

Dénombrements

Ensembles Finis

MPSI 2

Propriété 0.0.1

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Soit f une application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

- Si f est bijective, alors $n = p$
- Si f est injective, alors $n \leq p$
- Si f est surjective, alors $n \geq p$

Définition 0.0.1

Soit E un ensemble non vide.

On dit que E est fini si il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E

Si un tel entier existe, il est unique et est le cardinal de E .

Notations: $\text{card}(E)$, $\#E$, $|E|$

Convention: $\text{card}(\emptyset) = 0$

Propriété 0.0.2

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Soit F un sous-ensemble de E .

Alors F est également un ensemble fini et $\text{card}(F) \leq n$ et $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$

On procède par récurrence sur le cardinal de E .

Lemme: Si E est un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$,

Et si a est un élément de E ,

Alors $E \setminus \{a\}$ est un ensemble fini de cardinal $n - 1$

Démonstration de la propriété

Soit $P(n)$: Pour tout ensemble E de cardinal n , pour tout sous-ensemble F de E ,

F est fini et $\text{card}(F) \leq n$ et $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$

$n = 0$: $E = \emptyset$ et $F = \emptyset$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n-1)$ soit vérifié.

Montrons $P(n)$

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Soit F une partie de E .

1^{er} cas: $F = E$ alors $\text{card}(F) = n$

2^{ème} cas: $F \neq E$

Alors $\exists a \in E, a \notin F$

Soit a un tel élément.

$a \notin F$ donc $F \subset E \setminus \{a\}$

Or, d'après la lemme, $E \setminus \{a\}$ est de cardinal $n-1$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, F est fini et $\text{card}(F) \leq n-1$

Finalement: $F = E \Rightarrow \text{card}(E) = \text{card}(F)$

$F \neq E \Rightarrow \text{card}(F) < \text{card}(E)$

D'o $(\text{card}(F) = n) \iff (E = F)$

Donc $P(n)$ est vérifié.

D'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

Démonstration du lemme

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.

Il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E .

1^{er} cas: $n = 1$

$f: \{1\} \longrightarrow E$

$1 \longmapsto f(1)$

$E = \{f(1)\}$, donc $E \setminus \{f(1)\} = \emptyset$, de cardinal 0.

2^{ème} cas: $n \geq 2$

Soit a un élément de E .

f réalise une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E , donc $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, unique, $f(i) = a$

- Si $i = n$ alors $f(n) = a$

$f|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ réalise une bijection de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ sur $f(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$

Or $f(\llbracket 1, n-1 \rrbracket) = f(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{n\})$
 $= E \setminus \{a\}$

Donc $f|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ réalise une bijection de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ sur $E \setminus \{a\}$.

Donc E est de cardinal $n-1$

- Si $i \neq n$

Notons i_0 l'unique élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $f(i_0) = a$

On considère $\tau: \llbracket 1, n-1 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$i \longmapsto \begin{cases} i & \text{si } (i \neq i_0 \text{ et } i \neq n) \\ i_0 & \text{si } i = n \\ n & \text{si } i = i_0 \end{cases}$$

τ réalise une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On applique ensuite le premier cas avec $\tau(\llbracket 1, n \rrbracket)$ au lieu de $\llbracket 1, n \rrbracket$

□

Propriété 0.0.3

Soit P une partie finie, non vide et incluse dans \mathbb{N} , de cardinal p .

Alors il existe une unique bijection strictement croissante de $\llbracket 1, p \rrbracket$ sur P .

Existence:

- P est une partie non vide de \mathbb{N} , et admet un plus petit élément que l'on note y_1 .
On pose $\phi(1) = y_1$
- Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $(\phi(i))_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ est défini et $\phi(1) < \dots < \phi(k)$
Soit $P_k = \{x \in \mathbb{N}, x \in P \text{ et } x > \phi(k)\}$
 P_k est non vide car $k < p$, donc admet un plus petit élément. On le note $\phi(k+1)$
On construit alors ϕ par itération, et elle est strictement croissante.

Unicité: Soit ψ une application strictement croissante bijective de $\llbracket 1, p \rrbracket$ sur P .

Alors $P = \{\psi(1), \psi(2), \dots, \psi(p)\}$ et $\psi(1) < \dots < \psi(p)$

- $\psi(1)$ est le plus petit élément de P , donc $\psi(1) = \phi(1)$
- $\psi(2)$ est le plus petit élément de $P \setminus \{\psi(1)\}$. Or $P \setminus \{\psi(1)\} = P_1$, donc par définition, $\phi(2) = \psi(2)$
- ...

Conclusion: $\phi = \psi$

□

Propriété 0.0.4

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n .

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

On a alors équivalence entre:

- ① f est injective
- ② f est surjective
- ③ f est bijective

- ① Supposons f injective.

Montrer que f est surjective.

Donc montrer que $f(E) = F$

Soit $g : E \longrightarrow f(E)$ une application.

$$x \longmapsto f(x)$$

g réalise une bijection de E sur $f(E)$ par définition de l'espace d'arrivée.

Par ailleurs, E est de cardinal n , donc il existe une bijection ϕ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E .

$$g \circ \phi : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow f(E)$$

$g \circ \phi$ est une bijection, donc $\text{card}(f(E)) = n$

D'où, sachant $f(E) \subset F$ et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$, $E = F$

Donc f est surjective.

② Supposons f surjective.

Montrer que f est bijective de E sur F .

a/ Montrer que $\exists h \in \mathcal{F}(F, E)$, $f \circ h = \text{Id}_F$

Soit y un élément de F .

f est surjective, donc $f^{-1}(\{y\})$ est non vide.

$\exists x \in E$, $x \in f^{-1}(\{y\})$

Soit x_y un tel élément.

Posons $h(y) = x_y$

Ce raisonnement étant valable pour tout y de F , on définit une application h de F dans E .

Vérifions que $f \circ h = \text{Id}_F$:

$\forall y \in F$, $f \circ h(y) = f(x_y) = y$

Donc $f \circ h = \text{Id}_F$

b/ Montrer que h est injective.

Donc montrer que $\forall (y, y') \in F^2$, $h(y) = h(y') \Rightarrow y = y'$

Soit y et y' deux éléments de F tels que $h(y) = h(y')$

Alors $f(h(y)) = f(h(y'))$ car f est une application

$$\iff y = y' \quad \text{car } f \circ h = \text{Id}_F$$

Donc f est injective.

c/ Montrer que f est bijective.

$h : F \longrightarrow E$ est injective et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

Donc h réalise une bijection de F sur E .

Par ailleurs, $f \circ h = \text{Id}_F$

$$\iff f = h^{-1}$$

Conclusion: f est bijective de E sur F .

Conclusion Générale: Les trois propositions sont équivalentes.

□