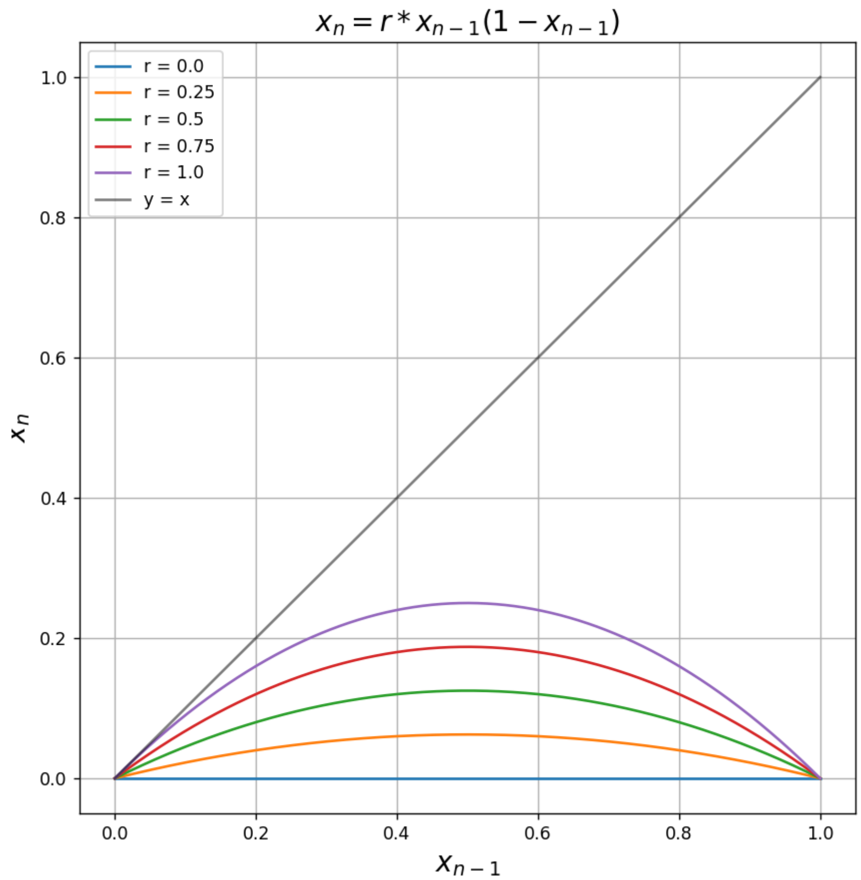


Logistic map Работу выполнили: Кульбаев Али Ахматович J3112 505252, Горин Илья Кириллович J3112 504736,

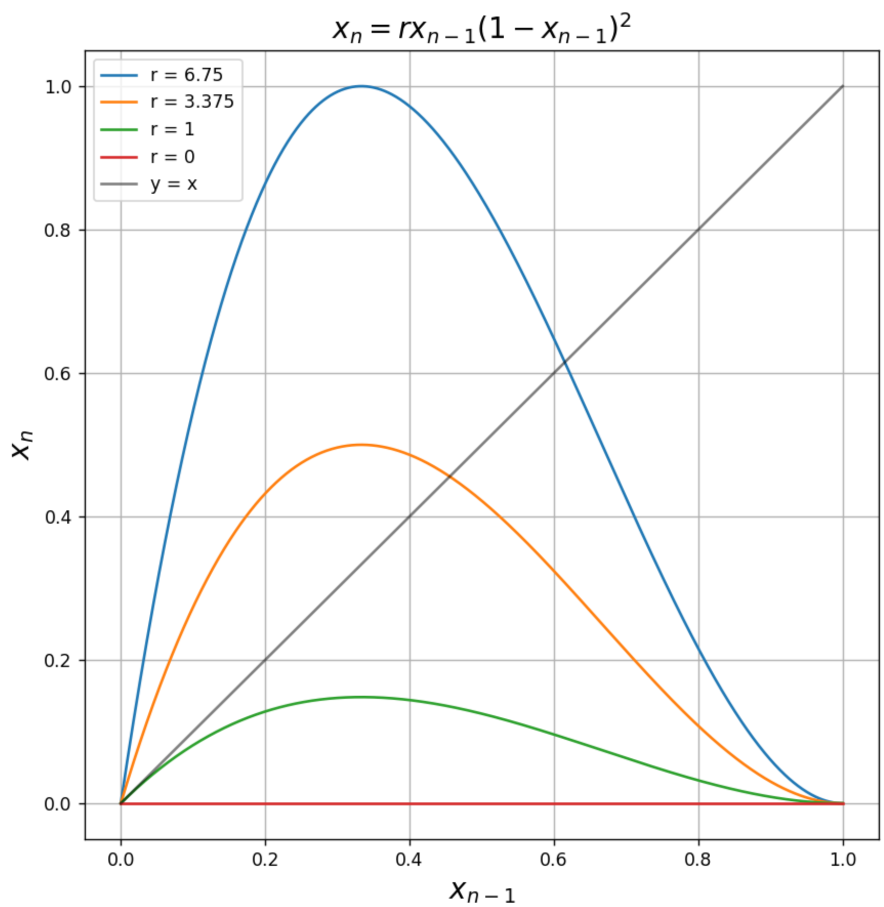
EASY

Докажем по ММИ, что $\forall n \in N, \forall r \in [0;1]$ выполняется $0 \leq x_0 < 1 => 0 \leq x_n < 1$ (ММИ - метод математической индукции здесь и далее)

База $n = 0$, по условию: $0 \leq x_0 < 1 -$ база выполнена. Пусть для $k \geq 0$ верно $x_k \in [0;1)$. Рассмотрим $x_{k+1} = rx_k(1-x_k)$: $r \in [0;1], x_k \in [0;1), 1 - x_k \in [0;1)$ => $x_{k+1} \in [0;1)$. Отсюда по принципу мат индукции это верно для всех n

easy_1.py Параметр r влияет на поведение функции зависимости x_n от x_{n-1} так: При увеличении r увеличивается наклон f, то есть при малых r теряется популяция, при умеренных достигается устойчивая популяция, а при больших r появляются колебания.

easy_N2.py Вывод о сходстве или различии поведения логистического отображения и точечного отображения из варианта N = 2: Сходства: 1. Всегда присутствует точка сходимости $x = 0$ которая при малых r является неподвижной; 2.


$x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1})^2$
r = 6.75
r = 3.375
r = 1
r = 0
y = x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x_n
x_{n-1}

Система имеет положительную точку сходимости при больших r; 3. С ростом r появляются колебания; 4. Монотонная зависимость от r, при больших значениях чувствительность к начальным значениям популяции повышается. Различия: 1. Значения x_{n+1} растут медленнее, так как функция $(1 - x^2)$ подавляет значения сильнее $(1-x)$; 2. Разница значений r для выхода из равновесия, в логистическом отображении достаточно $r > 1$, при $N = 2$ значения больше. так как сама функция меньше по амплитуде; 3. Устойчивость нулевого состояния будет сохранятся на более длинном диапазоне параметра чем в логистике; 4. Верхнее значение r, при котором система не выходит за пределы $(0; 1)$больше чем в обычной логистике.

Чем могут быть вызваны сходства/различия: 1. Сходства вызваны тем что оба отображения имеют общий структурный вид: $x_{n+1} = r * x_n * F(x_n)$. А также тем что динамика управляет параметром r как коэффициентом размножения. 2. Различия вызваны несколькими причинами: а) Во втором варианте ограничивающий фактор жестче, что делает рост слабее: $(1 - x^2) < (1 - x)$ б) Максимально значение функции меньше: Для логистики: max $x(1-x) = 1/4$ В нашем варианте: max $x(1 - x^2) = 4/27$ $4/27 \approx 0.148, 1/4 = 0.25, 0.148 < 0.25$ 3. Более высокая степень нелинейности увеличивает число возможных динамических режимов при больших значениях r.

NORMAL

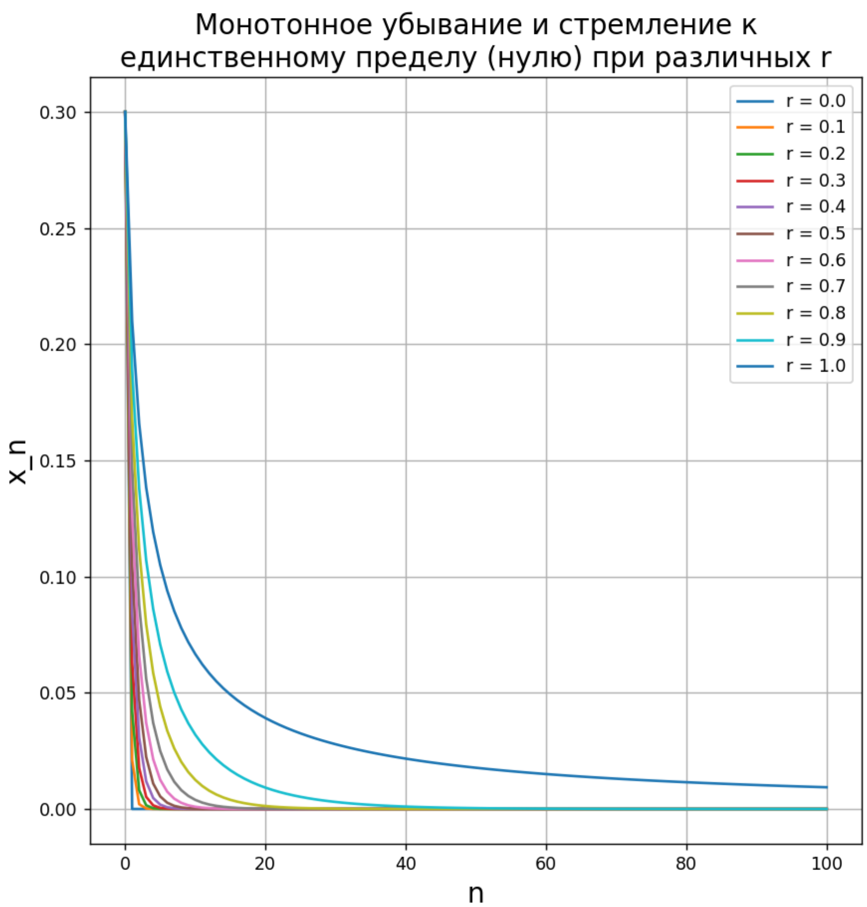
1) Найдем неподвижные точки $x_n = rx_n(1 - x_n)$: Заметим, что первая неподвижная точка $x_n = 0$. Вторую точку получим, разделив обе части на $x_n \neq 0$. Получаем $1/r = 1 - x_n$ => $x_n = 1 - 1/r$

2) Логистическое отображение имеет одну неподвижную точку если две ранее найденные точки совпадают, то есть $1 - 1/r = 0$ => $r = 1$. Следовательно, отображение имеет несколько неподвижных точек в противном случае, $r \neq 1$ и $r \neq 0$ (т.к. $1/r$)

3) Так как логистическое отображение $f(x_{n+1}) = rx_n(1 - x_n)$ является квадратичной функцией, то у уравнения $f(x) = x$ будет максимум 2 различных корня. Следовательно, у отображения всегда максимум две неподвижные точки

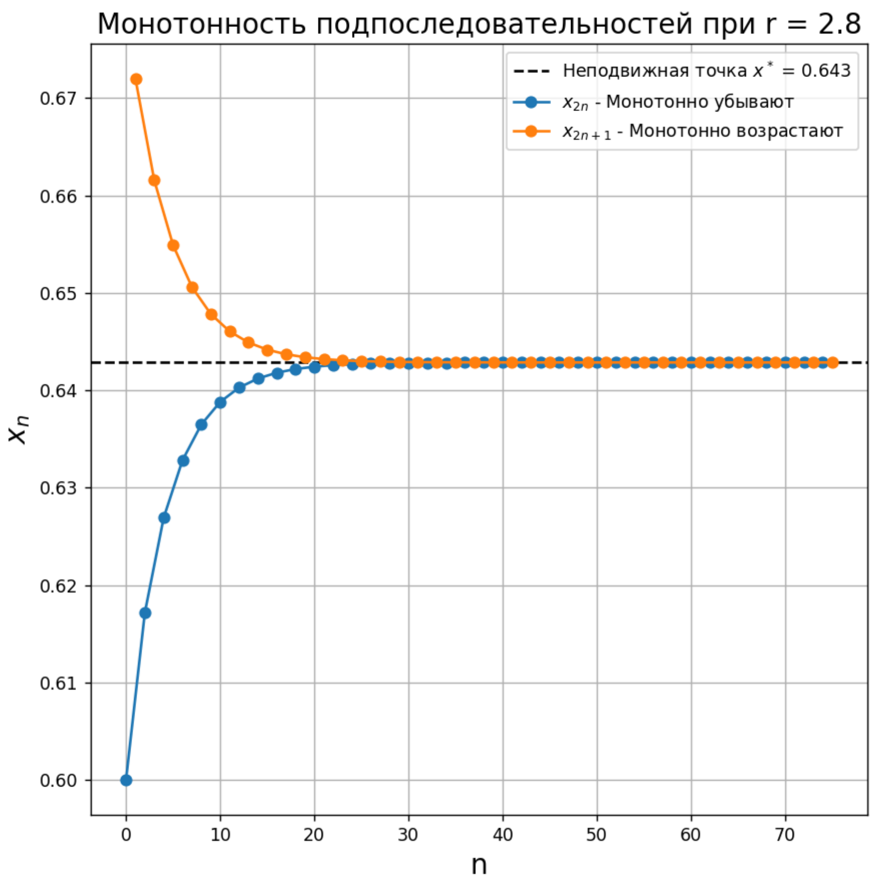
Докажем по ММИ, что при $x_0 \in (0; 1)$ $r \in (0; 1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. База n = 1: $x_0 > x_1$, то есть $x_0 > rx_0(1-x_0)$, разделим обе части на $x_0 > 0$: $1 > r(1 - x_0)$, поскольку $r \in (0; 1]$ и $(1-x_0) \in (0; 1)$ => это верно. Предположим, что $x_n < x_{n-1}$; покажем, что $x_{n+1} < x_n$: $x_{n+1} = rx_n(1-x_n) < x_n$ разделим обе части на $x_n > 0$: $r(1-x_n) < 1$ или $1 - 1/r < x_n$, но так как $r \in (0; 1]$ и $0 < x_n$, то это верно; следовательно, утверждение верно по принципу мат индукции. Пусть $\lim_{x\to\infty} f(x_n) = A$. Так как $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$, то $A = rA(1-A)$ или $A = rA - rA^2$; $A(rA - r + 1) = 0$ => $A_1 = 0; A_2 = 1 - 1/r$. Проверим A_2: так как $r \in (0; 1]$, то $1 - 1/r \leq 0$, то есть $A_2 \leq 0$, но последовательность всегда положительная => единственное возможное значение предела $A_1 = 0$ normal_1.py

Пусть $r \in (2; 3), x_{2n} > x^*, x_{2n+1} < x^*$. Докажем монотонность подпоследовательностей: $\{x_{2n}\}$ и $\{x_{2n+1}\}$ а затем проверим графически. Докажем для чётной последовательности, используем ММИ. Пусть $r \in (2; 3)$ и $\forall n : a_n = x_{2n} > x^*$ и $b_n = x_{2n+1} < x^*$; Обозначим неподвижную точку $x^* = 1 - 1/r$ тогда $\forall c, d : f(c) - f(d) = r(c - d)(1 - (c + d)), f(x) = rx(1 - x)$ База: По условию


Монотонное убывание и стремление к
единственному пределу (нулю) при различных r
x_n
n
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
20
40
60
80
100
r = 0.0
r = 0.1
r = 0.2
r = 0.3
r = 0.4
r = 0.5
r = 0.6
r = 0.7
r = 0.8
r = 0.9
r = 1.0

$a_0 > x^*$ и $b_0 < x^*$ Предположим, что $\exists n : a_n > a_{n+1} > x^*$ и $b_n < b_{n+1} < x^*$ Шаг индукции(чётные убывают): Поскольку $b_n < b_{n+1}$ применим тождество к $c = b_n, d = b_{n+1} : f(b_{n+1}) - f(b_n) = r(b_{n+1} - b_n)(1 - (b_n + b_{n+1}))$. Из $b_n, b_{n+1} < x^*$ и $x^* > 1/2$ (потому что $r > 2$) в рассматриваемой ситуации => $b_n + b_{n+1} > 1$, поэтому множитель $1 - (b_n + b_{n+1}) < 0$. Первый множитель положителен, следовательно, правая часть отрицательна => $f(b_{n+1}) < f(b_n)$. Но $f(b_{n+1}) = a_{n+2}$ и $f(b_n) = a_{n+1}$, значит $a_{n+2} < a_{n+1}$ то есть четные члены продолжают убывать. Шаг индукции(нечётные возрастают): Аналогично, так как $a_{n+2} < a_{n+1}$ и оба $> x^*$ их сумма $a_{n+2} + a_{n+1} > 1$ подставив $c = a_{n+2}$ и $d = a_{n+1}$ в тождество получаем: $f(a_{n+1}) - f(a_{n+2}) = r(a_{n+1} - a_{n+2})(1 - (a_{n+1} + a_{n+2})) < 0$, откуда следует $b_{n+2} > b_{n+1}$ то есть нечётные члены возрастают. Таким образом индукция показывает что a_n монотонно убывает и ограничена снизу x^*, а b_n монотонно возрастает и ограничена сверху x^*. По теореме о монотонной ограниченной последовательности a_n и b_n имеют пределы $A \geq x^*$ и $B \leq x^*$ соответственно. Из соотношений $b_n = f(a_n), a_{n+1} = f(b_n)$ получаем: $B = f(A), A = f(B)$. Следовательно $A = f(f(A))$, то есть A неподвижная точка $F = f \circ f$. Единственная допустимая по положению оси неподвижная точка это x^* => $A = B = x^*$. То есть обе подпоследовательности сходяться к x^* normal_2.py

Для $x \in [0; 1]$ имеем $f(x) = rx(1 - x) \in [0; 1]$ при $r \in [0; 4]$ для наших значений это верно, следовательно последовательность остаётся в $[0; 1]$. Определим неподвижные точки $x = rx(1 - x)$ => $x(r(1 - x) - 1 = 0$. Получим 2 корня: $x = 0$, $x^* = 1 - 1/r$ (при $r \neq 0$). Для $r > 1$ второй корень лежит в $(0; 1)$. Поэтому будем считать, что x^* предел всех траекторий с $x_0 \in (0; 1)$. Рассмотрим случай когда $r \in (1; 2]$. Возьмём произвольный $x \in (0; 1)$. Теперь рассмотрим разность: $f(x) - x = rx(1 - x) - x = x(r(1 - x) - 1)$. Можно заметить, что $r(1 - x) - 1 > 0$ <=>$1 - x > 1/r$ <=> $x < 1 - 1/r = x^*$. Поэтому: Если $0 < x < x^*$, то $f(x) - x > 0$ => $f(x) > x$; Если $x = x^*$, то $f(x) = x$; Если $x^* < x < 1$, то $f(x) - x < 0$ => $f(x) < x$. Рассмотрим последовательность x_n: Если $x < x^*$, то $x_1 = f(x_0) > x_0$. Тогда по тем же соображениям $x_1 < x^*$ => $x_0 < x_1 < x^*$, повторяя получим: $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x^*$, то есть, чётная монотонная последовательность, ограниченная сверху x^*, следовательно сходящаяся к некоторому пределу $A \leq x^*$. Передав предел в $x_{n+1} = f(x_n)$, получим $A = f(A)$, => $A \in (0; x^*)$. Но $A \geq x_0 > 0$ => $A = x^*$; Если $x_0 > x^*$, аналогично $x_1 < x_0$ и $x_1 > x^*$ получаем $x^* < ... < x_2 < x_1 < x_0$, то есть последовательность монотонно убывает и ограничена снизу x^*, снова сходиться x^*. Таким образом $\forall x_0 \in (0; 1)$ при $r \in (1; 2]$ имеем монотонную сходимость $x_n \to x^*$. Теперь рассмотрим случай когда $r \in (2; 3]$. При $r > 2$ можно заметить, что $x^* > 1/2$. В таком случае поведение итерации становиться чередующимися: если точка правее x^*, её образ лежит левее x^*, и наоборот. Для строгого доказательства используем простое тождество: $\forall a, b : f(a) - f(b) = r(a - b)(1 - (a + b))$. Пусть $c_n := x_{2n}$ - чётные члены, а $d_n := x_{2n+1}$ - нечётные. Преположим, что $c_n > x^* > d_n$, пользуясь тождеством с $b = d_n, a = d_{n+1}$ получим: $c_{n+2} - c_{n+1} = f(d_{n+1}) - f(d_n) = r(d_{n+1} - d_n)(1 - (d_n + d_{n+1}))$. Так как $d_n, d_{n+1} < x^*$ и $x^* > 1/2$, сумма $d_n + d_{n+1} > 1$, следовательно множитель $1 - (d_n + d_{n+1}) < 0$. Поскольку $d_{n+1} - d_n > 0$, правая часть отрицательна, и значит $c_{n+2} < c_{n+1}$. Аналогично $d_{n+2} > d_{n+1}$. То есть: Последовательность $c_n = x_{2n}$ монотонно убывает


Монотонность подпоследовательностей при r = 2.8
Неподвижная точка x^* = 0.643
x_{2n} - Монотонно убывают
x_{2n+1} - Монотонно возрастают
x_n
n

и остаётся $\geq x^*$; Последовательность $d_n = x_{2n+1}$ монотонно возрастает и остаётся $\leq x^*$. Так как они ограничены, и монотонны, то имеют пределы A, B соответственно. Передав пределы в $d_n = f(c_n), c_{n+1} = f(d_n)$ получим: $B = f(A)$, $A = f(B)$ Отсюда $A = f(f(A))$, то есть A - неподвижная точка отображения $f \circ f$. Но возможные неподвижные точки f только 0 и x^*; По расположению $A \geq x^*$ и $B \leq x^*$ единственный совместимый вариант - $A = B = x^*$. Значит обе подпоследовательности сходятся к x^*, значит и вся последовательность сходится к x^*. Таким образом $\forall x_0 \in (0; 1)$ и $\forall r \in (1; 3]$ справедливо: $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* = 1 - 1/r$.

1) Неподвижная точка x^* удовлетворяет $x^* = g(x^*) = rx^*(1-(x^*)^2)$. Переносим в левую часть и выносим x^*: $x^*(1 - r(1-(x^*)^2)) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0$ если $x^* \neq 0$, то $1 - r(1 - (x^*)^2) = 0 \Rightarrow r(1 - (x^*)^2) = 1$, следовательно $1 - (x^*)^2 = 1/r$, $(x^*)^2 = 1 - 1/r$. Таким образом, при $r > 1$ существуют два симметричных неподвижных значениях $(x_{2,3}^* = +- \sqrt{1 - 1/r}$. Если мы рассматриваем начальные условия $x_0 \in (0; 1)$, то интересна только положительная неподвижная точка $x_+^* = \sqrt{1 - 1/r}$ при $r > 1$. Если $r \in (0; 1)$, то $1 - 1/r \leq 0$, поэтому других неподвижных точек, кроме 0 в действительных числах нет.

2) Так как мы рассматриваем последовательность $x_{n+1} = g(x_n) = rx_n(1 - x_n^2)$, с начальным $x_0 \in (0; 1)$, можно отметить что при малых значениях x справедливо $g(x) \approx rx$. Локальная линейная оценка даст критерий: если $r < 1$, то при достаточно малом x следующая итерация уменьшиться, а при $r > 1$ малые положительные значения будут расти. Поэтому необходимое условие стабильности нуля: $r \leq 1$. Докажем, что для $r \in (0; 1]$, последовательность монотонно убывает и сходиться к нулю. Пусть $x_n \in (0; 1)$. Тогда $1 - x_n^2 \in (0; 1)$ и при $r \in (0; 1]$: $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n^2) \leq rx_n \leq x_n$, а при $r \in (0; 1]$ строгое неравенство $x_{n+1} < x_n$ выполняется для всех $x_n \in (0; 1)$. Следовательно при $r \in (0; 1]$ последовательность не возрастает, при $r < 1$ она строго убывает. Последовательность также остаётся неотрицательной. Значит она убывающая и ограничена снизу, откуда существует предел $A \geq 0$. Переходя к пределу в рекуррентной форме: $A = rA(1 - A^2)$. Решения этого уравнения: $A = 0$ или $A^2 = 1 - 1/r$. Но при $r \in (0; 1]$ второй вариант невозможен, следовательно $A = 0$. Значит $\forall r \in (0; 1]$ и $x_0 \in (0; 1) : x_{n+1} < x_n$ (при $r < 1$), $\lim n \to \infty : x_n = 0$. Если же $r > 1$, то малая положительная величина будет увеличиваться. Следовательно ноль в этом случае неустойчив и последовательнось не может сходиться к нулю для всех начальных $x_0 \in (0; 1)$. Следовательно диапазоном параметра r для монотонной сходимости к нулю это $0 < r \leq 1$. 3) normal_3.py

HARD

1) При увеличении r от 3 увеличиваются периоды циклов, но при приближении r к r_∞ длина цикла начинает рости еще более стремительно и система начинает демонстрировать менее предсказуемое поведение. 2) В интервале $r \in (3, r_\infty)$ появляются циклы периодов 2, 4, 8, 16, 32 ... Других значений m не обнаружено пока r не превращается в хаос, следовательно, можно сделать вывод, что длина устойчивого цикла равна степени двойки. Ограничение m: $m = 2^p, p = 1, 2, 3, 4, 5...$ hard_1.py

1) hard_2.py 2) Рассмотрим 4 случая: 1. Цикл порядка 1, он же устойчивая неподвижная точка: $x^* = f(x^*)$ Проанализировав график можно обнаружить что: а) Ступени лестницы постепенно устремляются в одну точку на диагонали; б)

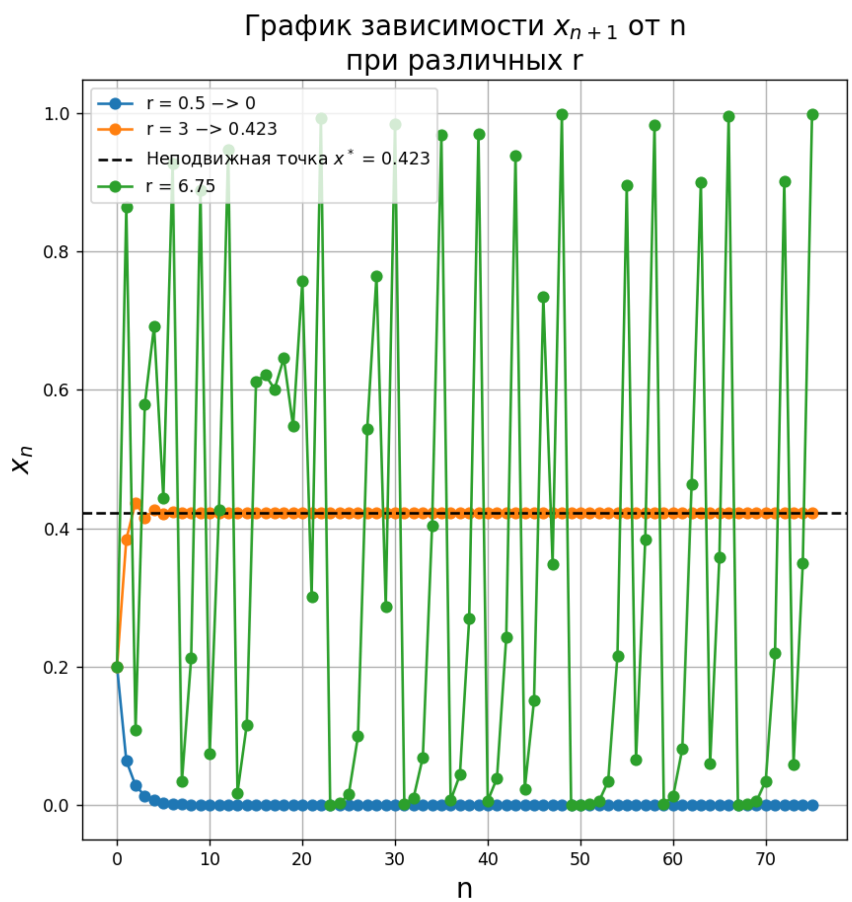
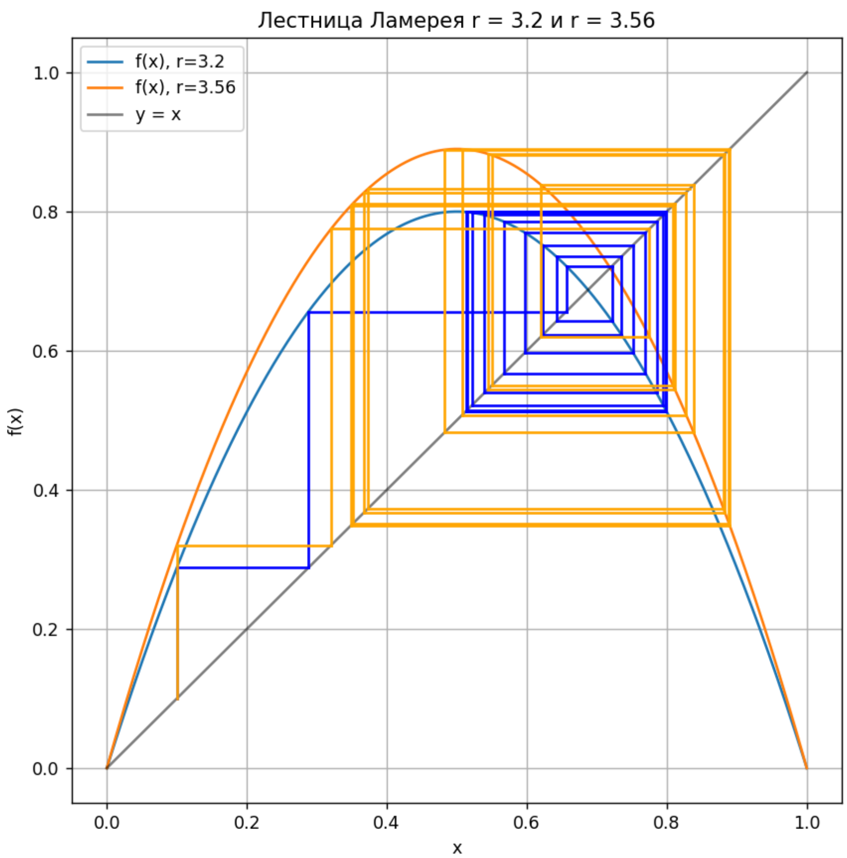


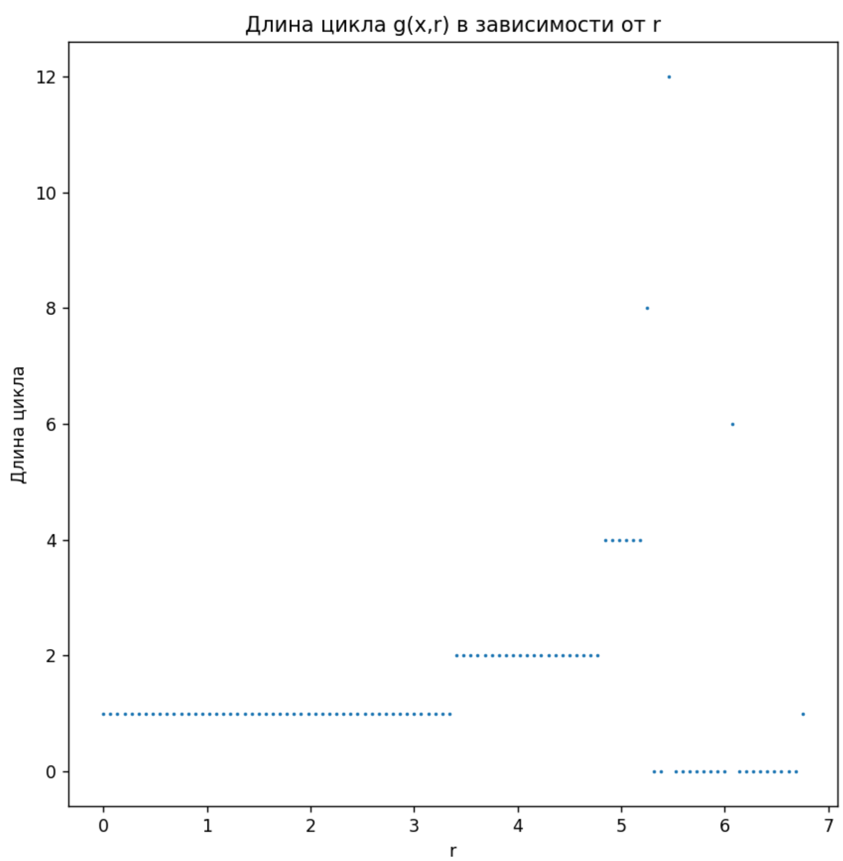
График зависимости x_{n+1} от n
при различных r
r = 0.5 –> 0
r = 3 –> 0.423
Неподвижная точка x^* = 0.423
r = 6.75
x_n
n

```
[2, 4, 8, 16, 32]
```


Лестница Ламерея r = 3.2 и r = 3.56
f(x), r=3.2
f(x), r=3.56
y = x
f(x)
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Фигура сжимается в точке; с) Ступени перестают быть различимыми, они могут превращаться в вертикальный отрезок который резко уходит внутрь точки. 2. Цикл порядка 2: Точки x_1, x_2 отличаются и выполняется: $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_1$. Проанализировав график, можно обнаружить что вместо схождения в одну точку ступени зацикливаются между двумя точками. То есть лестница формирует замнкутый прямоугольник. 3. Цикл порядка $2^p, p > 1, p \in N$: Так как любой цикл порядка $k, k \in N$ представляет собой набор из k различных точек: $x_1, x_2, ..., x_k, x_{m+1} = f(x_m), x_{k+1} = x_1$. На графике это будет означать что точки x_m это k пересечений графика итерации $f^k(x)$ с диагональю, которые не являются пересечениями для меньших степеней. Тогда, так как любой цикл порядка k на графике будет превращатся в замкнутую ломаную из $2k$ отрезков. При $k = 2^p$ это замкнутая лестничная петля (петля здесь и дальше, это замкнутый фрагмент траектории по которому начинает ходить система с некоторого момента) с 2^{p+1} сегментами, то есть по мере роста p она будет становиться сложнее и плотнее. Например, при $p = 4$ на лестнице будет петля из 8 отрезков, которая будет выглядеть как фигура четырёхугольной формы. При $p = 8$ она будет выглядеть как петля с 16 отрезками, и будет формировать сложный восьмиугольник. И так далее. 4. Хаотичный порядок: При очень больших значениях p: $p \to \infty$, точки будут стремиться к плотному множителю. Всё перейдёт в хаос. В хаотическом порядке лестница не будет формировать одну замкнутую петлю - итерации не будут фиксировать замкнутую ограниченную цепочку отрезков, на лестнице мы будем видеть сеть многообразных пересечений, временной ряд перестанет быть строго периодическим и станет чувствительным к начальным условиям. Также могут образовываться периоды в которых существует периодичность - в этих местах будут стабильные петли, но они как правило будут окружены хаосом.

hard_3.py Длина цикла заданного вариантом N = 2 отображения $g(x_n)$ с изменением параметра r меняется следующим образом: 1. При малых r длина цикла 1 (фиксированная точка) 2. При увеличении r происходит удвоение периода 3. При больших r начинается хаотичное поведение Сходства с логистическим отображением: 1. Имеют устройчивую фиксированную точку при малых r 2. Проходят период удвоения 3. Появляется хаос при больших r 4. Имеют интервалы r, где есть устойчивый цикл внутри хаоса Вывод: Отображение $g(x) = rx(1-x)^2$ ведёт себя похожим образом с логистическим отображением.



Длина цикла g(x,r) в зависимости от r
Длина цикла
r
0
2
4
6
8
10
12
0
1
2
3
4
5
6
7