Dnombrements
Ensembles Finis

MPSI 2

Propriété 0.0.1
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Soit f une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.

- *Si f est bijective, alors $n = p$*
- *Si f est injective, alors $n \leqslant p$*
- *Si f est surjective, alors $n \geqslant p$*

Définition 0.0.1
Soit E un ensemble non vide.
On dit que E est <u>fini</u> si il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1,n]\!]$ sur E
Si un tel entier existe, il est unique et est le <u>cardinal de E</u>.

Notations: $\text{card}(E)$, $\#E$, $|E|$
Convention: $\text{card}(\varnothing) = 0$

Propriété 0.0.2
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Soit F un sous-ensemble de E.
Alors F est également un ensemble fini <u>et</u> $\text{card}(F) \leqslant n$ <u>et</u> $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$

On procde par rcurrence sur le cardinal de E.
Lemme: Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$,
Et si a est un lment de E,
Alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n - 1$

Dmonstration de la proprit
Soit $P(n)$: Pour tout ensemble E de cardinal n, pour tout sous-ensemble F de E,
F est fini <u>et</u> $\text{card}(F) \leqslant n$ <u>et</u> $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$

<u>$n = 0$</u>: $E = \varnothing$ et $F = \varnothing$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n-1)$ soit vrifi.
Montrons $P(n)$
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Soit F une partie de E.
<u>1er cas:</u> $F = E$ alors $\text{card}(F) = n$
<u>2me cas:</u> $F \neq E$
Alors $\exists a \in E,\ a \notin F$
Soit a un tel lment.
$a \notin F$ donc $F \subset E \setminus \{a\}$
Or, d'aprs la lemme, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n-1$, donc d'aprs l'hypothse de rcurrence, F est fini <u>et</u> $\text{card}(F) \leqslant n-1$

Finalement: $\begin{aligned} F = E &\Rightarrow \text{card}(E) = \text{card}(F) \\ F \neq E &\Rightarrow \text{card}(F) < \text{card}(E) \end{aligned}$
D'o $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$
Donc $P(n)$ est vrifi.
D'aprs le principe de rcurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$

Dmonstration du lemme
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.
Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E.
<u>1er cas:</u> $n = 1$

$$\begin{aligned} f\colon \{1\} &\longrightarrow E \\ 1 &\longmapsto f(1) \end{aligned}$$

$E = \{f(1)\}$, donc $E \setminus \{f(1)\} = \varnothing$, de cardinal 0.
<u>2me cas:</u> $n \geqslant 2$
Soit a un lment de E.
f ralise une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur E, donc $\exists i \in [\![1, n]\!],$ unique, $f(i) = a$

- <u>Si $i = n$</u> alors $f(n) = a$
  $f|_{[\![1,n-1]\!]}$ ralise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $f([\![1, n-1]\!])$
  Or $\begin{aligned} f([\![1, n-1]\!]) &= f([\![1, n]\!] \setminus \{n\}) \\ &= E \setminus \{a\} \end{aligned}$
  Donc $f|_{[\![1,n-1]\!]}$ ralise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.
  Donc E est de cardinal $n-1$
- <u>Si $i \neq n$</u>
  Notons i_0 l'unique lment de $[\![1, n-1]\!]$ tel que $f(i_0) = a$
  On considre $\tau : [\![1, n-1]\!] \longrightarrow [\![1, n-1]\!]$

$$i \longmapsto \begin{cases} i \text{ si } (i \neq i_0 \text{ et } i \neq n) \\ i_0 \text{ si } i = n \\ n \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

  τ ralise un bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
  On applique ensuite le premier cas avec $\tau([\![1, n]\!])$ au lieu de $[\![1, n]\!]$

$\square$

Propriété 0.0.3
Soit P une partie finie, non vide et incluse dans $\mathbb{N}$, de cardinal p.
Alors il existe une unique bijection strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ sur P.

Existence:
- P est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et admet un plus petit lment que l'on note y_1.
  On pose $\phi(1) = y_1$
- Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $(\phi(i))_{i \in [\![1,k]\!]}$ est dfini et $\phi(1) < ... < \phi(k)$
  Soit $P_k = \{x \in \mathbb{N},\ x \in P \text{ et } x > \phi(k)\}$
  P_k est non vide car $k < p$, donc admet un plus petit lment. On le note $\phi(k+1)$

On construit alors ϕ par itration, et elle est strictement croissante.

Unicit: Soit ψ une application strictement croissante bijective de $[\![1, p]\!]$ sut P.
Alors $P = \{\psi(1), \psi(2), ..., \psi(p)\}$ et $\psi(1) < ... < \psi(p)$
- $\psi(1)$ est le plus petit lment de P, donc $\psi(1) = \phi(1)$
- $\psi(2)$ est le plus petit lment de $P \setminus \{\psi(1)\}$. Or $P \setminus \{\psi(1)\} = P_1$, donc par dfinition, $\phi(2) = \psi(2)$
- ...

Conclusion: $\phi = \psi$

$\square$

Propriété 0.0.4
Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
On a alors quivalence entre:
1. *f est injective*
2. *f est surjective*
3. *f est bijective*

1. Supposons f injective.
   Montrer que f est surjective.
   Donc montrer que $f(E) = F$
   Soit $g\colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une application.
   g ralise une bijection de E sur $f(E)$ par dfinition de l'espace d'arrive.
   Par ailleurs, E est de cardinal n, donc il existe une bijection ϕ de $[\![1, n]\!]$ sur E.
   $g \circ \phi : [\![1, n]\!] \longrightarrow f(E)$
   $g \circ \phi$ est une bijection, donc $\text{card}(f(E)) = n$

D'où, sachant $f(E) \subset F$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, $E = F$
Donc f est surjective.
② Supposons f surjective.
Montrer que f est bijective.

$\square$