

# Structures Algébriques

## Lois Internes

### MPSI 2

## 1 Définitions

### Définition 1.0.1

On appelle loi interne sur  $E$  toute application  $f$  définie sur  $E \times E$  dans  $E$ :

$$\begin{aligned} f: E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

**Notation:**  $f(x, y) = f * y$

## 2 Propriétés des lois internes

### Définition 2.0.2

Soit  $E$  un ensemble non vide muni d'une loi interne  $*$ .  $(E, *)$  est un magma.  
 $*$  est une loi associative si  $\forall (x, y, z) \in \mathcal{E} \times E \times E$ ,  $(x * y) * z = x * (y * z)$

### Propriété 2.0.1

Soit  $*$  une loi associative sur  $E$ , et  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un sous-ensemble à  $n$  éléments de  $E$ .

- $x_1 * \dots * x_n$  est défini par récurrence:  $(x_1 * \dots * x_{n-1}) * x_n = x_1 * \dots * x_n$
- $x_1 * \dots * x_n = (x_1 * \dots * x_{n_1}) * (x_{n_1+1} * \dots * x_{n_2}) * \dots * (x_{n_p} * \dots * x_n)$   
est défini avec  $p$  parenthèses.

### Définition 2.0.3

$*$  est une loi commutative sur  $E$  si  $\forall (x, y) \in E \times E$ ,  $x * y = y * x$

### Définition 2.0.4

On dit que  $*$  admet un élément neutre noté  $e$  si  $\forall x \in \mathcal{E}$ ,  $x * e = x$  et  $e * x = x$

**Propriété 2.0.2**

*Si  $*$  admet un élément neutre, alors il est unique*

Soit  $e_1$  et  $e_2$  deux éléments neutres de  $(E, *)$ .

alors  $e_1 * e_2 = e_1$  car  $e_1$  est un élément neutre

$e_1 * e_2 = e_2$  car  $e_2$  est un élément neutre

Or,  $*$  est une application, donc  $e_1 = e_2$  □

**Définition 2.0.5**

*Soit  $(E, *)$  un magma. Si  $*$  est associative et admet un élément neutre dans  $E$ , alors  $(E, *)$  est un monoïde*

**Notations:** Soit  $(E, *)$  un monoïde.

Notation multiplicative:

- $x * y = x \times y$
- L'élément neutre est noté 1 ou  $1_E$
- $x_1 * \dots * x_n = \prod_{i=1}^n x_i$
- S'utilise en général lorsque  $*$  n'est pas commutative.

Notation additive:

- $x * y = x + y$
- L'élément neutre est noté 0 ou  $0_E$
- $x_1 * \dots * x_n = \sum_{i=1}^n x_i$
- S'utilise en général lorsque  $*$  est commutative.

**Définition 2.0.6**

*Soit  $(E, *)$  un monoïde d'élément neutre  $e$ . Soit  $x$  un élément de  $E$ .  
 $x$  est symétrisable dans  $E$  si il existe un élément  $y$  de  $E$  tel que:*

$$x * y = e \text{ et } y * x = e$$

**Propriété 2.0.3**

*Si  $x$  est symétrisable, alors son symétrique est unique.*

**Notation:**

- Multiplicative: le symétrique de  $x$  s'appelle inverse et se note  $x^{-1}$
- Additive: le symétrique de  $x$  s'appelle opposé et se note  $-x$

**Remarque:** Soit  $(E, *)$  un monoïde.

Si  $x$  et  $y$  sont symétrisables de symétriques  $x'$  et  $y'$

Alors  $x * y$  est symétrisable de symétrique  $y' * x'$