Fonctions Numériques
Fonctions continues sur un intervalle

MPSI 2

1 Fonctions continues

Soit I un intervalle non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.
On dit que $\underline{f \text{ est continue sur } I}$ si pour tout x_0 de I, f est continue en x_0.

Théorème des valeurs intermédiaires
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Soit I un intervalle.
Soit $f : I \to R$ une application continue sut I.
Montrer que $f(I)$ est un intervalle.
Ou montrer que $\forall (y, y') \in \mathbb{R}^2,\ ((y, y') \in f(I)^2 \Rightarrow (\forall y'' \in \mathbb{R},\ y < y'' < y' \Rightarrow y'' \in f(I))$

Soit y et y' deux éléments distincts de $f(I)$.
Alors il existe a et b dans I tels que: $f(a) = y$ et $f(b) = y'$
y et y' sont distincts, donc a et b sont distincts.
On suppose par exemple que $f(a) < f(b)$ et $a < b$

Montrer que $\forall z \in \mathbb{R},\ (f(a) < z < f(b)) \Rightarrow (\exists x \in]a, b[,\ f(x) = z)$
Soit z un réel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$.
On considère l'ensemble $E = \{x \in [a, b],\ f(x) < z\}$

<u>Principe de Borne supérieure</u>

Montrer que E admet une borne supérieure:
- E est non vide: $a \in E$
- E est majoré par b

Donc E admet une borne supérieure que l'on notera c
On a: $a \leqslant c \leqslant b$
Et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists x \in E,\ c - \varepsilon < x \leqslant c$
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$, et on pose x_n un réel vérifiant le critère.
On définit donc une suite: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in E$ et $c - \frac{1}{n} < x_n \geqslant c$
En particulier: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in [a, b]$ et $f(x_n) < z$ et $|x_n - c| < \frac{1}{n}$
Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers c.
Donc $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $f(c)$ d'après la caractérisation séquentielle de la limite.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x_n) < z$
Donc $f(c) \leqslant z$

On a donc $f(c) \leqslant z < f(b)$
D'où $c < b$.
Par définition de c: $\forall x \in]c, b[,\ x \notin E$
$\Rightarrow \forall x \in]c, b[,\ f(x) \geqslant z$
Par ailleurs, f est continue, donc sa limite à droite en c existe et vaut $f(c)$.
Ainsi, $f(c) \geqslant z$

Conclusion: $f(c) = z$
Conclusion générale: $\exists c \in]a, b[,\ f(c) = z$

Ce raisonnement est valable pour tout z entre a et b. On étend le raisonnement à y et y' dans $f(I)$
On conclut que $f(I)$ est un intervalle. □

Propriété 1.0.1
L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Soit I un segment réel non vide.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.
D'après le TVI, $f(I)$ est un intervalle.

Montrer que $f(I)$ est fermé et borné.
- Montrer que $f(I)$ est borné.
  C'est à dire, montrer que $\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R}, y \in f(I) \Rightarrow |y| \leqslant M$
  $\boxed{\text{HA}}$ Supposons que $f(I)$ ne soit pas borné.
  Donc $\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \in I$ et $|y| > M$
  Soit x_0 un élément de I.
  - On considère $E_1 = \{x \in I,\ |f(x)| > f(x_0) + 1\}$
    $f(I)$ n'est pas borné, donc E_1 est non vide.
    Notons x_1 un élément de E_1.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons construits $(x_i)_{i \in [0,n]}$,
    Tels que: $\forall i \in [1, n],\ |f(x_i)| > |f(x_{i-1})| + 1$
    Soit $E_{n+1} = \{x \in I,\ |f(x)| > |f(x_n)| + 1\}$
    $f(I)$ n'est pas borné, donc E_{n+1} n'est pas vide.
    On note x_{n+1} un élément de cet ensemble.
  - Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
  De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f(x_n)| > |f(x_{n-1})| + 1$
  Par récurrence, on montre que: $\forall n \in \mathbb{N},\ |f(x_n)| > |f(x_0)| + n$
  Ainsi, $(|f(x_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Par ailleurs, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I. Donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\phi : \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Notons ϕ une telle suite et l la limite.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in I$, donc $l \in I$
- f est continue en $l \in I$, donc (cara séquentielle de la limite) $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$
- On a aussi ①:$|f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |f(l)|$ (car *abs* est continue en $f(l)$)
- De plus, $(|f(x_{\phi(n)})|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(|f(x_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Donc ②:$|f(x_{\phi(n)})| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

On a contradiction entre ① et ②. On en déduit que $\boxed{\text{HA}}$ est fausse.
Conclusion: $f(I)$ est in intervalle borné.

- Montrer que $\exists (c,d) \in \mathbb{R},\ f(I) = [c,d]$
  On pose $c = \inf(f(I))$ et $d = \sup(f(I))$
  Montrer que $c \in I$ et $d \in I$
  - Montrons que $d \in I$
    Donc Montrons que $\exists x \in I,\ f(x) = d$
    En appliquant le principe de la borne supérieure avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de I telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers d.
    * (x_n) est une suite de réels bornée, donc d'après le théorème de B-W, il existe une application strictement croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
      Notons l sa limite.
      De plus, $l \in I$.
    * f est continue sur I donc $(f(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$
    * Par ailleurs, $(f(x_{\phi(n)}))$ est une suite extraite de $(f(x_n))$, donc $(f(x_{\phi(n)}))$ converge vers d.

    Par unicité de la limite, $d = f(l)$. Or, $l \in I$.
    Finalement, $d \in f(I)$
  - On procède de même pour montrer que $c \in f(I)$.

Conclusion générale: $\exists (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ f(I) = [c,d]$ □

Propriété 1.0.2
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors on a équivalence entre:
① *f est injective*
② *f est strictement monotone*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
①⇒②: Supposons f injective.
Montrer que f est strictement croissante sur I.
Donc montrer que f est croissante sur I. (car f est injective)
Montrer que pour tous $x_1 < x_2 < x_3$ de I, $f(x_2)$ soit compris entre $f(x_1)$ et $f(x_3)$
$\boxed{\text{HA}}$ Supposons qu'il existe $x_1 < x_2 < x_3$ de I tels que $f(x_2)$ ne soit pas compris entre $f(x_1)$ et $f(x_3)$.
Alors il existe $y_0 \in \mathbb{R}$, tel que y_0 soit compris strictement entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ et entre $f(x_2)$ et $f(x_3)$
D'après le TVI, $\exists \alpha \in]x_1, x_2[,\ y_0 = f(\alpha)$ et $\exists \beta \in]x_2, x_3[,\ y_0 = f(\beta)$
Les intervalles $]x_1, x_2[$ et $]x_2, x_3[$ sont disjoints, donc $\alpha \neq \beta$.
Cependant, $f(\alpha) = f(\beta)$, ce qui contredit l'injectivité de f.
Donc $\boxed{\text{HA}}$ est contradictoire.
On conclut que f est monotone sur I
Or, f est injective.

Conclusion générale: f est strictement monotone sur I
②⇒①: Facile. □

Corollaire 1.0.1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur I.
Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I sur J.

Propriété 1.0.3
Soit f une fonction strictement croissante sur $[a, b]$.
Alors on a équivalence entre:
①: *f est continue sur $[a, b]$*
②: *f est surjective sur $[f(a), f(b)]$*

N.B. Fonctionne aussi avec la stricte décroissance.

On suppose f strictement croissante.
① On suppose f continue sur $[a, b]$
f est surjective sur $f([a, b])$ (par définition de l'image)
- $f([a, b])$ est un segment car f est continue: $\exists (c, d) \in \mathbb{R}^2,\ f([a, b]) = [c, d]$
- f est strictement croissante: $\forall x \in [a, b],\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
  Donc $\begin{cases} f(a) \text{ est un minorant de } f([a, b]) \\ f(a) \in f([a, b]) \end{cases}$
  Ainsi, $f(a)$ est le plus petit élément de $f([a, b])$
  Autrement dit, $f(a) = c$.
- On procède de même pour montrer que $f(b) = d$

Conclusion: $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
② Supposons f surjective sur $[f(a), f(b)]$
Montrer que f est continue sur $[a, b]$
Soit x_0 un élément de $]a, b[$
Montrer que f est continue en x_0.
C'est a dire $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in [a, b],\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Soit ε un réel positif.
Soient $y_0 = \max(\{f(a),\ f(x_0) - \varepsilon\})$ et $y_1 = \min(\{f(b),\ f(x_0) + \varepsilon\})$
On a: $f(a) \leqslant y_0 < f(x_0) < y_1 \leqslant f(b)$

y_0 et y_1 sont compris entre $f(a)$ et $f(b)$, et f est surjective sur $[f(a), f(b)]$.
Donc $\exists ({x_0}', {x_1}'),\ f({x_0}') = y_0$ et $f({x_1}') = y_1$
Posons $\alpha = \min(\{x_0 - {x_0}',\ {x_1}' - x_0\})$
Alors $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset [{x_0}', {x_1}'] \subset [a, b]$ Et $\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ f(x_0) - \varepsilon \leqslant f({x_0}') < f(x) < f({x_1}') \leqslant f(x_0) + \varepsilon$
Car f est strictement croissante, et par définition de y_0 et de y_1.

Finalement, $\forall x \in [a, b],\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Ceci est valable pour tout ε strictement positif, donc f est continue en x_0
Ceci est valable pour tout x_0 de $]a, b[$, donc f est continue sur $]a, b[$

On adapte la démonstration en a et b.
On conclut que f est continue sur $[a, b]$.

□

Corollaire 1.0.2
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante.
Alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $f([a, b])$ et son application réciproque est continue sur $f([a, b])$.

Supposons f strictement croissante.
- f est strictement croissante, donc f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $J = f([a, b])$.
- f est continue donc J est un segment.
- De plus, f est croissante, donc $J = [f(a), f(b)]$
- $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$
  Montrer que f^{-1} est continue sur $[f(a), f(b)]$.
  f est strictement croissante sur $[a, b]$, donc f^{-1} l'est sur $[f(a), f(b)]$.
  Donc, sachant f^{-1} surjective, f^{-1} est continue sur $[f(a), f(b)]$

$\square$

Corollaire 1.0.3
Soit I un intervalle réel.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement croissante et continue.
Alors:
- *$f(I)$ est un intervalle*
- *f réalise une bijection de I sur $f(I)$*
- *f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$*
- *f^{-1} est continue sur $f(I)$*

2 Fonctions uniformément continues

Définition 2.0.1
Soit I un intervalle réel.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$
On dit que <u>f est uniformément continue sur I</u> si:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall (x_1, x_2) \in I^2,\ |x_1 - x_2| < \alpha \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Théorème de Heine
Si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur ce segment