# Fonctions Usuelles
# Fonctions Puissance
MPSI 2

# 1 Definition

## 1.1 Definition

**Définition 1.1.1**
*Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f_\alpha : \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = exp(\alpha\ ln(x)) \end{array}$$

$f_\alpha$ *s'appelle la fonction puissance* $\alpha$

**Propriété 1.1.1**
*Pour tout* $(x, y)$ *strictement positifs, pour tout* $(\alpha, \beta)$ *réels:*

- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha\ x^\beta$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $ln\,(x^\alpha) = \alpha ln(x)$

## 1.2 Étude de $f_\alpha$

**Dérivabilité** $f$ est dérivable par composée de fonctions dérivables

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'_\alpha(x) &= \frac{\alpha}{x} exp(\alpha ln(x)) \\ &= \alpha exp((\alpha - 1) ln(x)) \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

**Etude des limites**

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_\alpha(x) = exp(\alpha\ ln(x))$

- Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$
- Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$

  **De quelle manière** $f_\alpha$ **tend-t-elle vers** $+\infty$?
  On étudie $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$
  Or $\frac{f_\alpha(x)}{x} = exp((\alpha - 1) ln(x))$
  – Si $0 < \alpha < 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = 0$,
  Donc $\mathscr{C}_{f_\alpha}$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** $Ox$
  – Si $1 < \alpha$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x} = \infty$,
  Donc $\mathscr{C}_{f_\alpha}$ admet une **branche parabolique de direction asymptotique** $Oy$

**Etude en 0**

- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f_\alpha(x) = +\infty$
- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} f_\alpha(x) = 0$

  Dans ce cas, notons $\tilde{f}_\alpha$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par:
  $\tilde{f}_\alpha(x) = \begin{cases} f_\alpha(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
  D'après le taux d'accroissement:
  - Si $\alpha > 1$, $\tilde{f}'_\alpha(0) = 0$, donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}_\alpha}$ admet une demi-tangente d'équation $y = 0$
  - Si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to 0} exp((\alpha - 1)ln(x)) = +\infty$, donc $\mathscr{C}_{\tilde{f}_\alpha}$ admet une demi-tangente d'équation $x = 0$

## 2 Fonctions Puissance Vs. Fonctions racines$^n$

- Soit $n$ un entier **pair non nul**

  $g_n : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{array}$

  $g_n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

  Son application réciproque s'appelle la fonction **racine**$^n$ $: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto \sqrt[n]{x} \end{array}$
- Soit $n$ un entier**impair non nul**

  $g_n : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{array}$

  $g_n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

  Son application réciproque s'appelle la fonction **racine**$^n$ $: \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt[n]{x} \end{array}$
- Par ailleurs, pour tout $n$ entier naturel non nul, $f_{\frac{1}{n}}$ est l'application réciproque de $f_n : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt[n]{x} \end{array}$

  Donc par unicité de la réciproque on peut écrire: $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

## 3 Théorème de comparaison

**Propriété 3.0.1**

*Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs.*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(exp(x))^\alpha}{x^\beta} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \left|ln(x)\right|^\beta = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\beta \left(exp(x)\right)^\alpha = 0$

- Pour $t \geq 1$, on a: $0 < \sqrt{t} \leq t$
$$0 < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$$
Donc pour $x \geq 1$ on a: $$0 \leq \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq 2\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dt$$
$$\iff 0 \leq ln(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$$
$$\iff 0 \leq \frac{ln(x)}{x} \leq \frac{2\sqrt{x}-2}{x}$$
Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$
- Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs. Pour $x > 1$:
$$\frac{ln(x)^\beta}{x^\alpha} = \left(\frac{ln(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$
$$= \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\,ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$
$$= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\beta \left(\frac{ln\left(x^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$
de plus:
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{\alpha}{\beta}} = +\infty$
  - $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{ln(t)}{t} = 0$
  - $\lim\limits_{u\to 0} u^\beta = 0$

  Donc par composées de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0$
- Passage a l'exponentielle et passage a l'inverse.
- etc.

$\square$