

# Complexes

## Applications Geometriques des Complexes

### MPSI 2

## 1 Modules et Arguments

Soit  $A, B$  et  $M$  trois points du plan deux a deux distincts d'affixe respectives  $a, b$  et  $z$ .

- $\left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \frac{\| \vec{AM} \|}{\| \vec{BM} \|} = \frac{AM}{BM}$

- Soit  $r$  un réel strictement positif :

$\{z \in \mathbb{C}, |z-a| = r\}$  est le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$

$\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$  est le disque ouvert de centre  $A$  et de rayon  $r$

- $\arg \left( \frac{z-a}{z-b} \right) \equiv \arg(z-a) - \arg(z-b) \quad [2\pi]$   
 $\equiv \text{mes}(\vec{i}, \vec{AM}) - \text{mes}(\vec{i}, \vec{BM}) \quad [2\pi]$   
 $\equiv \text{mes}(\vec{BM}, \vec{AM}) \quad [2\pi]$   
 $\equiv \text{mes}(\vec{MB}, \vec{MA}) \quad [2\pi]$

## 2 Interpretation geometrique des operations dans $\mathbb{C}$

- $z \mapsto z + b$   
Notons  $M$  l'image affine de  $z$   
 $M'$  l'image affine de  $z'$   
 $B$  l'image affine de  $b$

$$\begin{aligned} z' = z + b &\iff z' - z = b \\ &\iff \vec{MM'} = \vec{OB} \end{aligned}$$

Translation par le vecteur  $\vec{OB}$ .

- $z \mapsto az$  avec  $a \in \mathbb{C}$

**Cas 1 :**  $a \in \mathbb{R}^*$

$$z' = az \iff \vec{OM'} = a\vec{OM}$$

$M'$  est l'image de  $M$  par l'homothetie de centre  $\mathcal{O}$  et de rapport  $|a|$ .

**Cas 2 :**  $|a| = 1 \quad \exists \theta \in \mathbb{R}, a = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} z' = az &\iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') \equiv \arg(a) + \arg(z) \quad [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \vec{OM'} = \vec{OM} \\ \text{mes}(\vec{OM}, \vec{OM'}) \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

$M'$  est l'image de  $M$  par la rotation de centre  $\mathcal{O}$  et d'angle de mesure  $\theta$ .

**Cas 3 :  $a \in \mathbb{C}^*$** 

$M'$  est l'image de  $M$  par la similitude de centre  $\mathcal{O}$ , de rapport  $|a|$  et d'angle de mesure  $\theta$ .

**Retour sur l'équation  $z^n = a$** 

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k \\ z &\longmapsto z_0 \times z \end{aligned}$$

Les images affines des solutions de  $z^n = a$  sont les images par la similitude de centre  $\mathcal{O}$ , de rapport  $\rho_0^{\frac{1}{n}}$  et d'angle de mesure  $\frac{\alpha}{n}$  des images affines des racines<sup>n</sup> de l'unité.

**Plus généralement**

- L'homothétie de centre  $\mathcal{A}$  et de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  est la transformation du plan affine qui a un point  $M$  associe le point  $M'$  tel que  $\vec{AM}' = \lambda \vec{AM}$ .  
Expression analytique de l'homothétie :

$$\begin{aligned} \vec{AM}' = \lambda \vec{AM} &\iff \begin{cases} x' - x_0 = \lambda(x - x_0) \\ y' - y_0 = \lambda(y - y_0) \end{cases} \\ &\iff z' - a = \lambda(z - a) \\ &\iff z' = \lambda(z - a) + a \end{aligned}$$

- La rotation de centre  $\mathcal{A}$  et d'angle de mesure  $\theta$  est la transformation du plan affine qui a un point  $M$  associe le point  $M'$  :

$$\begin{cases} AM = AM' \\ \text{mes}(\vec{AM}, \vec{AM}') \equiv \theta \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z - a| = |z' - a| \\ \arg(z' - a) \equiv \arg(z - a) + \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

- $z' = az + b \quad (a, b) \in \mathbb{C}^2, b \neq 0$

**Recherche de points fixes :  $z_0 = az + b$** 

$$z = az + b \iff (a - 1)z = -b$$

**Cas 1 :  $a = 1 \Rightarrow 0 = -b$** 

On a  $b \neq 0$ , donc il n'y a pas de points fixes.

**Cas 2 :  $a \neq 1$** 

$$\begin{aligned} z = az + b &\iff z = \frac{-b}{a - 1} \\ &= \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

Il existe un unique point fixe  $x_0 = \frac{b}{1-a}$ .

$$\begin{cases} z' = az + b \\ z_0 = az_0 + b \end{cases} \iff z' - z_0 = a(z - z_0)$$

$\Rightarrow$  Similitude de centre  $z_0$ , de rapport  $|a|$  et d'angle de mesure  $\arg(a)$ .