Structures Algébriqes
Structure d'anneau et structure de corps
MPSI 2

1 Axiomes des structures

1.1 Structure d'anneau

Soit A un ensemble non vide muni de deux lois, $+$ et $\times$.

Définition 1.1.1
$(A, +, \times)$ est un anneau si:
① *$(A, +)$ est un groupe abélien.*
② *$\times$ est associative.*
$\times$ est distributive sur $+$.
$\times$ admet un élément neutre.

Notations: Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
- Alors $(A, +)$ est un groupe abélien. on le note avec la notation additive, et son élément neutre est noté 0_A.
- $\times$ est noté multiplicativement, mais n'est pas nécessairement commutative. On note son élément neutre 1_A. C'est l'élément unité.

Définition 1.1.2
Soit $(A, +, \times)$ un anneau non réduit à $\{0_A\}$.
- *Si a et b deux éléments de A tels que $\times b = 0_A$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$, alors a et b sont des diviseurs de zéro*
- *On dit que $(A, +, \times)$ est intègre si $\forall (a, b) \in A^2,\ (a \times b = 0_A) \Rightarrow (a = 0_A \text{ ou } b = 0_A)$*

Propriété 1.1.1

- *Si a est un élément inversible de $(A, +, \times)$, alors a n'est pas un diviseur de zéro.*
- *Si $(A, +, \times)$ est un anneau fini et et si a est un élément non nul de A, alors a est inversible ssi a n'est pas un diviseur de zéro.*

Définition 1.1.3
Soit a un élément de A.
On dit que a est nilpotent si il existe un entier naturel n non nul tel que: $\prod_{k=1}^{n} a = 0_A$

1.2 Structure de corps

Soit K un ensemble non vide muni de deux lois internes $+$ et $\times$.

Définition 1.2.1
$(K, +, \times)$ *est un corps si:*
① $(K, +)$ *est un groupe abélien.*
② $(K \setminus \{0_K\}, \times)$ *est un groupe abélien.*
$\times$ *est distributive sur* $+$

Remarques:
- Si $(K, +, \times)$ est un corps, alors c'est un anneau intègre.
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau intègre fini, alors c'est un corps.

2 Calculs dans un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Soit a un élément de A.
Soit n un élément de $\mathbb{N}$.
- $a + a + ... + a$, n fois se note $n\,a$
- $(-a) + (-a) + ... + (-a)$ se note $n(-a)$ ou $(-n)a$ ou $-na$ et est l'opposé de na
- Si $n = 0$, alors $0\,a = 0_A$
- $a \times a \times ... \times a$, n fois se note a^n
- Si a est inversible, $(a^{-1}) \times (a^{-1}) \times ... \times (a^{-1})$ se note $(a^{-1})^n$ ou $(a^{-1})^n$ ou a^{-n} et est l'opposé de a^n
- Par convention: $a^0 = 1_A$

Propriété 2.0.1

- $(1_A + a)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$
- *Si a et b commutent:*
  $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$
- $1_A - a^{n+1} = (1_A - a)(1_A + a + a^2 + ... + a^n)$
- *Si a et b commutent:*
  $a^n - b^n = (a - b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}$

3 Homomorphismes d'anneau et Homomorphismes de corps

Définition 3.0.2
Soit $(A, +, \times)$ *et* $(A', +', \times')$ *deux anneaux.*
Soit $f : A \to A'$
On dit que f *est un* *homomorphisme d'anneau* *si:*
- $\forall (x, y) \in A^2,\ f(x + y) = f(x) +' f(y)$
- $\forall (x, y) \in A^2,\ f(x \times y) = f(x) \times' f(y)$
- $f(1_A) = 1_{A'}$

Définition 3.0.3
Soit $(K, +, \times)$ *et* $(K', +', \times')$ *deux corps.*
Soit $f : K \to K'$
On dit que f *est un* *homomorphisme de corps* *si* f *est un homomorphisme d'anneau.*

Propriété 3.0.2
Tout homomorphisme de corps est injectif.

En utilisant les notations de la définition:
Soit $\ker(f) = f^{-1} < \{0_{K'}\} >$
f est en particulier un homomorphisme de groupe de $(K, +)$ dans $(K', +')$. Donc f est injectif ssi $\ker(f) = \{0_K\}$
Soit x un élément de K
1er cas: $x = 0_K$
$f(0_K) = 0_{K'}$ donc $0_K \in \ker(f)$ 2ème cas: $x \neq 0_K$
Alors x est inversible dans K: $x \times x^{-1} = 1_K$
Donc: $f(x \times x^{-1}) = f(1_K) = 1_{K'}$
$f(x \times x^{-1}) = f(x) \times' f(x)^{-1}$
D'où $f(x) \times' f(x)^{-1} = 1'_K$
En particulier, $f(x) \neq 0_{K'}$
Donc $x \notin \ker(f)$

Donc $\ker(f) = \{0_K\}$
Donc f est injective. $\square$

Corollaire 3.0.1
Soit $f : K \to K'$ un homomorphisme de corps.
Alors K est isomorphe à un sous-corps de K'

- f est un homomorphisme de corps, donc f est injectif.
- L'image d'un corps par un homomorphisme de corps est un corps.
- f induit une bijection de K sur $f(K)$:

$$\begin{aligned} \tilde{f} \colon K &\longrightarrow f(K) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Finalement: K est isomorphe à $f(K)$ et $f(K)$ est un sous-groupe de K'.

$\square$