Complexes
Fonctions a valeurs complexes

MPSI 2

Soit $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$ une application definie sur $\mathcal{I}$ et a valeurs complexes.

$$\forall t \in \mathcal{I}, f(t) = f_1(t) + \imath f_2(t)$$

On definit ainsi deux fonctions sur $\mathcal{I}$ a valeurs reelles : f_1 et f_2.
On a : $\forall t \in \mathcal{I}, \begin{cases} f_1(t) = \mathcal{R}e(f(t)) \\ f_2(t) = \mathcal{I}m(f(t)) \end{cases}$

Définition 0.0.1

- *On dit que f admet une limite lorsque t tend vers t_0 sur $\mathcal{I}$ si les fonctions composantes f_1 et f_2 admettent une limite finie quand t tend vers t_0.*
  Dans ce ca, la limite de $f(t)$ quand t tend vers t_0 est :

$$L = L_1 + iL_2 \quad ou \quad L_1 = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f_1(t) \;\; et \; L_2 = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f_2(t)$$

Notation : $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f(t) = L$

- *f est continue sur $\mathcal{I}$ si f_1 et f_2 sont continues sur $\mathcal{I}$.*
- *f est derivable en t_0 si f_1 et f_2 sont derivables en t_0.*
  Dans ce cas, le nombre derive de f en t_0 est par definition :

$$f'(t_0) = f_1'(t_0) + \imath f_2'(t_0)$$

- *Soit $F : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application definie sur $\mathcal{I}$ a valeurs dans $\mathbb{C}$.*
  On dit que F est une primitive de f sur $\mathcal{I}$ si F est derivable sur $\mathcal{I}$ et si :

$$\forall t \in \mathcal{I}, F'(t) = f(t)$$

  On a alors :

$$\forall t \in \mathcal{I}, F_1'(t) + \imath F_2'(t) = f_1(t) + \imath f_2(t)$$

- *Si f est continue sur un segment $[a, b]$, on pose :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + \imath \int_a^b f_2(t)\,dt$$

Cas particulier de fonctions a valeurs complexes : L'exponentielle complexe
Soit $z_0 = a + \imath b$ un nombre complexe.
Cas 1 : z_0 reel
e^{z_0} a un sens (exponentielle reelle).
Cas 2 : z_0 imaginaire

$$\begin{aligned} z_0 &= \imath\theta \\ e^{z_0} &= e^{\imath\theta} \\ &= \cos\theta + \imath\sin\theta \end{aligned}$$

Cas 3 :
Si $z_0 = a + \imath b$, on pose : $e^{z_0} = e^a e^{\imath b}$
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longmapsto e^{z_0 x}$
f est une fonction a valeurs complexes et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= e^{(a+\imath b)x} \\ &= e^{ax+\imath bx} \\ &= e^{ax}e^{\imath bx} \\ &= e^{ax}(\cos bx + \imath \sin bx) \end{aligned}$$

Les applications composantes de f sont :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{ax}\cos bx \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^{ax}\sin bx \end{aligned}$$

f_1 et f_2 sont derivables su $\mathbb{R}$ donc f est derivable sur $\mathbb{R}$ et:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) &= e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx) \\ f_2'(x) &= e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx) \\ f'(x) &= e^{ax}\left[(a+\imath b)\cos bx + \imath(a+\imath b)\sin bx\right] \\ &= (a+\imath b)\,e^{ax}(\cos bx + \imath\sin bx) \\ &= (a+\imath b)\,e^{(a+\imath b)x} \end{aligned}$$