

# EDL

## Equations Differentielles Lineaires du premier ordre

### MPSI 2

## 1 Generalites

### Définition 1.0.1

Soit  $I$  un intervalle reel.

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois fonctions definies sur  $I$  a valeurs reelles ou complexes.

$$\begin{array}{lll} a: I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & a(x) \end{array} \quad \begin{array}{lll} b: I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & b(x) \end{array} \quad \begin{array}{lll} c: I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & c(x) \end{array}$$

On suppose  $a$ ,  $b$  et  $c$  continues sur  $I$

On appelle equation differentielle lineaire du premier ordre une relation du type:

$$\forall x \in I, \quad a(x) y'(x) + b(x) y(x) = c(x)$$

### Définition 1.0.2

- $c$  est le second membre de l'equation differentielle.
- $\forall x \in I, \quad a(x) y'(x) + b(x) y(x) = 0$  est le second membre de l'equation.

### Définition 1.0.3

Soit  $J$  un sous-intervalle de  $I$ .

On appelle solution de l'equation differentielle toute application  $\Phi$  telle que:

$$\Phi: J \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \Phi(x)$$

Telle que :

- $\Phi$  soit derivable sur  $J$
- $\forall x \in J, \quad a(x) \Phi'(x) + b(x) \Phi(x) = c(x)$

**Remarque:** l'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'EDHA sur  $I$  est stable par combinaison lineaire et non vide ( $y = 0$  est solution)  
On dit alors que  $\mathcal{S}_0$  a une structure d'espace vectoriel

## 2 Etude de l'equation $\forall x \in I, y'(x) + \alpha y(x) = 0$

Pour  $\alpha$  continue sur  $I$ .

### Propriété 2.0.1

L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'ED  $\forall x \in I, y'(x) + \alpha y(x) = 0$  est:

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda \times g, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

avec  $g(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x A(x)\right)$  et  $A(x)$  une primitive de  $\alpha$  sur  $I$

On étudie l'expression  $y'(x) = -\alpha y(x)$ , et on cherche une primitive de  $-\alpha$ .  
L'exponentielle de cette primitive est solution de l'expression  $(g(x))$ .

On cherche une fonction  $u$  telle que  $y = u g$  soit solution de l'expression précédente.  
Par calcul, on trouve:  $\forall x \in I, u'(x) = 0$ , donc  $u$  est constante sur  $I$ .

Ainsi, toutes les solutions de l'expression sont de la forme de la propriété.  $\square$

### Remarques:

- $\mathcal{S}_0$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension 1, dont une base est donnée par  $g$ . On parle de droite affine.
- Il est possible de caractériser la fonction exponentielle par l'unique solution du système
 
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
- Si  $y$  est solution de l'ED, de deux choses l'une:
  - $y$  est l'application nulle sur  $I$ .
  - $y$  ne s'annule jamais sur  $I$

## 3 Cas general: $\forall x \in I, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

### 3.1 Resolution de l'EDHA

$a$  est continue sur  $I$ . Soit  $J$  un intervalle où  $a$  ne s'annule pas. Alors:

$$\begin{aligned} \forall x \in J, a(x)y'(x) + b(x)y(x) &= 0 \\ \iff \forall x \in J, y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) &= 0 \end{aligned}$$

D'après la propriété précédente, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1.

Pour  $x_0 \in J$ , on note  $Z_0$  l'application définie sur  $J$  par:

$$\forall x \in J, Z_0(x) = -\exp\left(\int_{x_0}^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right)$$

$Z_0$  est une solution de l'EDHA.

### 3.2 Resolution de l'ED

Soit  $y_0$  une solution particulière de l'ED. Donc  $y_0$  est dérivable sur  $J$  et:

$$\forall x \in J, a(x)y'_0(x) + b(x)y_0(x) = c(x)$$

$y$  est solution de l'ED

$$\iff \forall x \in J, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in J, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = a(x)y'_0(x) + b(x)y_0(x)$$

$$\iff \forall x \in J, a(x)(y - y_0)(x) + b(x)(y - y_0)(x) = 0$$

$$\iff (y - y_0) \text{ est solution de l'EDHA}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in J, (y - y_0)(x) = \lambda Z_0(x)$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in J, y(x) = y_0 + \lambda Z_0$$

On a démontré:

#### Propriété 3.2.1

- l'ensemble des solutions de l'ED  $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$  est :

$$\mathcal{S}_J = \{y_0 + \lambda Z_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

$$\text{avec } Z_0: J \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto -\exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right)$$

et  $y_0$  solution particulière de l'ED.

- $\mathcal{S}_J$  est un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent l'ensemble des solutions de l'EDHA.  
c'est un espace vectoriel de dimension 1, on parle de droite affine.

### 3.3 Détermination d'une solution particulière

Il existe deux fonctions  $y$  et  $u$  dérivables sur  $J$  telles que:

$$\forall x \in J, y(x) = u(x) Z_0(x)$$

$$y \text{ est solution de l'ED} \iff \forall x \in J, u'(x) = \frac{c(x)}{a(x)Z_0(x)}$$

On choisit une primitive  $u_0$  de  $u'$  et  $y_0 = u_0 Z_0$ , les solutions de l'ED sont donc de la forme:

$$y = y_0 + \lambda Z_0$$

### 3.4 Probleme de Cauchy

Soit  $I$  un intervalle reel et  $a, b, c$  trois applications continues sur  $I$  a valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Soit l'ED:  $\forall x \in I, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

**Soit**  $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ . **Existe-t-il une solution**  $y : x \rightarrow \mathbb{K}$  **satisfaisant**  $y(x_0) = y_0$  ?

#### Propriété 3.4.1

*Si  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors il existe une unique solution  $y : I \rightarrow \mathbb{K}$  telle que:*

$$\begin{cases} \forall x \in I, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

**Remarques si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

- Si  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ , il existe une unique **courbe solution** passant par le point de coordonnées  $(x_0, y_0)$
- par application de cette propriété, deux courbes intégrales ne se coupent jamais.

Determiner les solutions littérales de l'ED, et exprimer  $y(x_0) = y_0$  en fonction des expressions précédentes. En déduire  $\lambda$  unique, donc  $y$  unique. □