

Structures Algébriques

Structure d'anneau et structure de corps

MPSI 2

1 Axiomes des structures

1.1 Structure d'anneau

Soit A un ensemble non vide muni de deux lois, $+$ et \times .

Définition 1.1.1

$(A, +, \times)$ est un anneau si:

- ① $(A, +)$ est un groupe abélien.
- ② \times est associative.
 \times est distributive sur $+$.
 \times admet un élément neutre.

Notations: Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

- Alors $(A, +)$ est un groupe abélien. on le note avec la notation additive, et son élément neutre est noté 0_A .
- \times est noté multiplicativement, mais n'est pas nécessairement commutative. On note son élément neutre 1_A . C'est l'élément unité.

Définition 1.1.2

Soit $(A, +, \times)$ un anneau non réduit à $\{0_A\}$.

- Si a et b deux éléments de A tels que $\times b = 0_A$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors a et b sont des diviseurs de zéro
- On dit que $(A, +, \times)$ est intègre si $\forall (a, b) \in A^2, (a \times b = 0_A) \Rightarrow (a = 0_A \text{ ou } b = 0_A)$

Propriété 1.1.1

- Si a est un élément inversible de $(A, +, \times)$, alors a n'est pas un diviseur de zéro.
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau fini et si a est un élément non nul de A , alors a est inversible ssi a n'est pas un diviseur de zéro.

Définition 1.1.3

Soit a un élément de A .

On dit que a est nilpotent si il existe un entier naturel n non nul tel que: $\prod_{k=1}^n a = 0_A$

1.2 Structure de corps

Soit K un ensemble non vide muni de deux lois internes $+$ et \times .

Définition 1.2.1

$(K, +, \times)$ est un corps si:

- ① $(K, +)$ est un groupe abélien.
- ② $(K \setminus \{0_K\}, \times)$ est un groupe abélien.
 \times est distributive sur $+$

Remarques:

- Si $(K, +, \times)$ est un corps, alors c'est un anneau intègre.
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau intègre fini, alors c'est un corps.

2 Calculs dans un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

Soit a un élément de A .

Soit n un élément de \mathbb{N} .

- $a + a + \dots + a$, n fois se note na
- $(-a) + (-a) + \dots + (-a)$ se note $n(-a)$ ou $(-n)a$ ou $-na$ et est l'opposé de na
- Si $n = 0$, alors $0a = 0_A$
- $a \times a \times \dots \times a$, n fois se note a^n
- Si a est inversible, $(a^{-1}) \times (a^{-1}) \times \dots \times (a^{-1})$ se note $(a^{-1})^n$ ou $(a^{-1})^n$ ou a^{-n} et est l'opposé de a^n
- Par convention: $a^0 = 1_A$

Propriété 2.0.1

- $(1_A + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k$
- Si a et b commutent:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
- $1_A - a^{n+1} = (1_A - a)(1_A + a + a^2 + \dots + a^n)$
- Si a et b commutent:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

3 Homomorphismes d'anneau et Homomorphismes de corps

Définition 3.0.2

Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +', \times')$ deux anneaux.

Soit $f : A \rightarrow A'$

On dit que f est un homomorphisme d'anneau si :

- $\forall (x, y) \in A^2, f(x + y) = f(x) +' f(y)$
- $\forall (x, y) \in A^2, f(x \times y) = f(x) \times' f(y)$
- $f(1_A) = 1_{A'}$

Définition 3.0.3

Soit $(K, +, \times)$ et $(K', +', \times')$ deux corps.

Soit $f : K \rightarrow K'$

On dit que f est un homomorphisme de corps si f est un homomorphisme d'anneau.

Propriété 3.0.2

Tout homomorphisme de corps est injectif.

En utilisant les notations de la définition:

Soit $\ker(f) = f^{-1}(\{0_{K'}\})$

f est en particulier un homomorphisme de groupe de $(K, +)$ dans $(K', +')$. Donc f est injectif ssi $\ker(f) = \{0_K\}$

Soit x un élément de K

1^{er} cas: $x = 0_K$

$f(0_K) = 0_{K'}$ donc $0_K \in \ker(f)$ 2^{ème} cas: $x \neq 0_K$

Alors x est inversible dans K : $x \times x^{-1} = 1_K$

Donc: $f(x \times x^{-1}) = f(1_K) = 1_{K'}$

$$f(x \times x^{-1}) = f(x) \times' f(x)^{-1}$$

D'où $f(x) \times' f(x)^{-1} = 1_{K'}$

En particulier, $f(x) \neq 0_{K'}$

Donc $x \notin \ker(f)$

Donc $\ker(f) = \{0_K\}$

Donc f est injective. □

Corollaire 3.0.1

Soit $f : K \rightarrow K'$ un homomorphisme de corps.

Alors K est isomorphe à un sous-corps de K'

- f est un homomorphisme de corps, donc f est injectif.
- L'image d'un corps par un homomorphisme de corps est un corps.
- f induit une bijection de K sur $f(K)$:

$$\tilde{f}: K \longrightarrow f(K)$$

$$x \longmapsto f(x)$$

Finalement: K est isomorphe à $f(K)$ et $f(K)$ est un sous-groupe de K' .

□