Arithmétique
Division Euclidienne

MPSI 2

Propriété 0.0.1
Soit a un entier naturel, b un entier naturel non nul.
Alors il existe un unique couple d'entiers naturels q et r tels que :

$$\begin{cases} a = b * q + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

- *q est le **quotient** de la division euclidienne de a par b.*
- *r est le **reste** de la division euclidienne de a par b.*

① **Existence**
- si $a = 0, 0 = 0 * b + 0$
  Le couple $(q, r) = (0, 0)$ convient.
- si $b = 1, a = 1 * a + 0$
  Le couple $(q, r) = (a, 0)$ convient.
- **Cas géneral :**
  Supposons $a \geq 1$ et $b \geq 2$.
  Cas 1 : $a < b$
  Alors $a = b * 0 + a$
  Le couple $(0, a)$ convient.
  Cas 2 : $a \geq b$
  Soit $E = \{q \in \mathbb{N}^*, b * q > a\}$
  – E est une partie de $\mathbb{N}$.
  – E est non vide car $a \in E$ ($a \neq 0$ et $b \geq 2$).
  Donc E admet un plus petit élément noté q_1.
  $q1 \in \mathbb{N}^*$ et $1 \notin E$ car $a \geq b$.
  Donc $q_1 \geq 2$.
  Ainsi, $q_1 - 1 \in \mathbb{N}^*$. Posons $q_0 = q_1 - 1$.
  On a : $q_0 \in \mathbb{N}$ et $q_0 < q_1$ donc $q_0 \notin E$.
  On en deduit que $b * q_0 \leq a$.
  Par ailleurs, $q_1 \in E$, donc $a < bq_1$.
  Donc $bq_0 \leq a < b(q_0 + 1)$.
  Posons $r = a - bq_0$.
  Donc $0 \leq r < b$.
  Conclusion : Le couple (q_0, r) satisfait :

$$q_0 \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}, \begin{cases} a = b * q_0 + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

② **Unicité**

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.

Supposons qu'il existe deux couples d'entiers naturels (q, r) et (q', r') tels que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ a = bq' + r' \\ 0 \leq r < b \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$$

Montrons que $(q, r) = (q', r')$.

On remarque que : $b(q' - q) = r - r'$.

Ainsi, $q = q' \iff r = r'$.

Il suffit donc de montrer que $q = q'$.

$\boxed{\text{HA}}$ Supposons $q = q'$. Par exemple, $q < q'$.

Alors $q - q' > 0$.

Donc $q - q' \geq 1$ car $(q, q') \in \mathbb{N}^2$.

On en deduit que $r - r' \geq b$.

Par ailleurs, $\begin{cases} 0 \leq r < b \\ 0 \leq r' < b \end{cases}$.

D'où $-b < r - r < b$.

Or $r - r' \geq b$, donc contradiction.

Donc $q = q'$, d'où $r = r'$.

On a donc existence et unicité de l'écriture.

$\square$

Remarque : Avec les notations de la démonstration, on a : $bq_0 \leq a < b(q_0 + 1)$.
Ou encore, sachant $b \in \mathbb{N}^*$, $q_0 \leq \frac{a}{b} < q_0 + 1$.
Donc $q_0 = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

Corollaire 0.0.1

① *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, alors :*

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

② *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}*$, alors :*

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$