Fonctions Numériques
Limites de fonctions
MPSI 2

1 Dfinitions

Définition 1.0.1
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, *tel que* $x_0 \in I$ *ou* x_0 *est une extrmit de* I.
Soit $l \in \mathbb{R}$
•*f(x) tend vers l quand x tend vers* x_0*:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Définition 1.0.2
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, *tel que* $x_0 \in I$ *ou* x_0 *est une extrmit de* I.
•*f(x) tend vers* $+\infty$ *quand x tend vers* x_0*:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$$

•*f(x) tend vers* $-\infty$ *quand x tend vers* x_0*:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < K$$

Propriété 1.0.1
Si $x_0 \in I$, *alors la seule limite ventuelle de* $f(x)$ *en* x_0 *est* $f(x_0)$

On suppose qu'il existe l dans $\mathbb{R}$, tel que $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} l$
$\boxed{\text{HA}}$ $l \neq f(x_0)$
1 $l \in \mathbb{R}$
Alors $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Supposons $l > f(x_0)$
Posons $\varepsilon = \frac{l - f(x_0)}{2}$
Alors $f(x_0) \notin]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Soit α vrifiant les conditions de limites.
Donc $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) \in]l - \varepsilon, l + varepsilon[$
On a donc une contradiction.

② $l = +\infty$
Alors $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow K < f(x)$
Soit K un rel strictement suprieur à $f(x_0)$
Soit α un rel vrifiant les condition de limites.
Donc $\forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > K$
En particulier, avec $x = x_0$, on a $f(x_0) > K$
On a donc une contradiction.

③ $l = -\infty$
On procde de même.

Conclusion: $l = f(x_0)$

□

Définition 1.0.3
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

- *$f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

- *$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$:*

$$\forall K \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > k \Rightarrow f(x) > K$$

Propriété 1.0.2
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que x_0 soit un lment de I ou une extrmit de I.
Soit $(l, l') \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.
Si f admet l et l' comme limite en x_0, alors $l = l'$

Notations: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}} f(x) = l$ et $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l$

Cas où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$
① : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha_1 \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l)| < \varepsilon$
② : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$
Supposons $l \neq l'$, et $l > l'$

Posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$
On a donc $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[=\varnothing$

Soit α_1 et α_2 vrifiant ① et ②.
Soit $\alpha = \min(\{\alpha_1, \alpha_2\})$
Alors $\forall x \in I,\ |x-x_0| < \alpha \Rightarrow (|f(x)-l| < \varepsilon$ et $|f(x)-l'| < \varepsilon)$
Autrement dit: $\forall x \in I,\ |x-x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon, l'+\varepsilon[$
On a donc une contradiction.
Conclusion: $l = l'$ $\square$

Remarques:

- Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l \iff f(x) - l \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} 0$
- Soit $l \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors f(x) $\underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l \iff \frac{f(x)}{l} \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} 1$
- Soit $x_0 \in I$. Alors $f(x) \underset{\substack{x \to x_0 \\ x \in I}}{\longrightarrow} l \iff f(x_0+h) \underset{\substack{x_0+h \in I \\ h \to 0}}{\longrightarrow} l$

Propriété 1.0.3
On suppose que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $x_0 \in I$