Suites Réelles
Comparaison avec une suite géométrique
MPSI 2

1 Suites et séries géométriques

Définition 1.0.1
On appelle <u>*suite géométrique de raison a*</u> *toute suite telle que:*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\, u_n \end{cases}$$

Remarques:
- C'est équivalent a dire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n\, u_0$
- Si $u_0 = 0$ alors la suite est nulle.
- Si $u_0 \neq 0$ alors l'étude de la suite est ramenée a l'étude de a^n à une constante multiplicative près.

étude de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- <u>Si $a > 1$</u> alors $\exists h \in \mathbb{R}^{+*},\ a = 1 + h$
  De plus, $(h+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k$
  En particulier, $(1+h)^n \geqslant nh$
  Or par minoration, $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- <u>Si $a = 1$</u> alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire a 1.
- <u>Si $a = -1$</u> alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- <u>Si $-1 < a < 1$</u> alors $|a|^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n}$
  et $\frac{1}{|a|^n} > 1$ donc d'après le premier point, $\frac{1}{|a|^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  D'où $|a|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  Ainsi, comme $|a|^n = |a^n|$, $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- <u>Si $a < -1$</u> alors $|a|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et a^n change de signe en fonction de la parité de n.
  Donc $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Définition 1.0.2
On appelle <u>*série géométrique*</u> *toute suite de terme général:*

$$\begin{cases} u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k \\ n \in \mathbb{N} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Étude de u_n

- Si $a = 1$ alors $u_n = n + 1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- Si $a \neq 1$ alors $u_n = \frac{1-a^{n+1}}{1_a}$
  - Si $-1 < a < 1$ alors $a^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
    Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  - Si $1 < a$ alors $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  - Si $a < -1$ alors u diverge.

2 Exemples de comparaison

Soit u une suite a termes positifs.

- Si $\exists K \in]0,1[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_{n+1} \leqslant K\, u_n$
  Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- Si $\exists K \in]1,+\infty[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant K\, u_n$
  Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3 Echelle de comparaison

Par ordre de négligeabilité:

a^n	$(\ln(n))^\alpha$	n^β	$n!$	n^n
$0 < a < 1$	$0 < \alpha$	$0 < \beta$		