Structures Algébriqes
Lois Internes
MPSI 2

1 Définitions

Définition 1.0.1
On appelle <u>loi interne sur E</u> toute application f définie sur $E \times E$ dans E:

$$\begin{aligned} f\colon E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Notation: $f(x, y) = f * y$

2 Propriétés des lois internes

Définition 2.0.2
Soit E un ensemble non vide mini d'une loi interne $*$. $(E, *)$ est un magma.
$*$ est une loi associative si $\forall (x, y, z) \in \mathcal{E} \times E \times E,\ (x * y) * z = x * (y * z)$

Propriété 2.0.1
Soit $*$ une <u>loi associative</u> sur E, et $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ un sous-ensemble a n éléments de E.
- $x_1 * ... * x_n$ *est défini par récurrence:* $(x_1 * ... * x_{n-1}) * x_n = x_1 * ... * x_n$
- $x_1 * ... * x_n = (x_1 * ... * x_{n_1}) * (x_{n_1+1} * ... * x_{n_2}) * ... * (x_{n_p} * ... * x_n)$
  est défini avec p parenthèses.

Définition 2.0.3
$*$ est une <u>loi commutative</u> sur E si $\forall (x, y) \in E \times E,\ x * y = y * x$

Définition 2.0.4
On dit que $*$ admet un <u>élément neutre</u> noté e si $\forall x \in \mathcal{E},\ x * e = x$ et $e * x = x$

Propriété 2.0.2
Si $*$ admet un élément neutre, alors il est unique

Soit e_1 et e_2 deux éléments neutres de $(E,*)$.
alors $e_1 * e_2 = e_1$ car e_1 est un élémnet neutre
$e_1 * e_2 = e_2$ car e_2 est un élémnet neutre
Or, $*$ est une application, donc $e_1 = e_2$ $\square$

Définition 2.0.5
Soit $(E,*)$ un magma. Si $*$ est associative et admet un élément neutre dans E, alors $(E,*)$ est un monoïde

Notations: Soit $(E,*)$ un monoïde.
Notation multiplicative:
- $x * y = x \times y$
- L'élément neutre est noté 1 ou 1_E
- $x_1 * ... * x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$
- S'utilise en général lorsque $*$ n'est pas commutative.

Notation additive:
- $x * y = x + y$
- L'élément neutre est noté 0 ou 0_E
- $x_1 * ... * x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- S'utilise en général lorsque $*$ est commutative.

Définition 2.0.6
Soit $(E,*)$ un monoïde d'élément neutre e. Soit x un élément de E.
x est symétrisable dans E si il existe un élément y de E tel que:

$$x * y = e \text{ et } y * x = e$$

Propriété 2.0.3
Si x est symétrisable, alors son symétrique est unique.

Notation:

- Multiplicative: le symétrique de x s'appelle inverse et se note x^{-1}
- Additive: le symétrique de x s'appelle opposé et se note $-x$

Remarque: Soit $(E, *)$ un monoïde.
Si x et y sont symétrisables de symétriques x' et y'
Alors $x * y$ est symétrisable de symétrique $y' * x'$