Polynômes à une indtermine sur un corps $\mathbb{K}$
Gnralits
MPSI 2

1 Dfinition

Définition 1.0.1
On appelle polynôme à une indtermine et à coefficients dans $\mathbb{K}$ *toute suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'lments de* $\mathbb{K}$ *dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang.*

$$\mathbb{K}[X] = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{K}) \text{ et } (\exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p_0 \Rightarrow a_n = 0_{\mathbb{K}})\}$$

Définition 1.0.2
Soit $P \in \mathbb{K}[X], P \neq 0_{K[X]}$, *tel que* $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- *On appelle degr de P, not* $\deg(P)$, *le plus grand entier* n_0 *tel que:* $a_{n_0} \neq 0_{K[X]}$
- *Si* $\deg(P) = n_0$, *alors on appelle coefficient dominant de P* a_{n_0}.
- *Si* $\deg(P) = n_0$, *alors P est unitaire si* $a_{n_0} = 1_{\mathbb{K}}$.

Convention: $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$

Définition 1.0.3
Soit P un polynme à coefficients dans $\mathbb{K}$ *et non nul.*
On appelle valuation de P, not $\mathrm{val}(P)$, *le plus petit indice n tel que* $a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$.

2 Structure algbrique

2.1 Addition

Propriété 2.1.1
Si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux polynmes de* $\mathbb{K}[X]$,
Alors $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un polynme de* $\mathbb{K}[X]$

Propriété 2.1.2
$(\mathbb{K}[X], +)$ *est un groupe ablien.*

Propriété 2.1.3
Soient P et Q deux polynmes de $\mathbb{K}[X]$.
- $\deg(P+Q) \leqslant \max(\{\deg(P),\ deg(Q)\})$
- *Si* $\deg(P) \neq \deg(Q)$, *alors* $\deg(P+Q) = \max(\{\deg(P),\ deg(Q)\})$

2.2 Loi externe

Définition 2.2.1
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un lment de $\mathbb{K}[X]$.
$\lambda \cdot P = (\lambda \times a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Propriété 2.2.1
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *est un espace vectoriel.*
C'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$

Propriété 2.2.2
$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow \deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$

2.3 Multiplication

Définition 2.3.1
Soient P et Q deux lments de $\mathbb{K}[X]$, avec $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On appelle produit de P par Q, not $P \times Q$, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $\mathbb{K}[X]$, dfinie par:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i \times b_j$$

Propriété 2.3.1
$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *est un anneau commutatif.*

Propriété 2.3.2
$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2,\ \deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Corollaire 2.3.1
$\mathbb{K}[X]$ est un anneau intgre.

Définition 2.3.2

- *a_n s'appelle le coefficient de X^n dans P.*
- *$a_n X^n$ s'appelle le terme de degr n dans P.*
- *X s'appelle l'indtermine.*

Propriété 2.3.3
$(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une algbre commutative sur $\mathbb{K}$:
- *$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.*
- *$(K[X], +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K*
- $\forall (\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]^2,\ \lambda \cdot (P \times Q) = (\lambda \cdot P) \times Q = P \times (\lambda \cdot Q)$

2.4 Bases et familles libres

Propriété 2.4.1
La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
Donc tout lment de $\mathbb{K}[X]$ peut s'crire de manire unique comme combinaison linaire finie d'lments de $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 2.4.2
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], deg(P) \leqslant n\}$
$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ dont une base est donne par $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$

Définition 2.4.1

- $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la* *base canonique* *de* $\mathbb{K}[X]$.
- $(X^i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ *est la* *base canonique* *de* $\mathbb{K}_n[X]$.

2.5 Autres Oprations

Définition 2.5.1
Soit $P = \sum\limits_{r=0}^{N} a_n X^n$ *et* $Q \in \mathbb{K}[X]$
On dfinit le polynme compos $P \circ Q$ *par:*

$$p \circ Q = \sum_{r=0}^{N} a_n Q^n$$

Définition 2.5.2
Soit $P = \sum\limits_{r=0}^{N} a_n X^n$ *un polynme de* $\mathbb{K}[X]$.
On appelle *polynme driv de* P, *not* P', *le polynme:*

$$P' = \sum_{r=1}^{N} a_n\, n\, nX^{n-1}$$