Dnombrements
Ensembles Finis

MPSI 2

Propriété 0.0.1
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit f une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

- *Si f est bijective, alors $n = p$*
- *Si f est injective, alors $n \leqslant p$*
- *Si f est surjective, alors $n \geqslant p$*

Définition 0.0.1
Soit E un ensemble non vide.
On dit que E est <u>fini</u> si il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E
Si un tel entier existe, il est unique et est le <u>cardinal de E</u>.

Notations: $\mathrm{card}(E)$, $\#E$, $|E|$
Convention: $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$

Propriété 0.0.2
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Soit F un sous-ensemble de E.
Alors F est également un ensemble fini <u>et</u> card$(F) \leqslant n$ <u>et</u> $(\mathrm{card}(F) = n) \iff (E = F)$

On procde par rcurrence sur le cardinal de E.
Lemme: Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$,
Et si a est un lment de E,
Alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n-1$

Dmonstration de la proprit
Soit $P(n)$: Pour tout ensemble E de cardinal n, pour tout sous-ensemble F de E,
F est fini <u>et</u> $\mathrm{card}(F) \leqslant n$ <u>et</u> $(\mathrm{card}(F) = n) \iff (E = F)$

<u>$n = 0$</u>: $E = \varnothing$ et $F = \varnothing$ et $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n-1)$ soit vrifi.
Montrons $P(n)$
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Soit F une partie de E.
1^{er} cas: $F = E$ alors $\text{card}(F) = n$
2^{me} cas: $F \neq E$
Alors $\exists a \in E,\ a \notin F$
Soit a un tel lment.
$a \notin F$ donc $F \subset E \setminus \{a\}$
Or, d'aprs la lemme, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n-1$, donc d'aprs l'hypothse de rcurrence, F est fini et $\text{card}(F) \leqslant n-1$

Finalement: $$\begin{aligned} F = E &\Rightarrow \text{card}(E) = \text{card}(F) \\ F \neq E &\Rightarrow \text{card}(F) < \text{card}(E) \end{aligned}$$
D'o $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$
Donc $P(n)$ est vrifi.
D'aprs le principe de rcurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$

Dmonstration du lemme
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.
Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E.
1^{er} cas: $n = 1$
$$\begin{array}{rcl} f : \{1\} & \longrightarrow & E \\ 1 & \longmapsto & f(1) \end{array}$$
$E = \{f(1)\}$, donc $E \setminus \{f(1)\} = \varnothing$, de cardinal 0.
2^{me} cas: $n \geqslant 2$
Soit a un lment de E.
f ralise une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E, donc $\exists i \in [\![1, n]\!]$, unique, $f(i) = a$

- Si $i = n$ alors $f(n) = a$
  $f\big|_{[\![1,n-1]\!]}$ ralise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $f([\![1, n-1]\!])$
  Or $$\begin{aligned} f([\![1, n-1]\!]) &= f([\![1, n]\!] \setminus \{n\}) \\ &= E \setminus \{a\} \end{aligned}$$
  Donc $f\big|_{[\![1,n-1]\!]}$ ralise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.
  Donc E est de cardinal $n-1$
- Si $i \neq n$
  Notons i_0 l'unique lment de $[\![1, n-1]\!]$ tel que $f(i_0) = a$
  On considre $$\tau : [\![1, n-1]\!] \longrightarrow [\![1, n-1]\!]$$
  $$i \longmapsto \begin{cases} i \text{ si} & (i \neq i_0 \text{ et } i \neq n) \\ i_0 \text{ si} & i = n \\ n \text{ si} & i = i_0 \end{cases}$$

$\square$