

Espaces Vectoriels de Dimension finie

Espaces Vectoriels

MPSI 2

1 Structure d'espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.0.1

E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} (ou \mathbb{K} -espace vectoriel) si:

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ est une loi interne telle que:

$$\begin{aligned} &(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \\ &\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : \\ &- (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ &- \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ &- \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x \\ &- 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \end{aligned}$$

Règles de calcul dans un espace vectoriel:

- $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$
- $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$
- $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

2 Sous-espace vectoriel

Soit E un \mathbb{K}_{EV} , soit F un sous-ensemble non vide de E .

Définition 2.0.2

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si il est stable par les lois de E et si, muni des restrictions de ces lois, F est un \mathbb{K}_{EV} .

Critères de S_{EV}

- Critère 1: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par les lois de E .
 - $0_E \in F$
 - $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$
 - $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$
- Critère 2: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par combinaison linéaire.
 - $0_E \in F$
 - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in F^2, \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$

Définition 2.0.3

On appelle espace vectoriel engendré par A le plus petit espace vectoriel contenant A .

Notation: $\text{Vect}(A)$

Justification

Soit $\mathcal{F} = \{F \subset E, F \text{ S}_{\text{EV}} \text{ de } E \text{ et } A \subset F\}$

- $F_0 = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est un S_{EV} de E , et contient A : $\forall F \in \mathcal{F}, A \subset F$

D'où $F_0 \in \mathcal{F}$

- Par définition de F_0 , c'est le plus petit élément de \mathcal{F} .

Donc F_0 existe.

3 Dpendance linéaire

Définition 3.0.4

$\{X_1, \dots, X_p\}$ est un système libre ssi:

$$\forall (\lambda_i)_{i \in [1, p]} \in \mathbb{K}^p, \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot X_i = 0_E \right) \Rightarrow (\forall i \in [1, p], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}})$$

Définition 3.0.5

$\{X_1, \dots, X_p\}$ est un système li ssi:

$$\exists (\lambda_i)_{i \in [1, p]} \in \mathbb{K}^p, \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot X_i = 0_E \right) \text{ et } (\exists i \in [1, p], \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}})$$

Propriété 3.0.1

Soit $A = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ une partie finie de E .

Alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de A .

Soit B l'ensemble des combinaisons linéaires de A :

$$B = \left\{ x \in E, \exists (\lambda_i)_{i \in [1, p]} \in \mathbb{K}^p, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot X_i \right\}$$

Montrer que B est un S_{EV} de E .

- $0_E \in B : \sum_{i=1}^p 0_{\mathbb{K}} X_i = 0_E$
 - B est stable par combinaison linéaire.
- Donc B est un S_{EV} de E .

B contient A :

Soit $i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$X_{i_0} = (\delta_i^{i_0})_{i_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket}$

D'où $X_{i_0} \in B$.

Valable pour tout i_0 de $\llbracket 1, p \rrbracket$,

Donc $A \subset B$

Reste à montrer que B est le plus petit S_{EV} de E contenant A .

Soit F un S_{EV} de E contenant A .

F est stable par CL et contient A .

Donc F contient B .

□

Définition 3.0.6

$\{X_1, \dots, X_p\}$ est un système générateur de E si $\text{Vect}(\{X_1, \dots, X_p\}) = E$

Définition 3.0.7

La famille (X_1, \dots, X_p) est une base de E si $\{X_1, \dots, X_p\}$ est libre et générateur de E .

4 Applications linéaires

Définition 4.0.8

Soient E et F deux \mathbb{K}_{EV} .

Soit $f : E \rightarrow F$

On dit que f est un homomorphisme d'EV de E dans F ou application linéaire de E dans F si:

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$$

Définition 4.0.9

- f est un endomorphisme si $(F, +, \cdot) = (E, +, \cdot)$ et si f est un homomorphisme d'EV.

- f est un isomorphisme d'EV si f est un homomorphisme d'EV bijectif.
- f est un automorphisme d'EV si f est un endomorphisme bijectif.
- f est une forme linéaire sur E si $(f, +, \cdot) = (\mathbb{K}, +, \cdot)$ et f est un homomorphisme d'EV.

Remarques:

- Si f est un isomorphisme d'EV, alors f^{-1} l'est aussi.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Définition 4.0.10

Soient E et F deux \mathbb{K}_{EV}