

# Complexes

## Generalites

### MPSI 2

## 1 Plan Affixe $\mathcal{A}_2$

On note  $\mathcal{A}_2$  l'ensemble des points du plan.

### 1.1 Angles

#### Définition 1.1.1

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs unitaires du plan.

On appelle mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  tout réel  $\theta$  tel que :  $\vec{v} = \cos(\theta) \vec{u} + \sin(\theta) \vec{u}'$  avec  $\vec{u}'$  est le vecteur unitaire directement orthogonal à  $\vec{u}$ .

On note mesure de  $\vec{u}, \vec{v}$  :  $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$

#### Définition 1.1.2

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

On appelle mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  toute mesure de l'angle orienté des vecteurs unitaires associées.

On a donc :  $\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \text{mes}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \pmod{2\pi}$

### 1.2 Definition sur les nombres complexes

#### Définition 1.2.1

Soit  $\mathcal{A}_2$  l'ensemble des points du plan muni d'un repère orthonormé  $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ .

On note  $\mathcal{E}_2$  l'ensemble des vecteurs du plan.

L'ensemble des complexes peut être mis en bijection avec  $\mathcal{E}_2$  ou avec  $\mathcal{A}_2$ .

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{A}_2$$

$$x + iy \longmapsto M, \text{ de coordonnées } (x, y) \text{ dans le repère } (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$$

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}_2$$

$$x + iy \longmapsto \vec{OM}, \text{ de coordonnées } (x, y) \text{ dans la base } (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$$

Sont deux applications bijectives.

□

**Définition 1.2.2**

- On dit que  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  est l'image affixe du complexe  $z = x + iy$ .
- On dit que  $z = x + iy$  est l'affixe du point  $M$  / du vecteur  $\vec{OM}$ .

**Définition 1.2.3**

Soit  $z = x + iy$ .

- Le module de  $z$  :  $|z| = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- Un argument de  $z$  pour  $z$  non nul :  $\arg(z) = \text{mes}(\vec{i}, \vec{OM})$ .

**Propriété 1.2.1**

Soit  $z$  un complexe non nul.

- $z$  est reel  $\iff \arg(z) \equiv 0 \ [2\pi]$   
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = k\pi$
- $z$  est imaginaire  $\iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$   
 $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Propriété 1.2.2**

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $\begin{cases} \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi] \\ z \text{ et } z' \text{ non nuls} \end{cases}$

**Définition 1.2.4**

Conjuge de  $z = x + iy$  :  $\bar{z} = x - iy$

**Propriété 1.2.3**

- $z$  est reel  $\iff z = \bar{z}$
- $z$  est imaginaire  $\iff z = -\bar{z}$

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $|z|^2 = z\bar{z}$

**Notation :**

Si  $z = x + iy$ , on note:

$\mathcal{R}e(z) = x$  la partie reelle de  $z$ .

$\mathcal{I}m(z) = y$  la partie imaginaire de  $z$ .

On a :

$$\mathcal{R}e(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\mathcal{I}m(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

## 2 Exponentielle complexe

Soit  $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$x \longmapsto \cos x + i \sin x$$

C'est une fonction d'une variable reelle et a valeurs complexes dont les applications composantes sont  $\cos$  et  $\sin$ .

Ces applications composantes sont derivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\psi$  est derivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = -\sin x + i \cos x$$

**Notation :**  $\psi(x) = e^{ix}$

**Remarque :**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) &= i(\cos x + i \sin x) \\ &= i\psi(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi'(x) = ie^{ix}$$

On a pour  $\alpha$  et  $\beta$  reels :

$$\begin{aligned} \psi(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \\ &= \cos \beta (\cos \alpha + i \sin \alpha) + \sin \beta (i \cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \psi(\alpha) \psi(\beta) \end{aligned}$$

□

On a demontre :

### Propriété 2.0.4

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}, \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) \psi(\beta)$$

$$e^{\imath(\alpha+\beta)} = e^{\imath\alpha} e^{\imath\beta}$$

### Corollaire 2.0.1

- $(\alpha = \beta) \quad e^{\imath(\alpha+\beta)} = (e^{\imath\alpha})^2$
- Par recurrence, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, e^{\imath n\alpha} = (e^{\imath\alpha})^n$$

$$\cos(n\alpha) + \imath \sin(n\alpha) = (\cos \alpha + \imath \sin \alpha)^n$$

Formule de MOIVRE

- $(\beta = -\alpha) \quad e^{\imath(\alpha+\beta)} = e^{\imath\alpha} e^{-\imath\alpha} \iff e^{-\imath\alpha} = \frac{1}{e^{\imath\alpha}}$
- En utilisant  $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$  on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, e^{-\imath n\alpha} = \frac{1}{e^{\imath n\alpha}}$$

$$e^{\imath n\alpha} = (e^{\imath\alpha})^n$$

### Formules et calculs a connaitre

- $\cos \alpha = \frac{e^{\imath\alpha} + e^{-\imath\alpha}}{2}$  et  $\sin \alpha = \frac{e^{\imath\alpha} - e^{-\imath\alpha}}{2\imath}$
  - Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $\cos^n \alpha = \left( \frac{e^{\imath\alpha} + e^{-\imath\alpha}}{2} \right)^n$
- $$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{\imath k\alpha} e^{-\imath(n-k)\alpha}$$

En regroupant les termes d'indice  $k$  et  $n - k$ , on obtient une expression du type :

$$\cos^n \alpha = \sum_{k=0}^n a_k \cos(k\alpha)$$

Avec  $a_k$  des coefficients calculables.

**Définition 2.0.5**

On note  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

- $\mathbb{U}$  est represente dans le plan affine par le cercle unite (de centre  $\mathcal{O}$  et de rayon 1).
- $1 \in \mathbb{U}$
- $\mathbb{U}$  est stable par multiplication.
- $\mathbb{U}$  est stable par passage a l'inverse.

On dit que  $(\mathbb{U}, \times)$  est un groupe.

**Propriété 2.0.5**

Inegalite triangulaire :  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

**Corollaire 2.0.2**

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Montrer que  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

**Cas 1 :**  $z' = 0$

Alors  $\forall z \in \mathbb{C}, |z + z'| = |z|$   
 $|z| + |z'| = |z|$

**Cas 2 :**  $z' \neq 0$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \iff \left| 1 + \frac{z}{z'} \right| \leq 1 + \left| \frac{z}{z'} \right|$$

On est amene a demontrer :

$$\forall u \in \mathbb{C}, |1 + u| \leq 1 + |u|$$

Soit  $u$  un complexe fixe :

$$\begin{aligned} |1 + u| \leq 1 + |u| &\iff |1 + u|^2 \leq (1 + |u|)^2 \\ &\iff (1 + u)(1 + \bar{u}) \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\ &\iff 1 + u + \bar{u} + u\bar{u} \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\ &\iff 1 + 2\operatorname{Re}(u) + |u| \leq 1 + 2|u| + |u|^2 \\ &\iff \operatorname{Re}(u) \leq |u| \end{aligned}$$

Or cette derniere propriete est vraie pour tout complexe  $u$ .

**Conclusion :**  $\forall u \in \mathbb{C}, |1 + u| \leq 1 + |u|$

**Conclusion Generale :**  $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'| \leq |z| + |z'|$

□