МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и информационных систем

Факультет автоматики и вычислительной техники

Кафедра электронных вычислительных машин

Дата сдачи на проверку:

«___» ___________ 2025 г.

Проверка:

«___» ___________ 2025 г.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Отчет по лабораторной работе №9

по дисциплине

Вычислительная математика и методы оптимизаций

Разработал студент гр. ИВТб-2302-05-00 ________________ /Соловьев А.С./

(Подпись)

Проверил старший преподаватель ________________ /Старостин П.А./

(Подпись)

Работа защищена « »_____________ 2025г.

Киров 2025

1 Задание 1

1.1 Условие

С помощью квадратурной формулы Гаусса и 5 известных точек, вычислить интеграл от полинома

$$\int_{-1}^{2} x^8 + 5x^5 + 2x^2$$

с алгебраической точностью 9 и 7. Сравнить получившиеся результаты с аналитическим решением. В отчет по работе должны включаться:

1. График общей функции полинома
2. График на оперделенном интервале
3. Расчет аналитеским способом интеграла
4. Расчет методом Гаусса
5. Сравнить аналитическое решение при условии, что полином будет превышать алгебраическую точность

1.2 Решение

Формула Гаусса:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$

где:

- n – количество узлов (точек) для квадратуры.
- x_i – i-й узел Гаусса.
- w_i – вес, соответствующий i-му узлу x_i.

Построим график функции на интервале $x \in [-100; 100]$

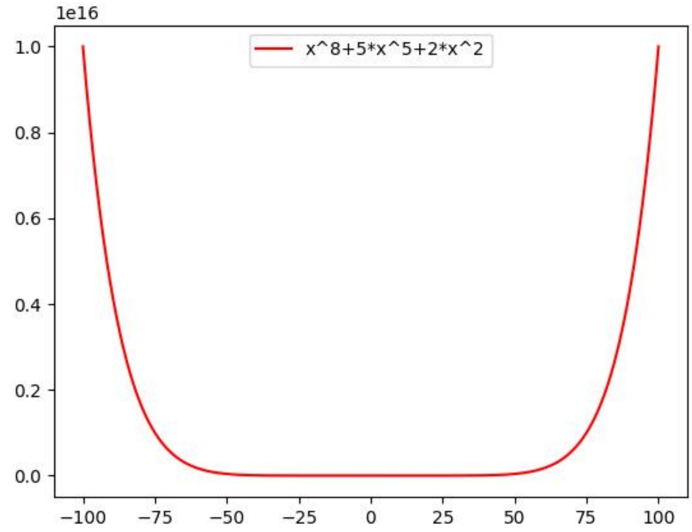

Рисунок 1 – График функции

Построим график функции на интервале, на котором будем делать интегрирование $x \in [-1; 2]$

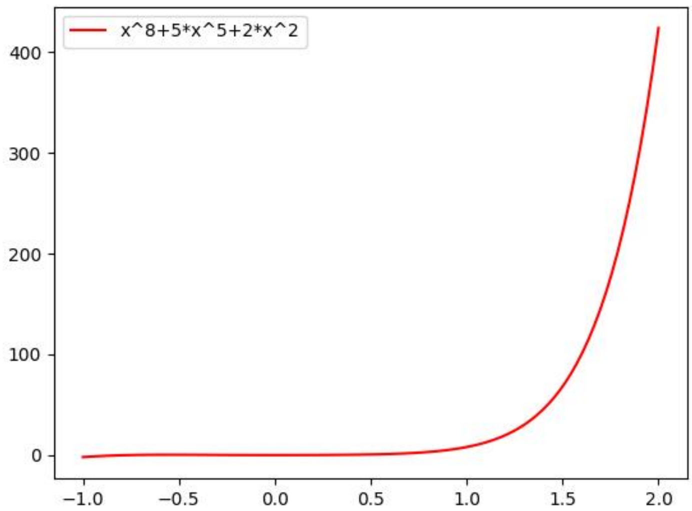

Рисунок 2 – График функции на интегрируемом интервале

Рассчитаем интеграл аналитическим методом:

$$f(x) = x^8 + 5x^5 + 2x^2$$

$$\int_{-1}^{2} x^8 + 5x^5 + 2x^2 = \frac{x^9}{9} + \frac{5x^6}{6} + \frac{2x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2}$$

В результате вычислений интеграл был получен аналитическим способом:

$$\int_{-1}^{2} x^8 + 5x^5 + 2x^2 = 115\frac{1}{2}$$

Расчитаем интеграл с помощью программы написанной в Python. Сначала вычислим интеграл с алгебраической точностью 9, для этого используем 5 точек.

(x_i)	Вес (w_i)
-0.90617985	0.23692689
-0.53846931	0.47862867
0.0	0.56888889
0.53846931	0.47862867
0.90617985	0.23692689

```
Приближенное значение интеграла (5 узлов, алгебраическая точность 9): 115.49999999999957
Погрешность (5 узлов): 4.263256414560601e-14
```

Рисунок 3 – Значение интеграла методом Гаусса для точности 9

В результате работы программы получился ответ

I≈ 115.50

Как видно погрешность для 5 узлов очень мала и стремится к 0.

Расчитаем с точностью, которая меньше степени полнома. Возьмем алгебраическую точность 7. То есть нам нужно 4 точки $(2n - 1)$.

```
Приближенное значение интеграла (4 узлов, алгебраическая точность 7): 115.053673469387746
Погрешность (6 узлов): 4.463265306122537e-01
```

Рисунок 4 – Значение интеграла методом Гаусса для точности 7

Результате работы программы ответ получился:

I≈ 115.05

Видно, что погрешность $e \approx 0.45$ в случае, когда полином превосходит алгебраическую точность допустимую, то выходит погрешность по сравненю с аналитическим вычислением.

2 Задание 2

2.1 Условие

Решить дифференциальное уравнение с помощью метода Рунге-Кутта 2го порядка. Сравнить график исходной функции и полученной в результате решения дифференциального уравнения.

Исходная функция:

$$y(x) = x^6 + x^5 + 8$$

Функция производной:

$$y' = 6x^5 + 5x^4$$

с начальным условием:

$$y(0) = 8$$

2.2 Решение

Таблица результатов для шага $h = 0.1$

Таблица 1: Результаты метода Рунге-Кутты (РК) для шага $h = 0.1$

x	y(прибл.)	y(точное)	Ошибка
0.0	8.000 000	8.000 000	0.000 000
0.1	8.000 028	8.000 011	$1.700\,000 \times 10^{-5}$
0.2	8.000 552	8.000 384	$1.680\,000 \times 10^{-4}$
0.3	8.003 802	8.003 159	$6.430\,000 \times 10^{-4}$
0.4	8.016 028	8.014 336	$1.692\,000 \times 10^{-3}$
0.5	8.050 500	8.046 875	$3.625\,000 \times 10^{-3}$
0.6	8.131 228	8.124 416	$6.812\,000 \times 10^{-3}$
0.7	8.297 402	8.285 719	$1.168\,300 \times 10^{-2}$
0.8	8.608 552	8.589 824	$1.872\,800 \times 10^{-2}$
0.9	9.150 428	9.121 931	$2.849\,700 \times 10^{-2}$
1.0	10.041 600	10.000 000	$4.160\,000 \times 10^{-2}$
1.1	11.440 778	11.382 071	$5.870\,700 \times 10^{-2}$
1.2	13.554 852	13.474 304	$8.054\,800 \times 10^{-2}$
1.3	16.647 652	16.539 739	$1.079\,130 \times 10^{-1}$
1.4	21.049 428	20.907 776	$1.416\,520 \times 10^{-1}$
1.5	27.167 050	26.984 375	$1.826\,750 \times 10^{-1}$
1.6	35.494 928	35.262 976	$2.319\,520 \times 10^{-1}$
1.7	46.626 652	46.336 139	$2.905\,130 \times 10^{-1}$
1.8	61.267 352	60.907 904	$3.594\,480 \times 10^{-1}$
1.9	80.246 778	79.806 871	$4.399\,070 \times 10^{-1}$
2.0	104.533 100	104.000 000	$5.331\,000 \times 10^{-1}$

Таблица результатов для шага $h = 0.05$

Таблица 2: Результаты метода Рунге-Кутты (РК) для шага $h = 0.05$

x	y(прибл.)	y(точное)	Ошибка
0.0	8.000 000	8.000 000	0.000 000
0.1	8.000 016	8.000 011	$5.000\,000 \times 10^{-6}$
0.2	8.000 427	8.000 384	$4.300\,000 \times 10^{-5}$
0.3	8.003 322	8.003 159	$1.630\,000 \times 10^{-4}$
0.4	8.014 762	8.014 336	$4.260\,000 \times 10^{-4}$
0.5	8.047 785	8.046 875	$9.100\,000 \times 10^{-4}$
0.6	8.126 124	8.124 416	$1.708\,000 \times 10^{-3}$
0.7	8.288 647	8.285 719	$2.928\,000 \times 10^{-3}$
0.8	8.594 515	8.589 824	$4.691\,000 \times 10^{-3}$
0.9	9.129 066	9.121 931	$7.135\,000 \times 10^{-3}$
1.0	10.010 413	10.000 000	$1.041\,300 \times 10^{-2}$
1.1	11.396 763	11.382 071	$1.469\,200 \times 10^{-2}$
1.2	13.494 458	13.474 304	$2.015\,400 \times 10^{-2}$
1.3	16.566 737	16.539 739	$2.699\,800 \times 10^{-2}$
1.4	20.943 212	20.907 776	$3.543\,600 \times 10^{-2}$
1.5	27.030 070	26.984 375	$4.569\,500 \times 10^{-2}$
1.6	35.320 993	35.262 976	$5.801\,700 \times 10^{-2}$
1.7	46.408 800	46.336 139	$7.266\,100 \times 10^{-2}$
1.8	60.997 802	60.907 904	$8.989\,800 \times 10^{-2}$
1.9	79.916 888	79.806 871	$1.100\,170 \times 10^{-1}$
2.0	104.133 319	104.000 000	$1.333\,190 \times 10^{-1}$

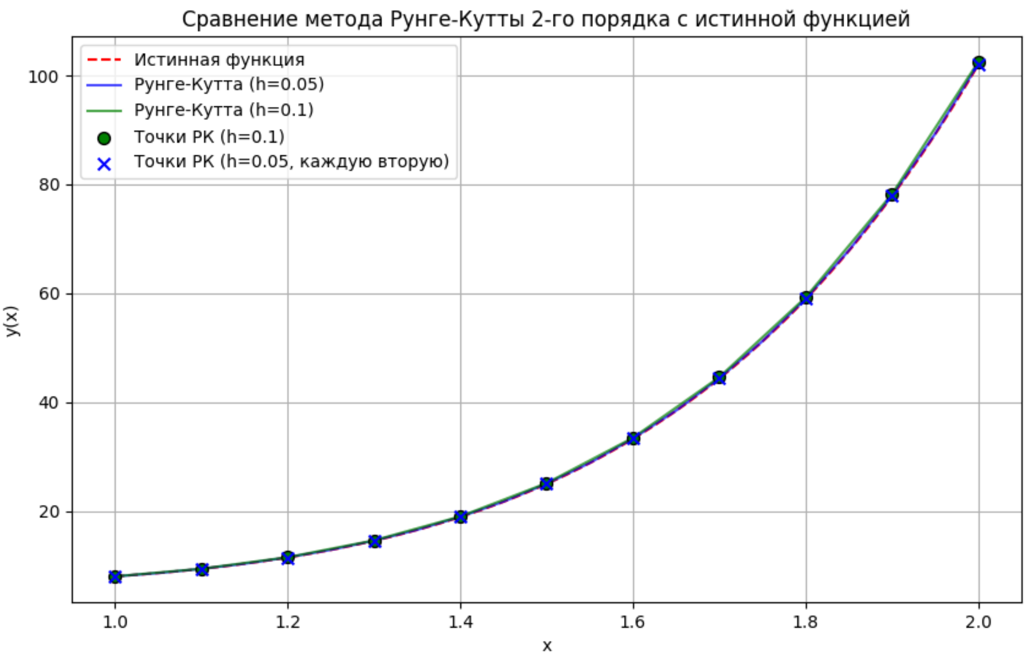

Рисунок 5 – Графики функций

На графике изображена истинная функция пунктиром и функции, полученные в результате решение дифференциального уравнения с разными шагами. Функции очень близки и почти совпадают с минимальной погрешностью.