Fonctions Numériques
Limites de fonctions

MPSI 2

1 Dfinitions

Définition 1.0.1
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$*, tel que* $x_0 \in I$ *ou* x_0 *est une extrmit de* I*.*
Soit $l \in \mathbb{R}$
•*f(x) tend vers l quand x tend vers* x_0*:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Définition 1.0.2
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$*, tel que* $x_0 \in I$ *ou* x_0 *est une extrmit de* I*.*
•*f(x) tend vers* $+\infty$ *quand x tend vers* x_0*:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$$

•*f(x) tend vers* $-\infty$ *quand x tend vers* x_0*:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < K$$

Propriété 1.0.1
Si $x_0 \in I$*, alors la seule limite ventuelle de* $f(x)$ *en* x_0 *est* $f(x_0)$

On suppose qu'il existe l dans $\mathbb{R}$, tel que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$
$\boxed{\text{HA}}$ $l \neq f(x_0)$
1 $l \in \mathbb{R}$
Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Supposons $l > f(x_0)$
Posons $\varepsilon = \frac{l - f(x_0)}{2}$
Alors $f(x_0) \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Soit α vrifiant les conditions de limites.
Donc $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) \in]l - \varepsilon, l + varepsilon[$
On a donc une contradiction.

② $l = +\infty$
Alors $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$
Soit K un rel strictement suprieur à $f(x_0)$
Soit α un rel vrifiant les condition de limites.
Donc $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$
En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) > K$
On a donc une contradiction.

③ $l = -\infty$
On procde de même.

Conclusion: $l = f(x_0)$

□

Définition 1.0.3
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- $f(x)$ *tend vers* $l \in \mathbb{R}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$*:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$*:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) > K$$

Propriété 1.0.2
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$*.*
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que* x_0 *soit un lment de* I *ou une extrmit de* I*.*
Soit $(l, l') \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$*.*
Si f *admet* l *et* l' *comme limite en* x_0*, alors* $l = l'$

Notations: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x) = l$ et $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$

Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$
① : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l)| < \varepsilon$
② : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$
Supposons $l \neq l'$, et $l > l'$

Posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$
On a donc $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[=\varnothing$

Soit α_1 et α_2 vrifiant ① et ②.
Soit $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$
Alors $\forall x \in I,\ |x-x_0| < \alpha \Rightarrow (|f(x)-l| < \varepsilon$ et $|f(x)-l'| < \varepsilon)$
Autrement dit: $\forall x \in I,\ |x-x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$
On a donc une contradiction.
Conclusion: $l = l'$ □

Remarques:
- Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \underset{\substack{x\to x_0\\x\in I}}{\longrightarrow} l \iff f(x)-l \underset{\substack{x\to x_0\\x\in I}}{\longrightarrow} 0$
- Soit $l \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors f(x) $\underset{\substack{x\to x_0\\x\in I}}{\longrightarrow} l \iff \frac{f(x)}{l} \underset{\substack{x\to x_0\\x\in I}}{\longrightarrow} 1$
- Soit $x_0 \in I$. Alors $f(x) \underset{\substack{x\to x_0\\x\in I}}{\longrightarrow} l \iff f(x_0+h) \underset{\substack{x_0+h\in I\\h\to 0}}{\longrightarrow} l$

Propriété 1.0.3
On suppose que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $x_0 \in I$.
- *Si $f(x) \in [a,b]$ au voisinage de x_0, alors $l \in [a,b]$.*
- *Au voisinage de x_0: $l-1 < f(x) < l+1$*
- *Si $l \neq 0$ alors au voisinage de x_0: $\frac{|l|}{2} < |f(x)| < \frac{3|l|}{2}$*

<ins>1$^{\text{er}}$ point</ins> dans le cas où $x_0 = +\infty$
Donc ①: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
On suppose $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) \in [a,b]$
Montrer que $l \in [a,b]$
$\boxed{\text{HA}}$ $l \notin [a,b]$. Donc $l < a$ ou $l > b$.
- Si $l < a$
  Soit $\varepsilon = a - l$ (car $l < a$)
  Donc ②: $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) \in]2l-a, a[$
  Soit k_1 et k_2 deux rels vrifiant ① et ②.
  On pose $k = \min\{k_1, k_2\}$
  D'après ① et ②: $\forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) \in]2l-a, a[\cap[a,b]$
  Or, $]2l-a, a[\cap[a,b] = \varnothing$
  On a donc une contradiction.
- Si $l > b$, on procède de même.

On conclut que $l \in [a,b]$
<ins>2$^{\text{ème}}$ point:</ins> On revient aux dfinitions avec $\varepsilon = 1$
<ins>3$^{\text{ème}}$ point:</ins> On revient aux dfinitions et on prend $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$
□

Propriété 1.0.4
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
- *Si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, *avec* $l \in \mathbb{R}$,
  Alors f *est borne au voisinage de* x_0.
- *Si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, *avec* $l \in \mathbb{R}^*$,
  Alors $|f(x)|$ *est minor par un nombre strictement positif au voisinage de* x_0
- *Si* $f(x)$ *est de signe constant au voisinage de* $+\infty$, *et si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$,
  Alors l *est du même signe.*

Propriété 1.0.5
Utilisation des proprits prcdentes.

Définition 1.0.4
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in I$.
On note $I^+ = I \cap]x_0, +\infty[$ *et* $I^- = I \cap]-\infty, x_0[$
- *On appelle* <u>*limite à droite de* $f(x)$ *en* x_0</u> *la limite finie, si elle existe, de* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* x_0 *sur* I^+
- *On appelle* <u>*limite à gauche de* $f(x)$ *en* x_0</u> *la limite finie, si elle existe, de* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* x_0 *sur* I^-

Notations: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I^+}} f(x) = f(x_0^+)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I^-}} f(x) = f(x_0^-)$

Propriété 1.0.6
Soit $x_0 \in I$
- *Si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, *alors* $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = l$.
- *Si* $f(x)$ *admet une limite à droite et à gauche en* x_0, *et si* $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = f(x_0)$,
  Alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$.

<u>1er point</u>: On suppose $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Alors: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Et: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Donc $f(x)$ admet une limite à droite et à gauche en x_0, et $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = l$

2ème point: On suppose que $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ fix.

On a: $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Et: $\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Soit α_1 et α_2 deux tels rels.

Soit $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$

D'où: $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Par ailleurs, pour $x = x_0$: $|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Donc:$\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ce raisonnement tant valable pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on conclut que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$

□

2 Limites et continuit

Définition 2.0.5

Soit I un intervalle non vide.

Soit f une fonction numrique dfinie sur I.

Soit x_0 un lment de I.

On dit que f est continue en x_0 si:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Remarque: on peut prolonger certaines fonctions par continuit.

3 Limite de fonction et convergence de suites

Propriété 3.0.7

Caractrisation squentielle de la limite

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit x_0 et l deux lments de $\overline{\mathbb{R}}$