# Eléments de Théorie des Ensembles
# Graphes et Applications

MPSI 2

## 1 Graphes de $E$ vers $F$

Soit $E$ et $F$ deux ensembles.
On note $E \times E = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$

**Définition 1.0.1**
*On appelle graphe de $E$ dans $F$ tout sous-ensemble $G$ de $E \times F$*

**Définition 1.0.2**
*On appelle correspondance de $E$ vers $F$ tout triplet $(G, E, F)$ où $E$ et $F$ sont deux ensembles et $G$ un graphe de $E$ vers $F$.*

**Définition 1.0.3**
*Soit $E$ et $F$ deux ensembles.*
*Soit $(G, E, F)$ une correspondance de $E$ vers $F$, On dit que $(G, E, F)$ est une application de $E$ dans $F$ si pour tout élément de $E$, l'ensemble des $y$ de $F$ tels que $(x, y)$ soit dans $G$ est réduit a un et un seul élément*

**Notations :**

$f\colon (G, E, F)$ ou $f\colon E \longrightarrow F$

$$x \longmapsto y \text{ tel que } (x, y) \in G$$

Pour tout $x$ de $F$, l'ensemble $\{y \in F, (x, y) \in G\}$ est réduit a un seul élément On notera cet élément $f(x)$.

**Définition 1.0.4**
*Soit $f$ une application de $E$ dans $F$.*
*Soit $A$ un sous-ensemble de $E$.*
*L'ensemble $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ est un sous-ensemble de $F$ que l'on appelle image de $A$ par $f$.*

**Remarques :**

- $f(\varnothing) = \varnothing$
- $f(E)$ s'appelle l'image de $f$.

**Définition 1.0.5**
*Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application.*
*Soit $B$ un sous-ensemble de $F$.*
*On appelle image réciproque de $B$ par $f$ le sous-ensemble de $E$ note $f^{-1} < B >$ tel que $f^{-1} < B >= \{x \in E, f(x) \in B\}$.*

**Remarques :**

- $f^{-1} < F >= E$
- Soit $y$ un élément de $F$. On prend $B = \{y\}$

$$\begin{aligned} f^{-1} < B > &= f^{-1} < \{y\} > \\ &= \{x \in E, f(x) = y\} \end{aligned}$$

**Définition 1.0.6**
*Soit $f$ une application de $E$ dans $F$.*

- *$f$ est dite injective si deux élément distincts de $E$ ont des images distinctes par $f$.*
- *$f$ est dite surjective si tout élément de $F$ est dans $f(E)$.*
- *$f$ est dite bijective si elle est surjective et injective.*

**Définition 1.0.7**

- *Soit $f$ une application de $E$ dans $F$.*
  *Soit $A$ un sous-ensemble de $E$.*
  *On appelle restriction de $f$ a $A$ l'application notée $f_{|A}$ telle que :*

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- *Soit $f$ une application de $E$ dans $F$.*
  *Soit $E'$ un ensemble tel que $E$ soit un sous-ensemble de $E'$. Soit $g$ une application de $E'$ dans $F$.*
  *On dit que $g$ est un prolongement de $f$ par $E'$ si $g_{|E} = f$*

**Définition 1.0.8**
*Soit $E$ un ensemble.*
*Soit $A$ un sous-ensemble de $E$.*
*On appelle application caractéristique de $A$ (fonction indicatrice de $A$) l'unique application notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :*

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A \colon E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto (x \in A) \end{aligned}$$

**Propriété 1.0.1**
*Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de $E$.*
*Notons $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ l'ensemble des applications définies sur $E$ a valeurs dans $\{0,1\}$.*
*L'application*

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

*réalise une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$.*