Structures Algébriqes
Structure de Groupe
MPSI 2

1 Définition

Définition 1.0.1
Soit $(G, *)$ *un magma.*
On dit que $(G, *)$ *est un groupe si:*
- $*$ *est associative*
- $*$ *admet un élément neutre*
- *tout élément de* G *est symétrisable par* $*$

Si de plus, $*$ *esr commutative sur* G*, on dit que* $(G, *)$ *est un groupe abélien.*

Conséquences:
- Règle de simplification: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ Démonstration:
  Soit a, x et y trois éléments de G tels que $a * x = a * y$
  Notons a' le symétrique de a (car G est un groupe)
  On a alors: $a' * (a * x) = a' * (a * y)$
  Par associativité, on a: $(a' * a) * x = (a' * a) * y$
  Par symétrie, on a: $e * x = e * y$
  Par définition de l'élément neutre: $x = y$
- Résolution d'équations: $a * x = b \iff x = a' * b$

2 Sous-groupes

2.1 Définition et critères

Soit $(G, *)$ un groupe.

Définition 2.1.1
Soit F *un sous-ensemble de* G
On dit que $(F, *)$ *est un sous-groupe de* $(G, *)$ *si:*
- $\forall (x, y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
- $(F, *')$ *est un groupe où* $*'$ *est la loi induite de* G *sur* F*.*

Remarques: Soit $(F, *')$ un sous-groupe de $(G, *)$
- $e_G = e_F$
- F est non vide: $e \in F$
- Si x' et x'' sont les symétriques de $x \in F$ dans $(G, *)$ et $(F, *')$ respectivement, Alors $x' = x''$

Critères de sous-groupe
Soit F un sous-ensemble non vide de G.
- Critère 0: F est un sous-groupe de G ssi:
 ① $\forall (x,y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
 ② $e \in F$
 ③ $\forall x \in G,\ (x \in F) \Rightarrow (x^-1 \in F)$
- Critère 1: F est un sous-groupe de G ssi:
 ① $\forall (x,y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
 ② $\forall x \in G,\ (x \in F) \Rightarrow (x^-1 \in F)$
- Critère 2: F est un sous-groupe de G ssi:
 ① $\forall (x,y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y^{-1} \in F)$

Démonstration des critères de sous-groupe
- Critère 1: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 1.
  D'après ②, $x^{-1} \in F$
  D'après ①, $x * x^{-1} \in F$
  Or $x * x^1 = e$, donc $e \in F$ On a vérifié le critère 0, donc $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- Critère 2: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 2.
  - F est non vide: Soit x un élément de F
    D'après ①, $x * x^-1 \in F \Rightarrow e \in F$
    Le point ② du critère 0 est vérifié.
  - D'après ① avec e et x: $e * x^{-1} \in F \Rightarrow x^{-1} \in F$
    Le pont ③ du critère 0 est vérifié.
  - Soit x et y deux éléments de F. De plus, $y^{-1} \in F$
    donc $x * (y^{-1})^{-1} \in F \to x * y \in F$

$\square$

2.2 Propriétés des sous-groupes

Soit $(G, *)$ un groupe.

Propriété 2.2.1

- *Si F et H sont des sous-groupes de $(G, *)$,*
  Alors $F \cap H$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- *Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de $(G, *)$,*
  Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-groupe de $(G, *)$

- $f \cap H$ est non vide: $e \in F \cap H$
- Montrer que $\forall (x,y) \in G \times G,\ (x \in F \cap H)$ et $(y \in F \cap H) \Rightarrow (x * y^{-1}) \in F \cap H$
  Soit $(x,y) \in F \cap H$
  x et y sont éléments de F et F est un groupe: $x * y^{-1} \in F$
  De même, $x * y^{-1} \in H$
  Donc $x * y^{-1} \in F \cap H$
  Vrai pour tout (x,y) de $(F \cap H)^2$, donc on en déduit que $F \cap H$ est un sous-groupe de $(G,*)$

$\square$

Définition 2.2.1
Soit $(G,*)$ un groupe.
Soit B une partie non vide de G.
On appelle sous-groupe de g engendré par B le plus petit sous groupe de $(G,*)$ contenant B, au sens de l'inclusion.

Justification: On munit $\mathcal{P}(G)$ de la relation d'inclusion: $(\mathcal{P}(G), \subset)$ est un ensemble ordonné.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des groupes contenant B.
- $\mathcal{F}$ est non vide car $G \in \mathcal{F}$
- D'après la propriété précédente, $H = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est un sous-groupe de $(G,*)$.
  $\forall f \in \mathcal{F},\ b \subset F$, donc $B \subset H$
- Reste à montrer que H est le plus petit élément de $\mathcal{F}$
  Donc montrer que $\forall F \in \mathcal{F},\ H \subset F$
  Par définition de H, la proposition précédente est vraie.

Notation:
- $< B >$
- Si B est un singleton $b = \{b\}$, on écrit $< b >$

2.3 Morphismes de groupes

Soit $(G, *)$ et $(G', *')$ deux groupes.
Soit $f : G \to G'$ une application.

Définition 2.3.1

- *f est un homomorphisme de groupes si:*
  $\forall (x, y) \in G \times G,\ f(x * y) = f(x) *' f(y)$
- *f est un endomorphisme de groupes si:*
  f est un homomorphisme de groupes et que $(G, *) = (G', *')$
- *f est un isomorphisme de groupes si:*
  f est un homomorphisme de groupes bijectif de G sur G'
- *f est un automorphisme de groupes si:*
  f est un endomorphisme de groupes bijectif de G sur G'

Remarques: Soit f un homomorphisme de groupes de G dans G'

- Soit e et e' les éléments neutres de G et G' respectivement.
  Alors $f(e * e) = f(e) *' f(e)$
  En utilisant le symétrique de $f(e)$ a gauche, on obtient:
  $f(e)^{-1} *' f(e) = f(e)^{-1} *' f(e) *' f'(e)$
  $\iff e' = f(e)$
- Soit x un élément de G.
  $f(x * x^{-1}) = f(x) *' f(x^{-1})$
  Par ailleurs, $f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$
  Donc $f(x) *' f(x^{-1}) = e$
  On en déduit que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

Propriété 2.3.1

- *Si F est un sous-groupe de $(G, *)$ et si f est un homomorphisme de groupes de G dans G',*
  Alors $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$
- *Si H' est un sous-groupe de $(G', *')$ et si f est un homomorphisme de groupes de G dans G',*
  Alors $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(G, *)$

- 1er point: Montrer que $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$
  Donc montrer que $\forall (x', y') \in f(F),\ x' *' y'^{-1} \in f(F)$
  F non vide, donc $f(F)$ non vide.
  Soit x' et y' deux éléments de $f(F)$.

Donc $\exists (x,y) \in F,\ f(x) = x'$ et $f(y) = y'$. Soit x et y deux tels éléments.

$$\begin{aligned} x' *' (y')^{-1} &= f(x) *' f(y)^{-1} \\ &= f(x * y^{-1}) \end{aligned}$$

Or, F est un groupe, donc $x * y^{-1} \in F$, donc $x' *' (y')^{-1} \in f(F)$

Cela étant vrai pour tout x' et y' de $f(F)$, on en conclut que $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$.

- $2^{\text{ème}}$ point: Montrer que $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(g, *)$.

  – f est un homomorphisme de groupes donc $f(e) = e'$
    De plus, $e' \in H'$ car H' est un sous-groupe de $(G, *)$
    Donc $e \in f^{-1} < H' >$, donc $f^{-1} < H' >$ est non vide.

  – Montrer que $\forall (x,y) \in G \times G,\ (x \in f^{-1} < H' >$ et $x \in f^{-1} < H' >) \Rightarrow x * y^{-1} \in f^{-1} < H' >$ Soit x et y deux éléments de $f^{-1} < H' >$.
    Donc montrons que $x * y^{-1} \in f^{-1} < H' >$
    Donc montrons que $f(x * y^{-1}) \in H'$
    $f(x * y^{-1}) = f(x) * f(y)^{-1}$ car f est un homomorphisme de groupes .
    Or: - $f(x) \in H'$ car $x \in f^{-1} < H' >$
    - $f(y) \in H'$ car $y \in f^{-1} < H' >$.
    - De plus, H' est un sous-groupe donc $f(y)^{-1} \in H'$
    Sachant H' un sous-groupe, $f(x * y^{-1}) \in H'$
    Ce raisonnement étant valable pour tout x, y de $f^{-1} < H' >$, on en déduit que $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(G, *)$ d'après la critère 2.

$\square$

Corollaire 2.3.1

- *L'image $f(G)$ est un sous-groupe de $(G', *')$*
- *$f^{-1} < \{e\} >$ est un sous-groupe de $(G, *)$. On l'appelle le noyau de f*

Notation: $\ker(f) = f^{-1} < \{e\} >$

Propriété 2.3.2
Soit f un homomorphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(G', *')$.
Alors f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{e\}$

① Supposons f injective.
Montrer que $\ker(f) = \{e\}$

- $\ker(f)$ est un sous-groupe de $(G, *)$, donc $\{e\} \subset \ker(f)$
- montrer que $\ker(f) \subset \{e\}$
  Donc montrer que $\forall x \in G,\ x \in \ker(f) \Rightarrow x = e$
  Soit x un élément de $\ker(f)$
  Montrer que $x = e$
  $x \in \ker(f)$, donc $f(x) = e'$
  f est un homomorphisme, donc $f(e) = e'$
  D'où $f(x) = f(e)$
  Donc, sachant f injective, $x = e$

Donc $\ker(f) = \{e\}$

② Supposons que $\ker(f) = \{e\}$
Montrer que $\forall (x, y) \in G \times G,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Soit x et y deux éléments de G tels que $f(x) = f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff f(x) *' f(y)^{-1} = e' \\ &\iff f(x * y^{-1}) = e' \end{aligned}$$

Or, $\ker(f) = \{e\}$
Donc $x * y^{-1} = e$
Donc $x = y$
Ce raisonnement étant valable pour tout x et y de G, f est injective.

$\square$