Espaces Vectoriels
de Dimension finie
Espaces Vectoriels

MPSI 2

1 Structure d'espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.0.1
E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si:
- *$(E,+)$ est un groupe ablien.*
- $\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$ *est un loi interne telle que:*

  $\forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 :$
  - $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
  - $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Rgles de calcul dans un espace vectoriel:
- $(-\lambda)\cdot x = -(\lambda \cdot x)$
- $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$
- $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

2 Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$, soit F un sous-ensemble non vide de E.

Définition 2.0.2
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si il est stable par les lois de E et si, muni des restrictions de ces lois, F est un $\mathbb{K}_{EV}$

Critres de S_{EV}
- Critre 1: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par les lois de E.
  - $0_E \in F$
  - $\forall (x,y) \in F^2,\ x+y \in F$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$
- Critre 2: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par combinaison linaire.

- $0_E \in F$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$

Définition 2.0.3
On appelle espace vectoriel engendr par A le plus petit espace vectoriel contenant A.

Notation: $\mathrm{Vect}(A)$

Justification
Soit $\mathcal{F} = \{F \subset E,\ F\ \mathrm{S_{EV}}$ de E et $A \subset F\}$
- $F_0 = \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F$ est un $\mathrm{S_{EV}}$ de E, et contient A: $\forall F \in \mathcal{F},\ A \subset F$
  D'où $F_0 \in \mathcal{F}$
- Par dfinition de F_0, c'est le plus petit lment de $\mathcal{F}$.

Donc F_0 existe.

Propriété 2.0.1
Soit $A = \{X_1, X_2,\ \dots\ , X_p\}$ une partie finie de E.
Alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linaires de A.

Soit B l'ensemble des combinaisons linaires de A:
$B = \left\{ x \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot X_i \right\}$ $\square$