Structures Algébriqes
Structure de Groupe

MPSI 2

1 Définition

Définition 1.0.1
Soit $(G,*)$ un magma.
On dit que $(G,*)$ est un groupe si:
- *$*$ est associative*
- *$*$ admet un élément neutre*
- *tout élément de G est symétrisable par $*$*

Si de plus, $*$ esr commutative sur G, on dit que $(G,*)$ est un groupe abélien.

Conséquences:
- Règle de simplification: $a*x=a*y \Rightarrow x=y$ Démonstration:
  Soit a, x et y trois éléments de G tels que $a*x=a*y$
  Notons a' le symétrique de a (car G est un groupe)
  On a alors: $a'*(a*x)=a'*(a*y)$
  Par associativité, on a: $(a'*a)*x=(a'*a)*y$
  Par symétrie, on a: $e*x=e*y$
  Par définition de l'élément neutre: $x=y$
- Résolution d'équations: $a*x=b \iff x=a'*b$

2 Sous-groupes

2.1 Définition et critères

Soit $(G,*)$ un groupe.

Définition 2.1.1
Soit F un sous-ensemble de G
On dit que $(F,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$ si:
- $\forall (x,y)\in G\times G,\ (x\in F \text{ et } y\in F)\Rightarrow (x*y\in F)$
- *$(F,*')$ est un groupe où $*'$ est la loi induite de G sur F.*

Remarques: Soit $(F,*')$ un sous-groupe de $(G,*)$
- $e_G=e_F$
- F est non vide: $e\in F$
- Si x' et x'' sont les symétriques de $x\in F$ dans $(G,*)$ et $(F,*')$ respectivement,
  Alors $x'=x''$

Critères de sous-groupe

Soit F un sous-ensemble non vide de G.

- Critère 0: F est un sous-groupe de G ssi:
  ① $\forall(x,y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
  ② $e \in F$
  ③ $\forall x \in G,\ (x \in F) \Rightarrow (x^-1 \in F)$
- Critère 1: F est un sous-groupe de G ssi:
  ① $\forall(x,y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
  ② $\forall x \in G,\ (x \in F) \Rightarrow (x^-1 \in F)$
- Critère 2: F est un sous-groupe de G ssi:
  ① $\forall(x,y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y^{-1} \in F)$

Démonstration des critères de sous-groupe

- Critère 1: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 1.
  D'après ②, $x^{-1} \in F$
  D'après ①, $x * x^{-1} \in F$
  Or $x * x^1 = e$, donc $e \in F$ On a vérifié le critère 0, donc $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- Critère 2: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 2.

  - F est non vide: Soit x un élément de F
    D'après ①, $x * x^-1 \in F \Rightarrow e \in F$
    Le point ② du critère 0 est vérifié.
  - D'après ① avec e et x: $e * x^{-1} \in F \Rightarrow x^{-1} \in F$
    Le pont ③ du critère 0 est vérifié.
  - Soit x et y deux éléments de F. De plus, $y^{-1} \in F$
    donc $x * (y^{-1})^{-1} \in F \rightarrow x * y \in F$

$\square$