Fonctions Numériques
Opérations sur les fonctions

MPSI 2

1 Opérations sur les fonctions admettant des limites

1.1 Limites finies

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $x \in I$ ou que x soit une extrémité de I.

- $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} 0 \iff |f(x)| \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} 0$
- Si $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$ et si $g(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l'$,
  Alors $(f+g)(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l + l'$
- Si $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} 0$ et si g est bornée au voisinage de x_0,
  Alors $(f \times g)(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} 0$
- Si $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l'$,
  Alors $(f \times g)(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l \times l'$
- Si $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$ et $l \neq 0$,
  Alors $\frac{1}{f}$ existe au voisinage V de x_0, et $\frac{1}{f(x)} \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in V}}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$

1.2 Limites infinies

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $x \in I$ ou que x soit une extrémité de I.

- Si $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} +\infty$ et si g est minorée au voisinage de x_0,
  Alors $(f+g)(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} +\infty$
- Si $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} +\infty$ et si g est minorée par un réel strictement positif au voisinage de x_0,
  Alors $(f \times g)(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} +\infty$

1.3 Composition de limites

Soient I et J deux intervalles.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x_0 \in I$ ou que x_0 soit une extrémité de I.
Soit $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $y_0 \in J$ ou que y_0 soit une extrémité de J.
Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$
Alors:

$$\begin{cases} f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} y_0 \\ g(y) \underset{\substack{y \to y_0 \\ y \in J}}{\longrightarrow} l \end{cases} \Longrightarrow (g \circ f)(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$$

2 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 2.0.1
Soit I un intervalle réel non vide.
L'ensemble des applications continues sur I a valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
$(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Montrer que:
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est non vide.
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

$\square$

Propriété 2.0.2

- *Si f et g sont continues en x_0, alors $f \times g$ est continue en x_0.*
- *Si $g(x_0) \neq 0$ et si g est continue en x_0, alors $\frac{1}{g}$ a un sens au voisinage de x_0 et $\frac{1}{g}$ est continue en x_0.*
- *Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ a un sens au voisinage de x_0, et $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.*

Corollaire 2.0.1

- *Si f est continue en x_0, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n$ est continue en x_0.*
- *Si de plus, $f(x_0) \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ f^n$ est continue en x_0.*

Par conséquence, toutes les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
De plus, les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Propriété 2.0.3
Si f est continue sur I, et si g est continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I.