

# Complexes

## Equations dans $\mathbb{C}$

MPSI 2

### 1 Racine carree d'un complexe

#### 1.1 Methode trigonometrique

Soit  $z_0$  un complexe non nul. Resolvons  $z^2 = z_0$

Notons  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $z_0 = \rho_0 e^{i\alpha}$

$$\begin{aligned} z = z_0 &\iff \begin{cases} \rho^2 = \rho_0 \\ 2\theta \equiv \alpha [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = \sqrt{\rho_0} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\alpha}{2} + k\pi \end{cases} \\ &\iff z = \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Les solutions sont opposees

#### 1.2 Methode Algebrique

Notons  $z = x + iy$  et  $z_0 = a + ib$ . Resolvons  $z^2 = z_0$

$$\begin{aligned} z^2 = z_0 &\iff x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ -x^2 y^2 = \frac{-b}{4} \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 \text{ et } y^2 \text{ sont les racines du polynome } X^2 - aX - \frac{b^2}{4} \\ 2xy = b \end{cases} \end{aligned}$$

## 2 Equation du 2<sup>nd</sup> degre

$$\begin{aligned} \text{Resolution de } az^2 + bz + c = 0 \text{ avec } &\iff \begin{cases} (a, b, c) \in \mathbb{C}^2 \\ a \neq 0 \end{cases} \\ &az^2 + bz + c = a \left[ \left( z - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ az^2 + bz + c = 0 &\iff \left( z - \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$  et  $\delta = \sqrt{\Delta}$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff \left( z + \frac{b}{2a} \right) = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\iff z = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b + \delta}{2a} \end{aligned}$$

De plus, produit des racines =  $\frac{c}{a}$   
 somme des racines =  $-\frac{b}{a}$

## 3 Resolution d'equations du type $z^n = a$

### 3.1 Racines<sup>n</sup> de l'unité

#### Définition 3.1.1

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

Les racines<sup>n</sup> de l'unité sont les solutions de l'équation  $z^n = 1$

Cas particuliers :

- $n = 2 \iff \omega_0 = 1 \text{ ou } \omega_1 = -1$
- $n = 3 \iff \omega_0 = 1 \text{ ou } \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \text{ ou } \omega_2 = j = \bar{j}$
- $n = 4 \iff \omega_0 = 1 \text{ ou } \omega_1 = i \text{ ou } \omega_3 = -1 \text{ ou } \omega_2 = -i$

On note  $U_n = \{\omega_k, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$ .  $U$  muni de la multiplication est un groupe cyclique car  $\omega_1$  engendre le groupe.

#### Propriété 3.1.1

- $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$
- $U$  est l'ensemble des racines<sup>n</sup> de l'unité
- Les images  $M_k$  affixes de  $\omega_k$  forment un polygone régulier à  $n$  cotés.

Etudions la position relative de  $M_{n-1}$  par rapport a  $M_k$

$$\begin{aligned}\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \omega_{k+1} &= e^{i \frac{2(k+1)\pi}{n}} \\ &= \omega_k e^{i \frac{2\pi}{n}} \\ \text{et : } \omega_0 &= \omega_{n-1} e^{i \frac{2\pi}{n}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{k+1} = \omega_k e^{i \frac{2\pi}{n}} &\iff \begin{cases} |\omega_{k+1}| = |\omega_k| \\ \arg\left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |\omega_{k+1}| = |\omega_k| \\ \text{mes}(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}}) \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi] \end{cases}\end{aligned}$$

$M_{k+1}$  est donc l'image de  $M_k$  par la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  autour du centre O.  
De meme,  $M_0$  est l'image de  $M_{n-1}$  par la meme rotation.

On en deduit que, pour tout  $k$ , le triangle  $OM_k M_{k+1}$  a pour image par cette rotation le triangle  $OM_{k+1} M_{k+2}$

En particulier,  $\left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\| = \left\| \overrightarrow{M_{k+1} M_{k+2}} \right\|$ .

**Conclusion:** Donc  $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$  est un polygone regulier. □

### Propriété 3.1.2

*Le polygone regulier a  $n$  cotes est symetrique par rapport a l'axe reel.*

*Les  $\omega_k$  sont deux a deux conjuges.*

Pour cette demonstation,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(k; k') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2$

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}) : \omega_k = \overline{\omega_{k'}} &\iff e^{i \frac{2k\pi}{n}} = e^{i \frac{2k'\pi}{n}} \\ &\iff \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} [2\pi] \\ &\iff \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z}, k + k' = np \\ 0 \leq k + k' \leq 2n-2 \end{cases}\end{aligned}$$

Si  $p \notin \{0; 1\}$ , le systeme est incompatible.

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\iff \begin{cases} k = -k' \\ (k; k') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} k = -k' + n \\ (k; k') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2 \end{cases} \\ &\iff k = k' = 0 \quad \text{ou} \quad k' = n - k \end{aligned}$$

□

### Propriété 3.1.3

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Alors la somme des racines<sup>n</sup> de l'unité vaut 0

Somme triviale des termes d'une suite géométrique avec  $k$  allant de 0 à  $n-1$

□

## 3.2 Racines<sup>n</sup> d'un complexe $a$

Résolution de  $z^n = a$  avec  $a$  et  $z$  non nuls:

Formes trigonométriques:  $z = \rho e^{i\theta}$  et  $a = \rho_0 e^{i\alpha}$

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff \begin{cases} \rho^n = \rho_0 \\ n\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = \rho_0^{\frac{1}{n}} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \equiv \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions réalise une bijection sur  $U_n$ .

Les affixes des solutions forment un polygone régulier obtenu à par une similitude du polygone régulier à  $n$  cotés.