

Fonctions Numériques

Généralités

MPSI 2

Définition 0.0.1

On appelle Fonction numérique toute application de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}, G)$ où:

- I est un intervalle réel.
- G est un graphe de I dans \mathbb{R} associé à cette application.

On écrit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)$$

Notation: $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de I vers \mathbb{R} .

1 Opérations

Soit f et g deux fonctions numérique définies sur I .

On pose : • $f + g: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) + g(x)$$

• $f \times g: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) \times g(x)$$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \lambda \times f(x)$$

On définit ainsi deux lois internes et une loi externe: $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ est une algèbre commutative.

Cela signifie que : • $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif.

• $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

$$\bullet \forall (f, g, \lambda) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}, \lambda(f \times g) = (\lambda f) \times g = f \times (\lambda g)$$

Notations:

• $0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})}$ désigne l'application : $I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 0$$

• Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on note $-f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -f(x)$$

• Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in I, f(x) \neq 0$,

Alors on note $\frac{1}{f}: I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$

2 Relation d'ordre

Définition 2.0.2

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur I .

On note $f \leq g \iff \forall x \in I, f(x) \leq g(x)$

On définit alors une relation d'ordre partielle sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Définition 2.0.3

- On dit que f est positive sur I si:
 $\forall x \in I, f(x) \geq 0$
 On note alors $f \geq 0$
- On procède de manière analogue pour $f > 0$

Propriété 2.0.1

Soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions numériques définies sur I .

- $f_1 \leq f_2$ et $g_1 \leq g_2 \implies f_1 + g_1 \leq f_2 + g_2$
- $(g_1 \geq 0 \text{ et } f_1 \geq f_2) \implies f_1 \times g_1 \leq f_2 \times g_1$

Cela découle du fait que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ soit un corps totalement ordonné. □

Définition 2.0.4

Soit f une fonction numérique définie sur I .

On pose $f^+ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f^- : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

f^+ et f^- sont les parties positive et négative de f .

Remarques:

- f^+ et f^- sont toutes deux positives.
- $f = f^+ - f^-$
- $|f| = f^+ + f^-$

Définition 2.0.5

Soit f une fonction numérique définie sur I .

L'image de f , $F(I)$, est l'ensemble :

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y\}$$

Définition 2.0.6

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- On dit que f est bornée sur I si $f(I)$ est borné.
 $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(I) \subset [a, b]$
- On dit que f est majorée sur I si $f(I)$ est majoré.
 $\exists K \in \mathbb{R}, f \leq K$
- On dit que f est minorée sur I si $f(I)$ est minoré.
 $\exists k \in \mathbb{R}, k \leq f$

Définition 2.0.7

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- Si f est majorée sur I , on appelle borne supérieure de f sur I la borne supérieure de $f(I)$
- Si f est minorée sur I , on appelle borne inférieure de f sur I la borne inférieure de $f(I)$

Notation: $\sup_{x \in I} f(x) = \sup_I f = \sup(f(I))$

$$\inf_{x \in I} f(x) = \inf_I f = \inf(f(I))$$

Définition 2.0.8

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit J un sous-ensemble de I .

Soit x_0 un élément de J .

- f admet un maximum en x_0 sur J si: $\forall x \in J, f(x) \leq f(x_0)$
- f admet un minimum en x_0 sur J si: $\forall x \in J, f(x_0) \leq f(x)$
- f présente un extremum en x_0 sur J si f admet un minimum ou un maximum en x_0 sur J .

3 Autres propriétés

3.1 Périodicité

Définition 3.1.1

Soit f une fonction numérique définie sur I .

Soit p un réel.

On dit que p est une période de f si:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow x + p \in I \\ \forall x \in I, f(x + p) = f(x) \end{cases}$$

Notons G_f l'ensemble des périodes de f :

$$G_f = \{p \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x + p) = f(x)\}$$

Alors G_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

3.2 Parité

Définition 3.2.1

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- f est paire sur I si: $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow -x \in I \\ \forall x \in I, f(x) = f(-x) \end{cases}$
- f est impaire sur I si: $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow -x \in I \\ \forall x \in I, f(x) = -f(-x) \end{cases}$

Définition 3.2.2

Soit I un intervalle centré en 0.

Soit f une application définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

On note $P: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $Imp: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

P et Imp sont les parties Paire et Impaire de f .

Propriété 3.2.1

$$f = P + Imp$$

3.3 Fonctions k -Lipschitziennes

Définition 3.3.1

Soit f une fonction numérique définie sur I .

Soit k un réel positif.

On dit que f est k -lipschitzienne sur I si:

$$\forall (x, x') \in I^2, |f(x) - f(x')| \leq k |x - x'|$$