Dérivabilité
Théorme de Rolle et applications

MPSI 2

1 Extremums relatifs

Définition 1.0.1
Soit I un intervalle, soit $x_0 \in I$.
Soit $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.
On dit que f présente un extremum relatif en x_0 sur I si la quantité $f(x) - f(x_0)$ garde un signe constant au voisinage de x_0.

Propriété 1.0.1
Si x_0 n'est pas une borne de I, si f présente un extremum relatif en x_0 et si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

2 Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Théorème de Rolle
Soit f une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

3 Théorème des accroissements finis

Théorème des accroissements finis
Soit f une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a)$

4 Conséquences du Théorème des accroissements finis

4.1 Inégalité des accroissements finis

Propriété 4.1.1
Soit f une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et de dérivée bornée sur $]a,b[$.

$$\exists\,(k,K)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\,]a,b[\,, k\leq f'(x)\leq K$$

Alors : $k\times(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq K\times(b-a)$.

4.2 Théorème de prolongement

Propriété 4.2.1
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
On suppose f' continue sur $]a,b[$ et admet des limites finies en a et en b.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

4.3 Fonctions Lipschitziennes

Sous les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis, f est lipschitzienne.

4.4 Variations d'une fonction

Propriété 4.4.1
Soit f une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Soit $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$. Alors :
- *f est croissante sur $[\alpha,\beta]$ si et seulement si $f'\geq 0$ sur $]\alpha,\beta[$.*
- *f est décroissante sur $[\alpha,\beta]$ si et seulement si $f'\leq 0$ sur $]\alpha,\beta[$.*
- *f est constante sur $[\alpha,\beta]$ si et seulement si $f'=0$ sur $]\alpha,\beta[$.*

4.5 Application au calcul de primitive

Définition 4.5.1
Soit f une fonction numérique. On dit que F est une primitive de f sur $[a,b]$ si F est une fonction dérivable sur $[a,b]$ et si $F'=f$ sur $[a,b]$.

Propriété 4.5.1
Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur $[a, b]$. Alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [a, b], F_2(x) - F_1(x) = \lambda$$