Relations Binaires
Relations d'ordre
MPSI 2

1 Définition

Soit E un ensemble non vide.
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Définition 1.0.1
$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si:
- *$\mathcal{R}$ est réflexive.*
- *$\mathcal{R}$ est antisymétrique:* $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \Rightarrow (x = y)$
- *$\mathcal{R}$ est transitive.*

Notations: $x \,\mathcal{R}\, y$, $x \leq y$
Se note aussi $x \preccurlyeq y$

Définition 1.0.2
Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

- *On dit que l'ordre est total si deux éléments de E sont toujours en relation:*
  $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \preccurlyeq y) \text{ ou } (y \preccurlyeq x)$.
- *Sinon, on dit que l'ordre est partiel.*

Définition 1.0.3
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
- *$m \in E$ est le plus petit élément de E si:* $\forall x \in E,\ m \preccurlyeq x$
- *$M \in E$ est le plus grand élément de E si:* $\forall x \in E,\ x \preccurlyeq M$

Définition 1.0.4
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
- *$m \in E$ est un élément minimal de E si:*
  $\forall x \in E,\ (x \preccurlyeq m) \Rightarrow (x = m)$
- *$M \in E$ est un élément maximal de E si:*
  $\forall x \in E,\ (M \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = M)$

Définition 1.0.5
Soit $(E, \preccurlyeq)$ *un ensemble ordonné.*
Soit A *un sous-ensemble de* E
- $\alpha \in E$ *est un* *minorant de* A *dans* E *si:*
  $\forall x \in E,\ (x \in A) \Rightarrow (\alpha \preccurlyeq x)$
- $\beta \in E$ *est un* *majorant de* A *dans* E *si:*
  $\forall x \in E,\ (x \in A) \Rightarrow (x \preccurlyeq \beta)$

2 Ordre naturel sur $\mathbb{N}$

Définition 2.0.6
$\forall (x,y) \in \mathbb{N},\ x \leqslant y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x + n$

C'est un ordre total de plus petit élément 0.

Propriété 2.0.1
Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.*

Corollaire 2.0.1
Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément.*

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$.
On considère B l'ensemble des majorants de A.
$B = \{x \in \mathbb{N},\ \forall a \in A, x \geqslant a\}$
A est majoré donc B est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.
D'après la propriété caractéristique de $\mathbb{N}$ B admet un plus petit élément que l'on note α

On a: $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{N} \\ \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \end{cases}$

Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$
HA: $\alpha \notin A$
Alors $\forall x \in A,\ a < \alpha$
Ou encore, puisque α est entier: $\forall a \in A,\ a \leqslant \alpha - 1$
On a donc $\alpha - 1$ entier naturel et $\alpha - 1$ majorant de A.
Donc $\alpha \in B$ et $\alpha - 1 < \alpha$, ce qui contredit α plus petit lment de B.

Donc $\alpha \in A$
Conclusion: α est le plus grand lment de A. $\square$

Corollaire 2.0.2
Principe de rcurrence

Soit P une proposition portant sue les entiers naturels.
Soit $P(n)$ le prdicat associ a n.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ [P(n_0)\ et\ (\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(n)]$$