

# Géométrie du Marché et Champs de Potentiel

## Formalisation mathématique

16 décembre 2025

### Résumé

Ce document formalise une approche géométrique pour représenter un univers d'actifs financiers. Les dépendances statistiques sont encodées sous forme de graphe pondéré, dont un embedding spectral permet une représentation continue de faible dimension. Un signal scalaire défini sur les actifs induit alors un champ de potentiel lisse sur l'espace géométrique, permettant une lecture structurelle et dynamique de l'information de marché.

## Table des matières

<b>1 Cadre général et notations</b>	<b>1</b>
<b>2 Rendements et dépendances statistiques</b>	<b>1</b>
2.1 Rendements logarithmiques . . . . .	1
2.2 Corrélation empirique . . . . .	1
<b>3 Construction du graphe de similarité</b>	<b>2</b>
3.1 Poids d'adjacence . . . . .	2
3.2 Degré et Laplacien . . . . .	2
<b>4 Embedding spectral</b>	<b>2</b>
4.1 Décomposition spectrale . . . . .	2
4.2 Laplacian Eigenmaps . . . . .	2
4.3 Alignement temporel . . . . .	3
<b>5 Signal scalaire sur les actifs</b>	<b>3</b>
<b>6 Champ de potentiel</b>	<b>3</b>
6.1 Potentiel scalaire . . . . .	3
6.2 Champ induit . . . . .	3
<b>7 Interprétation géométrique</b>	<b>4</b>

## 1 Cadre général et notations

On considère un ensemble fini d'actifs indexés par

$$\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}.$$

Pour chaque actif  $i$  et chaque date de trading  $t$ , on dispose d'un prix de clôture  $P_{t,i} > 0$ . Les calculs sont effectués sur des fenêtres temporelles glissantes de longueur  $L$  jours.

Les objets centraux du modèle sont :

- une matrice de corrélation empirique,

- un graphe pondéré de similarité,
- un embedding spectral de ce graphe,
- un signal scalaire défini sur les actifs,
- un potentiel scalaire et un champ vectoriel induits.

## 2 Rendements et dépendances statistiques

### 2.1 Rendements logarithmiques

Les rendements logarithmiques sont définis par :

$$r_{t,i} = \log P_{t,i} - \log P_{t-1,i}.$$

Sur une fenêtre  $\mathcal{W}_t = \{t-L+1, \dots, t\}$ , on note

$$R_t = \{r_{\tau,i} \mid \tau \in \mathcal{W}_t, i \in \mathcal{A}\}.$$

### 2.2 Corrélation empirique

La corrélation entre deux actifs  $i$  et  $j$  est définie par :

$$C_t(i,j) = \text{corr}\left(\{r_{\tau,i}\}_{\tau \in \mathcal{W}_t}, \{r_{\tau,j}\}_{\tau \in \mathcal{W}_t}\right).$$

La matrice  $C_t \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est symétrique, de diagonale unitaire.

## 3 Construction du graphe de similarité

### 3.1 Poids d'adjacence

À partir de la corrélation, on définit une matrice de poids  $W_t$  :

$$W_t(i,j) = \begin{cases} \max(C_t(i,j), 0)^\alpha & \text{si } j \in \mathcal{N}_k(i), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\mathcal{N}_k(i)$  est l'ensemble des  $k$  actifs les plus corrélés à  $i$ .

Cette construction correspond à un graphe de voisinage (type  $k$ -NN) puis une pondération par similarité, classiquement utilisé comme base pour les méthodes spectrales [3, 4].

La matrice est symétrisée :

$$W_t \leftarrow \frac{1}{2}(W_t + W_t^\top).$$

### 3.2 Degré et Laplacien

On définit la matrice de degré :

$$D_t(i,i) = \sum_{j=1}^N W_t(i,j),$$

et le Laplacien symétrique normalisé :

$$L_t = I - D_t^{-1/2} W_t D_t^{-1/2}.$$

Le Laplacien normalisé (et ses variantes) est un objet central de la théorie spectrale des graphes, et sert de fondation à l'analyse géométrique/spectrale des graphes de similarité [2, 3].

## 4 Embedding spectral

### 4.1 Décomposition spectrale

On considère le problème aux valeurs propres :

$$L_t v_k = \lambda_k v_k, \quad 0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N.$$

Les valeurs propres nulles correspondent aux composantes connexes du graphe [2, 3].

### 4.2 Laplacian Eigenmaps

L'embedding en dimension  $d$  est donné par :

$$X_t = \begin{bmatrix} v_{k_1} & \cdots & v_{k_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d},$$

où  $v_{k_1}, \dots, v_{k_d}$  sont les premiers vecteurs propres associés à des valeurs propres strictement positives.

Cette construction correspond à la méthode des *Laplacian Eigenmaps* proposée par Belkin et Niyogi [1], et est fortement liée au point de vue “variété” via l'approximation d'opérateurs continus (Laplace–Beltrami) par des Laplaciens de graphes [1, 3].

Chaque actif  $i$  est ainsi représenté par un point  $x_{t,i} \in \mathbb{R}^d$ .

### 4.3 Alignement temporel

L'embedding est défini à transformation orthogonale près (rotations/réflexions) car les espaces propres sont invariants par orthogonalité sur les sous-espaces dégénérés. Pour assurer la cohérence temporelle, on aligne  $X_t$  sur  $X_{t-1}$  via un problème de Procrustes :

$$R^* = \arg \min_{R \in O(d)} \| (X_t - \bar{X}_t) R - (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1}) \|_F,$$

où  $\bar{X}$  désigne la moyenne des lignes. La solution fermée (via SVD de la matrice de corrélation croisée) est celle du problème d'Orthogonal Procrustes [5].

## 5 Signal scalaire sur les actifs

On définit un signal  $\phi_t \in \mathbb{R}^N$  attaché aux actifs. Un exemple générique est un score moyenne-volatilité :

$$s_i = \frac{\mu_i}{\sigma_i}, \quad \mu_i = \frac{1}{L} \sum_{\tau \in \mathcal{W}_t} r_{\tau,i}, \quad \sigma_i^2 = \text{Var}(\{r_{\tau,i}\}),$$

normalisé sous forme de score centré-réduit :

$$\phi_{t,i} = \frac{s_i - \bar{s}}{\text{std}(s) + \varepsilon}.$$

Le signal  $\phi_t$  est interprété comme une intensité scalaire attachée à chaque point  $x_{t,i}$ .

## 6 Champ de potentiel

### 6.1 Potentiel scalaire

Soit une grille de points  $\mathcal{G} = \{g_m\}_{m=1}^M \subset \mathbb{R}^d$ . On définit un noyau gaussien isotrope (aussi appelé noyau RBF / exponentiated quadratic) :

$$K_\sigma(g, x) = \exp \left( -\frac{\|g - x\|^2}{2\sigma^2} \right).$$

Ce noyau est standard en lissage noyau et en méthodes à noyaux [6, 7].  
Le potentiel est défini par :

$$U_t(g) = - \sum_{i=1}^N \phi_{t,i} K_\sigma(g, x_{t,i}).$$

Il s'agit d'une superposition lisse d'influences locales.

## 6.2 Champ induit

Le champ vectoriel associé est donné par :

$$F_t(g) = \sum_{i=1}^N \phi_{t,i} \frac{(g - x_{t,i})}{\sigma^2} K_\sigma(g, x_{t,i}).$$

Ce champ correspond (à un signe près) au gradient spatial du potentiel :

$$F_t(g) = -\nabla U_t(g).$$

## 7 Interprétation géométrique

- Les actifs sont organisés sur une variété de faible dimension induite par leurs dépendances statistiques [1, 3].
- Le signal  $\phi$  agit comme une densité de charge.
- Le potentiel  $U$  révèle des bassins et des crêtes d'influence collective (lissage noyau) [6].
- Le champ  $F$  décrit des directions privilégiées de structuration locale.

Cette construction fournit une représentation continue, stable et interprétable de la structure du marché.

## Références

- [1] M. Belkin and P. Niyogi. *Laplacian Eigenmaps for Dimensionality Reduction and Data Representation*. Neural Computation, 15(6) :1373–1396, 2003. <https://direct.mit.edu/neco/article/15/6/1373/6730/laplacian-eigenmaps-for-dimensionality-reduction>
- [2] F. R. K. Chung. *Spectral Graph Theory*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, No. 92, AMS, 1997. (Lecture notes PDF) <https://fachung.ucsd.edu/research/cbms.pdf>
- [3] U. von Luxburg. *A Tutorial on Spectral Clustering*. Statistics and Computing, 17 :395–416, 2007. <https://arxiv.org/abs/0711.0189>
- [4] A. Y. Ng, M. I. Jordan, and Y. Weiss. *On Spectral Clustering : Analysis and an Algorithm*. In Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS), 2002. <https://ai.stanford.edu/~ang/papers/nips01-spectral.pdf>
- [5] P. H. Schönemann. *A Generalized Solution of the Orthogonal Procrustes Problem*. Psychometrika, 31(1) :1–10, 1966. DOI : 10.1007/BF02289451.
- [6] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman. *The Elements of Statistical Learning : Data Mining, Inference, and Prediction*. 2nd edition, Springer, 2009. (Free PDF) <https://www.stat.ucla.edu/~ywu/research/documents/BOOKS/ElementsLearningII.pdf>
- [7] C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press, 2006. (Free PDF) <https://gaussianprocess.org/gpml/chapters/RW.pdf>