Eléments de Théorie des Ensembles
Familles indexées
MPSI 2

1 Ensembles finis, Ensembles dénombrables

Définition 1.0.1
Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini s'il existe un entier naturel non nul n et une application $\phi\colon [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ bijective.

Propriété 1.0.1
Si n existe, alors il est unique et on l'appelle le cardinal de E.

Notation : $card(E) = \#E = |E|$

Définition 1.0.2
E est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E.

2 Ensemble des familles indexées

2.1 Définitions

Un ensemble d'indexation est un ensemble I non vide.

Définition 2.1.1
On dit que E est un ensemble indexé par I s'il existe une bijection de I sur E
$\begin{aligned}\phi\colon I &\longrightarrow E \\ i &\longmapsto x_i\end{aligned}$ *bijective.*

Notation : $E = \{x_i, i \in I\}$

Définition 2.1.2
On appelle famille indexée par I dans E toute application de I dans E.

$$\begin{aligned}\phi\colon I &\longrightarrow E \\ i &\longmapsto x_i\end{aligned}$$

2.2 Operations ensemblistes sur les familles indexées

Définition 2.2.1
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille indexée de sous-ensembles de* E.
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$

Propriété 2.2.1

$$^c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} {}^cA_i ; {}^c\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} {}^cA_i$$

$$\begin{aligned}
x \in {}^c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\iff \neg\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) && \text{par définition du complémentaire}\\
&\iff \neg\left(\exists i \in I, x \in A_i\right) && \text{par définition de la réunion des } A_i\\
&\iff \forall i \in I, x \notin A_I && \text{négation de "}\exists\text{"}\\
&\iff \forall i \in I, x \in {}^cA_i && \text{par définition du complémentaire}\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} {}^cA_i && \text{par définition de l'intersection des } A_i
\end{aligned}$$

□

Définition 2.2.2
Soit E *un ensemble.*
Soit $(A_i)_{i\in I}$ *une famille de sous-ensembles de* E *indexée par* I.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ *est une partition de* E *si :*
- $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$
- $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
- $\forall (i,j) \in I^2, A_i = A_j$ *ou* $A_i \cap A_j = \varnothing$