4

Relações de Implicação e de Equivalência

O estudo das relações de implicação e de equivalência, de grande importância na Lógica, será feito de maneira suscinta, como convém ao nosso estudo. Antes, porém, definiremos alguns conceitos introdutórios.

4.1 DEFINIÇÕES

a) Duas proposições são ditas *independentes* quando, em suas tabelas-verdade, ocorrem as quatro alternativas.

Exemplo:

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

b) Dizemos que duas proposições são *dependentes* quando, em suas tabelas-verdade, uma ou mais alternativas não ocorrem.

Exemplo:

p	q	q ⟶ p
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Não ocorre a alternativa 10 entre p e q ⟶ p.

Neste caso, dizemos que existe uma *relação* entre as proposições p e q ⟶ p. Examinaremos as *relações simples* (quando uma alternativa não ocorre) e as *relações duplas* (quando duas alternativas não ocorrem).

4.2 RELAÇÃO DE IMPLICAÇÃO

Diz-se que uma proposição p *implica* uma proposição q quando, em suas tabelas-verdade, *não ocorre 10* (nessa ordem!).

Notação: p ⟹ q.

Observação importante:

Não confundir os símbolos ⟶ e ⟹, pois, enquanto o primeiro representa uma operação entre proposições dando origem a uma nova proposição, o segundo indica apenas uma relação entre duas proposições dadas.

Exemplo: Verificar se p ⟹ q ⟶ p.

Solução:

p	q	q ⟶ p
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Comparando as tabelas-verdade p e q ⟶ p, verificamos que *não ocorre 10* (nessa ordem!) numa mesma linha. Portanto: p ⟹ q ⟶ p.

4.3 RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Diz-se que uma proposição p é *equivalente* a uma proposição q quando, em suas tabelas-verdade, *não ocorrem 10 nem 01.*

Notação: $p \Longleftrightarrow q$.

Observação importante:

Vale para os símbolos $\longleftrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$ a mesma observação feita para $\longrightarrow$ e $\Longrightarrow$.

Exemplo: Verificar se $p \cdot q \Longleftrightarrow (p' + q')'$.

Solução:

p	q	p · q	p'	q'	p' + q'	(p' + q')'
0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Comparando as tabelas-verdade de $p \cdot q$ e $(p' + q')'$, verificamos que *não ocorre 10 nem 01* numa mesma linha. Portanto, $p \cdot q \Longleftrightarrow (p' + q')'$.

De maneira prática, *verifica-se que duas proposições dadas são equivalentes quando suas tabelas-verdade forem iguais.*

4.4 EQUIVALÊNCIAS NOTÁVEIS

Dupla negação: $(p')' \Longleftrightarrow p$.

p	p'	(p')'
0	1	0
1	0	1

Leis idempotentes:

a) $p + p \Longleftrightarrow p$.
b) $p \cdot p \Longleftrightarrow p$.

p	p + p	p · p
0	0	0
1	1	1

Leis comutativas:

a) $p + q \Longleftrightarrow q + p$.
b) $p \cdot q \Longleftrightarrow q \cdot p$.

a)

p	q	p + q	q + p
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

b) Verificar como exercício.

Leis associativas:

a) $p + (q + r) \Longleftrightarrow (p + q) + r$.
b) $p \cdot (q \cdot r) \Longleftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$.

a)

p	q	r	q + r	p + (q + r)	p + q	(p + q) + r
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

b) Verificar como exercício.

Leis de De Morgan:

a) $(p \cdot q)' \Longleftrightarrow p' + q'$.
b) $(p + q)' \Longleftrightarrow p' \cdot q'$.

a)

p	q	p'	q'	p' + q'	p · q	(p · q)'
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

b) Verificar como exercício.

Leis distributivas:

a) $p \cdot (q + r) \Longleftrightarrow (p \cdot q) + (p \cdot r)$.
b) $p + (q \cdot r) \Longleftrightarrow (p + q) \cdot (p + r)$.

a)

p	q	r	q + r	p · (q + r)	p · q	p · r	(p · q) + (p · r)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

b) Verificar como exercício.

Bicondicional: $p \longleftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow p)$.

p	q	p ⟷ q	p ⟶ q	q ⟶ p	(p ⟶ q) · (q ⟶ p)
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Condicionais:

a) $p \longrightarrow q$.
b) $q' \longrightarrow p'$ (contrapositivo).
c) $q \longrightarrow p$ (recíproca do condicional)
d) $p' \longrightarrow q'$ (recíproca do contrapositivo).

p	q	p'	q'	p ⟶ q	q' ⟶ p'	q ⟶ p	p' ⟶ q'
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Destas tabelas tiramos as seguintes *equivalências notáveis:*

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (q' \longrightarrow p')$$
$$(q \longrightarrow p) \Longleftrightarrow (p' \longrightarrow q').$$

4.5 PROPRIEDADES

a) A condição necessária e suficiente para que $p \Longrightarrow q$ é que o condicional $p \longrightarrow q$ seja uma tautologia.

Demonstração:

A – A condição é necessária: $(p \Longrightarrow q) \longrightarrow (p \xrightarrow{T} q)$.

Se $p \Longrightarrow q$, não ocorre 10, logo o condicional $p \longrightarrow q$ é uma tautologia.

B – A condição é suficiente: $(p \xrightarrow{T} q) \longrightarrow (p \Longrightarrow q)$.

Se $p \xrightarrow{T} q$, não ocorre em sua tabela-verdade a alternativa 10; logo, $p \Longrightarrow q$. c.q.d.

b) A condição necessária e suficiente para que $p \Longleftrightarrow q$ é que $p \longleftrightarrow q$ seja uma tautologia.

Demonstração análoga à anterior.

EXERCÍCIOS

1. Dizer se entre as seguintes proposições há implicação ou equivalência quando tomadas aos pares.
   a) p'
   b) $q \longrightarrow p'$
   c) $p \longrightarrow q$
   d) $q' + p$
   e) $p \cdot q$

2. Mostrar que:
   a) $q \Longrightarrow p \longrightarrow q$
   b) $q \not\Longrightarrow p \cdot q \longleftrightarrow p$
   c) $p \longleftrightarrow q'$ não implica $p' \longrightarrow q'$
   d) p não implica $p \cdot q$
   e) $p + q \not\Longrightarrow p$

3. Verificar mediante tabelas-verdade as seguintes equivalências:

a) $((p + r)')' \Longleftrightarrow p + r$
b) $((p \cdot q')')' \Longleftrightarrow p \cdot q'$
c) $r' \cdot r' \Longleftrightarrow r'$
d) $p \cdot q' + p \cdot q' \Longleftrightarrow p \cdot q'$
e) $(p' + q)' \Longleftrightarrow (q + p')'$
f) $p + q' \cdot r \Longleftrightarrow q' \cdot r + p$
g) $p \cdot (q + p) \Longleftrightarrow p$
h) $p + (p \cdot q) \Longleftrightarrow p$
i) $p \longleftrightarrow p \cdot q \Longleftrightarrow p \longrightarrow q$
j) $q \longleftrightarrow p + q \Longleftrightarrow p \longrightarrow q$
l) $(p \longrightarrow q) \cdot (p \longrightarrow r) \Longleftrightarrow p \longrightarrow q \cdot r$
m) $(p \longrightarrow q) + (p \longrightarrow r) \Longleftrightarrow p \longrightarrow q + r$
n) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r \Longleftrightarrow p \cdot r' \longrightarrow q'$

4. Dadas as proposições abaixo, escrever as proposições equivalentes usando as equivalências notáveis indicadas.

a) Dupla negação:
$((p + q)')'$
$((p' \cdot q')')'$
$p \cdot q$

b) Leis idempotentes:
$p' + q'$
$(p \longrightarrow q) + (p \longrightarrow q)$
$((p \longrightarrow q)' \cdot (p \longrightarrow q)')'$

c) Leis comutativas:
$(p' \cdot q) + r$
$(s \cdot r) \cdot (p \longrightarrow s)'$
$(p \longrightarrow s) \cdot (p + r)$

d) Leis de De Morgan:
$(p' + q')'$
$((p + q) \cdot (r \longrightarrow s)')$
$(p \longrightarrow q) \cdot r'$

e) Leis associativas:
$r + (p' + q')$
$p \cdot ((r \longrightarrow s) \cdot (s + r))$
$((p + q) \cdot (p \longrightarrow r)) \cdot (p + s)$

f) Leis distributivas:
$s' \cdot (p' + q)$
$p + ((q \cdot r)' \cdot (r \longrightarrow s))$

g) Contrapositivo:
$p' \longrightarrow (q \cdot r)'$
$(p + q) \longrightarrow r'$
$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (r \longrightarrow s)'$

h) Condicional:
$p' \longrightarrow (q \cdot r)'$
$p + (q \longrightarrow r)$
$(p' + q)'$

i) Bicondicional:
$((p' \longrightarrow q') \cdot (q' \longrightarrow p'))$
$((p \cdot q) \longrightarrow r') \cdot (r' \longrightarrow (p \cdot q))$
$(p \longleftrightarrow q')$