

Complexes

Generalites

MPSI 2

1 Plan Affixe \mathcal{A}_2

On note \mathcal{A}_2 l'ensemble des points du plan.

1.1 Angles

Definition 1.1.1

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs unitaires du plan.

On appelle mesure de l'angle oriente (\vec{u}, \vec{v}) tout reel θ tel que : $\vec{v} = \cos(\theta) \vec{u} + \sin(\theta) \vec{u}'$ avec \vec{u}' est le vecteur unitaire directement orthogonal a \vec{u} .

On note mesure de \vec{u}, \vec{v} : $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$

Definition 1.1.2

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

On appelle mesure de l'angle oriente (\vec{u}, \vec{v}) toute mesure de l'angle oriente des vecteurs unitaires associes.

On a donc : $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \text{mes}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \pmod{2\pi}$

1.2 Definition sur les nombres complexes

Definition 1.2.1

Soit \mathcal{A}_2 l'ensemble des points du plan muni d'un repere orthonorme $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On note \mathcal{E}_2 l'ensemble des vecteurs du plan.

L'ensemble des complexes peut etre mis en bijection avec \mathcal{E}_2 ou avec \mathcal{A}_2 .

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}_2$$

$$x + iy \longmapsto M, \text{ de coordonnees } (x, y) \text{ dans le repere } (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

$$x + iy \longmapsto \vec{OM}, \text{ de coordonnees } (x, y) \text{ dans la base } (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$$

Sont deux applications bijectives.

□

Definition 1.2.2

- On dit que M de coordonnees (x, y) est l'image affine du complexe $z = x + iy$.
- On dit que $z = x + iy$ est l'afixe du point M / du vecteur \vec{OM} .

Definition 1.2.3

Soit $z = x + iy$.

- Le module de z : $|z| = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Un argument de z pour z non nul : $\arg(z) = \text{mes}(\vec{i}, \vec{OM})$.

Propriete 1.2.1

Soit z un complexe non nul.

- z est reel $\iff \arg(z) \equiv 0 \ [2\pi]$
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = k\pi$
- z est imaginaire $\iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Propriete 1.2.2

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\begin{cases} \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi] \\ z \text{ et } z' \text{ non nuls} \end{cases}$

Definition 1.2.4

Conjuge de $z = x + iy$: $\bar{z} = x - iy$

Propriete 1.2.3

- z est reel $\iff z = \bar{z}$
- z est imaginaire $\iff z = -\bar{z}$

- $\overline{\bar{z}} = z$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

Notation :

Si $z = x + iy$, on note:

$\mathcal{R}e(z) = x$ la partie reelle de z .

$\mathcal{I}m(z) = y$ la partie imaginaire de z .

On a :

$$\mathcal{R}e(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\mathcal{I}m(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

2 Exponentielle complexe

Soit $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \cos x + i \sin x$$

C'est une fonction d'une variable reelle et a valeurs complexes dont les applications composantes sont \cos et \sin .

Ces applications composantes sont derivables sur \mathbb{R} , donc ψ est derivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = -\sin x + i \cos x$$

Notation : $\psi(x) = e^{ix}$

Remarque :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) &= i(\cos x + i \sin x) \\ &= i\psi(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = ie^{ix}$$

On a pour α et β reels :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \\ &= \cos \beta (\cos \alpha + i \sin \alpha) + \sin \beta (i \cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \psi(\alpha) \psi(\beta) \end{aligned}$$

□

On a demontre :

Propriete 2.0.4

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) \psi(\beta)$$

$$e^{\imath(\alpha+\beta)} = e^{\imath\alpha} e^{\imath\beta}$$

Corollaire 2.0.1

- $(\alpha = \beta) \quad e^{\imath(\alpha+\beta)} = (e^{\imath\alpha})^2$
- Par recurrence, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, e^{\imath n\alpha} = (e^{\imath\alpha})^n$$

$$\cos(n\alpha) + \imath \sin(n\alpha) = (\cos \alpha + \imath \sin \alpha)^n$$

Formule de MOIVRE

- $(\beta = -\alpha) \quad e^{\imath(\alpha+\beta)} = e^{\imath\alpha} e^{-\imath\alpha} \iff e^{-\imath\alpha} = \frac{1}{e^{\imath\alpha}}$
- En utilisant $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, e^{-\imath n\alpha} = \frac{1}{e^{\imath n\alpha}}$$

$$e^{\imath n\alpha} = (e^{\imath\alpha})^n$$

Formules et calculs a connaitre

- $\cos \alpha = \frac{e^{\imath\alpha} + e^{-\imath\alpha}}{2}$ et $\sin \alpha = \frac{e^{\imath\alpha} - e^{-\imath\alpha}}{2\imath}$
 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\cos^n \alpha = \left(\frac{e^{\imath\alpha} + e^{-\imath\alpha}}{2} \right)^n$
- $$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{\imath k\alpha} e^{-\imath(n-k)\alpha}$$

En regroupant les termes d'indice k et $n - k$, on obtient une expression du type :

$$\cos^n \alpha = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\alpha)$$

Avec a_k des coefficients calculables.

Definition 2.0.5

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

- \mathbb{U} est represente dans le plan affine par le cercle unite (de centre \mathcal{O} et de rayon 1).
- $1 \in \mathbb{U}$
- \mathbb{U} est stable par multiplication.
- \mathbb{U} est stable par passage a l'inverse.

On dit que (\mathbb{U}, \times) est un groupe.

Propriete 2.0.5

Inegalite triangulaire : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

Corollaire 2.0.2

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

Cas 1 : $z' = 0$

Alors $\forall z \in \mathbb{C}, |z + z'| = |z|$

$$|z| + |z'| = |z|$$

Cas 2 : $z' \neq 0$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \iff \left| 1 + \frac{z}{z'} \right| \leq 1 + \left| \frac{z}{z'} \right|$$

On est amene a demontrer :

$$\forall u \in \mathbb{C}, |1 + u| \leq 1 + |u|$$

Soit u un complexe fixe :

$$\begin{aligned} |1 + u| \leq 1 + |u| &\iff |1 + u|^2 \leq (1 + |u|)^2 \\ &\iff (1 + u)(1 + \bar{u}) \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\ &\iff 1 + u + \bar{u} + u\bar{u} \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\ &\iff 1 + 2\operatorname{Re}(u) + |u| \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\ &\iff \operatorname{Re}(u) \leq |u| \end{aligned}$$

Or cette derniere propriete est vraie pour tout complexe u .

Conclusion : $\forall u \in \mathbb{C}, |1 + u| \leq 1 + |u|$

Conclusion generale : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

□