Espaces Vectoriels de Dimension finie
Existance de bases
MPSI 2

Définition 0.0.1
Soit E un espace vectoriel.
On dit que E est de dimension finie si E admet un système générateur fini.

Propriété 0.0.1
Caractérisation de bases
Soit $\mathcal{S}$ un système de vecteurs de E.
On a équivalence entre:
- *$\mathcal{S}$ est une base de E.*
- *$\mathcal{S}$ est un système générateur minimal.*
- *$\mathcal{S}$ est un système libre maximal.*

Utilisation des définitions et des axiomes. $\square$

Propriété 0.0.2
Soient A et B deux systèmes finis de E tels que A soit libre et B générateur.
Alors il existe un système $\mathcal{S}$ de E tel que:
- *$A \subset \mathcal{S} \subset B$*
- *$\mathcal{S}$ est une base de E.*

On pose $\mathcal{S}$ le plus grand élément de $\{A' \subset E,\ A'\text{libre et } A \subset A' \subset B\}$ au sens du cardinal.
On montre ensuite que ce système est générateur en montrant que B est CL de $\mathcal{S}$. $\square$

Théorème d'existance de base
Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$ de dimension finie.
Alors il existe un système fini d'éléments de E qui soit une base de E.

On applique la propriété précédente, avec 1_E et le système générateur fini.
Par convention, $\{\varnothing\}$ est la base de $\{0_E\}$ $\square$

Théorème de l'échange
Soit $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ une partie libre de E.
Soit $A' = \{a'_1, \dots, a'_p\}$ une partie génératrice de E.
Alors on peut remplacer r éléments de A' par des éléments de A pour obtenir un système générateur de E.

On exprime les éléments de A comme CL d'éléments de A', et on remplace un élément exprimant par l'exprimé. $\square$

Conséquences en dimension finie

Corollaire 0.0.1
Soit E un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ de dimension finie.
Tout système libre de E a au plus autant d'éléments qu'un système générateur de E.

Application du théorème de l'échange. $\square$

Corollaire 0.0.2
Si E est un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ de dimension finie, alors deux bases de E ont le même nombre d'éléments.

Application du théorème de l'échange. $\square$

Définition 0.0.2
Soit E un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ de dimension finie.
On appelle <u>dimension de E</u> le cardinal d'une base de E.

Corollaire 0.0.3
Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$ de dimension finie.
Soit B une base de E de cardinal n.
Soit A une partie de E.
Alors on a:
- $\dim(E) = n$
- *Si A est libre, alors* $\operatorname{card}(A) \leqslant n$
- *Si A est générateur de E, alors* $\operatorname{card}(A) \geqslant n$

Corollaire 0.0.4
Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$ de dimension n.
Soit A une partie de E de cardinal n.
Alors on a équivalence entre :
- *A est une base de E.*
- *A est libre.*
- *A est générateur de E.*

Systèmes libres maximaux et générateurs minimaux. □

Théorème de la base incomplète
Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$ de dimension n.
Soit $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ un système libre de E.
Soit $A' = \{a'_1, \dots, a'_p\}$ un système générateur de E.
Alors on peut compléter A avec $n - r$ éléments de A' pour obtenir une base de E.

$\exists \mathcal{S} \in \mathcal{P}(E),\ A \subset \mathcal{S} \subset A \cup A',\ \mathcal{S}$ générateur
En particulier, $\operatorname{card}(\mathcal{S}) = n$ □