Éléments de Logique
Opérations sur les propositions

MPSI 2

1 Codage et valeurs logiques

Soit A une proposition. On lui associe une valeur logique (Vrai ou Faux) ou binaire (0 ou 1)
Soient A et B. Si A et B ont la même valeur logique, on note $A \vdash\dashv B$

Soient a et b deux codages binaires.
- Négation de a: $\neg a = 1 - a$

- "$a \vee b$", "a ou b", "a sup b"

a	b	$(a \vee b)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$a \vee b = a + b - a\,b$

- "$a \wedge b$", "a et b", "a inf b"

a	b	$(a \wedge b)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$a \wedge b = a\,b$

2 Opérations élémentaires sur les propositions

Soient A et B deux propositions de codage binaire a et b. On a alors:
- Négation de A: c'est la proposition dont le codage binaire est $\neg a$.

A	$non(A)$
1	0
0	1

- Disjonction: "A ou B" est la proposition codée par "$a \vee b$".

A	B	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- "A ou B" est Vraie si A est Vraie ou si B est Vraie.
- "A ou B" est Fausse ssi "A et B" est Fausse.

3 Autres opérations

- La conjonction

Definition 3.0.1
"A et B" est la proposition "non(non(A) ou non(B))"

A	B	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- "A et B" est codée par "$a \wedge b$"

- L'implication

Definition 3.0.2
"$A \Rightarrow B$" est la proposition "non(A) ou B"

A	B	$(A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Si A est Fausse, $A \Rightarrow B$ est Vraie par définition.
- Si A est Vraie, il faUt démontrer que B est Vraie.

- La contraposé: "$A \Rightarrow B$" et "$non(B) \Rightarrow non(A)$" ont la même valeur logique.
  Démonstration triviale.

- l'équivalence

Definition 3.0.3
"$A \Leftrightarrow B$" est la proposition "$(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$"

A	B	$(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarques:

1/ Négation de "ou" et "et":
- $non(a\ ou\ b) \vDash non(A)\ et\ non(B)$
- $non(a\ et\ b) \vDash non(A)\ ou\ non(B)$

2/ Négation de l'implication: $non(A \Rightarrow B) \vDash A\ et\ non(B)$