

Structures Algébriques

Structure de Groupe

MPSI 2

1 Définition

Définition 1.0.1

Soit $(G, *)$ un magma.

On dit que $(G, *)$ est un groupe si:

- $*$ est associative
- $*$ admet un élément neutre
- tout élément de G est symétrisable par $*$

Si de plus, $*$ est commutative sur G , on dit que $(G, *)$ est un groupe abélien.

Conséquences:

- Règle de simplification: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$ Démonstration:
Soit a, x et y trois éléments de G tels que $a * x = a * y$
Notons a' le symétrique de a (car G est un groupe)
On a alors: $a' * (a * x) = a' * (a * y)$
Par associativité, on a: $(a' * a) * x = (a' * a) * y$
Par symétrie, on a: $e * x = e * y$
Par définition de l'élément neutre: $x = y$
- Résolution d'équations: $a * x = b \iff x = a' * b$

2 Sous-groupes

2.1 Définition et critères

Soit $(G, *)$ un groupe.

Définition 2.1.1

Soit F un sous-ensemble de G

On dit que $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si:

- $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
- $(F, *')$ est un groupe où $*$ est la loi induite de G sur F .

Remarques: Soit $(F, *')$ un sous-groupe de $(G, *)$

- $e_G = e_F$
- F est non vide: $e \in F$
- Si x' et x'' sont les symétriques de $x \in F$ dans $(G, *)$ et $(F, *')$ respectivement, Alors $x' = x''$

Critères de sous-groupe

Soit F un sous-ensemble non vide de G .

- Critère 0: F est un sous-groupe de G ssi:
 - ① $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
 - ② $e \in F$
 - ③ $\forall x \in G, (x \in F) \Rightarrow (x^{-1} \in F)$
- Critère 1: F est un sous-groupe de G ssi:
 - ① $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
 - ② $\forall x \in G, (x \in F) \Rightarrow (x^{-1} \in F)$
- Critère 2: F est un sous-groupe de G ssi:
 - ① $\forall (x, y) \in G \times G, (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y^{-1} \in F)$

Démonstration des critères de sous-groupe

- Critère 1: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 1.
 - D'après ②, $x^{-1} \in F$
 - D'après ①, $x * x^{-1} \in F$
 - Or $x * x^{-1} = e$, donc $e \in F$ On a vérifié le critère 0, donc $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- Critère 2: Soit F un sous-ensemble non vide de G vérifiant le critère 2.
 - F est non vide: Soit x un élément de F
 D'après ①, $x * x^{-1} \in F \Rightarrow e \in F$
 Le point ② du critère 0 est vérifié.
 - D'après ① avec e et x : $e * x^{-1} \in F \Rightarrow x^{-1} \in F$
 Le point ③ du critère 0 est vérifié.
 - Soit x et y deux éléments de F . De plus, $y^{-1} \in F$
 donc $x * (y^{-1})^{-1} \in F \rightarrow x * y \in F$

□