Relations Binaires
Relations d'ordre
MPSI 2

1 Définition

Soit E un ensemble non vide.
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

Définition 1.0.1
$\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si:
- *$\mathcal{R}$ est réflexive.*
- *$\mathcal{R}$ est antisymétrique: $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \Rightarrow (x = y)$*
- *$\mathcal{R}$ est transitive.*

Notations: $x \,\mathcal{R}\, y$, $x \leq y$
Se note aussi $x \preccurlyeq y$

Définition 1.0.2
Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

- *On dit que l'ordre est total si deux éléments de E sont toujours en relation: $\forall (x,y) \in E^2,\ (x \preccurlyeq y)$ ou $(y \preccurlyeq x)$.*
- *Sinon, on dit que l'ordre est partiel.*

Définition 1.0.3
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
- *$m \in E$ est le plus petit élément de E si: $\forall x \in E,\ m \preccurlyeq x$*
- *$M \in E$ est le plus grand élément de E si: $\forall x \in E,\ x \preccurlyeq M$*

Définition 1.0.4
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
- *$m \in E$ est un élément minimal de E si:*
  $\forall x \in E,\ (x \preccurlyeq m) \Rightarrow (x = m)$
- *$M \in E$ est un élément maximal de E si:*
  $\forall x \in E,\ (M \preccurlyeq x) \Rightarrow (x = M)$

Définition 1.0.5
Soit $(E, \preccurlyeq)$ *un ensemble ordonné.*
Soit A *un sous-ensemble de* E
- $\alpha \in E$ *est un* *minorant de* A *dans* E *si:*
  $\forall x \in E,\ (x \in A) \Rightarrow (\alpha \preccurlyeq x)$
- $\beta \in E$ *est un* *majorant de* A *dans* E *si:*
  $\forall x \in E,\ (x \in A) \Rightarrow (x \preccurlyeq \beta)$

2 Ordre naturel sur $\mathbb{N}$

Définition 2.0.6
$\forall (x, y) \in \mathbb{N},\ x \leqslant y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x + n$

C'est un ordre total de plus petit élément 0.

Propriété 2.0.1
Propriété caractéristique de $\mathbb{N}$*:*
Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.*

Corollaire 2.0.1
Tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément.*

Soit A un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$.
On considère B l'ensemble des majorants de A.
$B = \{x \in \mathbb{N},\ \forall a \in A, x \geqslant a\}$
A est majoré donc B est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.
D'après la propriété caractéristique de $\mathbb{N}$ B admet un plus petit élément que l'on note α
On a: $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{N} \\ \forall a \in A,\ a \leqslant \alpha \end{cases}$
Montrer que $\alpha \in \mathbb{N}$
HA: $\alpha \notin A$
Alors $\forall x \in A,\ a < \alpha$
Ou encore, puisque α est entier: $\forall a \in A,\ a \leqslant \alpha - 1$
On a donc $\alpha - 1$ entier naturel et $\alpha - 1$ majorant de A.

Donc $\alpha \in B$ et $\alpha - 1 < \alpha$, ce qui contredit α plus petit élément de B.

Donc $\alpha \in A$
Conclusion: α est le plus grand élément de A. $\square$

Corollaire 2.0.2
Principe de récurrence

Soit P une proposition portant sue les entiers naturels.
Soit $P(n)$ le prédicat associé a n.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ [P(n_0)\ \text{et}\ (\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(n)]$$

$\underline{\mathrm{H}_1}$: Soit n_0 un entier naturel tel que $(\underline{\mathrm{H}_1'})$ $P(n_0)$ et $(\underline{\mathrm{H}_1''})$ $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(n)$
On considère l'ensemble E, ensemble des $n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0$ et $\neg P(n))$
Montrer que $E = \varnothing$
<u>HA</u>: Supposons E non vide.
D'après la propriété caractéristique, E admet un plus petit élément, poté p_0.
p_0 vérifie: $p_0 \in \mathbb{N}$
$p_0 \geqslant n_0$
$P(p_0)$ est Faux
Par ailleurs, $P(n_0)$ est Vrai, donc $p_0 > n_0$, ou encore $p_0 - 1 \geqslant n_0$
Or, $p_0 > p_0 - 1$, donc $p_0 - 1$ n'est pas dans E, donc $P(p_0 - 1)$ est Vrai.
D'après H_1'', avec $n = p_0 - 1$, $P(p_0)$ est Vrai, ce qui est en contradiction avec HA.
Donc HA est fausse, $E = \varnothing$
Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow P(n)$ $\square$

3 Ordre naturel sur $\mathbb{R}$

3.1 Ordre

Ordre sur $\mathbb{R}$: $x \leqslant y \iff y - x \in \mathbb{R}^+$. Il est total.

Propriété 3.1.1
$(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ *est un <u>corps totalement ordonné</u>.*

- $(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe commutatif car:*

$+$ *est associative:* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + (y+z) = (x+y)+z$
$+$ *admet in élément neutre:* $\forall x \in \mathbb{R},\ x + 0 = x$
$+$ *octroie un élément symétrique:* $-x$ *(car* $\forall x \in \mathbb{R},\ x + (-x) = 0$*)*
$+$ *est commutative:* $\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$

- $(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe commutatif car:*
  $\times$ *est associative:* $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$
  $\times$ *admet in élément neutre:* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 1 = x$
  $\times$ *octroie un élément symétrique:* $\frac{1}{x}$ *(car* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times \frac{1}{x} = 1$*)*
  $\times$ *est commutative:* $\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ xy = yx$
- *La relation d'ordre est compatible avec les opérateurs:*
  $\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R},\ (x \leqslant y \text{ et } x' \leqslant y') \Rightarrow (x + x' \leqslant y + y')$
  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ (x \leqslant y) \Rightarrow (z\,x \leqslant z\,y)$

Définition 3.1.1
Soit $(E, \leqslant)$ *un ensemble ordonné.*

- *Soit* A *une partie de* E *non vide et majorée,* B *l'ensemble des majorants de* A*.*
  $B = \{x \in E,\ \forall a \in E,\ (a \in A \Rightarrow a \leqslant x)\}$
  On appelle <u>*borne supérieure de* A</u> *le plus petit élément de* B *(lorsqu'il existe).*
- *Soit* A *une partie de* E *non vide et minorée,* B *l'ensemble des minorants de* A*.*
  $B = \{x \in E,\ \forall a \in E,\ (a \in A \Rightarrow a \geqslant x)\}$
  On appelle <u>*borne inférieure de* A</u> *le plus grand élément de* B *(lorsqu'il existe).*

Notation: $Sup(A)$, $Inf(A)$

Propriété 3.1.2
Propriété caractéristique de $\mathbb{R}$*:*

- *Propriété de la borne supérieure:*
  Tout ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*
- *Propriété de la borne inférieure:*
  Tout ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Remarque: Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (minorée), et α sa borne supérieure (inférieure).
α est caractérisé par: • α est un majorant (minorant) de A
• si β est strictement inférieur (supérieur) a α, il n'est pas majorant (minorant) de A

- **Critère 1:** α est la borne supérieure de A si et seulement si:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \leqslant \alpha \\ \forall \beta \in \mathbb{R},\ (\beta \leqslant \alpha) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R},\ x \in A \text{ et } \beta < x \leqslant \alpha) \end{cases}$$

- **Critère 2:** α est la borne supérieure de A si et seulement si:
$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \leqslant \alpha \\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in \mathbb{R},\ (x \in A \text{ et } x - \epsilon < x \leqslant \alpha) \end{cases}$

Corollaire 3.1.1
$\mathbb{R}$ *est* *Archimédien:* $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ n > x)$

Corollaire 3.1.2
$\forall (a, b) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2,\ \exists n \in \mathbb{N},\ n\, a > b$

Corollaire 1:
Soit x un réel positif.
On considère $A = \{n \in \mathbb{N},\ n > x\}$
Montrer que $A \neq \varnothing$
HA: $A = \varnothing$
Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant x$
Donc $\mathbb{N}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Donc A admet une borne supérieure, que l'on note α
En utilisant le critre 2 avec $\epsilon = \frac{1}{2}$:
$\exists x' \in \mathbb{N},\ \alpha - \frac{1}{2} < x \leqslant \alpha$
Or $x' + 1$ est un entier naturel vérifiant $\alpha + \frac{1}{2} < x' + 1$
Ce qui contredit le fait que α soit le majorant de $\mathbb{N}$.
Conclusion: $A \neq \varnothing$
Conclusion générale: $\mathbb{R}$ est Archimédien.

Corollaire 2: prendre $x = \frac{b}{a}$ □

Corollaire 3.1.3
Partie Entire: $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ \textit{unique},\ n \leqslant x < n + 1$

Éxistance:
Soit x un rel positif.
Soit $A = \{n \in \mathbb{N},\ n > x\}$
A est non vide car $\mathbb{R}$ est archimdien
Donc A admet un plus petit lment, not n_0.

On a: $0 \leqslant x < n_0$ donc $1 \leqslant n_0$. Donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin A$
Donc $n_0 - 1 \leqslant x < n_0$.
En posant $n = n_0 - 1$, on a: $n \leqslant x < n + 1$

Soit x un rel strictement ngatif.
$-x \in \mathbb{R}^+$, donc on applique la partie prcdente.
$\exists p \in \mathbb{N}, p \leqslant -x < p + 1$
Soit p_0 cet entier.
Donc $-p_0 - 1 < x \leqslant p_0$

- $x = -p_0$
  On peut alors crire $-p_0 \leqslant x < -p_0 + 1$
  On note $n = -p_0$
- $x \neq -p_0$
  On peut alors crire $-p_0 - 1 \leqslant x < -p_0$
  On note $n = -p_0 - 1$

Unicit:
Supposons qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que:
$$\begin{cases} n_1 \leqslant x < n_1 + 1 \\ n_2 \leqslant x < n_2 + 1 \\ n_1 < n_2 \end{cases}$$
$n_1 < n_2$ donc $x < n_1 + 1 \leqslant n_2 \leqslant x$
Donc n est unique. $\square$

3.2 Proprits de $\mathbb{R}$

Propriété 3.2.1
$\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$
$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$

Soit x et y deux rels tels que $x < y$
$y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ n(y - x) > 1$
Soit n un tel entier naturel.
Donc $y < x + \frac{1}{n}$
Soit k la partie entire de nx:
$k \leqslant x < k + 1$
$\frac{k}{n} \leqslant x < \frac{x+1}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < y$
Posons $q = \frac{k+1}{n}$
q est rationnel, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Soit x et y deux rels tels que $x < y$
e est un irrationnel strictement positif donc $\frac{x}{e} < \frac{y}{e}$
$\frac{x}{e}$ et $\frac{y}{e}$ sont deux rels, donc:
$\exists q \in \mathbb{Q},\ \frac{x}{e} < q < \frac{y}{e}$
Soit q un tel lment.
Donc $x < q\,e < y$
Donc $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ □

Définition 3.2.1
Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$
I est un intervalle si I est une partie convexe de $\mathbb{R}$:

$$\forall (a,b) \in I^2,\ (a < b) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ a < x < b \Rightarrow x \in I)$$

Propriété 3.2.2
Les seuls intervalles rels sont les sous-ensembles du type:
$\mathbb{R}$; $\varnothing$
$]a,b[\,;\ [a,b[\,;\ ]a,b]\,;\ [a,b]$
$]a,+\infty[\,;\ [a,+\infty[\,;\ ]-\infty,b[\,;\ ]-\infty,b]$

Soit I une partie convexe de $\mathbb{R}$
① Montrer que si I est de l'un des types ci-dessus, I est un intervalle.
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$
- Etc...

② Montrer que si I est une partie convexe de $\mathbb{R}$, alors I est de l'un des ces types.
- I n'est ni minore, ni majore. Montrer que $I = \mathbb{R}$
  - Par hypothse sur I, $I \subset \mathbb{R}$
  - Montrer que $\mathbb{R} \subset I$ Soit x un rel. x n'est ni majorant, ni minorant:
    $\exists a \in \mathbb{R},\ a \in I$ et $a < x$
    $\exists b \in \mathbb{R},\ b \in I$ et $b > x$
    Soit a et b deux tels rels: $(a,b) \in i^2,\ a < x < b$
    Or I est un intervalle, donc $x \in I$
    Ce raisonnement tant valable pour tout x, $\mathbb{R} \subset I$

- I est majore et non minore. Montrer que $I =]-\infty,b[$ ou $I =]-\infty,]$ I est non vide et majore, donc admet une borne suprieure, note b.
  - Montrer que $I \subset]-\infty,b]$
    C'est a dire montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \Rightarrow x \leqslant b$
    Ce qui est vrai car b majore I.

$*$ Montrer que $]-\infty, b[\subset I$
C'est a dire montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x < b \Rightarrow x \in I$
Soit x un rel de I.
$\cdot$ x n'est pas un minorant de I:
$\exists a \in \mathbb{R},\ a \in I$ et $a < x$
$\cdot$ b est une borne suprieure de I:
$(x < b) \Rightarrow (\exists x' \in \mathbb{R},\ x' \in I$ et $x < x' \leqslant b)$
Soit x' un tel lment.
Donc: $a < x < x' \leqslant b$
Donc $x \in I$, donc $]-\infty, b[\subset I$
$*$ Donc $]-\infty, b[\subset I \subset]-\infty, b]$
Donc $I =]-\infty, b[$ si $b \notin I$, ou $I =]-\infty, b]$ si $b \in I$

- I est minore et non majore.
- I est borne.

$\square$

Définition 3.2.2
Valeur absolue: $: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x \ si\ x \in \mathbb{R}^+ \\ -x \ si\ x \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Propriété 3.2.3
$|x| = 0 \iff x = 0$
$|x+y| \leqslant |x| + |y|$
$|x\,y| = |x|\,|y|$

Corollaire 3.2.1
$|\,|x| - |y|\,| \leqslant |x - y|$

Définition 3.2.3
Soit $(a, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$
On appelle <u>*intervalle ouvert centr en a de rayon r*</u> *le sous-ensemble* $]a-r, a+r[$

Propriété 3.2.4

$]a, b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$

$[a, b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{a}{n}[$