

Relations Binaires

Relations d'ordre

MPSI 2

1 Définition

Soit E un ensemble non vide.

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E .

Définition 1.0.1

\mathcal{R} est une relation d'ordre sur E si:

- \mathcal{R} est réflexive.
- \mathcal{R} est antisymétrique: $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow (x = y)$
- \mathcal{R} est transitive.

Notations: $x \mathcal{R} y, x \leq y$

Se note aussi $x \preccurlyeq y$

Définition 1.0.2

Soit \preccurlyeq une relation d'ordre sur E .

- On dit que l'ordre est total si deux éléments de E sont toujours en relation:
 $\forall (x, y) \in E^2, (x \preccurlyeq y) \text{ ou } (y \preccurlyeq x)$.
- Sinon, on dit que l'ordre est partiel.

Définition 1.0.3

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné.

- $m \in E$ est le plus petit élément de E si: $\forall x \in E, m \preccurlyeq x$
- $M \in E$ est le plus grand élément de E si: $\forall x \in E, x \preccurlyeq M$

Définition 1.0.4

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné.

- $m \in E$ est un élément minimal de E si:
 $\forall x \in E, (x \preccurlyeq m) \Rightarrow (x = m)$
- $M \in E$ est un élément maximal de E si:
 $\forall x \in E, (M \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = M)$

Définition 1.0.5

Soit (E, \preccurlyeq) un ensemble ordonné.

Soit A un sous-ensemble de E

- $\alpha \in E$ est un minorant de A dans E si:
 $\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (\alpha \preccurlyeq x)$
- $\beta \in E$ est un majorant de A dans E si:
 $\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (x \preccurlyeq \beta)$

2 Ordre naturel sur \mathbb{N}

Définition 2.0.6

$\forall (x, y) \in \mathbb{N}, x \leq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x + n$

C'est un ordre total de plus petit élément 0.

Propriété 2.0.1

Propriété caractéristique de \mathbb{N} :

Tout sous-ensemble de \mathbb{N} admet un plus petit élément.

Corollaire 2.0.1

Tout sous-ensemble non vide et majoré de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de \mathbb{N} .

On considère B l'ensemble des majorants de A .

$B = \{x \in \mathbb{N}, \forall a \in A, x \geq a\}$

A est majoré donc B est un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} .

D'après la propriété caractéristique de \mathbb{N} B admet un plus petit élément que l'on note α

On a: $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{N} \\ \forall a \in A, a \leq \alpha \end{cases}$

Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$

HA: $\alpha \notin A$

Alors $\forall x \in A, x < \alpha$

Ou encore, puisque α est entier: $\forall a \in A, a \leq \alpha - 1$

On a donc $\alpha - 1$ entier naturel et $\alpha - 1$ majorant de A .

Donc $\alpha \in B$ et $\alpha - 1 < \alpha$, ce qui contredit α plus petit élément de B .

Donc $\alpha \in A$

Conclusion: α est le plus grand élément de A . □

Corollaire 2.0.2

Principe de récurrence

Soit P une proposition portant sur les entiers naturels.

Soit $P(n)$ le prédicat associé à n .

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, [P(n_0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)]$$

H_1 : Soit n_0 un entier naturel tel que $(H'_1) P(n_0)$ et $(H''_1) \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$

On considère l'ensemble E , ensemble des $n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \text{ et } \neg P(n))$

Montrer que $E = \emptyset$

HA : Supposons E non vide.

D'après la propriété caractéristique, E admet un plus petit élément, noté p_0 .

p_0 vérifie: $p_0 \in \mathbb{N}$

$$p_0 \geq n_0$$

$P(p_0)$ est Faux

Par ailleurs, $P(n_0)$ est Vrai, donc $p_0 > n_0$, ou encore $p_0 - 1 \geq n_0$

Or, $p_0 > p_0 - 1$, donc $p_0 - 1$ n'est pas dans E , donc $P(p_0 - 1)$ est Vrai.

D'après H''_1 , avec $n = p_0 - 1$, $P(p_0)$ est Vrai, ce qui est en contradiction avec HA .

Donc HA est fausse, $E = \emptyset$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$ □

3 Ordre naturel sur \mathbb{R}

3.1 Ordre

Ordre sur \mathbb{R} : $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$. Il est total.

Propriété 3.1.1

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.

- $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif car:

- + *est associative*: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) = (x + y) + z$
- + *admet in élément neutre*: $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x$
- + *octroie un élément symétrique*: $-x$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$)
- + *est commutative*: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, x + y = y + x$
- (\mathbb{R}^*, \times) *est un groupe commutatif car*:
 - \times *est associative*: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
 - \times *admet in élément neutre*: $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = x$
 - \times *octroie un élément symétrique*: $\frac{1}{x}$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, x \times \frac{1}{x} = 1$)
 - \times *est commutative*: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, xy = yx$
- *La relation d'ordre est compatible avec les opérateurs*:
 - $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } x' \leq y') \Rightarrow (x + x' \leq y + y')$
 - $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, (x \leq y) \Rightarrow (zx \leq zy)$

Définition 3.1.1

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

- Soit A une partie de E non vide et majorée, B l'ensemble des majorants de A .
 $B = \{x \in E, \forall a \in A, (a \in A \Rightarrow a \leq x)\}$
 On appelle borne supérieure de A le plus petit élément de B (lorsqu'il existe).
- Soit A une partie de E non vide et minorée, B l'ensemble des minorants de A .
 $B = \{x \in E, \forall a \in A, (a \in A \Rightarrow a \geq x)\}$
 On appelle borne inférieure de A le plus grand élément de B (lorsqu'il existe).

Notation: $\text{Sup}(A), \text{Inf}(A)$

Propriété 3.1.2

Propriété caractéristique de \mathbb{R} :

- *Propriété de la borne supérieure*:
 Tout ensemble non vide et majoré de \mathbb{R} admet une borne supérieure.
- *Propriété de la borne inférieure*:
 Tout ensemble non vide et minoré de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Remarque: Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et majorée (minorée), et α sa borne supérieure (inférieure).

α est caractérisé par: • α est un majorant (minorant) de A

- si β est strictement inférieur (supérieur) à α , il n'est pas majorant (minorant) de A

- **Critère 1:** α est la borne supérieure de A si et seulement si:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \leq \alpha \\ \forall \beta \in \mathbb{R}, (\beta \leq \alpha) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, x \in A \text{ et } \beta < x \leq \alpha) \end{cases}$$

- **Critère 2:** α est la borne supérieure de A si et seulement si:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \leq \alpha \\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, (x \in A \text{ et } x - \epsilon < x \leq \alpha) \end{cases}$$

Corollaire 3.1.1

\mathbb{R} est Archimédien: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*, n > x)$

Corollaire 3.1.2

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$

Corollaire 1:

Soit x un réel positif.

On considère $A = \{n \in \mathbb{N}, n > x\}$

Montrer que $A \neq \emptyset$

HA: $A = \emptyset$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$

Donc \mathbb{N} est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .

Donc A admet une borne supérieure, que l'on note α

En utilisant le critère 2 avec $\epsilon = \frac{1}{2}$:

$\exists x' \in \mathbb{N}, \alpha - \frac{1}{2} < x \leq \alpha$

Or $x' + 1$ est un entier naturel vérifiant $\alpha + \frac{1}{2} < x' + 1$

Ce qui contredit le fait que α soit le majorant de \mathbb{N} .

Conclusion: $A \neq \emptyset$

Conclusion générale: \mathbb{R} est Archimédien.

Corollaire 2: prendre $x = \frac{b}{a}$

□

Corollaire 3.1.3

Partie Entière: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, \text{ unique, } n \leq x < n + 1$

Existence:

Soit x un rel positif.

Soit $A = \{n \in \mathbb{N}, n > x\}$

A est non vide car \mathbb{R} est archimdien

Donc A admet un plus petit lment, not n_0 .

On a: $0 \leq x < n_0$ donc $1 \leq n_0$. Donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin A$
 Donc $n_0 - 1 \leq x < n_0$.
 En posant $n = n_0 - 1$, on a: $n \leq x < n + 1$

Soit x un rel strictement ngatif.
 $-x \in \mathbb{R}^+$, donc on applique la partie prcdente.
 $\exists p \in \mathbb{N}, p \leq -x < p + 1$
 Soit p_0 cet entier.
 Donc $-p_0 - 1 < x \leq p_0$

- $x = -p_0$
 On peut alors crire $-p_0 \leq x < -p_0 + 1$
 On note $n = -p_0$
- $x \neq -p_0$
 On peut alors crire $-p_0 - 1 \leq x < -p_0$
 On note $n = -p_0 - 1$

Unicit:

Supposons qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que:

$$\begin{cases} n_1 \leq x < n_1 + 1 \\ n_2 \leq x < n_2 + 1 \\ n_1 < n_2 \end{cases}$$

$n_1 < n_2$ donc $x < n_1 + 1 \leq n_2 \leq x$

Donc n est unique. □

3.2 Propriets de \mathbb{R}

Propriété 3.2.1

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ est dense dans \mathbb{R}

Soit x et y deux rels tels que $x < y$
 $y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n(y - x) > 1$
 Soit n un tel entier naturel.
 Donc $y < x + \frac{1}{n}$
 Soit k la partie entiere de nx :
 $k \leq x < k + 1$
 $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y$
 Posons $q = \frac{k+1}{n}$
 q est rationnel, donc \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R}

Soit x et y deux rels tels que $x < y$

e est un irrationnel strictement positif donc $\frac{x}{e} < \frac{y}{e}$

$\frac{x}{e}$ et $\frac{y}{e}$ sont deux rels, donc:

$\exists q \in \mathbb{Q}, \frac{x}{e} < q < \frac{y}{e}$

Soit q un tel lment.

Donc $x < qe < y$

Donc $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ est dense dans \mathbb{R}

□

Définition 3.2.1

Soit I un sous-ensemble de \mathbb{R}

I est un intervalle si I est une partie convexe de \mathbb{R} :

$$\forall (a, b) \in I^2, (a < b) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, a < x < b \Rightarrow x \in I)$$

Propriété 3.2.2

Les seuls intervalles rels sont les sous-ensembles du type:

$\mathbb{R}; \emptyset$

$]a, b[; [a, b[;]a, b]; [a, b]$

$]a, +\infty[; [a, +\infty[;]-\infty, b[;]-\infty, b]$

Soit I une partie convexe de \mathbb{R}

① Montrer que si I est de l'un des types ci-dessus, I est un intervalle.

– $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

– $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$

– Etc...

② Montrer que si I est une partie convexe de \mathbb{R} , alors I est de l'un des ces types.

• I n'est ni minore, ni majeure. Montrer que $I = \mathbb{R}$

* Par hypothse sur I , $I \subset \mathbb{R}$

* Montrer que $\mathbb{R} \subset I$ Soit x un rel. x n'est ni majorant, ni minorant:

$\exists a \in \mathbb{R}, a \in I$ et $a < x$

$\exists b \in \mathbb{R}, b \in I$ et $b > x$

Soit a et b deux tels rels: $(a, b) \in I^2$, $a < x < b$

Or I est un intervalle, donc $x \in I$

Ce raisonnement tant valable pour tout x , $\mathbb{R} \subset I$

• I est majeure et non minore. Montrer que $I =]-\infty, b[$ ou $I =]-\infty, b]$ I est non vide et majeure, donc admet une borne suprieure, note b .

* Montrer que $I \subset]-\infty, b]$

C'est a dire montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow x \leq b$

Ce qui est vrai car b majeure I .

- * Montrer que $] -\infty, b[\subset I$
 C'est à dire montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, x < b \Rightarrow x \in I$
 Soit x un rel de I .
 - x n'est pas un minorant de I :
 $\exists a \in \mathbb{R}, a \in I$ et $a < x$
 - b est une borne supérieure de I :
 $(x < b) \Rightarrow (\exists x' \in \mathbb{R}, x' \in I \text{ et } x < x' \leq b)$
 Soit x' un tel lment.
 Donc: $a < x < x' \leq b$
 Donc $x \in I$, donc $] -\infty, b[\subset I$
- * Donc $] -\infty, b[\subset I \subset] -\infty, b]$
 Donc $I =] -\infty, b[$ si $b \notin I$, ou $I =] -\infty, b]$ si $b \in I$
- I est minore et non majeure.
- I est borne.

□

Définition 3.2.2**Valeur absolue:** $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Propriété 3.2.3

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|xy| = |x| |y|$$

Corollaire 3.2.1

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Définition 3.2.3Soit $(a, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ On appelle intervalle ouvert centré en a de rayon r le sous-ensemble $]a - r, a + r[$

Propriété 3.2.4

$$]a, b[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$$

$$[a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$$