Fonctions Numériques
Relations de comparaison
MPSI 2

Soit x_0 un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 0.0.1
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que <u>f est négligeable devant g</u> si il existe une application $\varepsilon : V \to \mathbb{R}^+$ telle que:

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}}{\longrightarrow} 0 \\ \forall x \in V \setminus \{x_0\},\ |f(x)| < \varepsilon(x)\,|g(x)| \end{cases}$$

<u>Notation:</u> $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$

<u>Résultats usuels:</u>
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x > 0}}{=} o(\frac{1}{x^\alpha})$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(x^\alpha)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} o(e^x)$

Définition 0.0.2
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que <u>f est dominée par g</u> si:

$$\exists M \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in V \setminus \{x_0\},\ |f(x)| < M\,|g(x)|$$

<u>Notation:</u> $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$

Définition 0.0.3
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de x_0, sauf éventuellement en x_0.
On dit que <u>f et g sont équivalentes en x_0</u> si il existe une application $h : V \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} h(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}}{\longrightarrow} 1 \\ \forall x \in V \setminus \{x_0\},\ f(x) = h(x)\,g(x) \end{cases}$$

Notation: $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$

Résultats usuels en 0:

- $\sin(x) \sim x, \qquad \cos(x) \sim 1, \qquad 1-\cos(x) \sim \frac{x^2}{2}, \qquad \tan(x) \sim x$
- $\arcsin \sim x, \qquad \arctan(x) \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x, \qquad (1+x)^\alpha \sim 1, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha\, x$
- $\mathrm{sh}(x) \sim x, \qquad \mathrm{ch}(x) \sim 1, \qquad \mathrm{th}(x) \sim 1, \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

Propriété 0.0.1

Opérations sur les équivalences

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$.

- *Si ϕ est une fonction ne s'annulant pas au voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0,* *Alors $f(x)\,\phi(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\,\phi(x)$*
- *Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$, alors $f(x)\,f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\,g_2(x)$*
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, (f(x))^n \underset{x\to x_0}{\sim} (g(x))^n$
- *Si f_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0, et si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$*
  Alors $\frac{f(x)}{f_1(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{g_1(x)}$
- *Si f ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(f(x))^n \underset{x\to x_0}{\sim} (g(x))^n$*

Propriété 0.0.2

- *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$,*
  Alors $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$
- *Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} l$ et $l in \mathbb{R}^*$,*
  Alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$