

# Fonctions Usuelles

## Fonctions Hyperboliques

### MPSI 2

## 1 Cosinus hyperbolique et Sinus hyperbolique

### Définition 1.0.1

On appelle cosinus et sinus hyperboliques les parties paires et impaires de l'exponentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

### 1.1 Parties paires et impaires d'une fonction

#### Propriété 1.1.1

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles.

Alors il existe un unique couple d'applications définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $(g, h)$ , telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

L'application  $g$  s'appelle la partie paire de  $f$  et  $h$  la partie impaire de  $f$ .

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application fixée.

① Supposons qu'il existe deux applications définies sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Alors pour  $x$  réel,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x) \end{aligned}$$

Ainsi,  $g(x)$  et  $h(x)$  vérifient :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

Donc : 
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
et 
$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

**Conclusion 1 :**

Si  $g$  et  $h$  existent, alors :

$$\begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

**Conclusion 2 :**

En particulier, si  $g$  et  $h$  existent, alors ils sont uniques.

② On considère  $g$  et  $h$  les deux applications définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Montrer que  $g$  et  $h$  vérifient :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Pour  $x$  réel :

- $$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x))$$

$$= f(x)$$
- $$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$$

Ceci étant valable pour tout  $x$  réel, on conclut que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

**Conclusion Generale :**

Il existe un unique couple d'application  $(g, h)$  tel que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

□

**Retour aux fonctions hyperboliques :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$


D'après la propriété précédente,  $ch$  est paire et  $sh$  est impaire.

**Propriété 1.1.2**


- $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 0$
- $ch$  et  $sh$  sont deux applications définies sur  $\mathbb{R}$  et :  $ch' = sh$   
 $sh' = ch$
- $ch$  et  $sh$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$

**Etude de  $sh$  :**

$x$	0	$+\infty$
$ch(x)$	1	+
$sh(x)$	0	$+\infty$


**Etude de  $ch$  :**

$x$	0	$+\infty$
$sh(x)$	0	+
$ch(x)$	1	$+\infty$


**Propriété 1.1.3**

Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$  :

- $ch(x) + sh(x) = e^x$
- $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$
- $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

## 2 Tangente hyperbolique

### Définition 2.0.1

La fonction tangente hyperbolique est définie par  $th = \frac{sh}{ch}$ .

C'est une application définie sur  $\mathbb{R}$  car  $ch > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a, pour tout  $x$  réel,  $th(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$   

$$= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Etude de  $th$  :

$x$	0	$+\infty$
$th'(x)$	1	+
$th(x)$	0	1

## 3 Fonctions circulaires reciproques

### 3.1 arcsinus et arccosinus

$\sin$  est définie continue strictement croissante sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$  et  $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ .  
 Donc  $\sin$  réalise une bijection de  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1, 1]$ .

### Définition 3.1.1

La fonction arcsinus est la fonction réciproque de  $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ .

$$\begin{aligned} \arcsin: [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

$\cos$  est définie continue strictement décroissante sur  $[0, \pi]$  et  $\cos(0) = 1$  et  $\cos(\pi) = -1$ .

Donc  $\cos$  réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ .

### Définition 3.1.2

La fonction arccosinus est la fonction réciproque de  $\cos|_{[0, \pi]}$ .

$$\begin{aligned} \arccos: [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

### Remarques :

- $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta$
- Si  $\alpha$  appartient à  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\alpha)) = \pi - \alpha$
- $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$
- $\forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta$
- Si  $\alpha$  appartient à  $[-\pi, 0], \arccos(\cos(\alpha)) = -\alpha$
- Pour  $x$  dans  $[-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- Pour  $x$  dans  $[-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

## 3.2 arctangente

$\tan$  réalise une bijection de  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Définition 3.2.1

La fonction arctangente est la fonction réciproque de  $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$ .

$$\begin{aligned} \arctan: \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ x &\longmapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

### Remarques :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$
- $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta$
- Pour  $x$  réel,  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$