# EDL
# Equations Differentielles Lineaires du second ordre

MPSI 2

## 1 Generalites

**Definition 1.0.1**
*Soit $\mathcal{I}$ un intervalle reel. a,b,c,d des applications definies sur $\mathcal{I}$ a valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues sur $\mathcal{I}$. On appelle equation differentielle lineaire du second ordre toute relation du type :*

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = d(x)$$

*d'inconnue y*

**Definition 1.0.2**
*Une solution particuliere sur $\mathcal{I}$ de l'equation differentielle precedente est une application $\phi\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :*

- *$\phi$ est deux foix derivable sur $\mathcal{I}$.*
- $\forall x \in \mathcal{I}, a(x)\, \phi''(x) + b(x)\, \phi'(x) + c(x)\, \phi(x) = d(x)$

**Remarque :** L'ensemble des solutions de l'equation differentielle lineaire du second ordre homogene

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x)\, y''(x) + b(x)\, y'(x) + c(x)\, y(x) = 0$$

a une structure d'espace vectoriel (non vide et stable par combinaisons lineaires).

## 2 Equation Differentielle Lineaire du second ordre a coefficients constants

### 2.1 Definitions

**Definition 2.1.1**
*Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que $a \neq 0$. Soit $d\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue sur $\mathcal{I}$. On appelle equation differentielle lineaire du second ordre a coefficients constants une relation du type :*

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

## 2.2 Etude de l'equation homogene associee

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$
$$\text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$$

**Propriete 2.2.1**
*(Solutions reelles)*
*On suppose $a, b, c$ reels et $a \neq 0$*
*Soit l'equation differentielle homogene associee :*

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (2)$$

*On considere l'equation $ar^2 + br + c = 0$ $(E)$ d'inconnue $r$.*
*$(E)$ s'appelle l'equation caracteristique associee a $(2)$*
***Cas 1 :*** *$(E)$ admet deux solutions reelles distinctes $r_1$ et $r_2$.*
*$y$ est solution de $(2)$ ssi:*

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

***Cas 2 :*** *$(E)$ admet une unique solution reelle $r_0$.*
*$y$ est solution de $(2)$ ssi:*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

***Cas 3 :*** *$(E)$ admet deux solutions complexes non reelles conjuguees $\alpha \pm \imath\beta$.*
*$y$ est solution de $(2)$ ssi:*

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x}(a \cos \beta x + \imath \sin \beta x)$$

**Propriete 2.2.2**
*(moins importante, solutions complexes)*
*On suppose $a, b, c$ complexes et $a \neq 0$.*
***Cas 1 :*** *$(E)$ admet deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$.*
*$y$ est solution de $(2)$ ssi:*

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

***Cas 2 :*** *$(E)$ admet une unique solution $r_0$.*
*$y$ est solution de $(2)$ ssi:*

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_2 x}$$

Soit $(a,b,c) \in (C)^3$ et $a \neq 0$.
Soit l'equation differentielle homogene :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad (2)$$

- Recherche d'une solution exponentielle.
  Soit $r \in \mathbb{C}$ fixe.
  Soit $z_0 : x \longmapsto e^{rx}$ une application deux foix derivable.

$$\begin{aligned} z_0(x) &= e^{rx} \\ z_0'(x) &= re^{rx} \\ z_0''(x) &= r^2 e^{rx} \end{aligned}$$

  $z_0$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, az_0''(x) + bz_0'(x) + cz_0(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, e^{rx}\left(ar^2 + br + c\right) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, ar^2 + br + c = 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{rx} > 0 \end{aligned}$$

  **Conclusion :** $z_0$ est solution de (2) ssi $r$ est racine de l'equation caracteristique.
- Determination des autres solutions.
  Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application deux foix derivable sur $\mathbb{R}$.
  Alors il existe une application $u$ definie sur $\mathbb{R}$ a valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, y(x) &= u(x)e^{rx} \\ y(x) &= e^{rx}u(x) \\ y'(x) &= e^{rx}\left(ru(x) + u'(x)\right) \\ y''(x) &= e^{rx}\left(r^2u(x) + 2ru'(x) + u''(x)\right) \end{aligned}$$

  $y$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, a\left(r^2u(x) + ru'(x) + u''(x)\right) + b\left(ru(x) + u'(x)\right) + cu(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, au''(x) + (2ra + b)u'(x) + \left(ar^2 + br + c\right)u(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, au''(x) + (2ra + b)u'(x) = 0 \end{aligned}$$

  On pose $v = u'$ pour obtenir une equation differentielle d'ordre un.
  $y$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, av'(x) + (2ra + b)v(x) = 0 \\ &\forall x \in \mathbb{R}, av'(x) = -\frac{2ra + b}{a}v(x) \\ &\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \lambda \exp\left(-\left(2r + \frac{b}{a}\right)x\right) \end{aligned}$$

  **Cas 1 :** L'equation caracteristique admet deux racines $r_1$ et $r_2$.

On applique ce qui precede avec $r = r_1$ et $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.
$y$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{lll}
\Longleftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & v(x) = \lambda e^{\left(-2r_1 + r_1 + r_2\right)x} \\
\Longleftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & v(x) = \lambda e^{\left(-r_1 + r_2\right)x} \\
\Longleftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{C}, \exists \mu \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & u(x) = \dfrac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{\left(r_2 - r_1\right)x} + \mu \\
\Longleftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & y(x) = \dfrac{\lambda}{r_2 - r_1} e^{r_2 x} + \mu e^{r_1 x} \\
\Longleftrightarrow & \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & y(x) = k_1 e^{r_2 x} + k_2 e^{r_1 x}
\end{array}$$

**Cas 2:** L'equation caracteristique admet une racine unique $r_0$.
Alors $r_0 = -\frac{b}{2a}$. On applique ce qui precede le cas 1 avec $r = r_0$.
$y$ est solution de (2) sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{lll}
\Longleftrightarrow & \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}, & v(x) = \lambda \\
\Longleftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & u(x) = \lambda x + \mu \\
\Longleftrightarrow & \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}
\end{array}$$

**Conclusion :** Ceci demontre :
- La propriete sur les solutions complexes
- Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la propriete sur les solutions reelles dans les deux premiers cas, en remplacant "$\exists \lambda \in \mathbb{C} / \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 / \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$" par "$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$"

□

**Structure de l'ensemble des solutions de** (2)

**Cas reel :** $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$

L'ensemble des solutions reelles de (2) est un espace vectoriel reel de dimension deux dont une base est $(z_1, z_2)$ non vide et stable par combinaisons lineaires a coefficients reels avec :

- $z_1 : x \longmapsto e^{r_1 x}$ et $z_2 : x \longmapsto e^{r_2 x}$ si l'equation caracteristique admet deux racines reelles $r_1$ et $r_2$

$$\mathcal{S} = \left\{ y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, y = k_1 z_1 + k_2 z_2 \text{ sur } \mathbb{R} \right\}$$

- $z_1 : x \longmapsto e^{r_0 x}$ et $z_2 : x \longmapsto x e^{r_0 x}$ si l'equation caracteristique admet une racine reelle unique $r_0$

$$\mathcal{S} = \left\{ \lambda z_1 + \mu z_2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- $z_1 : x \longmapsto e^{\alpha x} \cos \beta x$ et $z_2 : x \longmapsto e^{\alpha x} \sin \beta x$ si l'equation caracteristique admet deux racine complexes conjuguees $\alpha \pm \imath \beta$

$$\mathcal{S} = \left\{ A z_1 + B z_2, (A, B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

**Cas complexe :** $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3, a \neq 0$

L'ensemble des solutions complexes de (2) est un espace vectoriel complexe de dimension deux dont une base est $(z_1, z_2)$ avec :

- $z_1 : x \longmapsto e^{r_1 x}$ et $z_2 : x \longmapsto e^{r_2 x}$ si l'equation caracteristique admet deux racines $r_1$ et $r_2$
- $z_1 : x \longmapsto e^{r_0 x}$ et $z_2 : x \longmapsto x e^{r_0 x}$ si l'equation caracteristique admet une racine unique $r_0$

**Remarque :** Toute solution de (2) sur $\mathbb{R}$ existe de maniere unique comme combinaison lineaire de $z_1$ et $z_2$

## 2.3 Resolution de l'equation differentielle

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x) \quad (1)$$

$$\text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$$

$$d \colon \mathcal{I} \longmapsto \mathbb{K} \text{ continue}$$

### 2.3.1 Structure de l'ensemble des solutions

Soit $y_0$ une solution particuliere de (1) sur $mathcalI$.
Soit $y$ ube application definie sur $mathcalI$ a valeurs dans $mathbbK$, deux foix derivable sur $\mathcal{I}$. $y$ est solution de (1) sur $\mathcal{I}$ :

$$\begin{aligned}
&\iff \forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = b(x) \\
&\iff \forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = ay_0''(x) + by_0'(x) + cy_0(x) \\
&\iff \forall x \in \mathcal{I}, a(y-y_0)''(x) + b(y-y_0)'(x) + c(y-y_0)(x) = 0 \\
&\iff y - y_0 \text{ est solution de (2) sur } \mathcal{I} \\
&\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, y - y_0 = \lambda z_1 + \mu z_2 \text{ sur } \mathcal{I} \\
&\iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in \mathcal{I}, y(x) = y_0(x) + \lambda z_1(x) + \mu z_2(x)
\end{aligned}$$

**Conclusion :** L'ensemble $S$ des solutions de (1) sur $\mathcal{I}$ est :

$$S = \left\{ y_0 + \lambda z_1 + \mu z_2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

Structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent l'ensemble $S$ des solutions de l'equation differentielle homogene associee (2).

### 2.3.2 Etude de $d$

- Si $d$ est une fonction polynomiale, on cherche $y_0$ sous forme polynomiale de degre $\deg(d) +$ un nombre dependant de $a$, $b$ et $c$.