

Structures Algébriques

Lois Internes

MPSI 2

1 Définitions

Définition 1.0.1

On appelle loi interne sur E toute application f définie sur $E \times E$ dans E :

$$\begin{aligned} f: E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Notation: $f(x, y) = f * y$

2 Propriétés des lois internes

Définition 2.0.2

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne $*$. $(E, *)$ est un magma.
 $*$ est une loi associative si $\forall (x, y, z) \in \mathcal{E} \times E \times E$, $(x * y) * z = x * (y * z)$

Propriété 2.0.1

Soit $*$ une loi associative sur E , et $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un sous-ensemble à n éléments de E .

- $x_1 * \dots * x_n$ est défini par récurrence: $(x_1 * \dots * x_{n-1}) * x_n = x_1 * \dots * x_n$
- $x_1 * \dots * x_n = (x_1 * \dots * x_{n_1}) * (x_{n_1+1} * \dots * x_{n_2}) * \dots * (x_{n_p} * \dots * x_n)$
est défini avec p parenthèses.

Définition 2.0.3

$*$ est une loi commutative sur E si $\forall (x, y) \in E \times E$, $x * y = y * x$

Définition 2.0.4

On dit que $*$ admet un élément neutre noté e si $\forall x \in \mathcal{E}$, $x * e = x$ et $e * x = x$

Propriété 2.0.2

Si $$ admet un élément neutre, alors il est unique*

Soit e_1 et e_2 deux éléments neutres de $(E, *)$.

alors $e_1 * e_2 = e_1$ car e_1 est un élément neutre

$e_1 * e_2 = e_2$ car e_2 est un élément neutre

Or, $*$ est une application, donc $e_1 = e_2$ □

Définition 2.0.5

*Soit $(E, *)$ un magma. Si $*$ est associative et admet un élément neutre dans E , alors $(E, *)$ est un monoïde*

Notations: Soit $(E, *)$ un monoïde.

Notation multiplicative:

- $x * y = x \times y$
- L'élément neutre est noté 1 ou 1_E
- $x_1 * \dots * x_n = \prod_{i=1}^n x_i$
- S'utilise en général lorsque $*$ n'est pas commutative.

Notation additive:

- $x * y = x + y$
- L'élément neutre est noté 0 ou 0_E
- $x_1 * \dots * x_n = \sum_{i=1}^n x_i$
- S'utilise en général lorsque $*$ est commutative.

Définition 2.0.6

*Soit $(E, *)$ un monoïde d'élément neutre e . Soit x un élément de E .
 x est symétrisable dans E si il existe un élément y de E tel que:*

$$x * y = e \text{ et } y * x = e$$

Propriété 2.0.3

Si x est symétrisable, alors son symétrique est unique.

Notation:

- Multiplicative: le symétrique de x s'appelle inverse et se note x^{-1}
- Additive: le symétrique de x s'appelle opposé et se note $-x$

Remarque: Soit $(E, *)$ un monoïde.

Si x et y sont symétrisables de symétriques x' et y'

Alors $x * y$ est symétrisable de symétrique $y' * x'$