

Complexes

Fonctions a valeurs complexes

MPSI 2

Soit \mathcal{I} un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur \mathcal{I} et a valeurs complexes.

$$t \longmapsto f(t)$$

$$\forall t \in \mathcal{I}, f(t) = f_1(t) + \imath f_2(t)$$

On définit ainsi deux fonctions sur \mathcal{I} a valeurs réelles : f_1 et f_2 .

$$\text{On a : } \forall t \in \mathcal{I}, \begin{cases} f_1(t) = \operatorname{Re}(f(t)) \\ f_2(t) = \operatorname{Im}(f(t)) \end{cases}$$

Définition 0.0.1

- On dit que f admet une limite lorsque t tend vers t_0 sur \mathcal{I} si les fonctions composantes f_1 et f_2 admettent une limite finie quand t tend vers t_0 .
Dans ce cas, la limite de $f(t)$ quand t tend vers t_0 est :

$$L = L_1 + \imath L_2 \quad \text{ou} \quad L_1 = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f_1(t) \quad \text{et} \quad L_2 = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f_2(t)$$

Notation : $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f(t) = L$

- f est continue sur \mathcal{I} si f_1 et f_2 sont continues sur \mathcal{I} .
- f est dérivable en t_0 si f_1 et f_2 sont dérivables en t_0 .
Dans ce cas, le nombre dérivé de f en t_0 est par définition :

$$f'(t_0) = f'_1(t_0) + \imath f'_2(t_0)$$

- Soit $F: \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur \mathcal{I} a valeurs dans \mathbb{C} .
On dit que F est une primitive de f sur \mathcal{I} si F est dérivable sur \mathcal{I} et si :

$$\forall t \in \mathcal{I}, F'(t) = f(t)$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathcal{I}, F'_1(t) + \imath F'_2(t) = f_1(t) + \imath f_2(t)$$

- Si f est continue sur un segment $[a, b]$, on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_1(t) dt + \imath \int_a^b f_2(t) dt$$

Cas particulier de fonctions à valeurs complexes : L'exponentielle complexe

Soit $z_0 = a + ib$ un nombre complexe.

Cas 1 : z_0 réel

e^{z_0} a un sens (exponentielle réelle).

Cas 2 : z_0 imaginaire

$$z_0 = i\theta$$

$$e^{z_0} = e^{i\theta}$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

Cas 3 :

Si $z_0 = a + ib$, on pose : $e^{z_0} = e^a e^{ib}$

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto e^{z_0 x}$$

f est une fonction à valeurs complexes et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= e^{(a+ib)x} \\ &= e^{ax+ibx} \\ &= e^{ax} e^{ibx} \\ &= e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \end{aligned}$$

Les applications composantes de f sont :

$$\begin{array}{ll} f_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} \quad f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{ax} \cos bx & x \longmapsto e^{ax} \sin bx \end{array}$$

f_1 et f_2 sont dérivables sur \mathbb{R} donc f est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'_1(x) &= e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx) \\ f'_2(x) &= e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) \\ f'(x) &= e^{ax} [(a + ib) \cos bx + i(a + ib) \sin bx] \\ &= (a + ib) e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \\ &= (a + ib) e^{(a+ib)x} \end{aligned}$$