Пляскина Ульяна Сергеевна, 2 курс, 1 подгруппа

Тема 2. «Математические объекты и их представления»

Лабораторная работа

Задание 2.1

Средствами интернет найти материал по следующим вопросам:

- Найти несколько определений понятия «Компьютерная алгебра».
- Классификация (виды, примеры) математических объектов компьютерной алгебры. В том числе рассмотреть, есть ли различия с точки зрения «математики/алгебры» (как таковой) и «компьютерной алгебры».
- Особенности работы с математическими объектами «на бумаге» и «на компьютере». В том числе рассмотреть особенности/различия представления целых и дробных чисел.
- Найти определение понятия «Алгебраические функции».
- Составить классификацию алгебраических функций. В том числе дать их описание и способы работы с ними. Рассмотреть как с точки зрения «математики/алгебры» (как таковой) так и с точки зрения «компьютерной алгебры».
- Рассмотреть представление матриц как с точки зрения «математики/алгебры» (как таковой) так и с точки зрения «компьютерной алгебры».

Компьютерная алгебра

- область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы.[1]

[1] Академик

- это преобразования и работа с математическими равенствами и формулами как с последовательностью символов. Занимается разработкой и реализацией аналитических методов решения математических задач на компьютере и предполагает, что исходные данные, как и результаты решения, сформулированы в аналитическом (символьном) виде.[2]

- это часть информатики, которая занимается разработкой, анализом, реализацией и применением алгебраических алгоритмов. От других алгоритмов алгебраические алгоритмы отличаются наличием простых формальных описаний, существованием доказательства правильности и асимптотических границ времени выполнения, которые можно получить на основе хорошо развитой математической теории.[3]

Базовыми **объектами компьютерной алгебры** являются:

- Целые числа (возможны различные способы представления: 1) ограниченной точности; 2) произвольно заданной точности; 3) неограниченной точности. В системах компьютерной алгебры целые числа неограниченной точности реализуются программным путём и этот тип считается базовым)
- Рациональные числа (возможны различные способы представления рациональных чисел произвольной точности: 1) отношение числителя и знаменателя (такое представление является нормальным); 2) так же, как и в (1), но выполнив доп. Условия: а) числитель и знаменатель числа добыть сокращены на НОД, б) знаменатель должен быть положительным (такое представление является каноническим). В системах компьютерной алгебры обычно используется каноническое представление рациональных чисел произвольной точности)

Пример. Записи вида –2 / 3, 2 / -3, 4 / -6, -10 / 15 и т.п. представляют одно и то же число.

---

[2] Википедия
[3] StudFiles

- Полиномы от одной переменной (представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность или список. Коэффициенты мономов могут быть числами разных типов, в том числе целыми числами произвольной точности. Представление полинома является каноническим, если последовательность мономов упорядочена по возрастанию или убыванию мономов)

Пример. Полином A (x) = x^{1000} - 1 требует существенно различные ресурсы при хранении в плотном и в разреженном представлениях.[4]

- Полиномы от нескольких переменных (Полином от нескольких переменных представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность (или список), а моном – произведение термов (тоже последовательность). Различают две формы канонического представления полинома от нескольких переменных: 1) форма с упорядочением последовательности мономов; 2) рекурсивная форма)
- Рациональные функции (Дробно-рациональные функции, представляющие отношение полиномов, эффективно хранить в виде записи, содержащей ссылку на полином - числитель и ссылку на полином – знаменатель. При этом полиномы должны находиться в одной канонической форме. Представление рациональной функции будет каноническим, если дополнительно ввести следующие условия: 1) числитель и знаменатель должны быть сокращены на полином – наибольший общий делитель (НОД) этих двух полиномов; 2) числовые коэффициенты числителя и знаменателя должны быть сокращены на общий множитель; 3) старший коэффициент знаменателя должен быть положительным. Как правило, в системах компьютерной алгебры реализуется несколько и канонических, и нормальных форм представления полиномов от нескольких переменных).

[4] Курс Компьютерная алгебра

Алгебраическая функция — элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.[5]

Алгебраическим называется число, являющееся решением уравнения:

P (x) = 0,

где P (x) – полином от одной переменной с целыми коэффициентами.

Пример. Полином P (x) = $x^2 - 2$ порождает алгебраическое число $\sqrt{2}$.

Алгебраической называется функция, являющаяся решением уравнения:

G (x) = 0,

где G (x) – порождающий полином от одной переменной с коэффициентами – полиномами от нескольких переменных с целыми коэффициентами.

Пример. Полином G (x) = $x^2 - 2 + y$ порождает алгебраическую функцию $\sqrt{(2 - y)}$.

- Простым радикалом называется положительная дробная степень от полинома с целыми коэффициентами.
- Вложенным радикалом называется положительная дробная степень от выражения, содержащего радикалы.

Представление простых радикалов:

Для представления простых радикалов необходимо ввести новую квазипеременную – r 1, обозначающую этот радикал. С помощью квазипеременной описывается вхождение степеней простого радикала в другие выражения. При этом необходимо учитывать, что порождающий полином удовлетворяет условию: G (r 1) = 0.

Для простых радикалов можно построить канонические представления, однако их редко применяют в системах компьютерной алгебры по следующим

[5] Википедия

причинам: (1) алгоритмы получения таких представлений, как правило, неэффективны и нерациональны; (2) сами канонические представления не упрощают, а усложняют вид выражений с радикалами, предъявляемый пользователю.

Для получения канонического представления простого радикала следует (после введения квазипеременной) разрешить следующие проблемы:

1. Проблема неоднозначности дробно-рациональных отношений радикалов

   Пример. Функции – радикалы (1-y) / (√ (2 - y) - 1) и (√ (2 - y) + 1) – это два представления одного радикала. Их разность равна нулю. ;

2. Проблема независимости радикалов друг от друга (в случае работы с несколькими радикалами)

   Пример. Радикалы α = √ (x+1) , β = √ (x+2) и радикал χ = √ (x^2 + 3*x + 2) взаимозависимы, т.к. разность (α * β - χ) равна нулю. ;

3. Проблема приведения дробно-рациональных функций к виду со знаменателями, свободными от радикалов

   Пример. Число – радикал следующего вида: 1 / (√ 2 + √ 3 + √ 5 + √ 7) предпочтительнее для пользователя, чем его каноническое представление:
   (22 √3 √5 √7 – 34 √2 √5 √7 – 50 √2 √3 √7 + 135 √7 + 62 √2 √3 √5 - 133 √5 - 145 √3 + 185 √2) / 215 .

<u>*Представление вложенных радикалов*</u>:

Для вложенных радикалов выбор канонического представления является еще более сложным, чем для простых радикалов. Однако характер возникающих при этом задач сохраняется.

Во-первых, необходимо ввести новые квазипеременные. Во-вторых, необходимо решить те же проблемы (1) (2) (3), которые относятся к простым радикалам.

Для примера проиллюстрируем проблему (2) – проблему взаимной независимости вложенных радикалов.

Пример 1. Числа – вложенные радикалы. Имеем взаимозависимость:
$\sqrt{(5 + 2\sqrt{6})} + \sqrt{(5 - 2\sqrt{6})} = 2\sqrt{3}$

Пример 2. Функции – вложенные радикалы. Имеем взаимозависимость:
$\sqrt{(x + \sqrt{(x^2 - 1)})} = \sqrt{((x + 1) / 2)} + \sqrt{((x - 1) / 2)}$

Представление алгебраических функций общего вида:

Ключевая проблема построения канонического представления для алгебраических функций общего вида – это проблема определения их взаимозависимости. Существует два способа решения указанной проблемы:

- Факторизация порождающего полинома алгебраической функции и анализ её результатов

  Пример. Пусть заданы два порождающих уравнения, неприводимых над полиномами с целыми коэффициентами: $P_1(\alpha) = 0$ и $P_2(\beta) = 0$. Если $P_2(\beta) = (\beta + \alpha - 1) * h(\beta, \alpha)$, где h – полином, то алгебраические функции линейно зависимы.

  ;

- Построение примитивных элементов поля алгебраических функций

  Пример. Пусть число α – это корень полинома $(\alpha^4 - 10 * \alpha^2 + 1)$, который равен $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

  Тогда следующие числа:

  $\sqrt{2} = (\alpha^3 - 9 * \alpha) / 2$
  $\sqrt{3} = (11 * \alpha - \alpha^3) / 2$

  можно выразить через него.

  .

Оба способа разрешения взаимозависимости рациональных функций вычислительно трудоёмки, поэтому в системах компьютерной алгебры канонические представления для алгебраических функций не применяются.

Существование теоретических алгоритмов разрешения проблем представления алгебраических функций не означает их практическую реализацию.[6]

[6] Курс Компьютерная алгебра

Пляскина Ульяна Сергеевна, 2 курс, 1 подгруппа

Формы представления матриц

Различают две формы представления матриц:

- Двумерный массив

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix};$$

- Список списков

$$((a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})).$$

Для представления матриц обычно используется плотное представление (т.е. хранятся все элементы матриц, включая нулевые). В некоторых особых случаях для матриц специального вида (диагональных, ленточных и т.п.) применяется разреженное представление. В случае использования разреженного представления требуются специальные алгоритмы преобразований матриц.[7]

[7] Курс Компьютерная алгебра