EDL
Equations Differentielles Lineaires du premier ordre

MPSI 2

1 Generalites

Definition 1.0.1
Soit I un intervalle reel.
Soient a, b et c trois fonctions definies sur I a valeurs reelles ou complexes.

$$a\colon I \longrightarrow \mathbb{K} \quad b\colon I \longrightarrow \mathbb{K} \quad c\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto a(x) \quad x \longmapsto b(x) \quad x \longmapsto c(x)$$

On suppose a b et c continues sur I

On appelle equation differentielle lineaire du premier ordre une relation du type:

$$\forall x \in I,\ a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = c(x)$$

Definition 1.0.2

- *c est le second membre de l'equation differentielle.*
- *$\forall x \in I,\ a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0$ est le second membre de l'equation.*

Definition 1.0.3
Soit J un sous-intervalle de I.
On appelle solution de l'equation differentielle toute application Φ telle que:
$\Phi\colon J \longrightarrow \mathbb{K}$
$x \longmapsto \Phi(x)$
Telle que :
- *Φ soit derivable sur J*
- *$\forall x \in J,\ a(x)\Phi'(x) + b(x)\Phi(x) = c(x)$*

Remarque: l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'EDHA sur I est stable par combinaison lineaire et non vide ($y = 0$ est solution)
On dit alors que S_0 a une structure d'espace vectoriel

2 Etude de l'equation $\forall x \in I,\ y'(x) + \alpha y(x) = 0$

Pour α continue sur I.

Propriete 2.0.1
L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'ED $\forall x \in I,\ y'(x) + \alpha y(x) = 0$ est:

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda \times g,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

avec $g(x) = exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} A(x)\right)$ et $A(x)$ une primitive de α sur I

On etudie l'expression $y'(x) = -\alpha y(x)$, et on cherche une primitive de $-\alpha$.
L'exponentielle de cette primitive est solution de l'expression $(g(x))$.

On cherche une fonction u telle que $y = u\, g$ soit solution de l'expression precedente.
Par calcul, on trouve: $\forall x \in I,\ u'(x) = 0$, donc u est constante sur I.

Ainsi, toutes les solutions de l'expression sont de la forme de la propriete. □

Remarques:

- S_0 est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimention 1, dont une base est donnee par g. On parle de droite affine.
- Il est possible de caracteriser la faction exponentielle par l'unique solution du systeme $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- Si y est solution de l'ED, de deux choses l'une:
  - y est l'application nulle sur I.
  - y ne s'annule jamais sur I

3 Cas general: $\forall x \in I,\ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$

3.1 Resolution de l'EDHA

a est continue sur I. Soit J un intervalle ou a ne s'annule pas. Alors:

$$\begin{aligned} & \forall x \in J,\ q(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = 0 \\ \iff & \forall x \in J,\ y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)} y(x) = 0 \end{aligned}$$

D'apres la propriete precedente, l'ensemble des solutions est un espace vectriel de dimention 1.

Pour $x_0 \in J$, on note Z_0 l'application dfinie sur J par:
$\forall x \in J,\ Z_0(x) = -exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\, dt\right)$
Z_0 est une solution de l'EDHA.

3.2 Resolution de l'ED

Soit y_0 une solution particuliere de l'ED. Donc y_0 est derivable sur J et:
$\forall x \in J,\ a(x)\, y_0'(x) + b(x)\, y_0(x) = c(x)$

y est solution de l'ED
$\iff \forall x \in J,\ a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x)$
$\iff \forall x \in J,\ a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = a(x)\, y_0'(x) + b(x)\, y_0(x)$
$\iff \forall x \in J,\ a(x)(y - y_0)(x) + b(x)(y - y_0)(x) = 0$
$\iff (y - y_0)$ est solution de l'EDHA
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in J,\ (y - y_0)(x) = \lambda Z_0(x)$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in J,\ y(x) = y_0 + \lambda Z_0$
On a demontre:

Propriete 3.2.1

- *l'ensemble des solutions de l'ED* $a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x)$ *est :*
  $\mathcal{S}_J = \{y_0 + \lambda Z_0,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$
  avec $Z_0 \colon \begin{array}{rcl} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & -exp\left(-\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\, dt\right) \end{array}$
  et y_0 *solution particuliere de l'ED.*
- $\mathcal{S}_J$ *est un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent l'ensemble des solutions de l'EDHA.*
  c'est un espace vectoriel de dimension 1, on parle de droite affine.

3.3 Determination d'une solution particuliere

Il existe deux fonctions y et u derivables sur J telles que:
$\forall x \in J,\ y(x) = u(x)\, Z_0(x)$
y est solution de l'ED $\iff \forall x \in J,\ u'(x) = \frac{c(x)}{a(x)\, Z_0(x)}$
On choisit une primitive u_0 de u' et $y_0 = u_0\, Z_0$, les solutions de l'ED sont donc de la forme:
$y = y_0 + \lambda Z_0$

3.4 Probleme de Cauchy

Soit I un intervalle reel et a; b, c trois applications continues sur I a valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit l'ED: $\forall s \in I,\ a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x)$

Soit $(x_0, y_0 \in I \times \mathbb{K}$**. Existe-t-il une solution** $y : x \to \mathbb{K}$ **satisfaisant** $y(x_0) = y_0$ **?**

Propriete 3.4.1
Si a ne s'annule pas sur I, alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ telle que:
$$\begin{cases} \forall x \in I,\ a(x)\, y'(x) + b(x)\, y(x) = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Remarques si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- Si a ne s'annule pas sur I, il existe une unique **courbe solution** passant oar le pint de coordonnees (x_0, y_0)
- par application de cette propriete, deux courbes integrales ne se coupent jamais.

Determiner les solutions litterales de l'ED, et exprimer $y(x_0) = y_0$ en fonction des expressions precedentes. En deduire λ unique, donc y unique. $\square$