Complexes
Generalites
MPSI 2

1 Plan Affixe $\mathcal{A}_2$

On note $\mathcal{A}_2$ l'ensemble des points du plan.

1.1 Angles

Définition 1.1.1
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires du plan.
On appelle mesure de l'angle oriente $(\vec{u}, \vec{v})$ tout reel θ tel que : $\vec{v} = \cos(\theta)\,\vec{u} + \sin(\theta)\,\vec{u'}$ avec $\vec{u'}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal a $\vec{u}$.
On note mesure de $\vec{u}$, $\vec{v}$: $mes\,(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta \ \ [2\pi]$

Définition 1.1.2
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
On appelle mesure de l'angle oriente $(\vec{u}, \vec{v})$ toute mesure de l'angle oriente des vecteurs unitaires associes.
On a donc : $mes\,(\vec{u}, \vec{v}) \equiv mes\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \ \ [2\pi]$

1.2 Definition sur les nombres complexes

Définition 1.2.1
Soit $\mathcal{A}_2$ l'ensemble des points du plan muni d'un repere orthonorme $\left(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note $\mathcal{E}_2$ l'ensemble des vecteurs du plan.
L'ensemble des complexes peut etre mis en bijection avec $\mathcal{E}_2$ ou avec $\mathcal{A}_2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{A}_2 \\ x + iy &\longmapsto M, \text{ de coordonnees } (x, y) \text{ dans le repere } \left(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}\right) \\ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathcal{E}_2 \\ x + iy &\longmapsto \vec{OM}, \text{ de coordonnees } (x, y) \text{ dans la base } \left(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}\right) \end{aligned}$$

Sont deux applications bijectives. $\square$

Définition 1.2.2

- *On dit que M de coordonnees (x, y) est l'image affixe du complexe $z = x + \imath y$.*
- *On dit que $z = x + \imath y$ est l'affixe du point M / du vecteur $\vec{OM}$.*

Définition 1.2.3
Soit $z = x + \imath y$.

- *Le module de z : $|z| = \left\|\vec{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*
- *Un argument de z pour z non nul : $\arg(z) =$ mes $\left(\vec{i}, \vec{OM}\right)$.*

Propriété 1.2.1
Soit z un complexe non nul.

- z *est reel* $\iff \arg(z) \equiv 0 \ [2\pi]$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = k\pi$
- z *est imaginaire* $\iff \arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]$
  $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Propriété 1.2.2

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\begin{cases} \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi] \\ z \text{ et } z' \text{ non nuls} \end{cases}$

Définition 1.2.4
Conjuge de $z = x + \imath y$: $\bar{z} = x - \imath y$

Propriété 1.2.3

- z *est reel* $\iff z = \bar{z}$
- z *est imaginaire* $\iff z = -\bar{z}$

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Notation :
Si $z = x + \imath y$, on note:
$\mathcal{R}e\,(z) = x$ la partie reelle de z.
$\mathcal{I}m\,(z) = y$ la partie imaginaire de z.
On a :

$$\mathcal{R}e\,(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$
$$\mathcal{I}m\,(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\imath}$$

2 Exponentielle complexe

Soit $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longmapsto \cos x + \imath \sin x$
C'est une fonction d'une variable reelle et a valeurs complexes dont les applications composantes sont cos et sin.
Ces applications composantes sont derivables sur $\mathbb{R}$, donc ψ est derivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'\,(x) = -\sin x + \imath \cos x$$

Notation : $\psi\,(x) = e^{\imath x}$
Remarque :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \psi'\,(x) &= \imath\,(\cos x + \imath \sin x)\\ &= \imath \psi\,(x)\\ \forall x \in \mathbb{R}, \psi'\,(x) &= \imath e^{\imath x}\end{aligned}$$

On a pour α et β reels :

$$\begin{aligned}\psi\,(\alpha + \beta) &= \cos\,(\alpha + \beta) + \imath \sin\,(\alpha + \beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \imath\,(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\\ &= \cos\beta\,(\cos\alpha + \imath\sin\alpha) + \sin\beta\,(\imath\cos\alpha - \sin\alpha)\\ &= (\cos\alpha + \imath\sin\alpha)\,(\cos\beta + \imath\sin\beta)\\ &= \psi\,(\alpha)\,\psi\,(\beta)\end{aligned}$$

$\square$

On a demontre :

Propriété 2.0.4

$$\forall\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R},\psi\left(\alpha+\beta\right)=\psi\left(\alpha\right)\psi\left(\beta\right)$$
$$e^{\imath(\alpha+\beta)}=e^{\imath\alpha}e^{\imath\beta}$$

Corollaire 2.0.1

- $(\alpha=\beta)\quad e^{\imath(\alpha+\beta)}=\left(e^{\imath\alpha}\right)^2$
- *Par recurrence, on obtient :*

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall\alpha\in\mathbb{R},\ e^{\imath n\alpha}=\left(e^{\imath\alpha}\right)^n$$
$$\cos\left(n\alpha\right)+\imath\sin\left(n\alpha\right)=\left(\cos\alpha+\imath\sin\alpha\right)^n$$

Formule de MOIVRE
- $(\beta=-\alpha)\quad e^{\imath(\alpha+\beta)}=e^{\imath\alpha}e^{-\imath\alpha}\iff e^{-\imath\alpha}=\frac{1}{e^{\imath\alpha}}$
- *En utilisant* $\frac{1}{z^n}=z^{-n}$ *on obtient :*

$$\forall n\in\mathbb{Z},\forall\alpha\in\mathbb{R},e^{-\imath n\alpha}=\frac{1}{e^{\imath n\alpha}}$$
$$e^{\imath n\alpha}=\left(e^{\imath\alpha}\right)^n$$

Formules et calculs a connaitre

- $\cos\alpha=\frac{e^{\imath\alpha}+e^{-\imath\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{e^{\imath\alpha}-e^{-\imath\alpha}}{2\imath}$
- Pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\cos^n\alpha=\left(\dfrac{e^{\imath\alpha}+e^{-\imath\alpha}}{2}\right)^n$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\imath k\alpha}e^{-\imath(n-k)\alpha}$$

En regroupant les termes d'indice k et $n-k$, on obtient une expression du type :

$$\cos^n\alpha=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos\left(k\alpha\right)$$

Avec a_k des coefficients calculables.

Définition 2.0.5
On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
- $\mathbb{U}$ *est represente dans le plan affine par le cercle unite (de centre* $\mathcal{O}$ *et de rayon* 1*).*
- $1 \in \mathbb{U}$
- $\mathbb{U}$ *est stable par multiplication.*
- $\mathbb{U}$ *est stable par passage a l'inverse.*

On dit que $(\mathbb{U}, \times)$ *est un groupe.*

Propriété 2.0.5
Inegalite triangulaire : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

Corollaire 2.0.2
$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$
Cas 1 : $z' = 0$
Alors $\forall z \in \mathbb{C},\ |z + z'| = |z|$
$|z| + |z'| = |z|$
Cas 2 : $z' \neq 0$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \iff \left|1 + \frac{z}{z'}\right| \leq 1 + \left|\frac{z}{z'}\right|$$

On est amene a demontrer :

$$\forall u \in \mathbb{C}, |1 + u| \leq 1 + |u|$$

Soit u un complexe fixe :

$$\begin{aligned}
|1 + u| \leq 1 + |u| &\iff |1 + u|^2 \leq (1 + |u|)^2 \\
&\iff (1 + u)(1 + \bar{u}) \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\
&\iff 1 + u + \bar{u} + u\bar{u} \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\
&\iff 1 + 2\mathcal{R}e(u) + |u| \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\
&\iff \mathcal{R}e(u) \leq |u|
\end{aligned}$$

Or cette derniere propriete est vraie pour tout complexe u.
Conclusion : $\forall u \in \mathbb{C}, |1 + u| \leq 1 + |u|$
Conclusion Generale : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$ □