Dérivabilité
Dérivabilité d'un point

MPSI 2

Soit I un intervalle réel non réduit à un point.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique.

1 Définition

Soit x_0 un élément de I.
On pose $\phi\colon I \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition 1.0.1

- *On dit que f est dérivable en x_0 si $\phi(x)$ admet une limite finie notée L lorsque x tend vers x_0 sur $i \setminus \{x_0\}$:*

$$\textit{On note } f'(x) = L = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I \setminus \{x_0\}}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

  Cette limite, quand elle existe, s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.

- *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\phi(x)$ admet une limite finie à gauche, L_g:*

$$\textit{On note } f'_g(x) = L_g = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

- *On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\phi(x)$ admet une limite finie à droite, L_d:*

$$\textit{On note } f'_d(x) = L_d = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Remarque: f est dérivable en x_0 ssi: $\begin{cases} f \text{ est dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ est dérivable à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$

2 Interprétation géométrique

Soit x_0 un élément de I qui ne soit pas une borne de I.
Pour $x \neq x_0$, $\phi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Définition 2.0.2
f est dérivable en x_0 si il existe un réel L, un réel α strictement positif et une application $\varepsilon :]x-\alpha, x+\alpha[\to \mathbb{R}$ tels que:

$$\begin{cases} \forall x \in I,\ x \in]x-\alpha, x+\alpha[\text{ et } x \neq x_0,\ f(x) = f(x_0) + L\, f(x-x_0) + \varepsilon(x)\,(x-x_0) \\ \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0.

3 Fonctions à valeurs complexes

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longmapsto f_1(x) + i\, f_2(x)$

- f_1 et f_2 sont a valeurs réelles et définies sur I.
- Soit x_0 un élément de I.
  On dit que f est dérivable en x_0 si f_1 et f_2 le sont, et $f'(x_0) = f_1'(x) + i\, f_2'(x)$