Fonctions Usuelles Fonctions Puissance MPSI 2

1 Définition

1.1 Définition

Définition 1.1.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,

 $f_{\alpha} \colon \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^{\alpha} = exp(\alpha \ ln(x))$$

 f_{α} s'appelle la fonction puissance α

Propriété 1.1.1

Pour tout (x, y) strictement positifs, pour tout (α, β) réels:

- $\bullet \ x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \ x^{\beta}$
- $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^{\alpha} = x^{\alpha}y^{\alpha}$
- $ln(x^{\alpha}) = \alpha ln(x)$

1.2 Étude de f_{α}

Dérivabilité f est dérivable par composée de fonctions dérivables

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f'_{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{x} exp(\alpha ln(x))$$

= $\alpha exp((\alpha - 1)ln(x))$

Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f'_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

Etude des limites

 $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ f_{\alpha}(x) = exp(\alpha \ ln(x))$

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f_{\alpha}(x) = 0$
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f_{\alpha}(x) = +\infty$

De quelle manière f_{α} tend-t-elle vers $+\infty$?

On étudie $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_{\alpha}(x)}{x}$

Or
$$\frac{f_{\alpha}(x)}{x} = exp((\alpha - 1)ln(x))$$

- Si $0 < \alpha < 1$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_{\alpha}(x)}{x} = 0$,

Donc $\mathscr{C}_{f_{\alpha}}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique Ox

- Si $1 < \alpha$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f_{\alpha}(x)}{x} = \infty$,

Donc $\mathscr{C}_{f_{\alpha}}$ admet une branche parabolique de direction asymptotique Oy

Etude en 0

- Si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} f_{\alpha}(x) = +\infty$ Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} f_{\alpha}(x) = 0$

Dans ce cas, notons f_{α} l'application définie sur \mathbb{R} par:

$$\tilde{f}_{\alpha}(x) = \begin{cases} f_{\alpha}(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
D'après le taux d'accroissement:

- Si $\alpha>1,\ \tilde{f}'_{\alpha}(0)=0,$ donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}_{\alpha}}$ admet une demi-tangente d'équation y=0
- Si $0<\alpha<1$, $\lim_{x\to 0} exp((\alpha-1)ln(x))=+\infty$, donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}_{\alpha}}$ admet une demi-tangente d'équation x=0

Fonctions Puissance Vs. Fonctions racinesⁿ 2

• Soit n un entier pair non nul

$$g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

 $x \longmapsto x^n$

 g_n réalise une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+

Son application réciproque s'appelle la fonction $\mathbf{racine}^n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

• Soit n un entierimpair non nul

$$g_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^n$$

 g_n réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}

Son application réciproque s'appelle la fonction $\mathbf{racine}^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

ullet Par ailleurs, pour tout n entier naturel non nul, $f_{\frac{1}{n}}$ est l'application réciproque de $f_n \colon \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

Donc par unicité de la réciproque on peut écrire: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

3 Théorème de comparaison

Propriété 3.0.1

Soient α et β deux réels strictement positifs.

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\exp(x))^{\alpha}}{x^{\beta}} = +\infty$
- $\bullet \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha} |ln(x)|^{\beta} = 0$
- $\bullet \lim_{x \to \infty} |x|^{\beta} \left(exp(x) \right)^{\alpha} = 0$

• Pour
$$t \ge 1$$
, on a: $0 < \sqrt{t} \le t$

$$0 < \frac{1}{t} \le \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Donc pour $x \ge 1$ on a:

$$0 \le \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt \le 2 \int_{1}^{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dt$$

$$\iff 0 \le ln(x) \le 2\sqrt{x} - 2$$

$$\Longleftrightarrow 0 \le \frac{\ln(x)}{x} \le \frac{2\sqrt{x} - 2}{x}$$

Par conséquent, $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ • Soient α et β deux réels strictement positifs. Pour x>1:

$$\frac{\ln(x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta}$$

$$= \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta} \left(\frac{\ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta}$$

de plus:

$$-\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$$

$$-\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$-\lim_{u \to 0} u^{\beta} = 0$$

$$-\lim_{t \to 0} \frac{\ln(t)}{t} = 0$$

$$-\lim_{\alpha} u^{\beta} = 0$$

Donc par composées de limites, $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$ • Passage a l'exponentielle et passage a l'inverse.