Espaces Vectoriels de Dimension finie
Sous-Espaces Vectoriels

MPSI 2

1 Dimension de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$ de dimension finie.

Propriété 1.0.1
Soit F un S_{EV} de E.
Alors:
- *F est de dimension finie.*
- $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
- $F = E \iff \dim(F) = dim(E)$

On raisonne sur une base de F. □

2 Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$ de dimension finie.
Soient F et G deux S_{EV} de E.

Définition 2.0.1
On appelle <u>somme de F et G</u> le sous-espace vectoriel engendr par $F \cup G$

Notation: $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$

Propriété 2.0.2

$$F + G = \{x \in E,\ \exists (x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G\}$$

Propriété 2.0.3

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

On raisonne avec les bases de F, G, et $F \cap G$, et avec le thorme de la base incomplte sur $F \cap G$. $\square$

3 Somme directe, espaces supplmentaires

Soit E un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ de dimension n.

Définition 3.0.2
Soient F et G deux S_{EV} *de E.*
- *La somme $F+G$ est <u>directe</u> si $F \cap G = \{0_E\}$*
- *F et G sont <u>supplmentaires de E</u> si $F \oplus G = E$*

Notation: Somme directe de F et G: $F \oplus G$

Propriété 3.0.4
$$\varphi_1 : F \times G \longrightarrow F+G$$
$$(x_F, x_G) \longmapsto x_F + x_G$$
φ_1 est linaire et surjective.

- *F et G sont en somme directe ssi φ_1 est injective.*
- *F et G sont en somme directe ssi tout lment de $F+G$ s'crit comme manire unique comme CL d'lments de F et de G.*

Définition 3.0.3

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right)$$

Définition 3.0.4
Soit $\varphi\colon E_1 \times ... \times E_p \longrightarrow E_1 + ... + E_p$
$(x_1, ..., x_p) \longmapsto x_1 + ... + x_p$
La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe ssi* φ *est injective, c'est à dire si tout lment de* $E_1 + ... + E_p$ *s'crit comme CL unique d'lments de* $\{E_1 \times ... \times E_p\}$.

Notation: $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Propriété 3.0.5
$F + G$ *est une somme directe ssi la runion d'une base de* F *et d'une base de* G *est une base de* $F + G$.

Corollaire 3.0.1

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Corollaire 3.0.2

- *Si* F *et* G *sont supplmentaires de* E, *alors* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- *Tous les* S_{EV} *supplmentaires de* F *dans* E *sont de dimension* $\dim(E) - \dim(F)$