Fonctions Numériques
Limites de fonctions
MPSI 2

1 Définitions

Définition 1.0.1
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$*, tel que* $x_0 \in I$ *ou* x_0 *est une extrémité de* I*.*
Soit $l \in \mathbb{R}$
•*$f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Définition 1.0.2
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$*, tel que* $x_0 \in I$ *ou* x_0 *est une extrémité de* I*.*
•*$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$$

•*$f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < K$$

Propriété 1.0.1
Si $x_0 \in I$*, alors la seule limite éventuelle de* $f(x)$ *en* x_0 *est* $f(x_0)$

On suppose qu'il existe l dans $\mathbb{R}$, tel que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$
$\boxed{\text{HA}}$ $l \neq f(x_0)$
1 $l \in \mathbb{R}$
Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Supposons $l > f(x_0)$
Posons $\varepsilon = \frac{l - f(x_0)}{2}$
Alors $f(x_0) \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Soit α vérifiant les conditions de limites.
Donc $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) \in]l - \varepsilon, l + varepsilon[$
On a donc une contradiction.

② $l = +\infty$
Alors $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$
Soit K un réel strictement supérieur à $f(x_0)$
Soit α un réel vérifiant les condition de limites.
Donc $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$
En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) > K$
On a donc une contradiction.

③ $l = -\infty$
On procède de même.

Conclusion: $l = f(x_0)$

□

Définition 1.0.3
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- $f(x)$ *tend vers* $l \in \mathbb{R}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- $f(x)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$:

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) > K$$

Propriété 1.0.2
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que* x_0 *soit un élément de* I *ou une extrémité de* I.
Soit $(l, l') \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.
Si f *admet* l *et* l' *comme limite en* x_0, *alors* $l = l'$

Notations: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x) = l$ et $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$

Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$
① : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l)| < \varepsilon$
② : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$
Supposons $l \neq l'$, et $l > l'$

Posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$
On a donc $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[=\varnothing$

Soit α_1 et α_2 vérifiant ① et ②.
Soit $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$
Alors $\forall x \in I,\ |x-x_0| < \alpha \Rightarrow (|f(x)-l| < \varepsilon$ et $|f(x)-l'| < \varepsilon)$
Autrement dit: $\forall x \in I,\ |x-x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$
On a donc une contradiction.
Conclusion: $l = l'$ □

Remarques:
- Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \underset{\substack{x\to x_0\\ x\in I}}{\longrightarrow} l \iff f(x)-l \underset{\substack{x\to x_0\\ x\in I}}{\longrightarrow} 0$
- Soit $l \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors f(x) $\underset{\substack{x\to x_0\\ x\in I}}{\longrightarrow} l \iff \frac{f(x)}{l} \underset{\substack{x\to x_0\\ x\in I}}{\longrightarrow} 1$
- Soit $x_0 \in I$. Alors $f(x) \underset{\substack{x\to x_0\\ x\in I}}{\longrightarrow} l \iff f(x_0+h) \underset{\substack{x_0+h\in I\\ h\to 0}}{\longrightarrow} l$

Propriété 1.0.3
On suppose que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $x_0 \in I$.
- *Si $f(x) \in [a,b]$ au voisinage de x_0, alors $l \in [a,b]$.*
- *Au voisinage de x_0: $l-1 < f(x) < l+1$*
- *Si $l \neq 0$ alors au voisinage de x_0: $\frac{|l|}{2} < |f(x)| < \frac{3\,|l|}{2}$*

1$^{\text{er}}$ point dans le cas où $x_0 = +\infty$
Donc ①: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
On suppose $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) \in [a,b]$
Montrer que $l \in [a,b]$
$\boxed{\text{HA}}$ $l \notin [a,b]$. Donc $l < a$ ou $l > b$.
- Si $l < a$
  Soit $\varepsilon = a - l$ (car $l < a$)
  Donc ②: $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) \in]2l-a, a[$
  Soit k_1 et k_2 deux réels vérifiant ① et ②.
  On pose $k = \min\{k_1, k_2\}$
  D'après ① et ②: $\forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) \in]2l-a, a[\cap[a,b]$
  Or, $]2l-a, a[\cap[a,b] = \varnothing$
  On a donc une contradiction.
- Si $l > b$, on procède de même.

On conclut que $l \in [a,b]$
2$^{\text{ème}}$ point: On revient aux définitions avec $\varepsilon = 1$
3$^{\text{ème}}$ point: On revient aux définitions et on prend $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$
□

Propriété 1.0.4
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- *Si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, *avec* $l \in \mathbb{R}$,
  Alors f *est bornée au voisinage de* x_0.
- *Si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, *avec* $l \in \mathbb{R}^*$,
  Alors $|f(x)|$ *est minoré par un nombre strictement positif au voisinage de* x_0
- *Si* $f(x)$ *est de signe constant au voisinage de* $+\infty$, *et si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$,
  Alors l *est du même signe.*

Utilisation des propriétés précédentes. $\square$

Définition 1.0.4
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in I$.
On note $I^+ = I \cap]x_0, +\infty[$ *et* $I^- = I \cap]-\infty, x_0[$

- *On appelle* *limite à droite de $f(x)$ en x_0* *la limite finie, si elle existe, de* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* x_0 *sur* I^+
- *On appelle* *limite à gauche de $f(x)$ en x_0* *la limite finie, si elle existe, de* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* x_0 *sur* I^-

Notations: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I^+}} f(x) = f(x_0^+)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I^-}} f(x) = f(x_0^-)$

Propriété 1.0.5
Soit $x_0 \in I$

- *Si* $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$, *alors* $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = l$.
- *Si* $f(x)$ *admet une limite à droite et à gauche en* x_0, *et si* $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = f(x_0)$,
  Alors $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$.

1^er^ point: On suppose $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Alors: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Et: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
Donc $f(x)$ admet une limite à droite et à gauche en x_0, et $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = l$
2^ème^ point: On suppose que $f({x_0}^+) = f({x_0}^-) = f(x_0)$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé.
On a: $\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^+, |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Et: $\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in I^-, |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Soit α_1 et α_2 deux tels réels.
Soit $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$
D'où: $\forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Par ailleurs, pour $x = x_0$: $|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Donc:$\forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Ce raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$, on conclut que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$

□

2 Limites et continuité

Définition 2.0.5
Soit I un intervalle non vide.
Soit f une fonction numérique définie sur I.
Soit x_0 un élément de I.
On dit que f est continue en x_0 si:
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Remarque: on peut prolonger certaines fonctions par continuité.

3 Limite de fonction et convergence de suites

Propriété 3.0.6
Caractérisation séquentielle de la limite
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit x_0 et l deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
On a équivalence entre:

- $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$
- *Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$*

- On suppose que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$.
  Donc ① : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
  Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers x_0.
  Montrer que $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$

Soit ε un réel strictement positif.
Soit α un réel vérifiant ① pour ε.
De plus, (x_n) converge: $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \alpha$
Soit n_0 un tel entier.
D'où: $\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0) \Rightarrow (|x_n - x_0| < \alpha) \Rightarrow (|f(x_n) - l| < \varepsilon)$
Donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$
C'est vrai pour toute suite d'éléments de I convergeant vers x_0,
Donc la proposition 2 est vérifiée.

- On suppose que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers x_0, on ait: $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

$\boxed{\text{HA}}$ Supposons que $f(x)$ ne tende pas vers l quand x tend vers x_0
Alors $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in \mathcal{I},\ |x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$
Soit ε un tel réel.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\alpha = \frac{1}{n}$: $\exists x \in I,\ |x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$
Soit x_n un tel réel.
On procède de même pour tout n de $\mathbb{N}^*$. On construit donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
On a:
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de I
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers x_0
- $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers l

On contredit l'hypothèse de départ, donc HA est fausse.
Donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

□

4 Liens entre notion de limite et de monotonie

Propriété 4.0.7
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application monotone sur I.
Alors $f(x)$ admet une limite à droite et à gauche en tout point de I.

Soit x_0 un élément de I qui ne soit pas une extrémité de I

- Soit $I^+ = I \cap\,]x_0, +\infty[$ et $I^- = I \cap\,]-\infty, x_0[$

I^+ et I^- ne sont pas vides car x_0 n'est pas une extrémité de I.
On considère $A^+ = f(I^+)$ et $A^- = f(I^-)$
f est une application, I^+ et I^- ne sont pas vides, donc A^+ et A^- ne sont pas vides.
f est croissante, donc pour tout x de I:
$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$
$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$
Ainsi, $f(x_0)$ est un minorant de A^+ et un majorant de A^-.
Donc A^+ admet une borne inf notée M, et A^- admet une borne sup notée m.
On a ainsi $m \leqslant f(x_0) \leqslant M$

- Montrer que $f(x)$ admet une limite à droite en x_0, et que $f({x_0}^+) = M$
  Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé.
  Critère de borne inf avec ε:
  $\exists x_1 \in I^+,\ M \leqslant f(x_1) < M + \varepsilon$
  Soit x_1 un tel réel.
  Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (x_0 < x < x_1) \Rightarrow M \leqslant f(x) \leqslant f(x_1) < M + \varepsilon$
  Posons $\alpha = x_1 - x_0$
  Alors $\begin{cases} x_0 < x < x_1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x - x_0 < \alpha \\ x \in I^+ \end{cases} \iff \begin{cases} |x - x_0| < \alpha \\ x \in I^+ \end{cases}$
  Finalement: $\forall x \in \mathcal{I}^+,\ (|x - x_0| < \alpha) \Rightarrow (M \leqslant f(x) < M + \varepsilon) \Rightarrow (|f(x) - M| < \varepsilon)$
  Ce raisonnement est valable pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$,
  Donc on conclut que $f(x)$ admet une limite à droite, et que $f({x_0}^+) = M$
- De même, on montre que $f({x_0}^-)$ existe et vaut m.

Ce raisonnement est vrai en tout point x_0 de I.
On en conclut que $f(x)$ admet une limite à droite et à gauche en tout point de I. $\square$

Propriété 4.0.8
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction numérique croissante.
De deux choses l'une:
- *f admet un majorant K.*
  Alors $f(x)$ admet une limite l en $+\infty$, et $l \leqslant K$
- *f n'est pas majorée.*
  Alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.