Espaces Vectoriels de Dimension finie
Sous-Espaces Vectoriels

MPSI 2

1 Dimension de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ de dimension finie.

Propriété 1.0.1
Soit F un S_{EV} de E.
Alors:
- *F est de dimension finie.*
- $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
- $F = E \iff \dim(F) = dim(E)$

On raisonne sur une base de F. □

2 Somme de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ de dimension finie.
Soient F et G deux S_{EV} de E.

Définition 2.0.1
On appelle somme de F et G le sous-espace vectoriel engendré par $F \cup G$

Notation: $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$

Propriété 2.0.2

$$F + G = \{x \in E,\ \exists (x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G\}$$

Propriété 2.0.3

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

On raisonne avec les bases de F, G, et $F \cap G$, et avec le théorème de la base incomplète sur $F \cap G$. $\square$

3 Somme directe, espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ de dimension n.

Définition 3.0.2
Soient F et G deux S_{EV} de E.
- *La somme $F+G$ est <u>directe</u> si $F \cap G = \{0_E\}$*
- *F et G sont <u>supplémentaires de E</u> si $F \oplus G = E$*

Notation: Somme directe de F et G: $F \oplus G$

Propriété 3.0.4
$$\begin{aligned} \varphi_1 \colon F \times G &\longrightarrow F+G \\ (x_F, x_G) &\longmapsto x_F + x_G \end{aligned}$$
φ_1 est linéaire et surjective.

- *F et G sont en somme directe ssi φ_1 est injective.*
- *F et G sont en somme directe ssi tout élément de $F+G$ s'écrit comme manière unique comme CL d'éléments de F et de G.*

Définition 3.0.3

$$\sum_{i=1}^{p} E_i = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right)$$

Définition 3.0.4
Soit $\varphi\colon E_1 \times ... \times E_p \longrightarrow E_1 + ... + E_p$

$(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 + ... + x_p$

La somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ *est directe ssi* φ *est injective, c'est à dire si tout élément de* $E_1 + ... + E_p$ *s'écrit comme CL unique d'éléments de* $\{E_1 \times ... \times E_p\}$.

Notation: $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$

Propriété 3.0.5
$F + G$ est une somme directe ssi la réunion d'une base de F et d'une base de G est une base de $F + G$.

Corollaire 3.0.1

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Corollaire 3.0.2

- *Si F et G sont supplémentaires de E, alors* $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
- *Tous les* $\mathrm{S_{EV}}$ *supplémentaires de F dans E sont de dimension* $\dim(E) - \dim(F)$
- *Tous les* $\mathrm{S_{EV}}$ *supplémentaires de F dans E sont isomorphes.*

Critères de supplémentarité

$$\begin{cases} F \cap G = \{O_E\} \\ F + G = E \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ F + G = E \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Propriété 3.0.6
Existence d'un supplémentaire d'un $\mathrm{S_{EV}}$ ***de*** E
Soit F un $\mathrm{S_{EV}}$ *de E.*
F admet au moins un $\mathrm{S_{EV}}$ *supplémentaire dans E.*

On utilise le théorème de la base incomplète, et on forme l'espace vectoriel engendré par les termes ajoutés à la base de F.
On a donc l'union des deux bases égale a une base de E. $\square$

Définition 3.0.5
Soit F et G deux $\mathrm{S_{EV}}$ *supplémentaires de E.*
On a: $\forall x \in E,\ \exists (x_F, x_G) \in F \times G,\ \textit{uniques},\ x = x_F + x_G$
- $P_F \colon \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F \end{array}$ *est la projection sur F parallèlement à G.*
- $S_F \colon \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x_F - x_G \end{array}$ *est la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.*

Propriété 3.0.7

- P_F *est linéaire,* $P_F \circ P_F = P_F$, $\mathrm{Im}(P_F) = F$, $\ker(P_F) = G$
- S_F *est linéaire,* $S_F \circ S_F = \mathrm{Id}_F$, $\mathrm{Im}(S_F) = E$, $\ker(P_F) = \{0_E\}$

4 Théorème du Rang

Théorème du Rang
Soit E un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$ *de dimension n.*
Soit F un $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$.
Soit $f : E \to F$ linéaire.
On a alors:

$$\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{\textit{Rang de } f} + \dim(\ker(f)) = n$$

- Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
  Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ une base de $\ker(f)$.
  D'après le théorème de la base incomplète:
  il existe $i_1, \ldots, i_{n-k}$ indices distincts de $[\![1, n]\!]$ tels que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}})$ soit une base de E.
  Soit $E_1 = \mathrm{Vect}(\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-k}}\})$
  Alors $E = \ker(f) \oplus E_1$, et $f\big|_{E_1}$ est injective.

- $\mathrm{Im}(f\big|_{E_1}) = \mathrm{Vect}(\{f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_{n-k}})\})$ car $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}\}$ est générateur de E_1.
  De plus, $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}\}$ est libre et f est injective, donc $\{f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_{n-k}})\}$ est libre.
  Ccl: $\{f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_{n-k}})\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f\big|_{E_1})$
- $$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}(\{\underbrace{\varepsilon_1}_{=0_E}, \dots, \underbrace{\varepsilon_k}_{=0_E}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}\}) \\ &= \mathrm{Vect}(\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-k}}\}) \\ &= \mathrm{Im}(f\big|_{E_1})\end{aligned}$$
  Ccl: $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f\big|_{E_1})$

Donc $$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Im}(f)) &= \dim(\mathrm{Im}(f\big|_{E_1})) \\ &= n - k \\ &= n - \dim(\ker(f))\end{aligned}$$

Conclusion générale: $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = n$ $\square$