

Eléments de Théorie des Ensembles

Familles indexées

MPSI 2

1 Ensembles finis, Ensembles dénombrables

Définition 1.0.1

Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini s'il existe un entier naturel non nul n et une application $\phi: \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow E$ bijective.

Propriété 1.0.1

Si n existe, alors il est unique et on l'appelle le cardinal de E .

Notation : $\text{card}(E) = \#E = |E|$

Définition 1.0.2

E est dénombrable s'il existe une bijection de \mathbb{N} sur E .

2 Ensemble des familles indexées

2.1 Définitions

Un ensemble d'indexation est un ensemble I non vide.

Définition 2.1.1

On dit que E est un ensemble indexé par I s'il existe une bijection de I sur E
 $\phi: I \longrightarrow E$ bijective.

$$i \longmapsto x_i$$

Notation : $E = \{x_i, i \in I\}$

Définition 2.1.2

On appelle famille indexée par I dans E toute application de I dans E .

$$\begin{aligned} \phi: I &\longrightarrow E \\ i &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

2.2 Opérations ensemblistes sur les familles indexées

Définition 2.2.1

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée de sous-ensembles de E .

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in A_i\}$

Propriété 2.2.1

$${}^c \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} {}^c A_i; \quad {}^c \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} {}^c A_i$$

$$\begin{aligned}
 x \in {}^c \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) &\iff \neg \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \right) && \text{par définition du complémentaire} \\
 &\iff \neg (\exists i \in I, x \in A_i) && \text{par définition de la réunion des } A_i \\
 &\iff \forall i \in I, x \notin A_i && \text{négation de "}\exists\text{"} \\
 &\iff \forall i \in I, x \in {}^c A_i && \text{par définition du complémentaire} \\
 &\iff x \in \bigcap_{i \in I} {}^c A_i && \text{par définition de l'intersection des } A_i
 \end{aligned}$$

□

Définition 2.2.2

Soit E un ensemble.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E indexée par I .

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$
- $\forall (i, j) \in I^2, A_i = A_j$ ou $A_i \cap A_j = \emptyset$