# Dnombrements
# Ensembles Finis

MPSI 2

**Propriété 0.0.1**
*Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.*
*Soit $f$ une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.*

- *Si $f$ est bijective, alors $n = p$*
- *Si $f$ est injective, alors $n \leqslant p$*
- *Si $f$ est surjective, alors $n \geqslant p$*

**Définition 0.0.1**
*Soit $E$ un ensemble non vide.*
*On dit que $E$ est <u>fini</u> si il existe un entier naturel non nul $n$ et une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $E$*
*Si un tel entier existe, il est unique et est le <u>cardinal de $E$</u>.*

**Notations:** $\mathrm{card}(E)$, $\#E$, $|E|$
**Convention:** $\mathrm{card}(\varnothing) = 0$

**Propriété 0.0.2**
*Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$.*
*Soit $F$ un sous-ensemble de $E$.*
*Alors $F$ est également un ensemble fini <u>et</u> card$(F) \leqslant n$ <u>et</u> $(\mathrm{card}(F) = n) \iff (E = F)$*

On procde par rcurrence sur le cardinal de $E$.
**Lemme:** Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$,
Et si $a$ est un lment de $E$,
Alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n - 1$

**Dmonstration de la proprit**
Soit $P(n)$ : Pour tout ensemble $E$ de cardinal $n$, pour tout sous-ensemble $F$ de $E$,
$F$ est fini <u>et</u> $\mathrm{card}(F) \leqslant n$ <u>et</u> $(\mathrm{card}(F) = n) \iff (E = F)$

<u>$n = 0$</u>: $E = \varnothing$ et $F = \varnothing$ et $\mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n-1)$ soit vrifi.
Montrons $P(n)$
Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$.
Soit $F$ une partie de $E$.
<u>1er cas:</u> $F = E$ alors $\text{card}(F) = n$
<u>2me cas:</u> $F \neq E$
Alors $\exists a \in E,\ a \notin F$
Soit $a$ un tel lment.
$a \notin F$ donc $F \subset E \setminus \{a\}$
Or, d'aprs la lemme, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n-1$, donc d'aprs l'hypothse de rcurrence, $F$ est fini <u>et</u> $\text{card}(F) \leqslant n-1$

Finalement: $F = E \Rightarrow \text{card}(E) = \text{card}(F)$
$F \neq E \Rightarrow \text{card}(F) < \text{card}(E)$
D'o $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$
Donc $P(n)$ est vrifi.
D'aprs le principe de rcurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$

**Dmonstration du lemme**
Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.
Il existe une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $E$.
<u>1er cas:</u> $n = 1$

$$\begin{aligned} f\colon \{1\} &\longrightarrow E \\ 1 &\longmapsto f(1) \end{aligned}$$

$E = \{f(1)\}$, donc $E \setminus \{f(1)\} = \varnothing$, de cardinal 0.
<u>2me cas:</u> $n \geqslant 2$
Soit $a$ un lment de $E$.
$f$ ralise une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $E$, donc $\exists i \in [\![1, n]\!]$, unique, $f(i) = a$

- <u>Si $i = n$</u> alors $f(n) = a$
  $f\big|_{[\![1,n-1]\!]}$ ralise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $f([\![1, n-1]\!])$
  Or $\begin{aligned} f([\![1, n-1]\!]) &= f([\![1, n]\!] \setminus \{n\}) \\ &= E \setminus \{a\} \end{aligned}$
  Donc $f\big|_{[\![1,n-1]\!]}$ ralise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ sur $E \setminus \{a\}$.
  Donc $E$ est de cardinal $n-1$
- <u>Si $i \neq n$</u>
  Notons $i_0$ l'unique lment de $[\![1, n-1]\!]$ tel que $f(i_0) = a$
  On considre $\tau : [\![1, n-1]\!] \longrightarrow [\![1, n-1]\!]$

$$i \longmapsto \begin{cases} i \text{ si } (i \neq i_0 \text{ et } i \neq n) \\ i_0 \text{ si } i = n \\ n \text{ si } i = i_0 \end{cases}$$

  $\tau$ ralise un bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.
  On applique ensuite le premier cas avec $\tau([\![1, n]\!])$ au lieu de $[\![1, n]\!]$

$\square$

**Propriété 0.0.3**
*Soit $P$ une partie finie, non vide et incluse dans $\mathbb{N}$, de cardinal $p$.*
*Alors il existe une unique bijection strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ sur $P$.*

**Existence:**

- $P$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, et admet un plus petit lment que l'on note $y_1$.
  On pose $\phi(1) = y_1$
- Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $(\phi(i))_{i\in[\![1,k]\!]}$ est dfini et $\phi(1) < ... < \phi(k)$
  Soit $P_k = \{x \in \mathbb{N},\ x \in P \text{ et } x > \phi(k)\}$
  $P_k$ est non vide car $k < p$, donc admet un plus petit lment. On le note $\phi(k+1)$

On construit alors $\phi$ par itration, et elle est strictement croissante.

**Unicit:** Soit $\psi$ une application strictement croissante bijective de $[\![1, p]\!]$ sut $P$.
Alors $P = \{\psi(1), \psi(2), ..., \psi(p)\}$ et $\psi(1) < ... < \psi(p)$

- $\psi(1)$ est le plus petit lment de $P$, donc $\psi(1) = \phi(1)$
- $\psi(2)$ est le plus petit lment de $P \setminus \{\psi(1)\}$. Or $P \setminus \{\psi(1)\} = P_1$, donc par dfinition, $\phi(2) = \psi(2)$
- ...

Conclusion: $\phi = \psi$

$\square$

**Propriété 0.0.4**
*Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis de même cardinal $n$.*
*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*
*On a alors quivalence entre:*
① *$f$ est injective*
② *$f$ est surjective*
③ *$f$ est bijective*

① Supposons $f$ injective.
Montrer que $f$ est surjective.
Donc montrer que $f(E) = F$
Soit $g\colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & f(E) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une application.
$g$ ralise une bijection de $E$ sur $f(E)$ par dfinition de l'espace d'arrive.
Par ailleurs, $E$ est de cardinal $n$, donc il existe une bijection $\phi$ de $[\![1, n]\!]$ sur $E$.
$g \circ \phi : [\![1, n]\!] \longrightarrow f(E)$
$g \circ \phi$ est une bijection, donc $\mathrm{card}(f(E)) = n$

D'où, sachant $f(E) \subset F$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, $E = F$
Donc $f$ est surjective.
② Supposons $f$ surjective.
Montrer que $f$ est bijective de $E$ sur $F$.
a/ Montrer que $\exists h \in F$

$\square$