

Éléments de Logique

Opérations sur les propositions

MPSI 2

1 Codage et valeurs logiques

Soit A une proposition. On lui associe une valeur logique (Vrai ou Faux) ou binaire (0 ou 1)

Soient A et B . Si A et B ont la même valeur logique, on note $A \vdash B$

Soient a et b deux codages binaires.

- Négation de a : $\neg a = 1 - a$

- " $a \vee b$ ", " a ou b ", " a sup b "

a	b	$(a \vee b)$	
1	1	1	
1	0	1	$a \vee b = a + b - ab$
0	1	1	
0	0	0	

- " $a \wedge b$ ", " a et b ", " a inf b "

a	b	$(a \wedge b)$	
1	1	1	
1	0	0	$a \wedge b = ab$
0	1	0	
0	0	0	

2 Opérations élémentaires sur les propositions

Soient A et B deux propositions de codage binaire a et b . On a alors:

- Négation de A : c'est la proposition dont le codage binaire est $\neg a$.

A	$\neg(A)$
1	0
0	1

- Disjonction: " A ou B " est la proposition codée par " $a \vee b$ ".

A	B	$(A \vee B)$	
1	1	1	<ul style="list-style-type: none"> • "A ou B" est Vraie si A est Vraie ou si B est Vraie. • "A ou B" est Fausse ssi "A et B" est Fausse.
1	0	1	
0	1	1	
0	0	0	

3 Autres opérations

- La conjonction

Définition 3.0.1

" A et B " est la proposition " $\text{non}(\text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B))$ "

A	B	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- " A et B " est codée par " $a \wedge b$ "

- L'implication

Définition 3.0.2

" $A \Rightarrow B$ " est la proposition " $\text{non}(A) \text{ ou } B$ "

A	B	$(A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- Si A est Fausse, $A \Rightarrow B$ est Vraie par définition.
- Si A est Vraie, il faut démontrer que B est Vraie.

- La contraposée: " $A \Rightarrow B$ " et " $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ " ont la même valeur logique. Démonstration triviale.
- l'équivalence

Définition 3.0.3

" $A \Leftrightarrow B$ " est la proposition " $(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A)$ "

A	B	$(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Remarques:

1/ Négation de "ou" et "et":

- $\text{non}(a \text{ ou } b) \vdash \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B)$
- $\text{non}(a \text{ et } b) \vdash \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)$

2/ Négation de l'implication: $\text{non}(A \Rightarrow B) \vdash A \text{ et } \text{non}(B)$