

# Suites Réelles

## Généralités

MPSI 2

## 1 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

### Définition 1.0.1

On note  $\overline{\mathbb{R}}$  la réunion de  $\mathbb{R}$  et de deux éléments distincts:  $-\infty$  et  $+\infty$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

- On peut prolonger partiellement les lois internes  $+$  et  $\times$  à  $\overline{\mathbb{R}}$ , mais il existe des opérations indéfinies.
- On peut prolonger la relation d'ordre naturelle de  $\mathbb{R}$  à  $\overline{\mathbb{R}}$ :  $\overline{\mathbb{R}}$  est ordonné.

Utilisation: une suite tend vers un élément de  $\overline{\mathbb{R}}$

## 2 Définitions

### Définition 2.0.2

On appelle suite réelle toute application  $\phi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$n \longmapsto \phi(n)$$

Une suite réelle est une famille d'éléments indexée par  $\mathbb{N}$

Notations:  $u_n = \phi(n)$   
 $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \phi$

### Définition 2.0.3

On appelle ensemble des valeurs de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  le sous ensemble de  $\mathbb{R}$ :

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x = u_n\}$$

### Définition 2.0.4

On dit que  $u$  est une suite monotone si  $\phi$  est monotone.

De même avec croissante et décroissante.

**Définition 2.0.5**

On dit que  $u$  est majorée si  $A$  est majoré dans  $\mathbb{R}$   
De même avec minorée et bornée.

### 3 Notations et limites

#### 3.1 Limites réelles

**Définition 3.1.1**

Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle, et  $l$  un réel.

On dit que  $u$  converge vers  $l$  si pour tout intervalle  $I$  centré en  $l$ , il existe un rang  $n_0$  à partir duquel tous les  $u_n$  sont dans  $I$ :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$$

**Propriété 3.1.1**

Si  $u$  converge vers un  $l$  réel, alors  $l$  est unique.

Utiliser les définitions, raisonner par l'absurde avec  $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

□

Notation: Si  $u$  converge vers  $l$ , on note:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$$

**Propriété 3.1.2**

Toute suite convergente est bornée.

Montrer que toute suite convergente est bornée.

Soit  $A$  l'ensemble des valeurs de  $u$ , suite convergeant vers  $l$ .

Donc montrons que  $\exists (a, b) \in \mathbb{N}, A \in [a, b]$

- $u$  converge vers  $l$  donc pour  $\epsilon = 1$ :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow l - 1 < u_n < l + 1$

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}^*$ , un tel entier.

- Soit  $B = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x = u_n\}$   
 $B$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbb{R}$  donc  $B$  est borné.  
 Posons  $a = \min(\{l-1\} \cup B)$   
 $b = \min(\{l+1\} \cup B)$   
 Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$

□

**Propriété 3.1.3**

Soit  $u$  une suite réelle convergeant vers  $l$ , telle qu'à partir d'un certain rang, tous ses termes appartiennent à un intervalle borné par  $a$  et  $b$ .

Alors  $l \in [a, b]$

En sachant que  $u$  converge et que ses termes appartiennent à un intervalle borné, faire l'hypothèse que  $l \notin [a, b]$   
 Conclure.

□

**Propriété 3.1.4**

Soit  $u$  une suite convergeant vers  $l$ . Alors:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| < |l| + 1$
- $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow l-1 < u_n < l+1$
- $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow \frac{|l|}{2} < u_n < \frac{3|l|}{2}$

- $\epsilon = 1$  et d'après la 2<sup>ème</sup> inégalité triangulaire:  $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l| < 1$   
 Donc  $|u_n| \in ]|l| - 1, |l| + 1[$
- $\epsilon = 1$
- $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ , en utilisant le cas 1 et la 2<sup>ème</sup> inégalité triangulaire.

□

**Propriété 3.1.5**

Si  $u$  converge vers  $l$ , alors la suite de terme général  $|u_n|$  converge vers  $|l|$ .

**Propriété 3.1.6**

*Soit  $u$  une suite à termes positifs.*

- *Si  $u$  admet une limite  $l$ , alors  $l \geq 0$*
- *Si de plus  $l \neq 0$ , alors  $u_n > \frac{l}{2}$*

## 3.2 Limites infinies

**Définition 3.2.1**

*Soit  $u$  une suite réelle*

- *Si  $u$  n'admet pas de limites dans  $\mathbb{R}$ , on dit que  $u$  diverge.*
- *On dit que  $u$  diverge vers  $-\infty$  si:*  
 $\forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n < K$
- *On dit que  $u$  diverge vers  $+\infty$  si:*  
 $\forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > K$

Notation: Si  $u$  diverge vers l'infini, on note:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$