Relations Binaires
Relations d'équivalence sur un ensemble

MPSI 2

1 Généralités

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.0.1
On appelle relation binaire sur E le couple (E, G) *où* G *est un graphe de* E *dans* E.

Notations: $(E, G), \mathcal{R}$

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \,\mathcal{R}\, y \iff (x, y) \in G$$

Notons $\Delta_E = \{(x, x), x \in E\}$

Δ_E s'appelle la diagonale de E

On en définit une relation binaire:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2,\ x \,\mathcal{R}\, y &\iff (x, y) \in \Delta_E \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

2 Relations d'équivalences

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E

Définition 2.0.2
$\mathcal{R}$ *est réflexive si* $\forall x \in E,\ x \,\mathcal{R}\, x$

Définition 2.0.3
$\mathcal{R}$ *est symétrique si* $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \,\mathcal{R}\, y) \Rightarrow (y \,\mathcal{R}\, x)$

Définition 2.0.4
$\mathcal{R}$ *est transitive si* $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \,\mathcal{R}\, y$ *et* $y \,\mathcal{R}\, z) \Rightarrow (x \,\mathcal{R}\, z)$

Définition 2.0.5
$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 2.0.6
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Soit x un élément de E.

On appelle classe d'équivalence de x suivant $\mathcal{R}$ le sous ensemble de E:
$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E,\ x\,\mathcal{R}\,y\}$

Propriété 2.0.1
La famille des classes d'équivalences suivant $\mathcal{R}$, $(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x))_{x\in E}$ est une partition de E.

① Montrer que: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \neq \varnothing$
$\mathcal{R}$ est réflexive, donc $x\,\mathcal{R}\,x$
Autrement dit, $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ donc $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \neq \varnothing$

② Montrer que: $\displaystyle\bigcup_{x\in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = E$

$$\iff \bigcup_{x\in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E \text{ et que } E \subset \bigcup_{x\in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

a) Les classes d'équivalences sont des sous-ensembles de E.
$\forall x \in E,\ \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E$
Ainsi, $\bigcup_{x\in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E$

b) Montrer que: $\displaystyle E \subset \bigcup_{x\in E} \mathcal{C}\mathcal{R}(x)$

$$\iff \forall t \in E,\ t \in \bigcup_{x\in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

$\mathcal{R}$ est réflexive, donc $t \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(t)$
En posant $t = x)$ on démontre la proposition.
Cela étant vrai pour tout x, on obtient $E \subset \bigcup_{x\in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

③ Montrer que: $\forall (x,y) \in E^2,\ \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$ ou $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) = \varnothing$

$$\iff \forall (x,y) \in E^2,\ (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \varnothing) \Rightarrow (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y))$$

H_1: Soit (x,y) un couple d'éléments de E tels que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \varnothing$
Montrer que: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}\mathcal{R}(y)$

$$\iff \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \text{ et } \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

a) Montrer que: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

$\iff \forall z \in E,\ z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \Rightarrow z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

H$_2$: Soit z un élément de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

Montrer que $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

D'après H$_1$, $\exists t \in E,\ t \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

H$_3$: Soit $t_0 \in E$ tel que $t_0 \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ et $t_0 \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

Montrer que: $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

$\iff z\,\mathcal{R}\,y$

D'après H$_2$: $z\,\mathcal{R}\,x$

D'après H$_3$: $t_0\,\mathcal{R}\,x$

Par symétrie et transitivité: $z\,\mathcal{R}\,t_0$

D'après H$_2$: $t_0\,\mathcal{R}\,y$

Par transitivité: $z\,\mathcal{R}\,y$

Conclusion 1: $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}} \Rightarrow z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

Conclusion 2: Ceci étant vrai pour tout z dans E:

$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

b) Montrer que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

En échangeant les rôles de x et y, et par une démonstration analogue, on obtient: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

Finalement: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

Conclusion Générale: $\forall (x,y) \in E^2,\ \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

La famille $(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x))_{x \in E}$ est une partition de E. □

Propriété 2.0.2

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E, alors, il existe une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont la famille des classes d'équivalences est cette partition.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire définie par:

$\forall (x,y) \in E^2,\ x\,\mathcal{R}\,y \iff \exists i \in I,\ x \in A_i$ et $y \in A_i$

① Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est réflectve

$\iff \forall x \in E,\ x\,\mathcal{R}\,x$

H$_1$: Soit x un élément de E

Montrer que: $\exists i \in I,\ x \in A_i$

A_i est une partition de de E, donc d'après H$_1$,

$\exists i \in I,\ x \in A_i$

b) Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique

$\iff \forall (x,y) \in E^2,\ (x\,\mathcal{R}\,y) \Rightarrow (y\,\mathcal{R}\,x)$

H$_1$: Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $x \mathcal{R} y$
H$_2$: $\exists i \in I,\ x \in A_i$ et $y \in A_i \iff \exists i \in I,\ y \in A_i$ et $x \in A_i$
On a donc $y \mathcal{R} x$
Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

c) Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive

$$\iff \forall (x,y,z) \in E^3,\ (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$$

H$_1$: Soit x, y et z trois éléments de E tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ H$_1$: $\exists i \in I,\ (x \in A_I$ et $y \in A_I)$ et $(\exists j \in I,\ y \in A_j$ et $z \in A_j)$

H$_2$: Soit i_0 et i'_0 deux éléments de I tels que $\begin{cases} x \in A_{i_0}, & y \in A_{i_0} \\ y \in A_{i'_0}, & z \in A_{i'_0} \end{cases}$

Donc $y \in A_{i_0} \cap A_{i'_0}$
Or $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E
Donc $A_{i_0} = A_{i'_0}$
Donc x, y et z sont des éléments de A_{i_0},
Donc $x \mathcal{R} z$ Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Conclusion ①: $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

② Montrer que les A_i sont les classes d'équivalences suivant $\mathcal{R}$

$$\iff \forall i \in I,\ \exists x \in E,\ A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$$

H$_1$: Soit i un élément de I.
Montrer que $\exists x \in E, A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$
$(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E, donc en particulier
A_i non vide, écrit:
$\exists x \in E, x \in A_i$
H$_2$: Soit x_0 un élément de A_i fixé.
Montrer que $A_i = C_{\mathcal{R}}(x_0)$

$$\iff (A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)) \text{ et } (C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i)$$

a) Montrer que $A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)$

$$\iff \forall y \in E,\ y \in A_i \Rightarrow y \in C_{\mathcal{R}}(x_0)$$

H$_3$: Soit y un élément de A_i.
Montrer que $y \in C_{\mathcal{R}}(x_0)$
D'après H$_1$ et H$_2$, on a $y \in A_i$ et $x \in A_i$
Donc $x \mathcal{R} y$ par définition de $\mathcal{R}$
Cela étant valable pour tout i dans I et pour tout y dans A_i,
$A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)$

b) Montrer que $C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i$

$$\iff \forall j \in E,\ y \in C_{\mathcal{R}}(x_0) \Rightarrow y \in A_j$$

H$_4$: Soit y un élément de $C_{\mathcal{R}}(x_0)$
Montrer que $y \in A_i$
H$_4$: $y \mathcal{R} x_0$, autrement dit:
$\exists j \in I,\ y \in A_j$ et $x_0 \in A_j$
H$_5$: Soit j_0 un élément de I tel que $y \in A_j$ et $x_0 \in A_j$
D'après H$_2$: $x_0 \in A_i$
Avec H$_2$ et H$_3$, on en déduit que $x_0 \in A_i \cap A_{j_0}$
Or $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E, donc $A_i = A_{j_0}$

Montrer que $y \in A_i$
Or, $y \in A_{j_0}$, donc $y \in A_i$
Cela étant valable pour tout y dans A_i,
$C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i$
Conclusion ②: $\forall i \in I,\ \exists x \in E,\ A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$
Conclusion générale: Par raisonnement sur des conditions nécessaires et suffisantes, la propriété est démontrée □

3 Partition associée a une application

Soit E un ensemble non vide, soit F un ensemble.
Soit une application $f \colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

Définition 3.0.7
On appelle relation d'équivalence associée a f la relation définie par:

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \,\mathcal{R}\, y \iff f(x) = f(y)$$

Définition 3.0.8
On appelle partition associée a f la famille des classes d'équivalences suivant $\mathcal{R}_f$