

Relations Binaires

Relations d'équivalence sur un ensemble

MPSI 2

1 Généralités

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.0.1

On appelle relation binaire sur E le couple (E, G) où G est un graphe de E dans E .

Notations: $(E, G), \mathcal{R}$

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff (x, y) \in G$$

Notons $\Delta_E = \{(x, x), x \in E\}$

Δ_E s'appelle la diagonale de E

On en définit une relation binaire:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y &\iff (x, y) \in \Delta_E \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

2 Relations d'équivalences

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E

Définition 2.0.2

\mathcal{R} est réflexive si $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

Définition 2.0.3

\mathcal{R} est symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \Rightarrow (y \mathcal{R} x)$

Définition 2.0.4

\mathcal{R} est transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$

Définition 2.0.5

\mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E si \mathcal{R} est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 2.0.6

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E .

Soit x un élément de E .

On appelle classe d'équivalence de x suivant \mathcal{R} le sous ensemble de E :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E, x \mathcal{R} y\}$$

Propriété 2.0.1

La famille des classes d'équivalences suivant \mathcal{R} , $(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x))_{x \in E}$ est une partition de E .

- ① Montrer que: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \neq \emptyset$

\mathcal{R} est réflexive, donc $x \mathcal{R} x$

Autrement dit, $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ donc $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \neq \emptyset$

- ② Montrer que: $\bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = E$

$$\iff \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E \text{ et que } E \subset \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

- a) Les classes d'équivalences sont des sous-ensembles de E .

$$\forall x \in E, \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E$$

$$\text{Ainsi, } \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E$$

- b) Montrer que: $E \subset \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

$$\iff \forall t \in E, t \in \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

\mathcal{R} est réflexive, donc $t \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(t)$

En posant $t = x$ on démontre la proposition.

Cela étant vrai pour tout x , on obtient $E \subset \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

- ③ Montrer que: $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \text{ ou } \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) = \emptyset$

$$\iff \forall (x, y) \in E^2, (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset) \Rightarrow (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y))$$

H₁: Soit (x, y) un couple d'éléments de E tels que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset$

Montrer que: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

$$\iff \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \text{ et } \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

a) Montrer que: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

$$\iff \forall z \in E, z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \Rightarrow z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$$

H₂: Soit z un élément de $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

Montrer que $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

D'après H₁, $\exists t \in E, t \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

H₃: Soit $t_0 \in E$ tel que $t_0 \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$ et $t_0 \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

Montrer que: $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

$$\iff z \mathcal{R} y$$

D'après H₂: $z \mathcal{R} x$

D'après H₃: $t_0 \mathcal{R} x$

Par symétrie et transitivité: $z \mathcal{R} t_0$

D'après H₂: $t_0 \mathcal{R} y$

Par transitivité: $z \mathcal{R} y$

Conclusion 1: $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}} \Rightarrow z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

Conclusion 2: Ceci étant vrai pour tout z dans E :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$$

b) Montrer que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

En échangeant les rôles de x et y , et par une démonstration analogue, on obtient:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

Finalement: $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

Conclusion Générale: $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

La famille $(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x))_{x \in E}$ est une partition de E . □

Propriété 2.0.2

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E , alors, il existe une relation d'équivalence \mathcal{R} dont la famille des classes d'équivalences est cette partition.

Soit \mathcal{R} une relation binaire définie par:

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff \exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

① Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E .

a) Montrer que \mathcal{R} est réflexive

$$\iff \forall x \in E, x \mathcal{R} x$$

H₁: Soit x un élément de E

Montrer que: $\exists i \in I, x \in A_i$

A_i est une partition de E , donc d'après H₁,

$$\exists i \in I, x \in A_i$$

b) Montrer que \mathcal{R} est symétrique

$$\iff \forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \Rightarrow (y \mathcal{R} x)$$

H₁: Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \mathcal{R} y$

H₂: $\exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i \iff \exists i \in I, y \in A_i \text{ et } x \in A_i$

On a donc $y \mathcal{R} x$

Donc \mathcal{R} est symétrique.

c) Montrer que \mathcal{R} est transitive

$$\iff \forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$$

H₁: Soit x, y et z trois éléments de E tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ H₁: $\exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$ et $(\exists j \in I, y \in A_j \text{ et } z \in A_j)$

H₂: Soit i_0 et i'_0 deux éléments de I tels que
$$\begin{cases} x \in A_{i_0}, & y \in A_{i_0} \\ y \in A_{i'_0}, & z \in A_{i'_0} \end{cases}$$

Donc $y \in A_{i_0} \cap A_{i'_0}$

Or $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E

Donc $A_{i_0} = A_{i'_0}$

Donc x, y et z sont des éléments de A_{i_0} ,

Donc $x \mathcal{R} z$ Donc \mathcal{R} est transitive.

Conclusion ①: \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

② Montrer que les A_i sont les classes d'équivalences suivant \mathcal{R}

$$\iff \forall i \in I, \exists x \in E, A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$$

H₁: Soit i un élément de I .

Montrer que $\exists x \in E, A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$

$(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E , donc en particulier

A_i non vide, écrit:

$\exists x \in E, x \in A_i$

H₂: Soit x_0 un élément de A_i fixé.

Montrer que $A_i = C_{\mathcal{R}}(x_0)$

$$\iff (A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)) \text{ et } (C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i)$$

a) Montrer que $A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)$

$$\iff \forall y \in E, y \in A_i \Rightarrow y \in C_{\mathcal{R}}(x_0)$$

H₃: Soit y un élément de A_i .

Montrer que $y \in C_{\mathcal{R}}(x_0)$

D'après H₁ et H₂, on a $y \in A_i$ et $x_0 \in A_i$

Donc $x \mathcal{R} y$ par définition de \mathcal{R}

Cela étant valable pour tout i dans I et pour tout y dans A_i ,

$A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)$

b) Montrer que $C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i$

$$\iff \forall j \in E, y \in C_{\mathcal{R}}(x_0) \Rightarrow y \in A_j$$

H₄: Soit y un élément de $C_{\mathcal{R}}(x_0)$

Montrer que $y \in A_i$

H₄: $y \mathcal{R} x_0$, autrement dit:

$\exists j \in I, y \in A_j \text{ et } x_0 \in A_j$

H₅: Soit j_0 un élément de I tel que $y \in A_{j_0} \text{ et } x_0 \in A_{j_0}$

D'après H₂: $x_0 \in A_i$

Avec H₂ et H₃, on en déduit que $x_0 \in A_i \cap A_{j_0}$

Or $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E , donc $A_i = A_{j_0}$

Montrer que $y \in A_i$

Or, $y \in A_{j_0}$, donc $y \in A_i$

Cela étant valable pour tout y dans A_i ,

$C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i$

Conclusion ②: $\forall i \in I, \exists x \in E, A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$

Conclusion générale: Par raisonnement sur des conditions nécessaires et suffisantes, la propriété est démontrée \square

3 Partition associée a une application

Soit E un ensemble non vide, soit F un ensemble.

Soit une application $f: E \longrightarrow F$

$$x \longmapsto f(x)$$

Définition 3.0.7

On appelle relation d'équivalence associée a f la relation définie par:

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$$

Définition 3.0.8

On appelle partition associée a f la famille des classes d'équivalences suivant \mathcal{R}_f