# Espaces Vectoriels de Dimension finie
# Espaces Vectoriels

MPSI 2

## 1 Structure d'espace vectoriel

Soit $E$ un ensemble non vide.

**Définition 1.0.1**
*$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si:*
- $(E, +)$ *est un groupe abélien.*
- $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ *est un loi interne telle que:*

  $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$

  $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 :$
  - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
  - $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Règles de calcul dans un espace vectoriel:
- $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$
- $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$
- $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

## 2 Sous-espace vectoriel

Soit $E$ un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$, soit $F$ un sous-ensemble non vide de $E$.

**Définition 2.0.2**
*On dit que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si il est stable par les lois de $E$ et si, muni des restrictions de ces lois, $F$ est un $\mathbb{K}_{EV}$*

Critères de $\text{S}_{\text{EV}}$
- Critère 1: $F$ est un $\text{S}_{\text{EV}}$ de $E$ si il est non vide et stable par les lois de $E$.
  - $0_E \in F$
  - $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$
- Critère 2: $F$ est un $\text{S}_{\text{EV}}$ de $E$ si il est non vide et stable par combinaison linéaire.
  - $0_E \in F$
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$

**Définition 2.0.3**
*On appelle espace vectoriel engendré par $A$ le plus petit espace vectoriel contenant $A$.*

Notation: $\mathrm{Vect}(A)$

Justification
Soit $\mathcal{F} = \{F \subset E,\ F \ \mathrm{S_{EV}} \text{ de } E \text{ et } A \subset F\}$
- $F_0 = \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F$ est un $\mathrm{S_{EV}}$ de $E$, et contient $A$: $\forall F \in \mathcal{F},\ A \subset F$
  D'où $F_0 \in \mathcal{F}$
- Par définition de $F_0$, c'est le plus petit élément de $\mathcal{F}$.

Donc $F_0$ existe.

# 3 Dépendance linéaire

**Définition 3.0.4**
$\{X_1,\ \dots\ , X_p\}$ *est un système libre ssi:*

$$\forall(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p,\ \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot X_i = 0_E\right) \Rightarrow (\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}})$$

**Définition 3.0.5**
$\{X_1,\ \dots\ , X_p\}$ *est un système lié ssi:*

$$\exists(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p,\ \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot X_i = 0_E\right) \ \textit{et}\ \ (\exists i \in [\![1,p]\!], \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}})$$

**Propriété 3.0.1**
*Soit $A = \{X_1, X_2,\ \dots\ , X_p\}$ une partie finie de $E$.*
*Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $A$.*

Soit $B$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $A$:
$B = \left\{x \in E,\ \exists(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot X_i\right\}$
Montrer que $B$ est un $\mathrm{S_{EV}}$ de $E$.

• $0_E \in B : \sum_{i=1}^{p} 0_{\mathbb{K}} X_i = 0_E$
• $B$ est stable par combinaison linéaire.
Donc $B$ est un $\mathrm{S_{EV}}$ de $E$.

$B$ contient $A$:
Soit $i_0 \in [\![1, p]\!]$
$X_{i_0} = (\delta_i^{i_0})_{i_0 \in [\![1,p]\!]}$
D'où $X_{i_0} \in B$.
Valable pour tout $i_0$ de $[\![1, p]\!]$,
Donc $A \subset B$

Reste à montrer que $B$ est le plus petit $\mathrm{S_{EV}}$ de $E$ contenant $A$.
Soit $F$ un $\mathrm{S_{EV}}$ de $E$ contenant $A$.
$F$ est stable par CL et contient $A$.
Donc $F$ contient $B$.

□

**Définition 3.0.6**
$\{X_1, \ \dots \ , X_p\}$ *est un* <u>*système générateur de E*</u> *si* $\mathrm{Vect}(\{X_1, \ \dots \ , X_p\}) = E$

**Définition 3.0.7**
*La famille* $(X_1, \ \dots \ , X_p)$ *est une* <u>*base de E*</u> *si* $\{X_1, \ \dots \ , X_p\}$ *est libre et générateur de* $E$*.*

# 4 Applications linéaires

**Définition 4.0.8**
*Soient* $E$ *et* $F$ *deux* $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$*.*
*Soit* $f : E \to F$
*On dit que* $f$ *est un* <u>*homomorphisme d'EV*</u> de $E$ *dans* $F$ *ou* <u>*application linéaire*</u> de $E$ *dans* $F$ *si:*

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \ f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$$

**Définition 4.0.9**

- $f$ *est un* <u>*endomorphisme*</u> *si* $(F,+,\cdot) = (E,+,\cdot)$ *et si* $f$ *est un homomorphisme d'EV.*
- $f$ *est un* <u>*isomorphisme*</u> *d'EV si* $f$ *est un homomorphisme d'EV bijectif.*
- $f$ *est un* <u>*automorphisme*</u> *d'EV si* $f$ *est un endomorphisme bijectif.*
- $f$ *est une* <u>*forme linéaire sur* $E$</u> *si* $(f,+,\cdot) = (\mathbb{K},+,\cdot)$ *et* $f$ *est un homomorphisme d'EV.*

<u>Remarques:</u>
- Si $f$ est un isomorphisme d'EV, alors $f^{-1}$ l'est aussi.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.

**Définition 4.0.10**
*Soient* $E$ *et* $F$ *deux* $\mathbb{K}_{\text{EV}}$.
*Soit* $f : E \to F$
- <u>*L'image de* $f$</u>*:* $\text{Im}(f) = f(E)$
- <u>*Le noyau de* $f$</u>*:* $\ker(f) = f^{-1} < \{0_F\} >$

**Propriété 4.0.2**
$\text{Im}(f)$ *et* $\ker(f)$ *sont des* $\text{S}_{\text{EV}}$ *de* $F$ *et* $E$ *respectivement.*

**Propriété 4.0.3**
*Soit* $(X_1, \ \dots \ , X_p)$ *une famille de vecteurs de* $E$.
*Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire.*
- *Si* $(X_1, \ \dots \ , X_p)$ *est lié, alors* $(f(X_1), \ \dots \ , f(X_p))$ *est lié.*
- *Par contraposée, si* $(f(X_1), \ \dots \ , f(X_p))$ *est libre, alors* $(X_1, \ \dots \ , X_p)$ *est libre.*
- *Si* $(X_1, \ \dots \ , X_p)$ *est libre et* $f$ *est injective, alors* $(f(X_1), \ \dots \ , f(X_p))$ *est libre.*

Application des propriétés $\square$

**Propriété 4.0.4**
*Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*
- *Si $(X_1, \ \dots \ , X_p)$ est une famille génératrice de $E$, alors $(f(X_1), \ \dots \ , f(X_p))$ est génératrice de $f(E)$.*
- *Si $f$ est surjective, alors l'image d'une famille génératrice de $E$ est génératrice de $F$ (car $f(E) = F$).*