Factorización LU

Para un sistema de ecuaciones lineales,

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2$$
$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + \ldots + a_{3,n}x_n = b_3$$
$$\ldots$$
$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n$$

donde los coeficientes $a_{i,j}$ y los valores b_i con $i, j = 1, 2, \ldots, n$ son conocidas, la solución está dada por los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. El algoritmo 1 determina los valores de la solución.

Demostración. El sistema de ecuaciones lineales anterior se pueden reescribir en su forma matricial como

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{1}$$

donde la matriz A esta compuesta por los elementos $a_{i,j}$ donde el indice i determina la ecuación y j el coeficiente, el vector $\vec{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$ y el vector $\vec{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n]^T$.

La matriz A puede ser factorizada en una matriz triangular por abajo (lower) L y una matriz triangular por arriba (upper) U de la forma

$$A = LU, \tag{2}$$

sustituyendo en la ecuación (1), deja

$$LU\vec{x} = \vec{b}, \tag{3}$$

dado que la matriz L es triangular, existe su inverso L^{-1}, multiplicando por la izquierda L^{-1} a la ec. (3)

$$L^{-1}LU\vec{x} = IU\vec{x} = U\vec{x} = L^{-1}\vec{b}. \tag{4}$$

Definimos el vector $\vec{b}'$ como

$$\vec{b}' = L^{-1}\vec{b}, \tag{5}$$

si multiplicamos por la izquierda L a la ec. (5) deja

$$L\vec{b}' = LL^{-1}\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}. \tag{6}$$

En resumen y por lo tanto, obtenemos las relaciones

$$L\vec{b}' = \vec{b}, \tag{7}$$

$$U\vec{x} = \vec{b}' \tag{8}$$

donde el vector $\vec{b}'$ es desconcido al igua que $\vec{x}$. Si encontramos la solución para $\vec{b}'$ entonces encontramos la solución para $\vec{x}$. La gran ventaja de este método es que la matriz L ya es triangular, por lo tanto hay que sustituir en (7) para encontrar los valores de $\vec{b}'$, después, como la matriz U también es triangular, elaboramos una sustitución más en (8) para encontrar la solución $\vec{x}$.

Algoritmo 1 Método la factorización LU para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Entrada: $n, a_{n,n}, b_n$.
Salida: x_n.

```
para k = 1 hasta n − 1 hacer
    para i = k + 1 hasta n hacer
        em ← a_{i,k}/a_{k,k}
        para j = k + 1 hasta n hacer
            a_{i,j} ← a_{i,j} − (em)a_{k,j}
        fin para
    fin para
fin para
bp_1 ← b_1
para i = 2 hasta n hacer
    bp_i ← b_i
    para j = 1 hasta i − 1 hacer
        bp_i ← bp_i − a_{i,j}(bp_j)
    fin para
fin para
x_n ← bp_n/a_{n,n}
para i = n − 1 hasta 1 hacer
    para j = n hasta i + 1 hacer
        x_i ← x_i − x_j a_{i,j}
    fin para
    x_i ← x_i + bp_i
    x_i ← x_i/a_{i,i}
fin para
```