

# Suites Réelles

## Suites extraites

### MPSI 2

## 1 Définition

### Définition 1.0.1

On dit que  $v$  est une suite extraite de  $u$  si il existe une application  $\phi$  strictement croissante telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$

On appelle également  $v$  une sous-suite de  $u$ .

On a notamment:

- $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des termes d'indices pairs de  $u$
- $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des termes d'indices impairs de  $u$

## 2 Propriétés de limites

### Propriété 2.0.1

**Lemme:** Si  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante, alors  $\phi(n) \geq n$

Par récurrence, avec  $\phi(0) \geq 0$  et  $\phi(n+1) > \phi(n)$

□

### Propriété 2.0.2

Si  $u$  tend vers  $l$  avec  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors toute suite extraite de  $u$  tend vers  $l$

#### ① 1<sup>er</sup> cas: $l \in \mathbb{R}$

Soit  $v$  une suite extraite de  $u$ , et  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application strictement croissante. Montrer que  $v$  converge vers  $l$

Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Donc  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Soit  $n_0$  un tel entier. On a  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow n_0 \leq n \leq \phi(n)$

On a donc  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon$

Donc  $v$  converge vers  $l$ .

#### ② On procède de manière analogue avec $l = \pm\infty$

□

**Propriété 2.0.3**

Soit  $u$  une suite réelle, soit  $w$  et  $z$  ses suites extraites d'indice pair et impair.

Si  $w$  et  $z$  tendent vers  $l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $u$  tend vers  $\overline{\mathbb{R}}$

1<sup>er</sup> cas:  $l \in \mathbb{R}$

Supposons que  $w$  et  $z$  convergent vers  $l$ .

Donc:  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |z_n - l| < \varepsilon$

Soit  $n_0$  et  $n_1$  deux tels entiers, et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Soit  $N = \max(\{2n_0, 2n_1 + 1\})$

Étudions  $u_p$  avec  $p \geq N$

- Si  $p$  est pair, on a  $p = 2n$ , donc  $u_p = w_n$ , et  $|w_n - l| < \varepsilon$
- Si  $p$  est impair, on a  $p = 2n + 1$ , donc  $u_p = z_n$ , et  $|z_n - l| < \varepsilon$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon$ ,

$u$  converge vers  $l$ . □

### 3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

#### Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit  $u$  une suite bornée.

Alors il existe une suite extraite de  $u$  convergente.

Soit  $u$  une suite réelle bornée, et  $A$  l'ensemble des valeurs de  $u$ .

Soit  $a$  et  $b$  tels que  $A \subset [a, b]$  (car  $A$  est borné)

D'après le principe de dichotomie:

- Soit  $I_0 = [a, b]$

$I_0$  contient une infinité de termes de la suite:  $I_0 \cap A$  est infini.

Soit  $[a, \frac{a+b}{2}]$  et  $[\frac{a+b}{2}, b]$  deux sous-ensembles de  $I_0$  dont la réunion vaut  $I_0$ .

L'intersection de l'un des deux avec  $A$  au moins est infini. Notons  $I_1$  cet intervalle.

- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'on ait une suite de segments  $I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_0$  telle que:  $\forall j \in [0, n], I_j = [a_j, b_j]$

$$\forall j \in [1, n], b_j - a_j = \frac{1}{2}(b_{j-1} - a_{j-1})$$

$$\forall j \in [0, n], I_j \cap A \text{ est infini}$$

On applique le principe de dichotomie au segment  $I_n$

On obtient le segment  $I_{n+1}$  tel que  $I_{n+1} \cap A$  soit infini.

- Propriétés de  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$   
 La suite est décroissante par inclusion, c'est à dire que  $a$  est croissante,  $b$  décroissante.  
 La suite  $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$   
 Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$   
 donc cette suite tend vers 0.  
 Donc  $a$  et  $b$  sont deux suites adjacentes  
 D'après le théorème des segments emboîtés, soit  $\alpha$  tel que:  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \alpha$
  - Soit  $E'_0 = \{n \in \mathbb{N}, u_n \in I_0 \cap A\}$   
 Soit  $\phi(0)$  un élément de  $E'_0$ , car  $E'_0 \neq \emptyset$   
 Considérons  $E'_1 = \{n \in \mathbb{N}, (n > \phi(0)) \text{ et } (u_n \in I_1 \cap A)\}$   
 Il n'y a que un nombre fini d'éléments de  $E'_0$  non présents dans  $E'_1$ :  $E'_1$  est infini.  
 Notons  $\phi(1)$  un élément de  $E'_1$ .  
 Donc:  $\phi(1) \in \mathbb{N}, \phi(1) > \phi(0), u_{\phi(1)} \in I_1$
  - Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons qu'on ait construit  $\phi(0) < \dots < \phi(n)$  des entiers naturels tels que:  
 $\forall k \in [0, n[, u_{\phi(k)} \in I_k$   
 On considère  $E'_{n+1} = \{p \in \mathbb{N}, p > \phi(n) \text{ et } u_p \in I_{n+1} \cap A\}$   
 $I_{n+1} \cap A$  est infini, donc  $E'_{n+1}$  est infini.  
 Donc  $E'_{n+1}$  est non vide, soit  $\phi(n+1)$  un élément de  $E'_{n+1}$   
 Donc on a:  $\phi(n+1) \in \mathbb{N}, \phi(n+1) > \phi(n), u_{\phi(n+1)} \in I_{n+1}$
  - Par récurrence, on a construit une application  $\phi$  strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\phi(n)} \in I_n$
  - D'après le point précédent,  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$   
 Or,  $a$  et  $b$  convergent vers une même limite  
 Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)} = \alpha$  par encadrement.
- On a donc construit une suite extraite de  $u$  convergente.

Si  $A$  est un ensemble fini, alors procéder en construisant l'application  $\phi$  avec un élément  $a$  de  $A$  tel que  $E = \{n \in \mathbb{N}, u_n = a\}$  et  $\phi(\mathbb{N}) = \{a\}$   $\square$

### Remarques:

- On a  $u_{\phi(n)} - \alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^n}\right)$   
 Ou bien  $u_{\phi(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \alpha + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$
- $u_{\phi(n)}$  converge vers  $\alpha$  à vitesse au moins géométrique.