

Fonctions Usuelles

Fonctions Exponentielles

MPSI 2

Définition 0.0.1

- La fonction exponentielle est l'application réciproque de \ln , notée \exp .
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, la fonction exponentielle en base a est l'application réciproque de \log_a .
On note $\exp_e = \exp$

Propriété 0.0.1

- \exp réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R}
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'_a(x) = \ln(a) \exp_a(x)$
- \exp_a est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

- Par le theoreme des fonctions reciproques.
- Par reccurence.

□

Valeurs remarquables:

- $\exp_a(0) = 1$
- $\exp_a(1) = a$

Propriété 0.0.2

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$
- $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\})^2, \forall x \in \mathbb{R}, \exp_{ab}(x) = \exp_a(x) \exp_b(x)$

Application de log aux quantites:

1/ Soit a et b deux reels:

$$\log_a(\exp_a(x + y)) = x + y$$

$$\begin{aligned}\log_a(\exp_a(x) \exp_a(y)) &= \log_a(\exp_a(x)) + \log_a(\exp_a(y)) \\ &= x + y\end{aligned}$$

Les deux quantites sont egales et **log est bijective** donc:

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$$

2/ On utilise \log_{ab}

$$\log_{ab}(x) = x$$

$$\begin{aligned}\log_{ab}(\exp_a(x) \exp_b(x)) &= \log_{ab}(\exp_a(x)) + \log_{ab}(\exp_b(x)) \\ &= \frac{\ln(a)}{\ln(ab)}x + \frac{\ln(b)}{\ln(ab)}x \\ &= \frac{\ln(a) + \ln(b)}{\ln(ab)}x \\ &= x\end{aligned}$$

Les deux quantites sont egales, donc:

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\})^2, \forall x \in \mathbb{R}, \exp_{ab}(x) = \exp_a(x) \exp_b(x)$$

□

Remarques

- $\exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}, \forall x \in \mathbb{R}, a^x = \exp_a(x)$

D'ou les proprietes classiques sur les exposants