Fonctions Numériques
Fonctions continues sur un intervalle

MPSI 2

1 Fonctions continues

Soit I un intervalle non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dfinie sur I.
On dit que f est continue sur I si pout tout x_0 de I, f est continue en x_0.

Théorème des valeurs intermdiaires
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit I un intervalle.
Soit $f : I \to R$ une application continue sut I.
Montrer que $f(I)$ est un intervalle.
Ou montrer que $\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2,\ ((y, y') \in f(I)^2 \Rightarrow (\forall y'' \in \mathbb{R},\ y < y'' < y' \Rightarrow y'' \in f(I))$

Soit y et y' deux lments distincts de $f(I)$.
Alors il existe a et b dans I tels que: $f(a) = y$ et $f(b) = y'$
y et y' sont distincts, donc a et b sont distincts.
On suppose par exemple que $f(a) < f(b)$ et $a < b$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{R},\ (f(a) < z < f(b)) \Rightarrow (\exists x \in]a, b[,\ f(x) = z)$
Soit z un rel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$.
On considre l'ensemble $E = \{x \in [a, b],\ f(x) < z\}$

Principe de Borne suprieure

Montrer que E admet une borne suprieure:
- E est non vide: $a \in E$
- E est major par b

Donc E admet une borne suprieure que l'on notera c

On a: $a \leqslant c \leqslant b$
Et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in E,\ c - \varepsilon < x \leqslant c$
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et on pose x_n un rel vrifiant le critre.
On dfinit donc une suite: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in E$ et $c - \frac{1}{n} < x_n \geqslant c$

$\square$