

EDL

Equations Differentielles Lineaires du premier ordre

MPSI 2

1 Generalites

Définition 1.0.1

Soit I un intervalle reel.

Soient a , b et c trois fonctions definies sur I a valeurs reelles ou complexes.

$$\begin{array}{lll} a: I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & a(x) \end{array} \quad \begin{array}{lll} b: I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & b(x) \end{array} \quad \begin{array}{lll} c: I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & c(x) \end{array}$$

On suppose a , b et c continues sur I

On appelle equation differentielle lineaire du premier ordre une relation du type:

$$\forall x \in I, \quad a(x) y'(x) + b(x) y(x) = c(x)$$

Définition 1.0.2

- c est le second membre de l'equation differentielle.
- $\forall x \in I, \quad a(x) y'(x) + b(x) y(x) = 0$ est le second membre de l'equation.

Définition 1.0.3

Soit J un sous-intervalle de I .

On appelle solution de l'equation differentielle toute application Φ telle que:

$$\Phi: J \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto \Phi(x)$$

Telle que :

- Φ soit derivable sur J
- $\forall x \in J, \quad a(x) \Phi'(x) + b(x) \Phi(x) = c(x)$

Remarque: l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de l'EDHA sur I est stable par combinaison lineaire et non vide ($y = 0$ est solution)
On dit alors que \mathcal{S}_0 a une structure d'espace vectoriel

2 Etude de l'equation $\forall x \in I, y'(x) + \alpha y(x) = 0$

Pour α continue sur I .

Propriété 2.0.1

L'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de l'ED $\forall x \in I, y'(x) + \alpha y(x) = 0$ est:

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda \times g, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

avec $g(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x A(x)\right)$ et $A(x)$ une primitive de α sur I

On étudie l'expression $y'(x) = -\alpha y(x)$, et on cherche une primitive de $-\alpha$.
L'exponentielle de cette primitive est solution de l'expression ($g(x)$).

On cherche une fonction u telle que $y = u g$ soit solution de l'expression précédente.
Par calcul, on trouve: $\forall x \in I, u'(x) = 0$, donc u est constante sur I .

Ainsi, toutes les solutions de l'expression sont de la forme de la propriété. \square

Remarques:

- \mathcal{S}_0 est un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension 1, dont une base est donnée par g . On parle de droite affine.
- Il est possible de caractériser la fonction exponentielle par l'unique solution du système

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
- Si y est solution de l'ED, de deux choses l'une:
 - y est l'application nulle sur I .
 - y ne s'annule jamais sur I

3 Cas general: $\forall x \in I, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

3.1 Resolution de l'EDHA

a est continue sur I . Soit J un intervalle où a ne s'annule pas. Alors:

$$\begin{aligned} \forall x \in J, a(x)y'(x) + b(x)y(x) &= 0 \\ \iff \forall x \in J, y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) &= 0 \end{aligned}$$

D'après la propriété précédente, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 1.

Pour $x_0 \in J$, on note Z_0 l'application définie sur J par:

$$\forall x \in J, Z_0(x) = -\exp\left(\int_{x_0}^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right)$$

Z_0 est une solution de l'EDHA.

3.2 Resolution de l'ED

Soit y_0 une solution particulière de l'ED. Donc y_0 est dérivable sur J et:

$$\forall x \in J, a(x)y'_0(x) + b(x)y_0(x) = c(x)$$

y est solution de l'ED

$$\iff \forall x \in J, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$$

$$\iff \forall x \in J, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = a(x)y'_0(x) + b(x)y_0(x)$$

$$\iff \forall x \in J, a(x)(y - y_0)(x) + b(x)(y - y_0)(x) = 0$$

$$\iff (y - y_0) \text{ est solution de l'EDHA}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in J, (y - y_0)(x) = \lambda Z_0(x)$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in J, y(x) = y_0 + \lambda Z_0$$

On a démontré:

Propriété 3.2.1

- l'ensemble des solutions de l'ED $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ est :

$$\mathcal{S}_J = \{y_0 + \lambda Z_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

$$\text{avec } Z_0: J \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x \longmapsto -\exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{b(t)}{a(t)} dt\right)$$

et y_0 solution particulière de l'ED.

- \mathcal{S}_J est un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent l'ensemble des solutions de l'EDHA.
c'est un espace vectoriel de dimension 1, on parle de droite affine.

3.3 Détermination d'une solution particulière

Il existe deux fonctions y et u dérivables sur J telles que:

$$\forall x \in J, y(x) = u(x) Z_0(x)$$

$$y \text{ est solution de l'ED} \iff \forall x \in J, u'(x) = \frac{c(x)}{a(x)Z_0(x)}$$

On choisit une primitive u_0 de u' et $y_0 = u_0 Z_0$, les solutions de l'ED sont donc de la forme:

$$y = y_0 + \lambda Z_0$$

3.4 Probleme de Cauchy

Soit I un intervalle reel et a, b, c trois applications continues sur I a valeurs dans \mathbb{K} . Soit l'ED: $\forall x \in I, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Existe-t-il une solution $y : x \rightarrow \mathbb{K}$ satisfaisant $y(x_0) = y_0$?

Propriété 3.4.1

Si a ne s'annule pas sur I , alors il existe une unique solution $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que:

$$\begin{cases} \forall x \in I, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Remarques si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si a ne s'annule pas sur I , il existe une unique **courbe solution** passant par le point de coordonnées (x_0, y_0)
- par application de cette propriété, deux courbes intégrales ne se coupent jamais.

Determiner les solutions littérales de l'ED, et exprimer $y(x_0) = y_0$ en fonction des expressions précédentes. En déduire λ unique, donc y unique. □