

Fonctions Usuelles

Fonctions Hyperboliques

MPSI 2

1 Cosinus hyperbolique et Sinus hyperbolique

Definition 1.0.1

On appelle cosinus et sinus hyperboliques les parties paires et impaires de l'exponentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1.1 Parties paires et impaires d'une fonction

Propriete 1.1.1

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application definie sur \mathbb{R} et a valeurs reelles.

Alors il existe un unique couple d'applications definies sur \mathbb{R} et a valeurs dans \mathbb{R} , (g, h) , telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

L'application g s'appelle la partie paire de f et h la partie impaire de f .

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application fixee.

① Supposons qu'il existe deux applications definies sur \mathbb{R} a valeurs dans \mathbb{R} telles que:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Alors pour x reel,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $g(x)$ et $h(x)$ verifient :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

Donc :
$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$
 et
$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Conclusion 1 :

Si g et h existent, alors :

$$\begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

Conclusion 2 :

En particulier, si g et h existent, alors ils sont uniques.

② On considère g et h les deux applications définies sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Montrer que g et h vérifient :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Pour x réel :

- $$g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x))$$

$$= f(x)$$
- $$g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$$

Ceci étant valable pour tout x réel, on conclut que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Conclusion Generale :

Il existe un unique couple d'application (g, h) tel que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

□

Retour aux fonctions hyperboliques :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$


D'après la propriété précédente, ch est paire et sh est impaire.

Propriété 1.1.2


- $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 0$
- ch et sh sont deux applications définies sur \mathbb{R} et : $ch' = sh$
 $sh' = ch$
- ch et sh sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}

Etude de sh :

| | | |
|---------|---|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $ch(x)$ | 1 | + |
| $sh(x)$ | 0 | $+\infty$ |


Etude de ch :

| | | |
|---------|---|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $sh(x)$ | 0 | + |
| $ch(x)$ | 1 | $+\infty$ |


Propriété 1.1.3

Pour tout x dans \mathbb{R} :

- $ch(x) + sh(x) = e^x$
- $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$
- $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

2 Tangente hyperbolique

Definition 2.0.1

La fonction tangente hyperbolique est définie par $th = \frac{sh}{ch}$.

C'est une application définie sur \mathbb{R} car $ch > 0$ sur \mathbb{R} .

On a, pour tout x réel, $th(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
 $= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Etude de th :

| | | |
|----------|---|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $th'(x)$ | 1 | + |
| $th(x)$ | 0 | 1 |

3 Fonctions circulaires reciproques

3.1 arcsinus et arccosinus

\sin est définie continue strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.
 Donc \sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.

Definition 3.1.1

La fonction arcsinus est la fonction reciproque de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

$$\begin{aligned} \arcsin: [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

\cos est définie continue strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$.

Donc \cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Definition 3.1.2

La fonction arccosinus est la fonction réciproque de $\cos|_{[0, \pi]}$.

$$\begin{aligned} \arccos: [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ x &\longmapsto \arccos(x) \end{aligned}$$

Remarques :

- $\forall x \in [-1, 1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\theta)) = \theta$
- Si α appartient à $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(\alpha)) = \pi - \alpha$
- $\forall x \in [-1, 1], \cos(\arccos(x)) = x$
- $\forall \theta \in [0, \pi], \arccos(\cos(\theta)) = \theta$
- Si α appartient à $[-\pi, 0], \arccos(\cos(\alpha)) = -\alpha$
- Pour x dans $[-1, 1], \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- Pour x dans $[-1, 1], \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x \in [-1, 1], \arccos'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.2 arctangente

\tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur \mathbb{R} .

Definition 3.2.1

La fonction arctangente est la fonction réciproque de $\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.

$$\begin{aligned} \arctan: \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\longmapsto \arctan(x) \end{aligned}$$

Remarques :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$
- $\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(\theta)) = \theta$
- Pour x réel, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$