

Complexes

Equations dans \mathbb{C}

MPSI 2

1 Racine carree d'un complexe

1.1 Methode trigonometrique

Soit z_0 un complexe non nul. Resolvons $z^2 = z_0$

Notons $z = \rho e^{i\theta}$ et $z_0 = \rho_0 e^{i\alpha}$

$$\begin{aligned} z = z_0 &\iff \begin{cases} \rho^2 = \rho_0 \\ 2\theta \equiv \alpha [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = \sqrt{\rho_0} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\alpha}{2} + k\pi \end{cases} \\ &\iff z = \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\alpha}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Les solutions sont opposees

1.2 Methode Algebrique

Notons $z = x + iy$ et $z_0 = a + ib$. Resolvons $z^2 = z_0$

$$\begin{aligned} z^2 = z_0 &\iff x^2 + 2ixy - y^2 = a + ib \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ -x^2 y^2 = \frac{-b}{4} \\ 2xy = b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 \text{ et } y^2 \text{ sont les racines du polynome } X^2 - aX - \frac{b^2}{4} \\ 2xy = b \end{cases} \end{aligned}$$

2 Equation du 2nd degre

$$\begin{aligned} \text{Resolution de } az^2 + bz + c = 0 \text{ avec } &\iff \begin{cases} (a, b, c) \in \mathbb{C}^2 \\ a \neq 0 \end{cases} \\ &az^2 + bz + c = a \left[\left(z - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z - \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\delta = \sqrt{\Delta}$

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\iff \left(z + \frac{b}{2a} \right) = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\iff z = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ ou } z = \frac{-b + \delta}{2a} \end{aligned}$$

De plus, produit des racines = $\frac{c}{a}$
 somme des racines = $-\frac{b}{a}$

3 Resolution d'equations du type $z^n = a$

3.1 Racinesⁿ de l'unité

Definition 3.1.1

Soit n un entier naturel non nul.

Les racinesⁿ de l'unité sont les solutions de l'equation $z^n = 1$

Cas particuliers :

- $n = 2 \iff \omega_0 = 1 \text{ ou } \omega_1 = -1$
- $n = 3 \iff \omega_0 = 1 \text{ ou } \omega_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j \text{ ou } \omega_2 = j = \bar{j}$
- $n = 4 \iff \omega_0 = 1 \text{ ou } \omega_1 = i \text{ ou } \omega_3 = -1 \text{ ou } \omega_2 = -i$

On note $U_n = \{\omega_k, \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket\}$. U muni de la multiplication est un groupe cyclique car ω_1 engendre le groupe.

Propriete 3.1.1

- $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$
- U est l'ensemble des racinesⁿ de l'unité
- Les images M_k affixes de ω_k forment un polygone regulier a n cotes.

Etudions la position relative de M_{n-1} par rapport a M_k

$$\begin{aligned}\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \omega_{k+1} &= e^{i \frac{2(k+1)\pi}{n}} \\ &= \omega_k e^{i \frac{2\pi}{n}} \\ \text{et : } \omega_0 &= \omega_{n-1} e^{i \frac{2\pi}{n}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{k+1} = \omega_k e^{i \frac{2\pi}{n}} &\iff \begin{cases} |\omega_{k+1}| = |\omega_k| \\ \arg\left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |\omega_{k+1}| = |\omega_k| \\ \text{mes}(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}}) \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi] \end{cases}\end{aligned}$$

M_{k+1} est donc l'image de M_k par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ autour du centre O.
De meme, M_0 est l'image de M_{n-1} par la meme rotation.

On en deduit que, pour tout k , le triangle $OM_k M_{k+1}$ a pour image par cette rotation le triangle $OM_{k+1} M_{k+2}$

En particulier, $\left\| \overrightarrow{M_k M_{k+1}} \right\| = \left\| \overrightarrow{M_{k+1} M_{k+2}} \right\|$.

Conclusion: Donc $M_0 M_1 \dots M_{n-1}$ est un polygone regulier. □

Propriete 3.1.2

Le polygone regulier a n cotes est symetrique par rapport a l'axe reel.

Les ω_k sont deux a deux conjuges.

Pour cette demonstation, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(k; k') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2$

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}) : \omega_k = \overline{\omega_{k'}} &\iff e^{i \frac{2k\pi}{n}} = e^{i \frac{2k'\pi}{n}} \\ &\iff \frac{2k\pi}{n} \equiv \frac{2k'\pi}{n} [2\pi] \\ &\iff \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z}, k + k' = np \\ 0 \leq k + k' \leq 2n-2 \end{cases}\end{aligned}$$

Si $p \notin \{0; 1\}$, le systeme est incompatible.

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\iff \begin{cases} k = -k' \\ (k; k') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} k = -k' + n \\ (k; k') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2 \end{cases} \\ &\iff k = k' = 0 \quad \text{ou} \quad k' = n - k \end{aligned}$$

□

Propriete 3.1.3

Soit n un entier naturel superieur ou egal a 1.

Alors la somme des racinesⁿ de l'unite vaut 0

Somme triviale des termes d'une suite geometrique avec k allant de 0 a $n-1$

□

3.2 Racinesⁿ d'un complexe a

Resolution de $z^n = a$ avec a et z non nuls:

Formes trigonometriques: $z = \rho e^{i\theta}$ et $a = \rho_0 e^{i\alpha}$

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff \begin{cases} \rho^n = \rho_0 \\ n\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = \rho_0^{\frac{1}{n}} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta \equiv \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, z = \rho_0^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}} \omega_k \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions realise une bijection sur U_n .

Les affixes des solutions forment un polygone regulier obtenu a par une similitude du polygone regulier a n cotes.