

# Structures Algébriques

## Structure de Groupe

MPSI 2

## 1 Définition

### Définition 1.0.1

Soit  $(G, *)$  un magma.

On dit que  $(G, *)$  est un groupe si:

- $*$  est associative
- $*$  admet un élément neutre
- tout élément de  $G$  est symétrisable par  $*$

Si de plus,  $*$  est commutative sur  $G$ , on dit que  $(G, *)$  est un groupe abélien.

### Conséquences:

- Règle de simplification:  $a * x = a * y \Rightarrow x = y$  Démonstration:  
Soit  $a, x$  et  $y$  trois éléments de  $G$  tels que  $a * x = a * y$   
Notons  $a'$  le symétrique de  $a$  (car  $G$  est un groupe)  
On a alors:  $a' * (a * x) = a' * (a * y)$   
Par associativité, on a:  $(a' * a) * x = (a' * a) * y$   
Par symétrie, on a:  $e * x = e * y$   
Par définition de l'élément neutre:  $x = y$
- Résolution d'équations:  $a * x = b \iff x = a' * b$

## 2 Sous-groupes

### 2.1 Définition et critères

Soit  $(G, *)$  un groupe.

### Définition 2.1.1

Soit  $F$  un sous-ensemble de  $G$

On dit que  $(F, *)$  est un sous-groupe de  $(G, *)$  si:

- $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
- $(F, *')$  est un groupe où  $*$  est la loi induite de  $G$  sur  $F$ .

**Remarques:** Soit  $(F, *')$  un sous-groupe de  $(G, *)$

- $e_G = e_F$
- $F$  est non vide:  $e \in F$
- Si  $x'$  et  $x''$  sont les symétriques de  $x \in F$  dans  $(G, *)$  et  $(F, *')$  respectivement,  
Alors  $x' = x''$

**Critères de sous-groupe**

Soit  $F$  un sous-ensemble non vide de  $G$ .

- Critère 0:  $F$  est un sous-groupe de  $G$  ssi:
  - ①  $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
  - ②  $e \in F$
  - ③  $\forall x \in G, (x \in F) \Rightarrow (x^{-1} \in F)$
- Critère 1:  $F$  est un sous-groupe de  $G$  ssi:
  - ①  $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
  - ②  $\forall x \in G, (x \in F) \Rightarrow (x^{-1} \in F)$
- Critère 2:  $F$  est un sous-groupe de  $G$  ssi:
  - ①  $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y^{-1} \in F)$

**Démonstration des critères de sous-groupe**

- Critère 1: Soit  $F$  un sous-ensemble non vide de  $G$  vérifiant le critère 1.  
 D'après ②,  $x^{-1} \in F$   
 D'après ①,  $x * x^{-1} \in F$   
 Or  $x * x^{-1} = e$ , donc  $e \in F$ . On a vérifié le critère 0, donc  $(F, *)$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ .
- Critère 2: Soit  $F$  un sous-ensemble non vide de  $G$  vérifiant le critère 2.
  - $F$  est non vide: Soit  $x$  un élément de  $F$   
 D'après ①,  $x * x^{-1} \in F \Rightarrow e \in F$   
 Le point ② du critère 0 est vérifié.
  - D'après ① avec  $e$  et  $x$ :  $e * x^{-1} \in F \Rightarrow x^{-1} \in F$   
 Le point ③ du critère 0 est vérifié.
  - Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $F$ . De plus,  $y^{-1} \in F$   
 donc  $x * (y^{-1})^{-1} \in F \rightarrow x * y \in F$

□

**2.2 Propriétés des sous-groupes**

Soit  $(G, *)$  un groupe.

**Propriété 2.2.1**

- Si  $F$  et  $H$  sont des sous-groupes de  $(G, *)$ ,  
 Alors  $F \cap H$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ .
- Si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille de sous-groupes de  $(G, *)$ ,  
 Alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-groupe de  $(G, *)$

- $f \cap H$  est non vide:  $e \in F \cap H$
- Montrer que  $\forall (x, y) \in G \times G$ ,  $(x \in F \cap H)$  et  $(y \in F \cap H) \Rightarrow (x * y^{-1}) \in F \cap H$   
 Soit  $(x, y) \in F \cap H$   
 $x$  et  $y$  sont éléments de  $F$  et  $F$  est un groupe:  $x * y^{-1} \in F$   
 De même,  $x * y^{-1} \in H$   
 Donc  $x * y^{-1} \in F \cap H$   
 Vrai pour tout  $(x, y)$  de  $(F \cap H)^2$ , donc on en déduit que  $F \cap H$  est un sous-groupe de  $(G, *)$

□

**Définition 2.2.1**

Soit  $(G, *)$  un groupe.

Soit  $B$  une partie non vide de  $G$ .

On appelle sous-groupe de  $g$  engendré par  $B$  le plus petit sous groupe de  $(G, *)$  contenant  $B$ , au sens de l'inclusion.

**Justification:** On munit  $\mathcal{P}(G)$  de la relation d'inclusion:  $(\mathcal{P}(G), \subset)$  est un ensemble ordonné.

Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des groupes contenant  $B$ .

- $\mathcal{F}$  est non vide car  $G \in \mathcal{F}$
- D'après la propriété précédente,  $H = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ .

$\forall f \in \mathcal{F}$ ,  $B \subset F$ , donc  $B \subset H$

- Reste à montrer que  $H$  est le plus petit élément de  $\mathcal{F}$

Donc montrer que  $\forall F \in \mathcal{F}$ ,  $H \subset F$

Par définition de  $H$ , la proposition précédente est vraie.

**Notation:**

- $\langle B \rangle$
- Si  $B$  est un singleton  $b = \{b\}$ , on écrit  $\langle b \rangle$

## 2.3 Morphismes de groupes

Soit  $(G, *)$  et  $(G', *')$  deux groupes.

Soit  $f : G \rightarrow G'$  une application.

### Définition 2.3.1

- $f$  est un homomorphisme de groupes si:  
 $\forall (x, y) \in G \times G, f(x * y) = f(x) *' f(y)$
- $f$  est un endomorphisme de groupes si:  
 $f$  est un homomorphisme de groupes et que  $(G, *) = (G', *')$
- $f$  est un isomorphisme de groupes si:  
 $f$  est un homomorphisme de groupes bijectif de  $G$  sur  $G'$
- $f$  est un automorphisme de groupes si:  
 $f$  est un endomorphisme de groupes bijectif de  $G$  sur  $G'$

**Remarques:** Soit  $f$  un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$

- Soit  $e$  et  $e'$  les éléments neutres de  $G$  et  $G'$  respectivement.  
 Alors  $f(e * e) = f(e) *' f(e)$   
 En utilisant le symétrique de  $f(e)$  à gauche, on obtient:  
 $f(e)^{-1} *' f(e) = f(e)^{-1} *' f(e) *' f'(e)$   
 $\iff e' = f(e)$
- Soit  $x$  un élément de  $G$ .  
 $f(x * x^{-1}) = f(x) *' f(x^{-1})$   
 Par ailleurs,  $f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$   
 Donc  $f(x) *' f(x^{-1}) = e$   
 On en déduit que  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

### Propriété 2.3.1

- Si  $F$  est un sous-groupe de  $(G, *)$  et si  $f$  est un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$ ,  
 Alors  $f(F)$  est un sous-groupe de  $(G', *')$
- Si  $H'$  est un sous-groupe de  $(G', *')$  et si  $f$  est un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$ ,  
 Alors  $f^{-1} < H' >$  est un sous-groupe de  $(G, *)$

- 1<sup>er</sup> point: Montrer que  $f(F)$  est un sous-groupe de  $(G', *')$   
 Donc montrer que  $\forall (x', y') \in f(F), x' *' y'^{-1} \in f(F)$   
 $F$  non vide, donc  $f(F)$  non vide.  
 Soit  $x'$  et  $y'$  deux éléments de  $f(F)$ .

Donc  $\exists(x, y) \in F$ ,  $f(x) = x'$  et  $f(y) = y'$ . Soit  $x$  et  $y$  deux tels éléments.  

$$x' *' (y')^{-1} = f(x) *' f(y)^{-1}$$

$$= f(x * y^{-1})$$

Or,  $F$  est un groupe, donc  $x * y^{-1} \in F$ , donc  $x' *' (y')^{-1} \in f(F)$

Cela étant vrai pour tout  $x'$  et  $y'$  de  $f(F)$ , on en conclut que  $f(F)$  est un sous-groupe de  $(G', *')$ .

- 2<sup>ème</sup> point: Montrer que  $f^{-1} < H' >$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ .

–  $f$  est un homomorphisme de groupes donc  $f(e) = e'$

De plus,  $e' \in H'$  car  $H'$  est un sous-groupe de  $(G, *)$

Donc  $e \in f^{-1} < H' >$ , donc  $f^{-1} < H' >$  est non vide.

– Montrer que  $\forall(x, y) \in G \times G$ ,  $(x \in f^{-1} < H' > \text{ et } y \in f^{-1} < H' >) \Rightarrow x * y^{-1} \in f^{-1} < H' >$  Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $f^{-1} < H' >$ .

Donc montrons que  $x * y^{-1} \in f^{-1} < H' >$

Donc montrons que  $f(x * y^{-1}) \in H'$

$f(x * y^{-1}) = f(x) * f(y)^{-1}$  car  $f$  est un homomorphisme de groupes .

Or: -  $f(x) \in H'$  car  $x \in f^{-1} < H' >$

-  $f(y) \in H'$  car  $y \in f^{-1} < H' >$  .

- De plus,  $H'$  est un sous-groupe donc  $f(y)^{-1} \in H'$

Sachant  $H'$  un sous-groupe,  $f(x * y^{-1}) \in H'$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $x, y$  de  $f^{-1} < H' >$ , on en déduit que  $f^{-1} < H' >$  est un sous-groupe de  $(G, *)$  d'après la critère 2.

□

### Corollaire 2.3.1

- L'image  $f(G)$  est un sous-groupe de  $(G', *')$
- $f^{-1} < \{e\} >$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ . On l'appelle le noyau de  $f$

**Notation:**  $\ker(f) = f^{-1} < \{e\} >$

### Propriété 2.3.2

Soit  $f$  un homomorphisme de groupes de  $(G, *)$  dans  $(G', *')$ .

Alors  $f$  est injective si et seulement si  $\ker(f) = \{e\}$

① Supposons  $f$  injective.

Montrer que  $\ker(f) = \{e\}$

–  $\ker(f)$  est un sous-groupe de  $(G, *)$ , donc  $\{e\} \subset \ker(f)$

– montrer que  $\ker(f) \subset \{e\}$

Donc montrer que  $\forall x \in G, x \in \ker(f) \Rightarrow x = e$

Soit  $x$  un élément de  $\ker(f)$

Montrer que  $x = e$

$x \in \ker(f)$ , donc  $f(x) = e'$

$f$  est un homomorphisme, donc  $f(e) = e'$

D'où  $f(x) = f(e)$

Donc, sachant  $f$  injective,  $x = e$

Donc  $\ker(f) = \{e\}$

② Supposons que  $\ker(f) = \{e\}$

Montrer que  $\forall (x, y) \in G \times G, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Soit  $x$  et  $y$  deux éléments de  $G$  tels que  $f(x) = f(y)$

$f(x) = f(y) \iff f(x) *' f(y)^{-1} = e'$

$\iff f(x * y^{-1}) = e'$

Or,  $\ker(f) = \{e\}$

Donc  $x * y^{-1} = e$

Donc  $x = y$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $x$  et  $y$  de  $G$ ,  $f$  est injective.

□