Suites Réelles
Théorèmes de comparaison

MPSI 2

Théorème des suites monotones
Soit u une suite croissante. On a:
- *Si u n'est pas majorée, u diverge vers $+\infty$.*
- *Si u est majorée, u converge vers la borne supérieure de ses valeurs.*

On procède de même pour les suites décroissantes.

Soit u une suite décroissante, et A l'ensemble de ses valeurs.

① Supposons u non majorée.
Donc A n'est pas majoré.
Donc $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A,\ x > M$
Donc $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_{n_0} > M$
Or, sachant u croissante, $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > M$
Donc u diverge vers $+\infty$ par définition.

② Supposons u majorée.
Donc A est majoré et non vide. Donc A admet une borne supérieure, notée α.
α est borne supérieure de A, donc:
- α est un majorant de A: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha$
- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in \mathbb{R},\ (x \in A)$ et $(\alpha - \varepsilon < x \leqslant \alpha)$
  C'est à dire: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \alpha$
  Donc, sachant u croissante:
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant \alpha < \alpha + \varepsilon$
  Donc u converge vers α

□

Théorème des suites adjacentes
Soit u et v deux suites réelles telles que:
- *u est croissante, v est décroissante.*
- *$u - v$ tend vers 0*

Alors u et v convergent vers une même limite L
Et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$

Soit u et v deux suites adjacentes
① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$
HA: Supposons n_0 tel que $v_{n_0} < u_{n_0}$
u est croissante et v est décroissante:
$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \geqslant u_{n_0}$
$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n \leqslant v_{n_0}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_{n_0} - v_{n_0} \geqslant u_n - v_n$
Or, sachant $u_{n_0} - v_{n_0} < 0$, on a:$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_{n_0} - v_{n_0}| \leqslant |u_n - v_n|$
Donc $|u - v|$ est minoré par un réel strictement positif, et ne tend donc pas vers 0.
Donc il n'existe aucun n_0 de $\mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} < u_{n_0}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$
② u est décroissante et minorée (par tout terme de v), elle admet une limite notée l_1
u est croissante et majorée (par tout terme de u), elle admet une limite notée l_2

De plus, $\begin{cases} u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1 - l_2 \end{cases}$

Donc, par unicité de la limite, $l_1 = l_2$
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$ □

Théorème des segments emboités
Si a et b deux suites adjacentes, avec $a_0 \leqslant b_0$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = [a_n, b_n]$
Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{L\}$
Avec L la limite de a et b

- Par le théorème des suites adjacentes, a et b tendent vers L, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant L \leqslant v_n$
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n) \Rightarrow (x = L)$

  Ou bien montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \neq L) \Rightarrow (x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n)$

  Soit x un rel diffrent de $\mathbb{R}$
  - 1^er^ cas: $x > l$
    Soit $\varepsilon = \frac{L-x}{2}$
    a converge vers L donc: $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$
    Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{L+x}{2} < a_n < \frac{3L+x}{2}$
    Soit n_0 un tel entier.
    Donc $x < \frac{x+L}{2} < a_{n_0} \leqslant b_{n_0}$, donc $x \notin I_{n_0}$
    Par suite, $(x \neq L) \Rightarrow (x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n)$
  - 2^ème^ cas: $x < l$
    Procder de même.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n) \Rightarrow (x = L)$ □