

# Éléments de Logique

## Opérations sur les propositions

MPSI 2

### 1 Codage et valeurs logiques

Soit  $A$  une proposition. On lui associe une valeur logique (Vrai ou Faux) ou binaire (0 ou 1)

Soient  $A$  et  $B$ . Si  $A$  et  $B$  ont la même valeur logique, on note  $A \vdash B$

Soient  $a$  et  $b$  deux codages binaires.

- Négation de  $a$ :  $\neg a = 1 - a$

- " $a \vee b$ ", " $a$  ou  $b$ ", " $a$  sup  $b$ "

$a$	$b$	$(a \vee b)$	
1	1	1	
1	0	1	$a \vee b = a + b - ab$
0	1	1	
0	0	0	

- " $a \wedge b$ ", " $a$  et  $b$ ", " $a$  inf  $b$ "

$a$	$b$	$(a \wedge b)$	
1	1	1	
1	0	0	$a \wedge b = ab$
0	1	0	
0	0	0	

### 2 Opérations élémentaires sur les propositions

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions de codage binaire  $a$  et  $b$ . On a alors:

- Négation de  $A$ : c'est la proposition dont le codage binaire est  $\neg a$ .

$A$	$\neg(A)$
1	0
0	1

- Disjonction: " $A$  ou  $B$ " est la proposition codée par " $a \vee b$ ".

$A$	$B$	$(A \vee B)$	
1	1	1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• "<math>A</math> ou <math>B</math>" est Vraie si <math>A</math> est Vraie ou si <math>B</math> est Vraie.</li> <li>• "<math>A</math> ou <math>B</math>" est Fausse ssi "<math>A</math> et <math>B</math>" est Fausse.</li> </ul>
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	

### 3 Autres opérations

- La conjonction

#### Définition 3.0.1

" $A$  et  $B$ " est la proposition " $\text{non}(\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B))$ "

$A$	$B$	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- " $A$  et  $B$ " est codée par " $a \wedge b$ "

- L'implication

#### Définition 3.0.2

" $A \Rightarrow B$ " est la proposition " $\text{non}(A) \text{ ou } B$ "

$A$	$B$	$(A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Si  $A$  est Fausse,  $A \Rightarrow B$  est Vraie par définition.
- Si  $A$  est Vraie, il faut démontrer que  $B$  est Vraie.

- La contraposé: " $A \Rightarrow B$ " et " $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ " ont la même valeur logique. Démonstration triviale.
- l'équivalence

#### Définition 3.0.3

" $A \Leftrightarrow B$ " est la proposition " $(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)$ "

$A$	$B$	$(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarques:

1/ Négation de "ou" et "et":

- $\text{non}(a \text{ ou } b) \vdash \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B)$
- $\text{non}(a \text{ et } b) \vdash \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)$

2/ Négation de l'implication:  $\text{non}(A \Rightarrow B) \vdash A \text{ et } \text{non}(B)$