

## **Тема 1. «Основы компьютерной алгебры»**

### **Лабораторная работа**

#### **Задание 1.1**

#### **Компьютерная обработка информации: модели, методы, средства**

##### **Основные понятия и их определения**

В обыденной жизни информацией называют любые данные или сведения, которые кого-либо интересуют, например сообщение о каких-либо событиях, о чьей-либо деятельности и т. п. «Информировать» в этом смысле означает «сообщить нечто, неизвестное раньше». Таким образом, термин «информация» является понятийным – в различных областях знаний в этот термин имеет свое понятие. Однако можно выделить несколько качеств, присущих любому из понятий об информации:

информация не является ни материей, ни энергией. В отличие от них, она может возникать и исчезать

информация проявляется только при взаимодействии объектов, причем обмен информацией может совершаться не вообще между любыми объектами, а только между теми из них, которые представляют собой организованную структуру (систему).

Последнее предполагает наличие как минимум двух объектов (субъектов) – «источника» информации и «приемника» (потребителя, адресата) информации. Информация несмотря на то, что она не является ни материей, ни энергией, передается от источника к приемнику в материально-энергетической форме в виде сигналов (например, электрических, световых, звуковых и т. д.), распространяющихся в определенной среде.

Сигнал – это физический процесс или явление, несущий сообщение о событии или состоянии объекта наблюдения. Сигнал – это материальный носитель информации.

Информация имеет определенные функции. Основными из них являются:

- познавательная – получение новой информации;
- коммуникативная – функция общения людей;
- управленческая – формирование целесообразного поведения управляемой системы, получающей информацию.

Познавательная функция реализуется через такие этапы обращения информации, как ее синтез (производство), представление, хранение (передача во времени), восприятие (потребление).

Коммуникативная функция реализуется через такие этапы обращения информации, как передача (в пространстве) и распределение.

Управленческая функция информации неразрывно связана с познавательной и коммуникативной и реализуется через все основные этапы обращения, включая обработку.

### Модели

В зависимости от того, какие свойства объекта представляют интерес, он может описываться различными моделями. Кроме того, одна и та же модель может описывать разные объекты.

Все многообразие моделей делится на три класса.

#### 1. Материальные (натурные) модели:

- некие реальные предметы (макеты, муляжи, эталоны);
- уменьшенные или увеличенные копии, воспроизводящие внешний вид моделируемого объекта, его структуру (глобус, модель кристаллической решетки) или поведение (радиоуправляемая модель самолета, велотренажер).

2. Абстрактные модели (геометрическая точка, математический маятник, идеальный газ, бесконечность).

3. Информационные модели – описание моделируемого объекта на одном из языков кодирования информации (словесное описание схемы, чертежи, карты, рисунки, научные формулы, программы и т. д.). Информационная модель, как и любой другой вид информации, должна иметь свой материальный носитель.

Одним из наиболее часто используемых типов информационных моделей является таблица, которая состоит из строк и столбцов.

Широко используется представление моделей с использованием установленных наборов символов – формальных языков. В качестве формального может выступать естественный язык.

Модели такого вида  $c = a + b$ , называют математическими; математические модели широко используются при описании реальных объектов.

Собственно процесс создания модели с использованием формальных языков называется процессом формализации. Формализация реального объекта обычно требует использования знаний из различных областей науки и техники.

### Методы

Системы из  $n$  линейных алгебраических уравнений решаются точными или итерационными методами. Итерационные методы позволяют найти некоторое приближение к точному решению; степень приближения результата применения итерационного метода к точному решению зависит от заданной погрешности вычислений. От нее же зависит количество операций, выполняемых при реализации итерационного метода.

Рассмотрим методы, используемые для решения системы линейных алгебраических уравнений.

*Метод Гаусса* или метод последовательного исключения переменных относится к классу точных методов. Он основан на приведении матрицы коэффициентов  $a_{ij}$  к треугольному виду. Процедура нахождения решения методом Гаусса включает в себя прямой ход и обратный ход. В условиях ограниченной разрядности, характерной для обработки информации на компьютере, рассмотренный метод Гаусса может приводить к серьезным ошибкам. Существенно снизить ошибки в нахождении решения системы линейных алгебраических уравнений, связанные с ограниченностью разрядной сетки, можно при использовании модификаций метода Гаусса, например, метода Гаусса с выбором главного элемента.

*Метод Крамера* (правило Крамера) — способ решения систем линейных алгебраических уравнений с числом уравнений равным числу неизвестных с ненулевым главным определителем матрицы коэффициентов системы (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Метод Крамера требует вычисления  $n+1$  определителей размерности  $n \times n$ . При использовании метода Гаусса для вычисления определителей метод имеет сложность по элементарным операциям сложения-умножения порядка  $O(n^4)$ , что сложнее, чем метод Гаусса при прямом решении системы. Поэтому метод, с точки зрения затрат времени на вычисления, считался непрактичным. Однако в 2010 году было показано, что метод Крамера может быть реализован со сложностью  $O(n^3)$ , сравнимой со сложностью метода Гаусса.<sup>1</sup>

*Метод итераций* используется для решения систем уравнений, в том числе, линейных алгебраических. В последнем случае он гарантирует сходимость решения, если все элементы главной диагонали матрицы коэффициентов  $A$  не равны нулю, т. е.  $a_{ii} \neq 0$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Итерационные методы позволяют найти только приближенное решение. Ситуация усугубляется тем, что для нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений решения могут быть не единственными.<sup>2</sup>

### Средства

Табличные информационные модели удобно создавать и исследовать с помощью специализированных программных продуктов — электронных таблиц и систем управления базами данных.

В технических системах сбор информации осуществляется с помощью первичных преобразователей (датчиков), осуществляющих преобразование представляющей интерес характеристик объекта (полезная информация) в какую-либо характеристику электрического сигнала. В качестве составляющей процесса сбора может выступать задача отделения полезной информации от мешающей (шумов) — задача аналоговой фильтрации.

---

<sup>1</sup> [Википедия. Метод Крамера](#)

<sup>2</sup> [Смирнов В.А., Петрова Л.Н. КОМПЬЮТЕРНАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ](#)

## Структуры данных в компьютерной алгебре

Структурой данных называется совокупность множеств  $\{M_1, M_2, \dots, M_N\}$  и совокупность отношений  $\{P_1, P_2, \dots, P_R\}$ , определённых над элементами этих множеств:  $S = \{M_1, M_2, \dots, M_N; P_1, P_2, \dots, P_R\}$

Пример. Структура массива определяется следующим образом:

$M = \{a_1, a_2, \dots, a_N\},$   
 $P(a_i, a_j) = \text{true}, \text{ если } j=i+1,$   
 $\quad = \text{false} - \text{ в противном случае.}$   
(  $P()$  – функция следования )

Бинарное отношение, задающее массив – орграф. Структура данных линейна, если орграф не содержит циклов и может быть изображен в виде одной линии.

Память вычислительной (алгоритмической) машины имеет линейную структуру. Обработка любого типа информации (имеющего структуру произвольной сложности) должна моделироваться на схеме массива – линейной структуре. Линейная структура памяти – вектор памяти. Отношение «иметь имя» переопределяется с помощью отношения «иметь адрес». Адрес произвольного элемента массива вычисляется по формуле:  $a_i = a_0 + i * b$  ( $a_0$  – база, адрес 1-го элемента массива;  $i$  – номер адресуемого элемента;  $b$  – число ячеек, занимаемых одним элементом массива).

Экземпляром структуры данных называется совокупность  $IS = \{Ma_i, V, P, val\}$ , где  $Ma_i$  – множество элементов  $a_i$ ;  $V$  – множество значений;  $P$  – множество отношений следования;  $val$  – отношение «иметь значение». Схемой структуры данных называется совокупность  $SS = \{Ma_i, P\}$ , где  $Ma_i$  – множество элементов  $a_i$ ;  $P$  – множество отношений следования.

Операции над структурами данных:

- Создание и уничтожение структуры данных;
- Поиск элемента данных в структуре;
- Обновление структуры данных: вставка нового и удаление старого элемента;

- Обход структуры данных с выполнением определённых, наперёд заданных действий.

Базовые типы данных:

- Числа (целые, рациональные, алгебраические, комплексные)
- Математические выражения (арифметика, функции, производные, интегралы, матрицы, уравнения)

Типы целых чисел:

- Короткие целые числа (целые числа одинарной точности)
- Длинные целые числа (целые числа кратной точности)

Представление чисел произвольной точности:

- Массив
- Последовательность
- Списки

#### Длинные целые числа

(примитивное представление – массив):

$$D = \sum_{0 \leq i \leq n} d_i B^i$$

$$D = (d_0, d_1, \dots, d_n)$$

$$n \geq 1, |d_i| \leq (B - 1)$$

$$d_i \geq 0, \text{ если } D < 0$$

$$d_i \leq 0, \text{ если } D > 0$$

$$B - 1 = 2^\mu - 1$$

#### Длинные целые числа

(масштабируемое представление – последовательность):

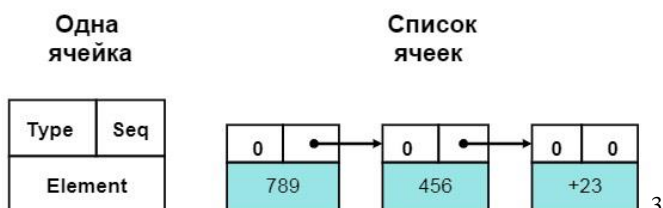
Пример.

$$D = +23456789$$

$B = 10^3$  (в машинном слове – 3 десятичных цифры)

#### Длинные целые числа

(эффективное представление - список):



Представление рациональных чисел и полиномов:

- Рациональное число  $r = (n, d)$ , где  $n, d$  – длинные числа, представленные в виде списка 2-х списков
- Полином от одной переменной с целым коэффициентами представляется 2-х связным списком (коэффициент – длинные целые числа, показатель степени – короткие целые числа)

### **Системы компьютерной алгебры: достижения и перспективы**

Классы систем компьютерной алгебры по функциональному назначению:

- СКА общего назначения – решение задач для большинства основных разделов символьной математики (Maxima, Axiom, Maple, Mathematica, Sage, Yacas)
- Специальные СКА – решение задач для одного или нескольких смежных разделов символьной математики (теория групп – GAP, тензорная алгебра – Cadabra)

Классы систем компьютерной алгебры по типу архитектуры:

- СКА классической архитектуры: системное ядро + прикладное расширение (Axiom, Maple, Mathematica)
- Программный пакет для расширения базовой прикладной математической системы (Maple (ядро) для Matlab и MathCAD)
- Встраиваемое расширение для языка и/или системы программирования (MathEclipse / Symja – Java-библиотека)
- Open Source, GNU GPL, мультиплатформенные СКА (Maxima (Lisp), PARI/GP (C))<sup>4</sup>

Существует огромное многообразие реализаций СКА.

Канонические СКА:

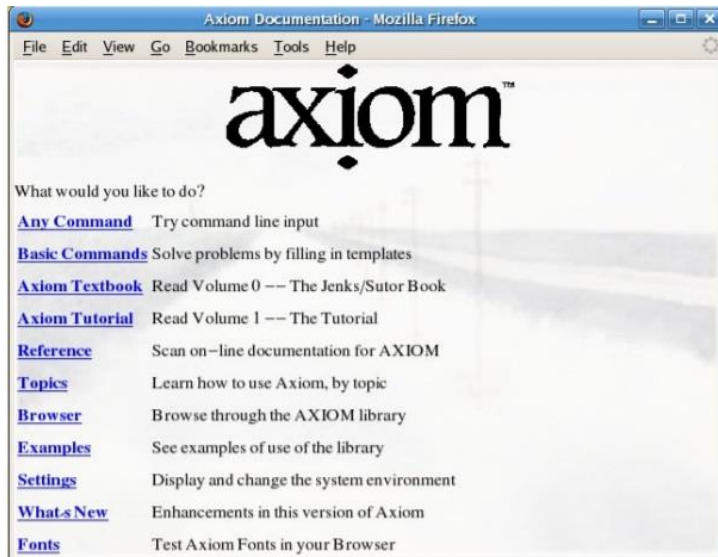
AXIOM – конструктор алгебраических объектов

Формат HyperDoc: список допустимых операций для определённого домена (типа объекта)

Формат Mozilla Firefox: стартовая страница справочной системы

---

<sup>4</sup> [Курс Компьютерная алгебра](#)

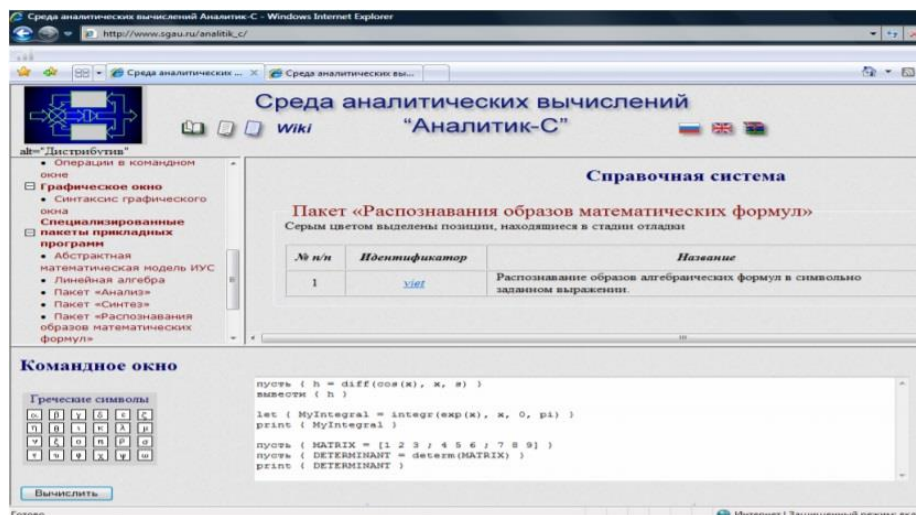


Веб-сервисы:

Аналитик-С – среда аналитических вычислений

Основные характеристики:

- Язык реализации – РНР
- Платформа реализации – сервер Apache
- Открытый исходный код
- Синтаксис и функциональность языка Аналитик
- Коллектив разработчиков: аспиранты и студенты СГТУ и СГАУ
- Формы участия в проекте: производственная практика, ВКР



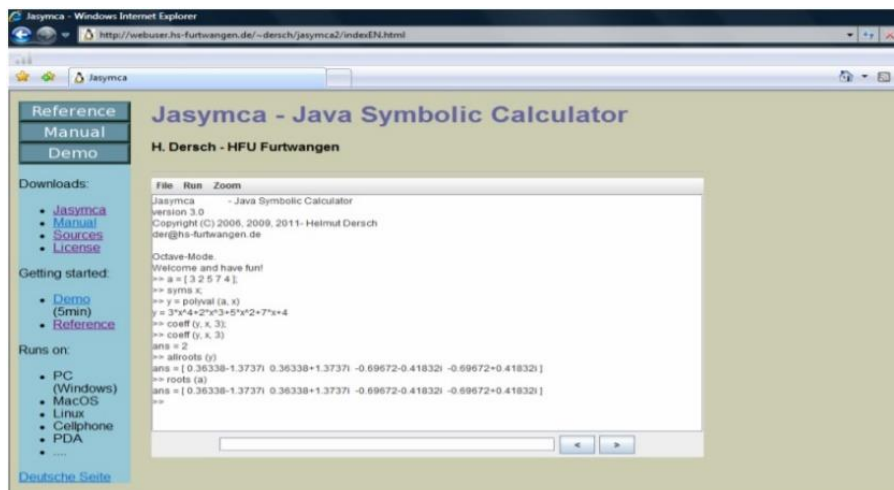
Java-мидлеты:

Jasymca (Java Symbolic Calculator)

Основные характеристики:



- Язык реализации – Java
- Открытый исходный код
- Махита-подобные синтаксис (ASCII-режим) и функциональность
- Минимальные требования к ресурсам (объем кода менее 200 Kb)
- Аппаратные платформы: смартфоны, КПК, ПК
- Программные платформы: Windows / Linux / MacOS; J2SE / J2ME

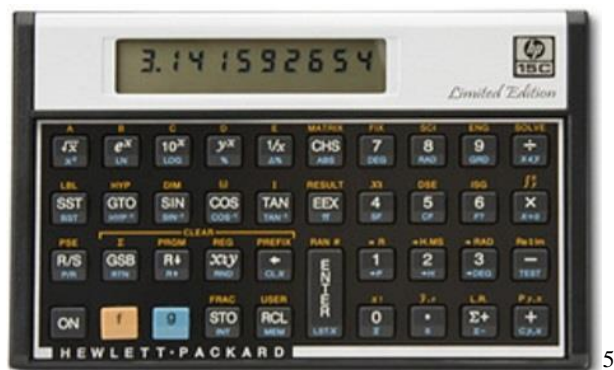


Микрокалькуляторы:

Научные микрокалькуляторы HP-15C

Функциональные возможности:

- Сложные интегралы и производные функций
- Матрицы с действительными и комплексными аргументами
- Системы линейных и нелинейных уравнений
- Численные методы



5

Перспективными направлениями развития являются:

- Расширение состава встроенных и программируемых типов математических объектов (принадлежность математического объекта СКА к встроенным должна определяться не случайной практической необходимостью, а ролью в иерархической системе математических абстракций; способность к созданию расширений СКА должна поддерживаться интерфейсом; интеграция ядра и расширений СКА должна быть прозрачной для любого пользователя СКА);
- Интеграция СКА с другими компьютерными системами (связь с программами числовой обработки; генерация текста программ вычислений; связь с текстовыми процессорами);
- Унификация и объектная ориентация интерфейса пользователя (для унификации пользовательский интерфейс СКА должен иметь те же функциональные возможности, что и интерфейсы других сред программирования и проектирования; для объектной ориентации необходима реализация специальных классов объектов, представляющих алгебраические и другие абстрактные математические категории; для образовательных и рекламных целей требуется наличие инструментальных средств создания интерактивных документов);
- Программирование символьных вычислений произвольной сложности (увеличение количества встроенных в СКА библиотек шаблонов пользовательских приложений для различных предметных областей; использование в качестве языка реализации СКА - функционально расширяемого языка программирования (LISP), обеспечивающее не только неограниченный рост сложности вновь создаваемых приложений, но и совершенствование базовых объектов и алгоритмов аналитических вычислений);
- Ускорение работы СКА (постоянное совершенствование способов символьного представления математических объектов и алгоритмов выполнения аналитических преобразований; применение технологии

ЛП-компиляции машинных кодов для реализации наиболее трудоёмких операций компьютерной алгебры).<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup> [Курс Компьютерная алгебра](#)