Suites Réelles
Suites extraites
MPSI 2

1 Dfinition

Définition 1.0.1
On dit que <u>*v est une suite extraite de u*</u> *si il existe une application ϕ strictement croissante telle que* $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\phi(n)}$

On appelle galement v une sous-suite de u.
On a notamment:
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des termes d'indices pairs de u
- $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des termes d'indices impairs de u

2 Proprits de limites

Propriété 2.0.1
Lemme: *Si $\phi\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\phi(n) \geqslant n$*

Par rcurrence, avec $\phi(0) \geqslant 0$ et $\phi(n+1) > \phi(n)$ $\square$

Propriété 2.0.2
Si u tend vers l avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u tend vers l

1. <u>1^{er} cas:</u> $l \in \mathbb{R}$
   Soit v une suite extraite de u, et $\phi : n \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
   Montrer que v converge vers l
   Soit ε un rel strictement positif.
   Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$
   Soit n_0 un tel entier. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow n_0 \leqslant n \leqslant \phi(n)$
   On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon$
   Donc v converge vers l.
2. On procde de manire analogue avec $l = \pm\infty$

$\square$