Fonctions Numériques
Fonctions continues sur un intervalle

MPSI 2

1 Fonctions continues

Soit I un intervalle non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dfinie sur I.
On dit que f est continue sur I si pout tout x_0 de I, f est continue en x_0.

Théorème des valeurs intermdiaires
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit I un intervalle.
Soit $f : I \to R$ une application continue sut I.
Montrer que $f(I)$ est un intervalle.
Ou montrer que $\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2,\ ((y, y') \in f(I)^2 \Rightarrow (\forall y'' \in \mathbb{R},\ y < y'' < y' \Rightarrow y'' \in f(I))$

Soit y et y' deux lments distincts de $f(I)$.
Alors il existe a et b dans I tels que: $f(a) = y$ et $f(b) = y'$
y et y' sont distincts, donc a et b sont distincts.
On suppose par exemple que $f(a) < f(b)$ et $a < b$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{R},\ (f(a) < z < f(b)) \Rightarrow (\exists x \in]a, b[,\ f(x) = z)$
Soit z un rel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$.
On considre l'ensemble $E = \{x \in [a, b],\ f(x) < z\}$

Principe de Borne suprieure

Montrer que E admet une borne suprieure:
- E est non vide: $a \in E$
- E est major par b

Donc E admet une borne suprieure que l'on notera c
On a: $a \leqslant c \leqslant b$
Et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in E,\ c - \varepsilon < x \leqslant c$
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et on pose x_n un rel vrifiant le critre.
On dfinit donc une suite: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in E$ et $c - \frac{1}{n} < x_n \geqslant c$
En particulier: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in [a, b]$ et $f(x_n) < z$ et $|x_n - c| < \frac{1}{n}$
Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers c.
Donc $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f(c)$ d'aprs la caractrisation squentielle de la limite.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x_n) < z$
Donc $f(c) \leqslant z$

On a donc $f(c) \leqslant z < f(b)$
D'où $c < b$.
Par dfinition de c: $\forall x \in]c, b[,\ x \notin E$
$\Rightarrow \forall x \in]c, b[,\ f(x) \geqslant z$
Par ailleurs, f est continue, donc sa limite à droite en c existe et vaut $f(c)$.
Ainsi, $f(c) \geqslant z$

Conclusion: $f(c) = z$
Conclusion gnrale: $\exists c \in]a, b[,\ f(c) = z$

Ce raisonnement est valable pour tout z entre a et b. On tend le raisonnement à y et y' dans $f(I)$
On conclut que $f(I)$ est un intervalle. □

Propriété 1.0.1
L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Soit I un segment rel non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.
D'après le TVI, $f(I)$ est un intervalle.

Montrer que $f(I)$ est ferm et born.
1 Montrer que $f(I)$ est born.
C'est à dire, montrer que $\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R}, y \in f(I) \Rightarrow |y| \leqslant M$
$\boxed{\text{HA}}$ Supposons que $f(I)$ ne soit pas born.
Donc $\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \in I$ et $|y| > M$
Soit x_0 un lment de I.
- On considre $E_1 = \{x \in I,\ |f(x)| > f(x_0) + 1\}$
  $f(I)$ n'est pas born, donc E_1 est non vide.
  Notons x_1 un lment de E_1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons construits $(x_i)_{i \in [0,n]}$,
  Tels que: $\forall i \in [1, n],\ |f(x_i)| > |f(x_{i-1})| + 1$
  Soit $E_{n+1} = \{x \in I,\ |f(x)| > |f(x_n)| + 1\}$
  $f(I)$ n'est pas born, donc E_{n+1} n'est pas vide.
  On note x_{n+1} un lment de cet ensemble.
- Par rcurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
  De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x_n)| > |f(x_{n-1})| + 1$

□