Fonctions Usuelles
Fonctions Logarithme
MPSI 2

1 Logarithme Neperien

Définition 1.0.1
Le logarithme neperien est l'unique primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 0:

$$\begin{aligned} ln\colon \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{x}\, dx \end{aligned}$$

Propriété 1.0.1
$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^{+*},\ ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

On considere l'application $\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^{+*^2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y) &\longmapsto ln(xy) \end{aligned}$

Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixe.
Soit h_y l'application dfinie par $\begin{aligned} h_y\colon \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto ln(xy) \end{aligned}$

h_y et derivable car ln est derivable, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ h'_y = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$ ln et h_y sont des primitives de $x \longmapsto \frac{1}{x}$, donc elles different d'une constante.

$$\begin{aligned} \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ & h_y(x) = ln(x) + K \\ \iff & h_y(x) - ln(x) = K \\ \iff & h_y(1) - ln(1) = K \\ \iff & ln(y) = K \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ h_y(x) = ln(x) + ln(y)$

Or, ce raisonnement est valable pout tout y de $\mathbb{R}^{+*}$, donc:

Conclusion Generale: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*^2},\ ln(xy) = ln(x) + ln(y)$ $\square$

Corollaire 1.0.1

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ ln\left(\frac{1}{x}\right) = -ln(x)$
- $\forall (x;y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2,\ ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y)$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ ln\left(x^n\right) = n\ ln(x)$

Propriété 1.0.2

- $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$

1/ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = 2^n$.
$ln\left(U_n\right) = n\ ln(2)$
Donc: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies ln\left(U_n\right) > A$

2/ De plus, ln est croissante, donc si $x \geq U_{n_0}$, alors:
$ln(x) \geq ln\left(U_n\right) > A$
Posons $x_0 = U_{n0}$
Donc: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x \geq x_0 \implies ln\left(x\right) > A$
Donc: $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$

3/ En $-\infty$:
$$\begin{cases} ln(x) = -ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \\ x > 0 \end{cases}$$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc par composition de limites:
$\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$

$\square$

Propriété 1.0.3

- *ln realise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$. (Th de la bijection)*
- *$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ ln'(x) = \frac{1}{x}$, par definition.*
- *ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (Par recurrence)*

2 Logatithme en base a

Définition 2.0.2
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$
Le logarithme en base a est l'application definie par:

$$\begin{aligned} log_a : \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{ln(x)}{ln(a)} \end{aligned}$$

- *Si* $a = 10$, log_a *est note log*
- *On note e l'unique reel tel que* $log_e = ln$

Propriété 2.0.4

- $log_a(1) = 0$
- $log_a(a) = 1$
- $\forall (x; y) \in {\mathbb{R}^{+*}}^2,\ ln\,(xy) = ln(x) + ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ log_a'(x) = \frac{1}{x\ ln(a)}$
- *Si* $a > 1$,
  - log_a *est croissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} log_a(x) = +\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 0} log_a(x) = -\infty$
- *Si* $0 < a < 1$,
  - log_a *est decroissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} log_a(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 0} log_a(x) = +\infty$
- log_a *realise une bijection de* $\mathbb{R}^{+*}$ *sur* $\mathbb{R}$