EDL
Equations Differentielles Lineaires du second ordre

MPSI 2

1 Generalites

Definition 1.0.1
Soit $\mathcal{I}$ un intervalle reel. a,b,c,d des applications definies sur $\mathcal{I}$ a valeurs dans $\mathbb{K}$ et continues sur $\mathcal{I}$. On appelle equation differentielle lineaire du second ordre toute relation du type :

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) = d(x)$$

d'inconnue y

Definition 1.0.2
Une solution particuliere sur $\mathcal{I}$ de l'equation differentielle precedente est une application $\phi \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :
- *ϕ est deux foix derivable sur $\mathcal{I}$.*
- $\forall x \in \mathcal{I}, a(x) \phi''(x) + b(x) \phi'(x) + c(x) \phi(x) = d(x)$

Remarque : L'ensemble des solutions de l'equation differentielle lineaire du second ordre homogene

$$\forall x \in \mathcal{I}, a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) = 0$$

a une structure d'espace vectoriel (non vide et stable par combinaisons lineaires).

2 Equation Differentielle Lineaire du second ordre a coefficients constants

2.1 Definitions

Definition 2.1.1
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que $a \neq 0$. Soit $d \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue sur $\mathcal{I}$. On appelle equation differentielle lineaire du second ordre a coefficients constants une relation du type :

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$$

2.2 Etude de l'equation homogene associee

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$

Propriete 2.2.1
(Solutions reelles)
On suppose a, b, c reels et $a \neq 0$
Soit l'equation differentielle homogene associee :

$$\forall x \in \mathcal{I}, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \qquad (2)$$

On considere l'equation $ar^2 + br + c = 0$ (E) d'inconnue r.
(E) s'appelle l'equation caracteristique associee a (2)
Cas 1 : *(E) admet deux solutions reelles distinctes r_1 et r_2.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

Cas 2 : *(E) admet une unique solution reelle r_0.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}$$

Cas 3 : *(E) admet deux solutions complexes non reelles conjuguees $\alpha \pm \imath\beta$.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x} (a \cos \beta x + \imath \sin \beta x)$$

Propriete 2.2.2
(moins importante, solutions complexes)
On suppose a, b, c complexes et $a \neq 0$.
Cas 1 : *(E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

Cas 2 : *(E) admet une unique solution r_0.*
y est solution de (2) ssi:

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (\lambda x + \mu) e^{r_2 x}$$