

Suites Réelles

Brève extension aux autres suites

MPSI 2

1 Familles indexées par \mathbb{Z}

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

On se ramène à l'étude de deux suites:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = c_n \\ b_n = c_{-n} \end{cases}$$

2 Suites a valeurs complexes

On a: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$n \longmapsto z_n$$

Avec $z_n = x_n + i y_n$, x et y deux suites réelles composantes.

Définition 2.0.1

Soit z une suite a valeurs complexes, avec $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + i y_n$

On dit que z converge vers $a + i b$ si et seulement si x tend vers a et y tend vers b .

Propriété 2.0.1

z converge vers α ssi $(|z_n - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

- ① Supposons que z converge vers $\alpha = a + i b$

Montrer que $(|z_n - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0

$$|z_n - \alpha| = |x_n - a + i(y_n - b)|$$

$$\Rightarrow 0 \leq |z_n - \alpha| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Or, x tend vers a et y tend vers b

Donc par encadrement, on a: $(|z_n - \alpha|) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

- ② Supposons que $(|z_n - \alpha|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Montrons que z converge vers $\alpha = a + i b$

Sachant que $z = x + i y \Rightarrow (x \leq |x| \leq |z|)$ et $(y \leq |y| \leq |z|)$

$$\text{On obtient: } \begin{cases} 0 \leq |x_n - a| \leq |z_n - \alpha| \\ 0 \leq |y_n - b| \leq |z_n - \alpha| \end{cases}$$

Donc par encadrement, x tend vers a et y tend vers b .

□

Remarque: une suite complexe est bornée si son module est majoré.

Propriété 2.0.2

Si z converge vers λ , alors:

- $|z_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\lambda|$
- $\overline{z_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \overline{\lambda}$

Propriété 2.0.3

Soit z une suite complexe bornée.

Alors il existe une suite extraite de z convergente.

- D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de x convergente.

Soit $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite, et l_1 sa limite.

- Notons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = y_{\phi(n)}$

y est bornée, donc v est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite de v convergente.

Soit $(v_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite, et l_2 sa limite.

$\phi \circ \psi$ est définie dans \mathbb{N} a valeurs dans N et strictement croissante

Donc $(y_{\phi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de y et convergeant vers l_2 .

- $(x_{\phi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de x , Donc elle converge vers l_1

- Donc:
$$\begin{cases} x_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 \\ y_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2 \end{cases}$$

Donc par définition de la convergence complexe, $z_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 + i l_2$

□