

# Suites Réelles

## Opérations sur les suites

### MPSI 2

## 1 Structure d'algèbre des suites

Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des suites réelles.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles.

### Addition

On pose  $u + v = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(\mathcal{E}, +)$  est un groupe abélien (commutatif):

- Il possède un élément neutre:  $(0)_{n \in \mathbb{N}}$
- Il possède un élément symétrique:  $-u_n = (-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

### Multiplication

On pose  $u \times v = (u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\times$  est associative

$\times$  est distributive sur  $+$

$\times$  admet un élément neutre:  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$

On dit que  $(\mathcal{E}, +, \times)$  est un anneau commutatif (car pas complètement symétrique)

### Multiplication externe

On pose  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u = (\lambda \times u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a de plus  $\lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (v \cdot \lambda)$

On dit que  $(\mathcal{E}, +, \cdot)$  est un espace vectoriel.

On dit que  $(\mathcal{E}, +, \times, \cdot)$  est une algèbre commutative.

### Propriété 1.0.1

On note  $\mathcal{E}_b$  l'ensemble des suites bornées.

On note  $\mathcal{E}_c$  l'ensemble des suites convergentes.

On a:

- $\mathcal{E}_c \subset \mathcal{E}_b \subset \mathcal{E}$
- $(\mathcal{E}_b, +, \times, \cdot)$  et  $(\mathcal{E}_c, +, \times, \cdot)$  sont des algèbres commutatives.

## Limites Réelles

### Propriété 1.0.2

- Si  $u$  converge vers  $l$  et  $v$  converge vers  $l'$ , alors  $u + v$  converge vers  $l + l'$ .
- Si  $u$  converge vers  $l$  et  $v$  converge vers  $l'$ , alors  $u \times v$  converge vers  $l \times l'$ .
- Si  $u$  converge vers  $l$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda \cdot u$  converge vers  $\lambda l$

- Si  $u$  converge vers  $l \neq 0$ , alors il existe un rang  $n_0$  à partir duquel  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$  ait un sens, et  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$  converge vers  $\frac{1}{l}$
- Si  $u$  converge vers  $l$  et  $v$  converge vers  $l' \neq 0$ , alors il existe un rang  $n_0$  à partir duquel  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$  ait un sens, et  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$  converge vers  $\frac{l}{l'}$

- **Premier point:**

Utiliser les définitions des limites avec  $\frac{\varepsilon}{2}$ , à  $\varepsilon$  fixé.

Puis, avec l'addition des deux, utiliser l'inégalité triangulaire.

- **Deuxième point:**

Soit  $u$  et  $v$  tendant vers  $l$  et  $l'$ .

Montrer que  $u v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l l'$

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Montrer que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n v_n - l l'| < \varepsilon$

De plus:  $|u_n v_n - l l'| = |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - l l'|$   $u$  est convergente, donc bornée.

$$= |u_n(v_n - l) + l'(u_n - l)|$$

$$|u_n v_n - l l'| \leq |u_n| |v_n - l| + |l'| |u_n - l|$$

Soit  $M$  le majorant de  $|u|$ .

Donc  $|u_n v_n - l l'| \leq M |v_n - l| + |l'| |u_n - l|$

On utilise ensuite la convergence de  $u$  avec  $\frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$  et de  $v$  avec  $\frac{\varepsilon}{2(M+1)}$

Donc:  $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)}$  Soit  $n_1$  et  $n_2$  deux tels

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$$

réels. Posons  $n_0 = \max(\{n_1, n_2\})$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n v_n - l l'| < M \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |l'| \frac{\varepsilon}{2(|l'|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Ce raisonnement étant vrai pour tout  $\varepsilon$ ,  $u v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l l'$

- **Quatrième point:**

Soit  $u$  une suite tendant vers un réel  $l$  différent de 0.

– Démontrer l'existence de  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow \frac{|l|}{2} < u_n < \frac{3|l|}{2}$$

Donc il existe un rang  $n_0$  tel que l'inverse de  $u_n$  soit défini.

– Montrer que:  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$  converge vers  $\frac{1}{l}$

$$\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right|$$

$$\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{l - u_n}{l u_n} \right| = \frac{|l - u_n|}{|u_n| |l|}$$

Or  $|u_n| > \frac{|l|}{2}$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| < \frac{\frac{|u_n - l|}{2} \times |l|}{|l|^2} \leq \frac{2}{|l|^2} |u_n - l|$$

On applique la convergence de  $u$  avec  $\frac{|l|^2}{2} \varepsilon$

$$\text{Donc } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right| < \frac{2}{|l|^2} \times \frac{|l|^2}{2} \varepsilon \leq \varepsilon$$

Donc il existe un rang  $n_1$  à partir duquel  $\left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} \right|$  est inférieur à  $\varepsilon$

Cela étant vrai pour tout  $\varepsilon$ ,  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$

□

### Corollaire 1.0.1

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \iff u_n - l \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\iff \frac{u_n}{l} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

## Limites Infinies

### Propriété 1.0.3

Somme:

- Si  $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ 
  - Si  $v$  est minorée dans  $\mathbb{R}$ ,  $u + v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
  - En particulier si  $v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  ou si  $v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$  avec  $l \in \mathbb{R}$
  - On ne peut pas conclure immédiatement si  $v \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
- De même avec  $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

Produit

- Si  $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ 
  - Si  $v$  n'admet pas 0 pour limite, et si  $v_n$  garde un signe constant à partir d'un certain rang, alors:
    - Si  $v_n < 0$ ,  $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
    - Si  $v_n > 0$ ,  $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
  - Si  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on ne peut pas conclure a priori,

**Sauf si**  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n = 0$  Dans ce cas,  $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- De même avec  $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

Inverse

- Si  $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , alors il existe un rang  $n_0$  à partir duquel  $\left( \frac{1}{u_n} \right)_{n \geq n_0}$  existe et
$$\left( \frac{1}{u_n} \right)_{n \geq n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cela s'applique aussi à  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
- Si  $u \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- Si à partir d'un certain rang  $n_0$ , tous les  $u_n$  sont non nuls, alors  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$  existe.
- Si de plus  $u_n$  garde un signe constant à partir d'un rang  $n_1 \geq n_0$ ,  $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow \pm\infty$  selon le signe de  $u_n$

**Inverse**

Montrer que si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  et, à partir d'un certain rang,  $u_n < 0$ , alors  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Soit  $u$  une suite convergeant vers 0 et strictement négative à partir d'un rang  $n_1$ .

Donc:  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$

Soit  $n_2$  un tel réel,  $\varepsilon$  un réel positif, et  $n_3 = \max(\{n_1, n_2\})$

Pour tout  $n$  supérieur à  $n_3$ ,  $\frac{1}{u_n}$  existe.

Montrer que  $\frac{1}{u_n}$  diverge vers  $-\infty$

Soit  $K$  un réel.

- Si  $K \geq 0$ :  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_3 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < 0 \leq K$
- Si  $K < 0$

En appliquant la convergence de  $u$  avec le réel  $\frac{1}{|K|}$ :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_4 \Rightarrow -\frac{1}{|K|} < u_n < \frac{1}{u_n}$

Soit  $n_0$  un tel réel.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 &\Rightarrow \frac{1}{K} < u_n \\ &\Rightarrow \frac{1}{u_n} < K \end{aligned}$$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $K$  réel,  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$  □

**Propriété 1.0.4**

*Tout réel est limite d'une suite de rationnels.*

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}, (\forall n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q})$  et  $(q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x)$

Soit  $x$  un réel.

- Existence de la suite:

$\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$

Donc  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists q \in \mathbb{R}, x - \varepsilon < q < x + \varepsilon$

Pour tout  $n$  non nul, posons  $\varepsilon = \frac{1}{n}$

Soit  $q_n$  un rationnel vérifiant  $q_n \in \mathbb{Q}, x - \frac{1}{n} < q_n < x + \frac{1}{n}$

Ce raisonnement étant valable pour tout  $n$  non nul, on obtient une suite  $q$  sur  $\mathbb{N}^*$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}$

- Convergence vers  $x$

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

$(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0

Donc  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Soit  $n_0$  un tel entier.

On a donc  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |q_n - x| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

Cela étant valable pour tout  $\varepsilon$  strictement positif, on conclut que  $q$  converge vers  $x$

□

## 2 Relations de comparaison

### Propriété 2.0.5

Soit  $u$  et  $v$  deux suites telles que  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n$

- Si  $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , alors  $v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- Si  $v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , alors  $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$
- Si  $u$  et  $v$  à termes positifs à partir d'un certain rang, et si  $v \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , alors  $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

### Propriété 2.0.6

Propriété d'encadrement

Soit  $u, v$  et  $w$  trois suites telles que  $\exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$

Si  $u$  et  $w$  convergent vers une même limite  $l$ , alors  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$

### Définition 2.0.1

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles.

- $u_n = O(v_n)$ : " $u_n$  est Grand O de  $v_n$ "

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq M |v_n|$$

- $u_n = o(v_n)$ : " $u_n$  est Petit o de  $v_n$ "

$$\exists (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon_n |v_n|)$$

### Propriété 2.0.7

Si  $u_n = O(v_n)$  et  $w_n = O(v_n)$

alors  $u_n + w_n = O(v_n)$

Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  et  $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$   
 alors  $u_n + w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$

**Remarque:**

- ①  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n) \iff$  la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.  
 On dit que  $v$  domine  $u$ .
- ②  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \iff$  la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.  
 On dit que  $u$  est négligeable devant  $v$

**Définition 2.0.2**

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles.

- $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ : " $u$  est équivalente à  $v$ ."

$$\exists (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n)$$

**Remarque:**

- Si  $v_n$  tous non nuls à partir d'un certain rang, alors la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 1.
- "Être équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites dont pour tout rang il existe un terme de rang supérieur non nul.

**Propriété 2.0.8**

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles.

- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et si  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$  et si  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$  et  $l \in \mathbb{R}^*$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$

**Remarque:**

$$\begin{aligned} u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n &\iff \exists \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}, (\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n v_n) \\ &\iff \exists \varepsilon \in \mathbb{N}^{\mathbb{R}}, (\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0) \text{ et } (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n = \varepsilon_n v_n) \\ &\iff u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n) \end{aligned}$$

**Propriété 2.0.9**

Soit  $u$ ,  $v$ ,  $x$  et  $y$  quatre suites réelles.

- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  et  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y_n$   
alors  $u_n x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n y_n$
- Si de plus  $x_n$  et  $y_n$  tous non nuls à partir d'un certain rang,  
alors  $\frac{u_n}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_n}{y_n}$

**Remarque:** ce n'est généralement pas compatible avec l'addition.