

# Relations Binaires

## Relations d'ordre

### MPSI 2

## 1 Définition

Soit  $E$  un ensemble non vide.

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$ .

### Définition 1.0.1

$\mathcal{R}$  est une relation d'ordre sur  $E$  si:

- $\mathcal{R}$  est réflexive.
- $\mathcal{R}$  est antisymétrique:  $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow (x = y)$
- $\mathcal{R}$  est transitive.

Notations:  $x \mathcal{R} y, x \leq y$

Se note aussi  $x \preccurlyeq y$

### Définition 1.0.2

Soit  $\preccurlyeq$  une relation d'ordre sur  $E$ .

- On dit que l'ordre est total si deux éléments de  $E$  sont toujours en relation:  
 $\forall (x, y) \in E^2, (x \preccurlyeq y) \text{ ou } (y \preccurlyeq x)$ .
- Sinon, on dit que l'ordre est partiel.

### Définition 1.0.3

Soit  $(E, \preccurlyeq)$  un ensemble ordonné.

- $m \in E$  est le plus petit élément de  $E$  si:  $\forall x \in E, m \preccurlyeq x$
- $M \in E$  est le plus grand élément de  $E$  si:  $\forall x \in E, x \preccurlyeq M$

### Définition 1.0.4

Soit  $(E, \preccurlyeq)$  un ensemble ordonné.

- $m \in E$  est un élément minimal de  $E$  si:  
 $\forall x \in E, (x \preccurlyeq m) \Rightarrow (x = m)$
- $M \in E$  est un élément maximal de  $E$  si:  
 $\forall x \in E, (M \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = M)$

**Définition 1.0.5**

Soit  $(E, \preccurlyeq)$  un ensemble ordonné.

Soit  $A$  un sous-ensemble de  $E$

- $\alpha \in E$  est un minorant de  $A$  dans  $E$  si:  
 $\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (\alpha \preccurlyeq x)$
- $\beta \in E$  est un majorant de  $A$  dans  $E$  si:  
 $\forall x \in E, (x \in A) \Rightarrow (x \preccurlyeq \beta)$

## 2 Ordre naturel sur $\mathbb{N}$

**Définition 2.0.6**

$\forall (x, y) \in \mathbb{N}, x \leq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x + n$

C'est un ordre total de plus petit élément 0.

**Propriété 2.0.1**

Propriété caractéristique de  $\mathbb{N}$ :

Tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  admet un plus petit élément.

**Corollaire 2.0.1**

Tout sous-ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{N}$  admet un plus grand élément.

Soit  $A$  un sous-ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{N}$ .

On considère  $B$  l'ensemble des majorants de  $A$ .

$B = \{x \in \mathbb{N}, \forall a \in A, x \geq a\}$

$A$  est majoré donc  $B$  est un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{N}$ .

D'après la propriété caractéristique de  $\mathbb{N}$   $B$  admet un plus petit élément que l'on note  $\alpha$

On a:  $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{N} \\ \forall a \in A, a \leq \alpha \end{cases}$

Montrer que  $\alpha \in \mathbb{N}$

HA:  $\alpha \notin A$

Alors  $\forall x \in A, x < \alpha$

Ou encore, puisque  $\alpha$  est entier:  $\forall a \in A, a \leq \alpha - 1$

On a donc  $\alpha - 1$  entier naturel et  $\alpha - 1$  majorant de  $A$ .

Donc  $\alpha \in B$  et  $\alpha - 1 < \alpha$ , ce qui contredit  $\alpha$  plus petit élément de  $B$ .

Donc  $\alpha \in A$

Conclusion:  $\alpha$  est le plus grand élément de  $A$ . □

### Corollaire 2.0.2

#### Principe de récurrence

Soit  $P$  une proposition portant sur les entiers naturels.

Soit  $P(n)$  le prédicat associé à  $n$ .

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, [P(n_0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)]$$

$H_1$ : Soit  $n_0$  un entier naturel tel que  $(H'_1) P(n_0)$  et  $(H''_1) \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$

On considère l'ensemble  $E$ , ensemble des  $n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \text{ et } \neg P(n))$

Montrer que  $E = \emptyset$

$HA$ : Supposons  $E$  non vide.

D'après la propriété caractéristique,  $E$  admet un plus petit élément, noté  $p_0$ .

$p_0$  vérifie:  $p_0 \in \mathbb{N}$

$$p_0 \geq n_0$$

$P(p_0)$  est Faux

Par ailleurs,  $P(n_0)$  est Vrai, donc  $p_0 > n_0$ , ou encore  $p_0 - 1 \geq n_0$

Or,  $p_0 > p_0 - 1$ , donc  $p_0 - 1$  n'est pas dans  $E$ , donc  $P(p_0 - 1)$  est Vrai.

D'après  $H''_1$ , avec  $n = p_0 - 1$ ,  $P(p_0)$  est Vrai, ce qui est en contradiction avec  $HA$ .

Donc  $HA$  est fausse,  $E = \emptyset$

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$  □

## 3 Ordre naturel sur $\mathbb{R}$

### 3.1 Ordre

Ordre sur  $\mathbb{R}$ :  $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$ . Il est total.

#### Propriété 3.1.1

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$  est un corps totalement ordonné.

- $(\mathbb{R}, +)$  est un groupe commutatif car:

- + est associative:  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + (y + z) = (x + y) + z$
- + admet in élément neutre:  $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = x$
- + octroie un élément symétrique:  $-x$  (car  $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$ )
- + est commutative:  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, x + y = y + x$
- $(\mathbb{R}^*, \times)$  est un groupe commutatif car:
  - $\times$  est associative:  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
  - $\times$  admet in élément neutre:  $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = x$
  - $\times$  octroie un élément symétrique:  $\frac{1}{x}$  (car  $\forall x \in \mathbb{R}, x \times \frac{1}{x} = 1$ )
  - $\times$  est commutative:  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, xy = yx$
- La relation d'ordre est compatible avec les opérateurs:
  - $\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } x' \leq y') \Rightarrow (x + x' \leq y + y')$
  - $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, (x \leq y) \Rightarrow (zx \leq zy)$

### Définition 3.1.1

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné.

- Soit  $A$  une partie de  $E$  non vide et majorée,  $B$  l'ensemble des majorants de  $A$ .  
 $B = \{x \in E, \forall a \in A, (a \in A \Rightarrow a \leq x)\}$   
 On appelle borne supérieure de  $A$  le plus petit élément de  $B$  (lorsqu'il existe).
- Soit  $A$  une partie de  $E$  non vide et minorée,  $B$  l'ensemble des minorants de  $A$ .  
 $B = \{x \in E, \forall a \in A, (a \in A \Rightarrow a \geq x)\}$   
 On appelle borne inférieure de  $A$  le plus grand élément de  $B$  (lorsqu'il existe).

Notation:  $\text{Sup}(A), \text{Inf}(A)$

### Propriété 3.1.2

Propriété caractéristique de  $\mathbb{R}$ :

- Propriété de la borne supérieure:  
 Tout ensemble non vide et majoré de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure.
- Propriété de la borne inférieure:  
 Tout ensemble non vide et minoré de  $\mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

**Remarque:** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée (minorée), et  $\alpha$  sa borne supérieure (inférieure).

$\alpha$  est caractérisé par: •  $\alpha$  est un majorant (minorant) de  $A$

- si  $\beta$  est strictement inférieur (supérieur) à  $\alpha$ , il n'est pas majorant (minorant) de  $A$

- **Critère 1:**  $\alpha$  est la borne supérieure de  $A$  si et seulement si:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \leq \alpha \\ \forall \beta \in \mathbb{R}, (\beta < \alpha) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}, x \in A \text{ et } \beta < x \leq \alpha) \end{cases}$$

- **Critère 2:**  $\alpha$  est la borne supérieure de  $A$  si et seulement si:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \leq \alpha \\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, (x \in A \text{ et } x - \epsilon < x \leq \alpha) \end{cases}$$

### Corollaire 3.1.1

$\mathbb{R}$  est Archimédien:  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*, n > x)$

### Corollaire 3.1.2

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{+*2}, \exists n \in \mathbb{N}, na > b$

#### Corollaire 1:

Soit  $x$  un réel positif.

On considère  $A = \{n \in \mathbb{N}, n > x\}$

Montrer que  $A \neq \emptyset$

HA:  $A = \emptyset$

Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x$

Donc  $\mathbb{N}$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ .

Donc  $A$  admet une borne supérieure, que l'on note  $\alpha$

En utilisant le critère 2 avec  $\epsilon = \frac{1}{2}$ :

$$\exists x' \in \mathbb{N}, \alpha - \frac{1}{2} < x \leq \alpha$$

Or  $x' + 1$  est un entier naturel vérifiant  $\alpha + \frac{1}{2} < x' + 1$

Ce qui contredit le fait que  $\alpha$  soit le majorant de  $\mathbb{N}$ .

Conclusion:  $A \neq \emptyset$

Conclusion générale:  $\mathbb{R}$  est Archimédien.

**Corollaire 2:** prendre  $x = \frac{b}{a}$

□

### Corollaire 3.1.3

Partie Entière:  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, \text{ unique, } n \leq x < n + 1$

#### Existence:

Soit  $x$  un rel positif.

Soit  $A = \{n \in \mathbb{N}, n > x\}$

$A$  est non vide car  $\mathbb{R}$  est archimdien

Donc  $A$  admet un plus petit lment, not  $n_0$ .

On a:  $0 \leq x < n_0$  donc  $1 \leq n_0$ . Donc  $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$  et  $n_0 - 1 \notin A$   
 Donc  $n_0 - 1 \leq x < n_0$ .  
 En posant  $n = n_0 - 1$ , on a:  $n \leq x < n + 1$

Soit  $x$  un rel strictement ngatif.  
 $-x \in \mathbb{R}^+$ , donc on applique la partie prcdente.  
 $\exists p \in \mathbb{N}, p \leq -x < p + 1$   
 Soit  $p_0$  cet entier.  
 Donc  $-p_0 - 1 < x \leq p_0$

- $x = -p_0$   
 On peut alors crire  $-p_0 \leq x < -p_0 + 1$   
 On note  $n = -p_0$
- $x \neq -p_0$   
 On peut alors crire  $-p_0 - 1 \leq x < -p_0$   
 On note  $n = -p_0 - 1$

### Unicit:

Supposons qu'il existe deux entiers  $n_1$  et  $n_2$  tels que:

$$\begin{cases} n_1 \leq x < n_1 + 1 \\ n_2 \leq x < n_2 + 1 \\ n_1 < n_2 \end{cases}$$

$n_1 < n_2$  donc  $x < n_1 + 1 \leq n_2 \leq x$

Donc  $n$  est unique. □

## 3.2 Propriets de $\mathbb{R}$

### Propriété 3.2.1

$\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$  est dense dans  $\mathbb{R}$

Soit  $x$  et  $y$  deux rels tels que  $x < y$   
 $y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n(y - x) > 1$   
 Soit  $n$  un tel entier naturel.  
 Donc  $y < x + \frac{1}{n}$   
 Soit  $k$  la partie entiere de  $nx$ :  
 $k \leq x < k + 1$   
 $\frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y$   
 Posons  $q = \frac{k+1}{n}$   
 $q$  est rationnel, donc  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$

Soit  $x$  et  $y$  deux rels tels que  $x < y$

$e$  est un irrationnel strictement positif donc  $\frac{x}{e} < \frac{y}{e}$

$\frac{x}{e}$  et  $\frac{y}{e}$  sont deux rels, donc:

$\exists q \in \mathbb{Q}, \frac{x}{e} < q < \frac{y}{e}$

Soit  $q$  un tel lment.

Donc  $x < qe < y$

Donc  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$  est dense dans  $\mathbb{R}$

□

### Définition 3.2.1

Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$

$I$  est un intervalle si  $I$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ :

$$\forall (a, b) \in I^2, (a < b) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, a < x < b \Rightarrow x \in I)$$

### Propriété 3.2.2

Les seuls intervalles rels sont les sous-ensembles du type:

$\mathbb{R}; \emptyset$

$]a, b[; [a, b[; ]a, b]; [a, b]$

$]a, +\infty[; [a, +\infty[; ]-\infty, b[; ]-\infty, b]$

Soit  $I$  une partie convexe de  $\mathbb{R}$

① Montrer que si  $I$  est de l'un des types ci-dessus,  $I$  est un intervalle.

–  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$

–  $] - \infty, b[ = \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$

– Etc...

② Montrer que si  $I$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}$ , alors  $I$  est de l'un des ces types.

•  $I$  n'est ni minore, ni majeure. Montrer que  $I = \mathbb{R}$

\* Par hypothse sur  $I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$

\* Montrer que  $\mathbb{R} \subset I$  Soit  $x$  un rel.  $x$  n'est ni majorant, ni minorant:

$\exists a \in \mathbb{R}, a \in I$  et  $a < x$

$\exists b \in \mathbb{R}, b \in I$  et  $b > x$

Soit  $a$  et  $b$  deux tels rels:  $(a, b) \in I^2$ ,  $a < x < b$

Or  $I$  est un intervalle, donc  $x \in I$

Ce raisonnement tant valable pour tout  $x$ ,  $\mathbb{R} \subset I$

•  $I$  est majeure et non minore. Montrer que  $I = ]-\infty, b[$  ou  $I = ]-\infty, b]$   $I$  est non vide et majeure, donc admet une borne suprieure, note  $b$ .

\* Montrer que  $I \subset ]-\infty, b]$

C'est a dire montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow x \leq b$

Ce qui est vrai car  $b$  majeure  $I$ .

- \* Montrer que  $] -\infty, b[ \subset I$   
 C'est à dire montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, x < b \Rightarrow x \in I$   
 Soit  $x$  un rel de  $I$ .
  - $x$  n'est pas un minorant de  $I$ :  
 $\exists a \in \mathbb{R}, a \in I$  et  $a < x$
  - $b$  est une borne supérieure de  $I$ :  
 $(x < b) \Rightarrow (\exists x' \in \mathbb{R}, x' \in I \text{ et } x < x' \leq b)$   
 Soit  $x'$  un tel lment.
 Donc:  $a < x < x' \leq b$   
 Donc  $x \in I$ , donc  $] -\infty, b[ \subset I$
- \* Donc  $] -\infty, b[ \subset I \subset ] -\infty, b]$   
 Donc  $I = ] -\infty, b[$  si  $b \notin I$ , ou  $I = ] -\infty, b]$  si  $b \in I$
- $I$  est minore et non majeure.
- $I$  est borne.

□

**Définition 3.2.2****Valeur absolue:**  $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -x & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

**Propriété 3.2.3**

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|xy| = |x| |y|$$

**Corollaire 3.2.1**

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

**Définition 3.2.3**Soit  $(a, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ On appelle intervalle ouvert centré en  $a$  de rayon  $r$  le sous-ensemble  $]a - r, a + r[$



**Propriété 3.2.4**

$$]a, b[ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$$

$$[a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$$