

Suites Réelles

Généralités

MPSI 2

1 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.0.1

On note $\overline{\mathbb{R}}$ la réunion de \mathbb{R} et de deux éléments distincts: $-\infty$ et $+\infty$
 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- On peut prolonger partiellement les lois internes $+$ et \times à $\overline{\mathbb{R}}$, mais il existe des opérations indéfinies.
- On peut prolonger la relation d'ordre naturelle de \mathbb{R} à $\overline{\mathbb{R}}$: $\overline{\mathbb{R}}$ est ordonné.

Utilisation: une suite tend vers un élément de $\overline{\mathbb{R}}$

2 Définitions

Définition 2.0.2

On appelle suite réelle toute application $\phi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$n \longmapsto \phi(n)$$

Une suite réelle est une famille d'éléments indexée par \mathbb{N}

Notations: $u_n = \phi(n)$
 $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \phi$

Définition 2.0.3

On appelle ensemble des valeurs de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le sous ensemble de \mathbb{R} :

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x = u_n\}$$

Définition 2.0.4

On dit que u est une suite monotone si ϕ est monotone.
De même avec croissante et décroissante.

Définition 2.0.5

On dit que u est majorée si A est majoré dans \mathbb{R}
De même avec minorée et bornée.

3 Notations et limites

3.1 Limites réelles

Définition 3.1.1

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et l un réel.

On dit que u converge vers l si pour tout intervalle I centré en l , il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n sont dans I :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Propriété 3.1.1

Si u converge vers un l réel, alors l est unique.

Utiliser les définitions, raisonner par l'absurde avec $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

□

Notation: Si u converge vers l , on note: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

Propriété 3.1.2

Toute suite convergente est bornée.

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Soit A l'ensemble des valeurs de u , suite convergeant vers l .

Donc montrons que $\exists (a, b) \in \mathbb{N}, A \in [a, b]$

- u converge vers l donc pour $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow l - 1 < u_n < l + 1$

Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, un tel entier.

- Soit $B = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x = u_n\}$

B est un sous-ensemble fini de \mathbb{R} donc B est borné.

Posons $a = \min(\{l-1\} \cup B)$

$b = \min(\{l+1\} \cup B)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$

□

Propriété 3.1.3

Soit u une suite réelle convergeant vers l , telle qu'à partir d'un certain rang, tous ses termes appartiennent à un intervalle borné par a et b .

Alors $l \in [a, b]$

En sachant que u converge et que ses termes appartiennent à un intervalle borné, faire l'hypothèse que $l \notin [a, b]$

Conclure.

□

Propriété 3.1.4

Soit u une suite convergeant vers l . Alors:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < |l| + 1$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow l - 1 < u_n < l + 1$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow \frac{|l|}{2} < u_n < \frac{3|l|}{2}$$

- $\varepsilon = 1$ et d'après la 2^{ème} inégalité triangulaire: $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| < 1$

Donc $|u_n| \in]|l| - 1, |l| + 1[$

- $\varepsilon = 1$

- $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, en utilisant le cas 1 et la 2^{ème} inégalité triangulaire.

□

Propriété 3.1.5

Si u converge vers l , alors la suite de terme général $|u_n|$ converge vers $|l|$.

Propriété 3.1.6

Soit u une suite à termes positifs.

- *Si u admet une limite l , alors $l \geq 0$*
- *Si de plus $l \neq 0$, alors $u_n > \frac{l}{2}$*

3.2 Limites infinies

Définition 3.2.1

Soit u une suite réelle

- *Si u n'admet pas de limites dans \mathbb{R} , on dit que u diverge.*
- *On dit que u diverge vers $-\infty$ si:*
 $\forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n < K$
- *On dit que u diverge vers $+\infty$ si:*
 $\forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > K$

Notation: Si u diverge vers l'infini, on note: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$