonn.

Utilisation: une suite tend vers un lment de $\overline{\mathbb{R}}$

2 Dfinitions

Définition 2.0.2
On appelle suite relle toute application $\phi\colon \begin{array}{ll} \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ n & \longmapsto \phi(n) \end{array}$

Une suite relle est une famille d'lments indexe par $\mathbb{N}$
Notations: $\begin{array}{l} u_n = \phi(n) \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \phi \end{array}$

Définition 2.0.3
On appelle ensemble des valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sous ensemble de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = u_n\}$$

Définition 2.0.4
On dit que u est une suite monotone si ϕ est monotone.
De même avec croissante et dcroissante.

Définition 2.0.5
On dit que u est majore si A est major dans $\mathbb{R}$
De même avec minore et borne.

3 Notations et limites

3.1 Limites relles

Définition 3.1.1
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite relle, et l un rel.
On dit que u converge vers l si pour tout intervalle I centr en l, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n sont dans I:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

Propriété 3.1.1
Si u converge vers un l rel, alors l est unique.

Utiliser les dfinitions, raisonner par l'absurde avec $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$ $\square$