

Fonctions Usuelles

Fonctions Logarithme

MPSI 2

1 Logarithme Neperien

Définition 1.0.1

Le logarithme neperien est l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 0:

$$\begin{aligned} \ln: \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Propriété 1.0.1

$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

On considere l'application $h: \mathbb{R}^{+*2} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x; y) \longmapsto \ln(xy)$$

Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$ fixe.

Soit h_y l'application dfinie par $h_y: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$X \longmapsto \ln(xy)$$

h_y est derivable car \ln est derivable, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h'_y = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \ln$ et h_y sont des primitives de $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc elles different d'une constante.

$$\begin{aligned} \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h_y(x) &= \ln(x) + K \\ \iff h_y(x) - \ln(x) &= K \\ \iff h_y(1) - \ln(1) &= K \\ \iff \ln(y) &= K \end{aligned}$$

Conclusion: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h_y(x) = \ln(x) + \ln(y)$

Or, ce raisonnement est valable pour tout y de \mathbb{R}^{+*} , donc:

Conclusion Generale: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*2}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

□

Corollaire 1.0.1

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*^2}, \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n \ln(x)$

Propriété 1.0.2

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

1/ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = 2^n$.

$$\ln(U_n) = n \ln(2)$$

Donc: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \ln(U_n) > A$

2/ De plus, \ln est croissante, donc si $x \geq U_{n_0}$, alors:

$$\ln(x) \geq \ln(U_{n_0}) > A$$

Posons $x_0 = U_{n_0}$

Donc: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R}, x \geq x_0 \implies \ln(x) > A$

Donc: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

3/ En $-\infty$:

$$\begin{cases} \ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$, donc par composition de limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

□

Propriété 1.0.3

- \ln réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} . (Th de la bijection)
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$, par définition.
- \ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} (Par récurrence)

2 Logarithme en base a

Définition 2.0.2

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$

Le logarithme en base a est l'application définie par:

$$\begin{aligned} \log_a: \mathbb{R}^{+*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

- Si $a = 10$, \log_a est noté \log
- On note e l'unique réel tel que $\log_e = \ln$

Propriété 2.0.4

- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a) = 1$
- $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^{+*2}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
- Si $a > 1$,
 - \log_a est croissante sur \mathbb{R}^{+*}
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = -\infty$
- Si $0 < a < 1$,
 - \log_a est décroissante sur \mathbb{R}^{+*}
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(x) = +\infty$
- \log_a réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R}