

# Fonctions Numériques

## Fonctions continues sur un intervalle

### MPSI 2

## 1 Fonctions continues

Soit  $I$  un intervalle non vide.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$ .

On dit que  $f$  est continue sur  $I$  si pour tout  $x_0$  de  $I$ ,  $f$  est continue en  $x_0$ .

### **Théorème des valeurs intermédiaires**

*L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Soit  $I$  un intervalle.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur  $I$ .

Montrer que  $f(I)$  est un intervalle.

Ou montrer que  $\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2, ((y, y') \in f(I)^2 \Rightarrow (\forall y'' \in \mathbb{R}, y < y'' < y' \Rightarrow y'' \in f(I)))$

Soit  $y$  et  $y'$  deux éléments distincts de  $f(I)$ .

Alors il existe  $a$  et  $b$  dans  $I$  tels que:  $f(a) = y$  et  $f(b) = y'$

$y$  et  $y'$  sont distincts, donc  $a$  et  $b$  sont distincts.

On suppose par exemple que  $f(a) < f(b)$  et  $a < b$

Montrer que  $\forall z \in \mathbb{R}, (f(a) < z < f(b)) \Rightarrow (\exists x \in ]a, b[, f(x) = z)$

Soit  $z$  un réel compris strictement entre  $f(a)$  et  $f(b)$ .

On considère l'ensemble  $E = \{x \in [a, b], f(x) < z\}$

#### Principe de Borne supérieure

Montrer que  $E$  admet une borne supérieure:

- $E$  est non vide:  $a \in E$
- $E$  est majoré par  $b$

Donc  $E$  admet une borne supérieure que l'on notera  $c$

On a:  $a \leq c \leq b$

Et  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in E, c - \varepsilon < x \leq c$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , et on pose  $x_n$  un réel vérifiant le critère.

On définit donc une suite:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in E$  et  $c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$

En particulier:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in [a, b]$  et  $f(x_n) < z$  et  $|x_n - c| < \frac{1}{n}$

Ainsi, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $c$ .

Donc  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $f(c)$  d'après la caractérisation séquentielle de la limite.

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n) < z$

Donc  $f(c) \leq z$

On a donc  $f(c) \leq z < f(b)$

D'où  $c < b$ .

Par définition de  $c$ :  $\forall x \in ]c, b[, x \notin E$

$$\Rightarrow \forall x \in ]c, b[, f(x) \geq z$$

Par ailleurs,  $f$  est continue, donc sa limite à droite en  $c$  existe et vaut  $f(c)$ .

Ainsi,  $f(c) \geq z$

Conclusion:  $f(c) = z$

Conclusion générale:  $\exists c \in ]a, b[, f(c) = z$

Ce raisonnement est valable pour tout  $z$  entre  $a$  et  $b$ . On étend le raisonnement à  $y$  et  $y'$  dans  $f(I)$

On conclut que  $f(I)$  est un intervalle.  $\square$

### Propriété 1.0.1

*L'image d'un segment par une application continue est un segment.*

Soit  $I$  un segment réel non vide.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ .

D'après le TVI,  $f(I)$  est un intervalle.

Montrer que  $f(I)$  est fermé et borné.

- Montrer que  $f(I)$  est borné.

C'est à dire, montrer que  $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, y \in f(I) \Rightarrow |y| \leq M$

**HA** Supposons que  $f(I)$  ne soit pas borné.

Donc  $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, y \in I$  et  $|y| > M$

Soit  $x_0$  un élément de  $I$ .

– On considère  $E_1 = \{x \in I, |f(x)| > f(x_0) + 1\}$

$f(I)$  n'est pas borné, donc  $E_1$  est non vide.

Notons  $x_1$  un élément de  $E_1$ .

– Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons construits  $(x_i)_{i \in [0, n]}$ ,

Tels que:  $\forall i \in [1, n], |f(x_i)| > |f(x_{i-1})| + 1$

Soit  $E_{n+1} = \{x \in I, |f(x)| > |f(x_n)| + 1\}$

$f(I)$  n'est pas borné, donc  $E_{n+1}$  n'est pas vide.

On note  $x_{n+1}$  un élément de cet ensemble.

– Par récurrence, on construit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x_n)| > |f(x_{n-1})| + 1$

Par récurrence, on montre que:  $\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n)| > |f(x_0)| + n$

Ainsi,  $(|f(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

Par ailleurs,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $I$ . Donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe  $\phi : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Notons  $\phi$  une telle suite et  $l$  la limite.

–  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I$ , donc  $l \in I$

–  $f$  est continue en  $l \in I$ , donc (cara séquentielle de la limite)  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l)$

– On a aussi ①:  $|f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |f(l)|$  (car  $abs$  est continue en  $f(l)$ )

– De plus,  $(|f(x_{\phi(n)})|)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite extraite de  $(|f(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Donc ②:  $|f(x_{\phi(n)})| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

On a contradiction entre ① et ②. On en déduit que  $\boxed{\text{HA}}$  est fausse.

Conclusion:  $f(I)$  est in intervalle borné.

- Montrer que  $\exists(c, d) \in \mathbb{R}, f(I) = [c, d]$

On pose  $c = \inf(f(I))$  et  $d = \sup(f(I))$

Montrer que  $c \in I$  et  $d \in I$

– Montrons que  $d \in I$

Donc Montrons que  $\exists x \in I, f(x) = d$

En appliquant le principe de la borne supérieure avec  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on construit une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments de  $I$  telle que  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $d$ .

\*  $(x_n)$  est une suite de réels bornée, donc d'après le théorème de B-W, il existe une application strictement croissante  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  soit convergente.

Notons  $l$  sa limite.

De plus,  $l \in I$ .

\*  $f$  est continue sur  $I$  donc  $(f(x_{\phi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(l)$

\* Par ailleurs,  $(f(x_{\phi(n)}))$  est une suite extraite de  $(f(x_n))$ , donc  $(f(x_{\phi(n)}))$  converge vers  $d$ .

Par unicité de la limite,  $d = f(l)$ . Or,  $l \in I$ .

Finalement,  $d \in f(I)$

– On procède de même pour montrer que  $c \in f(I)$ .

**Conclusion générale:**  $\exists(c, d) \in \mathbb{R}^2, f(I) = [c, d]$

□

**Propriété 1.0.2**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Alors on a équivalence entre:

- ①  $f$  est injective
- ②  $f$  est strictement monotone

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

① $\Rightarrow$ ②: Supposons  $f$  injective.

Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

Donc montrer que  $f$  est croissante sur  $I$ . (car  $f$  est injective)

Montrer que pour tous  $x_1 < x_2 < x_3$  de  $I$ ,  $f(x_2)$  soit compris entre  $f(x_1)$  et  $f(x_3)$

**[HA]** Supposons qu'il existe  $x_1 < x_2 < x_3$  de  $I$  tels que  $f(x_2)$  ne soit pas compris entre  $f(x_1)$  et  $f(x_3)$ .

Alors il existe  $y_0 \in \mathbb{R}$ , tel que  $y_0$  soit compris strictement entre  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  et entre  $f(x_2)$  et  $f(x_3)$

D'après le TVI,  $\exists \alpha \in ]x_1, x_2[, y_0 = f(\alpha)$  et  $\exists \beta \in ]x_2, x_3[, y_0 = f(\beta)$

Les intervalles  $]x_1, x_2[$  et  $]x_2, x_3[$  sont disjoints, donc  $\alpha \neq \beta$ .

Cependant,  $f(\alpha) = f(\beta)$ , ce qui contredit l'injectivité de  $f$ .

Donc **[HA]** est contradictoire.

On conclut que  $f$  est monotone sur  $I$

Or,  $f$  est injective.

**Conclusion générale:**  $f$  est strictement monotone sur  $I$

② $\Rightarrow$ ①: Facile.

□

**Corollaire 1.0.1**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement monotone sur  $I$ .

Alors  $J = f(I)$  est un intervalle et  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $J$ .

**Propriété 1.0.3**

Soit  $f$  une fonction strictement croissante sur  $[a, b]$ .

Alors on a équivalence entre:

- ①:  $f$  est continue sur  $[a, b]$
- ②:  $f$  est surjective sur  $[f(a), f(b)]$

**N.B.** Fonctionne aussi avec la stricte décroissance.

On suppose  $f$  strictement croissante.

① On suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$

$f$  est surjective sur  $f([a, b])$  (par définition de l'image)

•  $f([a, b])$  est un segment car  $f$  est continue:  $\exists(c, d) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [c, d]$

•  $f$  est strictement croissante:  $\forall x \in [a, b], f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Donc  $\begin{cases} f(a) \text{ est un minorant de } f([a, b]) \\ f(a) \in f([a, b]) \end{cases}$

Ainsi,  $f(a)$  est le plus petit élément de  $f([a, b])$

Autrement dit,  $f(a) = c$ .

• On procède de même pour montrer que  $f(b) = d$

Conclusion:  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

② Supposons  $f$  surjective sur  $[f(a), f(b)]$

Montrer que  $f$  est continue sur  $[a, b]$

Soit  $x_0$  un élément de  $]a, b[$

Montrer que  $f$  est continue en  $x_0$ .

C'est à dire  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in [a, b], |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Soit  $\varepsilon$  un réel positif.

Soient  $y_0 = \max(\{f(a), f(x_0) - \varepsilon\})$  et  $y_1 = \min(\{f(b), f(x_0) + \varepsilon\})$

On a:  $f(a) \leq y_0 < f(x_0) < y_1 \leq f(b)$

$y_0$  et  $y_1$  sont compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , et  $f$  est surjective sur  $[f(a), f(b)]$ .

Donc  $\exists(x_0', x_1'), f(x_0') = y_0$  et  $f(x_1') = y_1$

Posons  $\alpha = \min(\{x_0 - x_0', x_1' - x_0\})$

Alors  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \subset [x_0', x_1'] \subset [a, b]$  Et  $\forall x \in ]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x_0) - \varepsilon \leq f(x_0') < f(x) < f(x_1') \leq f(x_0) + \varepsilon$

Car  $f$  est strictement croissante, et par définition de  $y_0$  et de  $y_1$ .

Finalement,  $\forall x \in [a, b], |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ceci est valable pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, donc  $f$  est continue en  $x_0$

Ceci est valable pour tout  $x_0$  de  $]a, b[$ , donc  $f$  est continue sur  $]a, b[$

On adapte la démonstration en  $a$  et  $b$ .

On conclut que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ .

□

### Corollaire 1.0.2

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et strictement croissante.

Alors  $f$  réalise une bijection de  $[a, b]$  sur  $f([a, b])$  et son application réciproque est continue sur  $f([a, b])$ .

Supposons  $f$  strictement croissante.

- $f$  est strictement croissante, donc  $f$  réalise une bijection de  $[a, b]$  sur  $J = f([a, b])$ .
- $f$  est continue donc  $J$  est un segment.
- De plus,  $f$  est croissante, donc  $J = [f(a), f(b)]$
- $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$

Montrer que  $f^{-1}$  est continue sur  $[f(a), f(b)]$ .

$f$  est strictement croissante sur  $[a, b]$ , donc  $f^{-1}$  l'est sur  $[f(a), f(b)]$ .

Donc, sachant  $f^{-1}$  surjective,  $f^{-1}$  est continue sur  $[f(a), f(b)]$

□

### Corollaire 1.0.3

Soit  $I$  un intervalle réel.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictement croissante et continue.

Alors: •  $f(I)$  est un intervalle

- $f$  réalise une bijection de  $I$  sur  $f(I)$
- $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $f(I)$
- $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$

## 2 Fonctions uniformément continues

### Définition 2.0.1

Soit  $I$  un intervalle réel.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $I$  si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall (x_1, x_2) \in I^2, |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$