Complexes
Equations dans $\mathbb{C}$

MPSI 2

1 Racine carree d'un complexe

1.1 Methode trigonometrique

Soit z_0 un complexe non nul. Resolvons $z^2 = z_0$
Notons $z = \rho e^{i\theta}$ et $z_0 = \rho_0 e^{i\alpha}$

$$
\begin{aligned}
z = z_0 &\iff \begin{cases} \rho^2 = \rho_0 \\ 2\theta \equiv \alpha \ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \rho = \sqrt{\rho_0} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\, \theta = \dfrac{\alpha}{2} + k\pi \end{cases} \\
&\iff z = \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

Les solutions sont opposees

1.2 Methode Algebrique

Notons $z = x + iy$ et $z_0 = a + ib$. Resolvons $z^2 = z_0$

$$
\begin{aligned}
z^2 = z_0 &\iff x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ -x^2y^2 = \dfrac{-b}{4} \\ 2xy = b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 \text{ et } y^2 \text{ sont les racines du polynome } X^2 - aX - \dfrac{b^2}{4} \\ 2xy = b \end{cases}
\end{aligned}
$$

2 Equation du 2^{nd} degre

Resolution de $az^2+bz+c=0$ avec $\iff \begin{cases} (a,b,c) \in \mathbb{C}^2 \\ a \neq 0 \end{cases}$

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$az^2+bz+c=0 \iff \left(z-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

On pose $\Delta = b^2-4ac$ et $\delta = \sqrt{\Delta}$

$$\begin{aligned} az^2+bz+c=0 &\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right) = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\iff z = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b+\delta}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus, produit des racines} &= \frac{c}{a} \\ \text{somme des racines} &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

3 Resolution d'equations du type $z^n = a$

3.1 Racines^n de l'unite

Définition 3.1.1
Soit n un entier naturel non nul.
Les racines^n de l'unite sont les solutions de l'equation $z^n = 1$

Cas particuliers :
- $n = 2 \iff \omega_0 = 1$ ou $\omega_1 = -1$
- $n = 3 \iff \omega_0 = 1$ ou $\omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ ou $\omega_2 = j = \bar{j}$
- $n = 4 \iff \omega_0 = 1$ ou $\omega_1 = i$ ou $\omega_3 = -1$ ou $\omega_3 = -i$

On note $U_n = \{\omega_k,\ \forall k \in [\![0; n-1]\!]\}$. U muni de la multiplication est un groupe cyclique car ω_1 engendre le groupe.

Propriété 3.1.1

- $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in [\![0; n-1]\!]\right\}$
- *U est l'ensemble des racines^n de l'unite*
- *Les images M_k affixes de ω_k forment un polygone regulier a n cotes.*

Etudions la position relative de M_{n-1} par rapport a M_k

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0; n-1]\!], \omega_{k+1} &= e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} \\ &= \omega_k \ e^{i\frac{2\pi}{n}} \\ \text{et : } \omega_0 &= \omega_{n-1} \ e^{i\frac{2\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{k+1} = \omega_k \ e^{i\frac{2\pi}{n}} &\iff \begin{cases} |\omega_{k+1}| = |\omega_k| \\ arg\left(\dfrac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) \equiv \dfrac{2\pi}{n} \ [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |\omega_{k+1}| = |\omega_k| \\ mes\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}_k \ ; \overrightarrow{\mathrm{OM}}_{k+1}\right) \equiv \dfrac{2\pi}{n} \ [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

M_{k+1} est donc l'image de M_k par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ autour du centre O.
De meme, M_0 est l'image de M_{n-1} par la meme rotation.

On en deduit que, pour tout k, le triangle $\mathrm{OM}_k\mathrm{M}_{k+1}$ a pour image par cette rotation le triangle $\mathrm{OM}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}$
En particulier, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_k\mathrm{M}_{k+1}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{M}_{k+1}\mathrm{M}_{k+2}}\right\|$.

Conclusion: Donc $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1...\mathrm{M}_{n-1}$ est un polygone regulier. □

Propriété 3.1.2
Le polygone regulier a n cotes est symetrique par rapport a l'axe reel.
Les ω_k sont deux a deux conjugues.

Pour cette demonstation, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k; k') \in [\![0; n-1]\!]^2$

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}) : \ \omega_k = \overline{\omega_{k'}} &\iff e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}} \\ &\iff \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} \ [2\pi] \\ &\iff \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z}, \ k + k' = np \\ 0 \leq k + k' \leq 2n - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $p \notin \{0; 1\}$, le systeme est incompatible.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &\iff \begin{cases} k = -k' \\ (k;k') \in [\![0;n-1]\!]^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} k = -k' + n \\ (k;k') \in [\![0;n-1]\!]^2 \end{cases} \\
&\iff k = k' = 0 \quad \text{ou} \quad k' = n - k
\end{aligned}$$

$\square$

Propriété 3.1.3
Soit n un entier naturel superieur ou egal a 1.
Alors la somme des racines^n de l'unite vaut 0

Somme triviale des termes d'une suite geometrique avec k allant de 0 a $n-1$ $\square$

3.2 Racines^n d'un complexe a

Resolution de $z^n = a$ avec a et z non nuls:

Formes trigonometriques: $z = \rho e^{i\theta}$ et $a = \rho_0 e^{i\alpha}$

$$\begin{aligned}
z^n = a &\iff \begin{cases} \rho^n = \rho_0 \\ n\theta \equiv \alpha \ [2\pi] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \rho = \rho_0^{\frac{1}{n}} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta \equiv \dfrac{a}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \\
&\iff \exists k \in [\![0;n-1]\!],\ z = \rho_0^{\frac{1}{n}}\ e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![0;n-1]\!],\ z = \rho_0^{\frac{1}{n}}\ e^{i\frac{\alpha}{n}}\ \omega_k
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions realise une bijection sur U_n.
Les affixes des solutions forment un polygone regulier obtenu a par une similitude du polygone regulier a n cotes.