Dérivabilité
Dérivations successives

MPSI 2

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle réel I.

Définition 0.0.1
f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, on definit la fonction dérivée f' par :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x_0) \end{aligned}$$

- *Si f' est dérivable en x_0, on note $f"(x_0) = (f')'(x_0)$*
- *Par récurrence, on définit, si $f^{(p-1)}$ existe et est dérivable en x_0 :*

$$f^{(p)}(x_0) = \left(f^{(p-1)}\right)'(x_0)$$

Définition 0.0.2
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est dérivable n fois sur I et que $f^{(n)}$ est continue sur I.*
  On note parfois $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications.
- *On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f admet des dérivées à tout ordre sur I.*

Propriété 0.0.1
Formule de Leibniz
Si f et g admettent des dérivées jusqu'à l'ordre n sur I, alors $f \times g$ aussi et :

$$\forall x \in I, (f \times g)^{(n)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}\right)(x)$$