Fonctions Numériques
Fonctions continues sur un intervalle
MPSI 2

1 Fonctions continues

Soit I un intervalle non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dfinie sur I.
On dit que f est continue sur I si pout tout x_0 de I, f est continue en x_0.

Théorème des valeurs intermdiaires
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit I un intervalle.
Soit $f : I \to R$ une application continue sut I.
Montrer que $f(I)$ est un intervalle.
Ou montrer que $\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2,\ ((y, y') \in f(I)^2 \Rightarrow (\forall y'' \in \mathbb{R},\ y < y'' < y' \Rightarrow y'' \in f(I))$

Soit y et y' deux lments distincts de $f(I)$.
Alors il existe a et b dans I tels que: $f(a) = y$ et $f(b) = y'$
y et y' sont distincts, donc a et b sont distincts.
On suppose par exemple que $f(a) < f(b)$ et $a < b$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{R},\ (f(a) < z < f(b)) \Rightarrow (\exists x \in]a, b[,\ f(x) = z)$
Soit z un rel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$.
On considre l'ensemble $E = \{x \in [a, b],\ f(x) < z\}$

Principe de Borne suprieure

Montrer que E admet une borne suprieure:
- E est non vide: $a \in E$
- E est major par b

Donc E admet une borne suprieure que l'on notera c
On a: $a \leqslant c \leqslant b$
Et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in E,\ c - \varepsilon < x \leqslant c$
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et on pose x_n un rel vrifiant le critre.
On dfinit donc une suite: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in E$ et $c - \frac{1}{n} < x_n \geqslant c$
En particulier: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in [a, b]$ et $f(x_n) < z$ et $|x_n - c| < \frac{1}{n}$
Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers c.
Donc $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f(c)$ d'aprs la caractrisation squentielle de la limite.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x_n) < z$
Donc $f(c) \leqslant z$

On a donc $f(c) \leqslant z < f(b)$
D'où $c < b$.
Par dfinition de c: $\forall x \in]c, b[, \ x \notin E$
$\Rightarrow \forall x \in]c, b[, \ f(x) \geqslant z$
Par ailleurs, f est continue, donc sa limite à droite en c existe et vaut $f(c)$.
Ainsi, $f(c) \geqslant z$

Conclusion: $f(c) = z$
Conclusion gnrale: $\exists c \in]a, b[, \ f(c) = z$

Ce raisonnement est valable pour tout z entre a et b. On tend le raisonnement à y et y' dans $f(I)$
On conclut que $f(I)$ est un intervalle. □

Propriété 1.0.1
L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Soit I un segment rel non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.
D'après le TVI, $f(I)$ est un intervalle.

Montrer que $f(I)$ est ferm et born.
- Montrer que $f(I)$ est born.
  C'est à dire, montrer que $\exists M \in \mathbb{R}^+, \ \forall y \in \mathbb{R}, y \in f(I) \Rightarrow |y| \leqslant M$
  $\boxed{\text{HA}}$ Supposons que $f(I)$ ne soit pas born.
  Donc $\forall M \in \mathbb{R}^+, \ \exists y \in \mathbb{R}, \ y \in I$ et $|y| > M$
  Soit x_0 un lment de I.
  - On considre $E_1 = \{x \in I, \ |f(x)| > f(x_0) + 1\}$
    $f(I)$ n'est pas born, donc E_1 est non vide.
    Notons x_1 un lment de E_1.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons construits $(x_i)_{i \in [0,n]}$,
    Tels que: $\forall i \in [1, n], \ |f(x_i)| > |f(x_{i-1})| + 1$
    Soit $E_{n+1} = \{x \in I, \ |f(x)| > |f(x_n)| + 1\}$
    $f(I)$ n'est pas born, donc E_{n+1} n'est pas vide.
    On note x_{n+1} un lment de cet ensemble.
  - Par rcurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

  De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |f(x_n)| > |f(x_{n-1})| + 1$
  Par rcurrence, on montre que: $\forall n \in \mathbb{N}, \ |f(x_n)| > |f(x_0)| + n$
  Ainsi, $(|f(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Par ailleurs, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'lments de I. Donc d'aprs le thorme de Bolzano-Weierstrass, il existe $\phi : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Notons ϕ une telle suite et l la limite.

– $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in I$, donc $l \in I$
– f est continue en $l \in I$, donc (cara squentielle de la limite) $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$
– On a aussi ①:$|f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f(l)|$ (car *abs* est continue en $f(l)$)
– De plus, $(|f(x_{\phi(n)})|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(|f(x_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc ②:$|f(x_{\phi(n)})| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On a contradiction entre ① et ②. On en dduit que $\boxed{\text{HA}}$ est fausse.

Conclusion: $f(I)$ est in intervalle born.

- Montrer que $\exists (c,d) \in \mathbb{R},\ f(I) = [c,d]$
On pose $c = \inf(f(I))$ et $d = \sup(f(I))$
Montrer que $c \in I$ et $d \in I$
– Montrons que $d \in I$
Donc Montrons que $\exists x \in I,\ f(x) = d$
En appliquant le principe de la borne suprieure avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'lments de I telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers d.
$*$ (x_n) est une suite de rels borne, donc d'aprs le thorme de B-W, il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
Notons l sa limite.
De plus, $l \in I$.
$*$ f est continue sur I donc $(f(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$
$*$ Par ailleurs, $(f(x_{\phi(n)}))$ est une suite extraite de $(f(x_n))$, donc $(f(x_{\phi(n)}))$ converge vers d.
Par unicit de la limite, $d = f(l)$. Or, $l \in I$.
Finalement, $d \in f(I)$
– On procde de même pour montrer que $c \in f(I)$.

Conclusion gnrale: $\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ f(I) = [c,d]$ □

Propriété 1.0.2
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors on a quivalence entre:
① *f est injective*
② *f est strictement monotone*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
①⇒②: Supposons f injective.
Montrer que f est strictement croissante sur I.
Donc montrer que f est croissante sur I. (car f est injective)
Montrer que pour tous $x_1 < x_2 < x_3$ de I, $f(x_2)$ soit compris entre $f(x_1)$ et $f(x_3)$
$\boxed{\text{HA}}$ Supposons qu'il existe $x_1 < x_2 < x_3$ de I tels que $f(x_2)$ ne soit pas compris entre $f(x_1)$ et $f(x_3)$.
Alors il existe $y_0 \in \mathbb{R}$, tel que y_0 soit compris strictement entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ et entre $f(x_2)$ et $f(x_3)$
D'aprs le TVI, $\exists \alpha \in]x_1, x_2[,\ y_0 = f(\alpha)$ et $\exists \beta \in]x_2, x_3[,\ y_0 = f(\beta)$
Les intervalles $]x_1, x_2[$ et $]x_2, x_3[$ sont disjoints, donc $\alpha \neq \beta$.
Cependant, $f(\alpha) = f(\beta)$, ce qui contredit l'injectivit de f.
Donc $\boxed{\text{HA}}$ est contradictoire.
On conclut que f est monotone sur I
Or, f est injective.

Conclusion gnrale: f est strictement monotone sur I
②⇒①: Facile. □