

# Fonctions Usuelles

## Fonctions Hyperboliques

### MPSI 2

## 1 Cosinus hyperbolique et Sinus hyperbolique

### Definition 1.0.1

On appelle cosinus et sinus hyperboliques les parties paires et impaires de l'exponentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

### 1.1 Parties paires et impaires d'une fonction

#### Propriete 1.1.1

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application definie sur  $\mathbb{R}$  et a valeurs reelles.

Alors il existe un unique couple d'applications definies sur  $\mathbb{R}$  et a valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $(g, h)$ , telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

L'application  $g$  s'appelle la partie paire de  $f$  et  $h$  la partie impaire de  $f$ .

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application fixee.

① Supposons qu'il existe deux applications definies sur  $\mathbb{R}$  a valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Alors pour  $x$  reel,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + h(x) \\ f(-x) &= g(x) - h(x) \end{aligned}$$

Ainsi,  $g(x)$  et  $h(x)$  verifient :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

Donc :  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$   
 et  $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

**Conclusion 1 :**

Si  $g$  et  $h$  existent, alors :

$$\begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} h: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$$

**Conclusion 2 :**

En particulier, si  $g$  et  $h$  existent, alors ils sont uniques.

② On considère  $g$  et  $h$  les deux applications définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Montrer que  $g$  et  $h$  vérifient :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

Pour  $x$  réel :

- $g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$   
 $= \frac{1}{2}(f(x) + f(x) + f(-x) - f(-x))$   
 $= f(x)$
- $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$   
 $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$

Ceci étant valable pour tout  $x$  réel, on conclut que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

**Conclusion Generale :**

Il existe un unique couple d'application  $(g, h)$  tel que :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ g \text{ est paire et } h \text{ est impaire} \end{cases}$$

□

**Retour aux fonctions hyperboliques :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$


D'après la propriété précédente,  $ch$  est paire et  $sh$  est impaire.

**Propriété 1.1.2**


- $\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) \geq 0$
- $ch$  et  $sh$  sont deux applications définies sur  $\mathbb{R}$  et :  $ch' = sh$   
 $sh' = ch$
- $ch$  et  $sh$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$

**Etude de  $sh$  :**

$x$	0	$+\infty$
$ch(x)$	1	+
$sh(x)$	0	$+\infty$


**Etude de  $ch$  :**

$x$	0	$+\infty$
$sh(x)$	0	+
$ch(x)$	1	$+\infty$


**Propriété 1.1.3**

Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$  :

- $ch(x) + sh(x) = e^x$
- $ch(x) - sh(x) = e^{-x}$
- $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

## 2 Tangente hyperbolique

### Definition 2.0.1

La fonction tangente hyperbolique est définie par  $th = \frac{sh}{ch}$ .

C'est une application définie sur  $\mathbb{R}$  car  $ch > 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a, pour tout  $x$  réel,  $th(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$   
 $= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Etude de  $th$  :

$x$	0	$+\infty$
$th'(x)$	1	+
$th(x)$	0	1

