

На правах рукописи



Кунина Ирина Андреевна

**Модели и алгоритмы калибровки радиальной
дисторсии камеры по особенностям Хаф-спектра
изображений при неконтролируемой съемке**

Специальность 05.13.17 —
«Теоретические основы информатики»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Москва — 2020

Работа прошла апробацию в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Николаев Дмитрий Петрович

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук»

Защита состоится 21 декабря 2020 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.05.13.17.003 по адресу: 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (национального исследовательского университета) <https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-tehnicheskie-nauki.php>.

Работа представлена 9 октября 2020 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

В настоящее время камеры с широкоугольными объективами становятся все более доступными обычному пользователю. Такие объективы позволяют увеличить поле зрения фотографируемой местности при фиксированном положении камеры. Получаемые с таких камер фото- и видеоизображения подвержены ряду оптических aberrаций.

Дорогие высококачественные камеры обычно оснащены достаточно сложной системой линз, которая компенсирует все значительные aberrации. Большой вклад в область проектирования оптимальных оптических систем и предварительный aberrационный расчет внесли зарубежные и отечественные ученые P.L. von Seidel, K. Schwarzschild, Г.Г. Слюсарев, Д.С. Волосов и многие другие.

Однако нередки случаи, когда компенсацию оптических aberrаций должен осуществить сам пользователь на этапе постобработки полученных изображений. Это может быть связано с удешевлением оптической системы за счет исключения дорогостоящего процесса калибровки камеры или намеренным желанием пользователя получить необработанные данные.

Одной из таких aberrаций является радиальная дисторсия, которая нарушает геометрическое подобие между объектом в сцене и его образом на снимке. Достаточно точное исправление радиальной дисторсии имеет важное значение для многих задач оптического распознавания, прежде всего потому, что дисторсия искажает прямые линии, а на детекции прямолинейных отрезков построены многие алгоритмы выделения и анализа объектов на видеоизображении. В частности поэтому очень важным является исследование того, как искажаются прямые в зависимости от параметров дисторсии и положения в кадре.

При наличии доступа к камере получить параметры искажения, а затем и изображение со скомпенсированной дисторсией, можно с помощью специального калибровочного программного обеспечения, алгоритмическая база которого была заложена Z. Zhang и развивается до сих пор. На вход таким программам подается одно или несколько изображений специального калибровочного объекта, снятого на калибруемую камеру, и параметры объекта. Выходом алгоритма являются параметры в полиномиальной модели дисторсии Брауна (предложенная D.C. Brown и A.E. Conrady). Однако такая калибровка излишне трудоемка и не всегда возможна. Существует большое число баз изображений, используемых для обучения или тестирования систем компьютерного зрения, в которых изображения не подвергаются никакой предварительной обработке, а информация о параметрах дисторсии отсутствует.

Алгоритмы, заложенные в такие системы, обычно анализируют получаемые на вход изображения в предположении, что проецирование сцены

на изображение описывалось моделью камеры-обскуры. В этом случае перед разработчиком ставится задача калибровки камеры в условиях неизвестных параметров сцены и камеры. В литературе такие методы получили название автокалибровки или самокалибровки.

На сегодняшний день вопросам автокалибровки в литературе уделяется достаточно большое внимание. Среди работ, внесших значительный вклад в развитие данной области, стоит отметить те, которые основаны на предположении, что дугообразные линии на изображении были преимущественно прямыми до своего проецирования на плоскость изображения.

Здесь можно выделить два основных подхода. Примерами первого подхода являются работы A. Wang, X. Zhang и F. Bukhari. Здесь дуги приближаются кривыми второго порядка с известными параметрами, а параметры дисторсии вычисляются из системы уравнений, где в правой части – параметры кривых, в левой – функция от параметров дисторсии и параметров прямой. Примерами второго подхода являются работы С.М. Карпенко, Y. Kanuki, M. Alemán-Flores и D. Santana-Cedrés. В них перебираются всевозможные параметры на некоторой сетке, а выбор наилучших параметров осуществляется путем анализа того или иного функционала над исходным изображением в пространстве параметров. Однако практическое применение имеющихся методов имеет существенные ограничения: отсутствуют указания на возможности и ограничения таких систем и используемых в них моделей дисторсии, равно как и на точность их работы в зависимости от входных данных.

Очередная волна интереса к задаче поднялась с оснащением смартфонов нового поколения широкоугольными объективами: например, камера в iPhone 11 имеет угол обзора 120° , в Samsung Galaxy S10 – 123° . В такие смартфоны, как правило, встроена функция компенсации дисторсии на получаемых снимках, однако результат ее работы далеко не всегда удовлетворителен для дальнейшей обработки. Кроме этого, в настоящее время производители смартфонов активно переходят на новый стандарт IP68 (ГОСТ 14254-2015) с повышенными требованиями к устойчивости работы под водой, что приводит к росту популярности подводной съемки. Даже если камера изначально была калибрована, на подводных снимках будет наблюдаться существенная дисторсия из-за преломления света на границе двух сред – водной и воздушной, согласно закону Снеллиуса. При этом калибровка камеры под водой, – это достаточно трудоемкий процесс даже для специалистов.

Таким образом, дальнейшее исследование методов автокалибровки является актуальным.

Целью диссертационной работы является анализ формы линий на изображении, подверженном радиальной дисторсии, и разработка методов автоматической калибровки дисторсии по фото- и видеоизображениям из неизвестного источника, учитывающих ограниченность моделей дисторсии и особенности геометрического преобразования прямых линий.

Для достижения поставленной цели в диссертации ставятся и решаются следующие **задачи**:

1. Провести анализ поведения известных моделей радиальной дисторсии (одно- и двухпараметрической) в плоскости изображения с целью выявить возможные ограничения данных моделей.
2. Исследовать геометрическое преобразование прямых под действием радиальной дисторсии с целью выявить общие закономерности такого преобразования.
3. Исследовать влияние точности детектирования линии на изображении на точность и устойчивость оценки параметров радиальной дисторсии.
4. Разработать алгоритм автоматической калибровки радиальной дисторсии на единичном изображении из неизвестного источника.
5. Разработать алгоритм автоматической калибровки радиальной дисторсии на видеофрагменте из неизвестного источника.
6. Разработать способ численной оценки качества работы предложенных алгоритмов.
7. Реализовать разработанные в диссертации алгоритмы для обеспечения их внедрения в промышленные системы распознавания и провести их экспериментальный анализ.

Методы исследования. В диссертации используются методы цифровой обработки и анализа изображений, численные методы, методы математической статистики и интегральной геометрии.

Научная новизна. В диссертации впервые:

1. Установлены границы допустимых значений параметров дисторсии в двухпараметрической модели Брауна, за пределами которых модель дисторсии перестает адекватно моделировать оптическую систему;
2. Показана зависимость точности оценки параметров радиальной дисторсии от точности локализации прямой на изображении;
3. Разработаны алгоритмы автоматической калибровки фото- и видеоизображений из неизвестного источника, учитывающий ограниченность модели Брауна и свойства искажения прямых линий на изображении.

Практическая ценность и реализация результатов.

Практическая ценность заключается в разработанном методе калибровки радиальной дисторсии, который может быть использован в

задачах анализа изображений, полученных неизвестной оптической системой. Также предложенный метод может быть использован для устранения радиальных искажений на изображениях, полученных объективом с переменным фокусным расстоянием без обратной связи или при подводной съемке в условиях неизвестного показателя преломления воды.

Результаты работы внедрены и используются на практике, что подтверждено соответствующими актами. Разработанные алгоритмы внедрены в программно-аппаратный комплекс автоматического распознавания транспортных средств «АКТС-4», разработанный компанией ООО «Визиллект Сервис», и в программный продукт «ShaH», разработанный ООО «Визионика» для датчиков волнового фронта, работающих по методу Шака-Гартмана. Отдельные полученные результаты диссертационной работы использованы при выполнении НИОКР по созданию новых алгоритмов улучшения подводных фотографий (дог. № YBN2018115183), выполненного в ИППИ РАН.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Определены границы обратимости дисторсии, задаваемой моделью Брауна, а именно: в однопараметрической модели – $k_1 > 0$ или $r^2 \leq \frac{1}{-3k_1}$ в противном случае; в двухпараметрической модели – $k_1, k_2 > 0$, или $k_2 > \frac{9}{20}k_1^2$, или $r^2 \leq \frac{3k_1 + \sqrt{9k_1^2 - 20k_2}}{-10k_2}$ в противном случае; здесь k_1, k_2 – параметры модели Брауна, а r – расстояние от точки неискаженного образа до центра изображения;
2. Модель ошибки определения параметра k_1 однопараметрической модели Брауна по координатам прямой, найденным с погрешностью, позволяющая строить взвешенные оценки дисторсии по координатам нескольких прямых;
3. Алгоритм автоматической калибровки радиальной дисторсии, не требующий наличия калибровочных объектов в кадре и гарантирующий существование калибровочного преобразования;
4. Метод уточнения параметров калибровки радиальной дисторсии по видеофрагменту путем усреднения распределения покадровых оценок в пространстве параметров модели Брауна.

Достоверность полученных результатов обеспечивается согласованностью заявленных параметров разработанных моделей и алгоритмов с воспроизводимыми экспериментальными результатами, успешной апробацией разработанных алгоритмов и внедрением в коммерческие системы распознавания.

Основные результаты диссертации были получены в процессе выполнения работ по следующим научным грантам:

- РФФ № 14-50-00150 «Цифровые технологии и их применения», направление «Фундаментальные проблемы разработки интеллектуальных автономных систем»;

- РФФИ № 18-29-26035 «Методы позиционирования и ориентирования изучаемого объекта путем анализа локальных геометрических особенностей отдельных проекций»;
- РФФИ № 17-29-03161 «Каскадные алгоритмы локализации и отслеживания протяженных объектов на мобильных устройствах»;
- РФФИ № 17-29-03236 «Методы интеллектуальной обработки, классификации и использования изображений на мобильных устройствах для защиты от угроз»;
- РФФИ № 18-07-01387 «Модели и методы построения систем оптического распознавания видеопотока с использованием обратных связей, функционирующим в условиях ограниченных вычислительных ресурсов».

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на международных конференциях 2016 International Conference on Robotics and Machine Vision (ICRMV 2016, Москва, Россия) и The 4th International Professor's Day on ICT Algorithm Design (2017, Москва, Россия). Также результаты работы были доложены на междисциплинарной школе-конференции ИТиС 2019 «Информационные технологии и системы» (ИТиС) и научном семинаре Лаборатории зрительных систем ИППИ РАН.

Личный вклад. Все основные результаты, изложенные в диссертации, принадлежат лично автору. Постановка задач и обсуждение результатов проводилось совместно с научным руководителем.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 публикациях, в том числе: 1 издана в журнале и 1 в сборнике трудов конференций, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of Science, 2 – в журналах, входящих в базу RSCI, 1 – в тезисах докладов.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность работы, формулируются цель и задачи диссертационного исследования, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** рассматриваются основные геометрические аспекты формирования изображений оптической системой. Подробно рассматривается одна из пяти монохроматических аберраций оптических систем – дисторсия. Приводится обзор существующих методов устранения дисторсии на изображениях сцены.

Интеллектуальные системы обработки изображений находят применение в различных областях: робототехнике, распознавании документов, автоматизации измерений и т.д. Методы компьютерного зрения, заложенные в такие системы, обычно анализируют получаемые с камер



а)

б)

Рис. 1 — а) изображение идеальное (без дисторсии); б) изображение с дисторсией

изображения, предполагая, что проецирование трехмерного пространства на плоскость изображения описывается моделью «камера-обскура». Однако такая модель служит лишь приближенной моделью реального физического процесса. Реальная оптическая система обладает аберрациями – отступлениями от модели камеры обскуры.

Аберрации оптической системы принципиально неустранимы, т.е. любая оптическая система обладает оптическими аберрациями. Теория оптических аберраций третьего порядка, подробно рассмотренная в разделах 1.2.1 и 1.2.2, представляет составляющие аберрации косо́го луча в виде ряда, коэффициенты при членах которого определяют одну из пяти аберраций третьего порядка. Подробно рассмотрена одна из таких аберраций, дисторсия, которая нарушает геометрическое подобие между объектом в сцене и на изображении. На рисунке 1 приведен пример действия дисторсии: прямые в сцене края дверей стали дугообразными на изображении, причем ближе к периферии изображения кривизна более заметна, чем у центра.

Методы оценки параметров дисторсии на изображении, обзор которых приведен в разделе 1.3, можно условно разделить на следующие группы: алгоритмы, вычисляющие параметры дисторсии по серии изображений калибровочного объекта; алгоритмы, вычисляющие параметры дисторсии по серии изображений сцены; алгоритмы, вычисляющие параметры дисторсии по единичному изображению сцены. Для оценки параметров дисторсии по единичному изображению наибольшее развитие получил подход, основанный на предположении, что дугообразные границы объектов на изображении были прямыми до своего проецирования на плоскость изображения.

В конце первой главы ставятся основные задачи диссертации, затрагивающие вопросы точности и устойчивости алгоритмов калибровки.

Вторая глава посвящена исследованию поведения образов прямых линий на плоскости изображения под действием радиальной дисторсии и их вкладу в оцениваемую величину дисторсии. Анализируются границы обратимости дисторсии, задаваемые одно- и двухпараметрической моделью дисторсии Брауна.

Рассмотрим однопараметрическую модель дисторсии Брауна $d(r) = r(1 + k_1 r^2)$, где k_1 – параметр дисторсии:

1. Размер кадра, в котором мы можем изучать положительную ($k_1 > 0$) дисторсию, не ограничен;
2. Размер кадра, в котором мы можем изучать отрицательную ($k_1 < 0$) дисторсию, ограничен величиной $r^2 = \frac{1}{-3k_1}$ в плоскости неискаженного изображения. За пределами данной области изображение однозначно не восстанавливается.

Рассмотрим теперь двухпараметрическую модель дисторсии $d(r) = r(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4)$, где k_1, k_2 – параметры дисторсии:

1. Размер кадра, в котором мы можем изучать дисторсию, не ограничен при $k_1, k_2 > 0$ или при $k_2 > \frac{9}{20} k_1^2$;
2. В остальных случаях размер кадра, в котором мы можем изучать дисторсию, ограничен величиной $r^2 = \frac{3k_1 + \sqrt{9k_1^2 - 20k_2}}{-10k_2}$ в плоскости неискаженного изображения. За пределами данной области изображение однозначно не восстанавливается.

Рассмотрим теперь пучок вертикальных линий, и как они искажаются под действием дисторсии. В силу предположения о симметричности дисторсии, т.е. о том, что искажение зависит только от расстояния точки до центра кадра, мы не нарушаем общности. Положим центр изображения равным $(0, 0)$ и ограничимся рассмотрением координатных четвертей, имеющих положительную абсциссу.

Зададим координаты (x, y) точек каждой такой прямой уравнением $x = a, y = t, a \geq 0, t \in [-500, 500]$, а результат действия k_1 на прямую $x = a$ будем обозначать как $d_{k_1}(a, y) = (x_d, y_d)$:

$$x_d = a(1 + k_1(a^2 + y^2)), \quad y_d = y(1 + k_1(a^2 + y^2)). \quad (1)$$

На рисунке 2 приведен результат такого влияния для $k_1 = 1.4$ и $k_1 = 0.9$. Здесь a взят в диапазоне $[0, 500]$ с шагом 100 при размерах идеального изображения 1000×1000 . Видно, что кривая $d_{k_1}(a, y)$ увеличивает кривизну с увеличением a при фиксированном k_1 , а при фиксированном a кривизна растет с ростом k_1 . Более подробное изложение и анализ такого поведения приведен в разделе 2.2.

Обозначим $u = x_d, v = y_d$ и рассмотрим две точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) на произвольной кривой. Расстояние по u между точками равно:

$$u_2 - u_1 = k_1 a (y_2^2 - y_1^2), \quad (2)$$

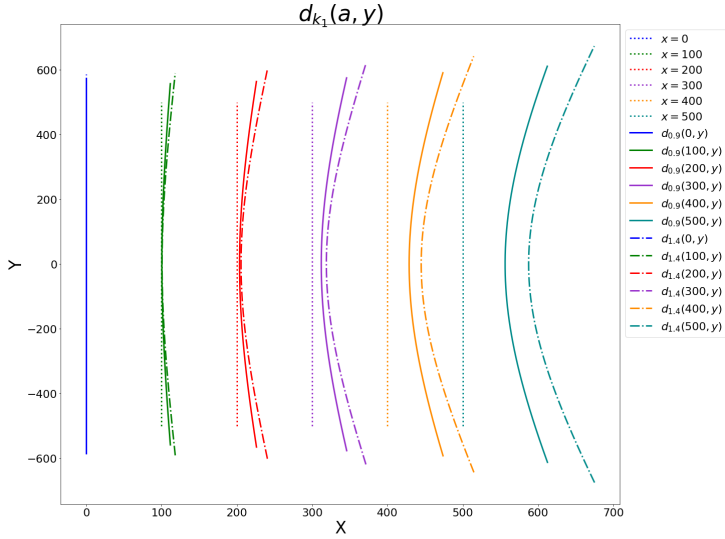


Рис. 2 — Результат влияния k_1 на набор равноотстоящих вертикальных линий $x = a$ при размере идеального изображения 1000×1000 а учитывая, что

$$\frac{v}{u} = \frac{y}{a}, \quad (3)$$

то

$$u_2 - u_1 = k_1 a (y_2^2 - y_1^2) = k_1 a^3 \left[\left(\frac{v_2}{u_2} \right)^2 - \left(\frac{v_1}{u_1} \right)^2 \right] \quad (4)$$

или

$$k_1 a^3 = \frac{u_2 - u_1}{\left[\left(\frac{v_2}{u_2} \right)^2 - \left(\frac{v_1}{u_1} \right)^2 \right]}. \quad (5)$$

Обозначим правую часть полученного равенства через s .

Уже сейчас видно, что при малых a величина k_1 , получающаяся как частное малых величин, будет чувствительна к погрешностям в u_1 и u_2 . Мы уточним это обстоятельство, введя в рассмотрение еще одну точку $(a, 0)$, переходящую в

$$u_0 = a + a^3 k_1, \quad v_0 = 0. \quad (6)$$

Отсюда имеем

$$s = k_1(u_0 - s)^3, \quad k_1 = \frac{s}{(u_0 - s)^3}. \quad (7)$$

Теперь возьмем производную от k_1 по u_0 и u_1 :

$$\begin{aligned} (k_1)'_{u_0} &= \left(-\frac{3}{a}\right) \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{av_2}{u_2}\right)^2 - \left(\frac{av_1}{u_1}\right)^2\right]} \cdot \frac{u_2 - u_1}{a}, \\ (k_1)'_{u_1} &= \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{\left[\left(\frac{av_2}{u_2}\right)^2 - \left(\frac{av_1}{u_1}\right)^2\right]} \cdot \left(1 + s \frac{2v_1^2}{u_1^3}\right) \left(1 + \frac{3s}{a}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что u_0, u_1, u_2 сравнимы с a , поэтому в обоих выражениях все величины в скобках, кроме первой, имеют порядок малости относительно a равный $0(1)$, тогда как первое выражение имеет порядок $1/a$. Таким образом, любая погрешность в определении u_0, u_1, u_2 приводит к ошибке в вычислении k_1 большей в $1/a$ раз.

Формулы (5) и (7) дают способ прямого вычисления параметра k_1 через координаты единственной искажаемой прямой. Однако эта переупрошенная модель не может всерьез рассматриваться как способ оценки параметров дисторсии.

Для начала, кривая $d_{k_1}(a, y(t))$ должна быть достаточно длинной, чтобы значения v_1 и v_2 существенно отличались, иначе точность определения k_1 изначально будет ничтожной. В реальных условиях прямолинейные отрезки, такие как буквы на фотографиях текста, дома или фрагменты улиц на фотографии городского пейзажа и т. д. могут быть невелики по длине. Прямолинейность всех реальных отрезков очень приближительна. Поэтому модель, которую мы использовали, очень ограничена. Наконец, как мы уже отмечали, сама дисторсия обычно не укладывается точно в рамки тех моделей (даже многопараметрических), которые мы рассматриваем.

Тем не менее, все это не отменяет того простого факта, что даже при значительной дисторсии прямые $x = a$, находящиеся на малом расстоянии a от оптической оси изображения, практически не искажаются, поэтому при построении формулы общей дисторсии на изображении вклад кривых, расположенных дальше от центра, должен быть заметно выше.

Ввиду того, что выделение кривых на изображении само по себе является нетривиальной задачей обработки изображений и сопряжено с большим количеством ошибок, а минимальные погрешности в определении координат кривой приводят к большим ошибкам при попытках извлечь из «изгиба» параметры дисторсии, далее будет рассмотрен интегральный способ оценки кривизн линий и параметров дисторсии k_i , изложенный подробно в разделе 2.3.

Вернемся к рассмотрению представленного на рисунке 2 пучка вертикальных линий, искаженных согласно однопараметрической модели Брауна с параметром $k_1 = 1.4$. Возьмем суммы по яркости вдоль всех возможных вертикальных прямых и обозначим результат такого суммирования как I_{0° , где $I_{0^\circ}(a)$ хранит результат суммирования вдоль прямой, находящейся от расстояния a от центра изображения. Как видно из графика на рисунке 36, наименее искривленной линии соответствует самый резкий пик на I_{0° , который начинает постепенно размываться, когда значения яркости на I_{0° порождаются все более искривленными линиями. Это значит, что при интегрировании сохраняется возможность оценить степень кривизны линии.

Однако при интегрировании теряется возможность прямого вычисления параметров дисторсии: теряется одна из двух пространственных координат искаженной линии.

Рассмотрим задачу вычисления k_1 как задачу выдвижения и проверки гипотезы, что наблюдаемое на I_{0° распределение яркости порождено дисторсией с коэффициентом $k_1 = 1.4$. Параллельно рассматривается альтернативная гипотеза, что наблюдаемое измерение зависит от $k_1 = 0$. Иначе говоря, строятся две гипотезы: наблюдаемые на входном изображении линии описываются как $d_{1.4}(a, y)$ или как $d_0(a, y)$

Если истинна гипотеза о $k_1 = 1.4$, то разумно ожидать, что обращение вида $(a, y) = d_{1.4}^{-1}(a, y)$ даст на I_{0° распределение, на котором будут наблюдаться резкие пики с вершинами в a , отношение высоты к ширине каждого из которых будет максимально по сравнению с соответствующими пиками, полученными при обращении вида $(a, y) = d_0^{-1}(a, y)$.

Таким образом, можно свести задачу вычисления k_1 к задаче проверки гипотез о возможном значении k_1 , где значения на I_{0° могут выступать свидетельством истинности гипотезы.

С учетом выводов раздела 2.2 определим погрешность вычисления k_1 через погрешность σ_u в определении u следующим образом:

$$\sigma_k = (\kappa)'_u \sigma_u \propto \frac{1}{a} \sigma_u, \quad (9)$$

где $(u, v) = d_{k_1}(a, y)$, σ_ζ – случайная погрешность отдельного выборочного значения ζ . Здесь κ – это функция вида (7), зависящая от u, v .

Рассмотрим изображение в системе координат (u, v) . Пусть на исходном изображении присутствует одна вертикальная прямая, полученная обращением $d_{k_1}(a, v)$. Пиксели на данной прямой получены детектором L и подчиняются уравнению $u = a$. Пусть значения яркости в этих пикселях велики, а значения яркости в пикселях фона равны нулю. Возьмем суммы по яркости вдоль всех возможных вертикальных прямых, параметризованных как $u = a_i$ на изображении, и рассмотрим полученный результат суммирования I_{0° .

Мы ожидаем, что на I_0° в точке $a_i = a$ значение яркости будет велико, а в окрестных точках – равно нулю. Это свидетельство того, что гипотеза о k_1 была истинна и исходная кривая была восстановлена до вертикальной прямой. Значит, можно рассматривать $I_0^\circ(a)$ в точке $a = a_i$ как оценку правильности оценки k_1 :

$$\kappa_{a_i} = I_0^\circ(a_i). \quad (10)$$

В действительности же мы получим отрезок шириной $[a - \sigma_L, a + \sigma_L]$, в котором значения пикселей будут отличны от нуля, где σ_L – случайная погрешность детектора в определении точек прямой $u = a$. Погрешность в оценке κ в таком случае составит $\sigma_\kappa = \frac{1}{a} \sigma_L$, где $\sigma_\kappa \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 0$.

Пусть на I сделано n независимых наблюдений a_i , каждое из которых оценивает k_1 с погрешностью:

$$\sigma_{\kappa_{a_i}} \propto \frac{1}{a_i} \sigma_{a_i} \propto \frac{1}{a_i} \sigma_L, \quad (11)$$

где κ_{a_i} – оценка k_1 в точке a_i с погрешностью $\frac{1}{a_i} \sigma_L$.

Для последовательности наблюдений κ_{a_i} , каждое из которых исходит из независимого распределения с известной дисперсией $\left(\frac{1}{a_i} \sigma_L\right)^2$, среднее значение $\bar{\kappa}$ определяется следующим образом:

$$\bar{\kappa} = \frac{\sum_i \frac{1}{\sigma_{\kappa_{a_i}}^2} \kappa_{a_i}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_{\kappa_{a_i}}^2}} \propto \frac{\sum_i \frac{a_i^2}{\sigma_L^2} \kappa_{a_i}}{\sum_i \frac{a_i^2}{\sigma_L^2}} \propto \frac{\sum_i a_i^2 \kappa_{a_i}}{\sum_i a_i^2}, \quad (12)$$

где

$$\sigma_{\bar{\kappa}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i \sigma_{\kappa_{a_i}}^{-2}}} \propto \sqrt{\frac{1}{\sum_i \frac{a_i^2}{\sigma_L^2}}} \propto \sigma_L \sqrt{\frac{1}{\sum_i a_i^2}}. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь случай, когда направление прямой нам не известно. В таком случае к $\bar{\kappa}$ предъявляется требование давать отклик на правильном направлении и не давать его на неправильных.

Обозначим через I_{ϕ° результат суммирования вдоль всех возможных прямых, составляющих угол ϕ° с вертикальной осью координат, где $I_{\phi^\circ}(a)$ – результат суммирования вдоль прямой, находящейся от расстояния a от центра изображения.

Если для данного ϕ на исходном изображении есть прямая или линия, близкая к прямой, лежащая на расстоянии a от центра, то I_{ϕ° откликнется на нее резким пиком в точке a . Это свидетельство того, что данный набор параметров хорошо восстановил некоторую искаженную прямую, составляющую угол ϕ° с вертикальной осью координат. В этом случае значение $I_{\phi^\circ}(a)$ могло бы служить оценкой параметра k_1 «с точки зрения» угла ϕ° :

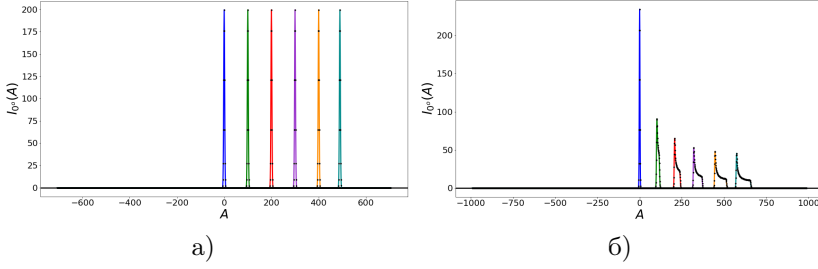


Рис. 3 — Распределение интенсивности на I_0° для а) $k_1 = 0$; б) $k_1 = 1.4$. та же прямая, спроецированная под другими углами, не дает такого пика ни при каком значении a .

Точно так же, если спроецировать под разными углами искривленные линии (плохо восстановленные прямые), то при любом угле ϕ максимальное значение на I_{ϕ° для кривой будет меньше чем для прямых, а при фиксированном ϕ пик на I_{ϕ° будет спадать с ростом a . Это верно даже в случае «растяжения» изображения при положительной дисторсии: $I_{0^\circ}(0)$ для $k_1 = 1.4$ больше, чем $I_{0^\circ}(0)$ для $k_1 = 0$ (рисунки 3б и 3а соответственно), но для $a \approx 100$ ситуация резко меняется.

Пример с $a = 0$ для $k_1 = 0$ и 1.4 демонстрирует, что на максимальное значение на I_{ϕ° как на оценку $\bar{\kappa}$ ориентироваться нельзя. С другой стороны общая сумма значений I_{ϕ° одинакова для любого ϕ (это просто сумма всех значений интенсивности точек изображения) и не характеризует пики на I_{ϕ° .

Положим $\kappa_{a_i}(\phi) = I_{\phi^\circ}(a_i)$ и вычислим $\bar{\kappa}(\phi)$ по формуле (12) для каждого ϕ , где $\bar{\kappa}(\phi)$ — средняя оценка параметра k_1 «с точки зрения» угла ϕ° . Распределение значений $\bar{\kappa}(\phi)$ в зависимости ϕ представлено на рисунках 4б и 4а для $k_1 = 1.4$ и $k_1 = 0$ соответственно. Как видно из графиков, для $d_0(0, y)$ и $d_{1.4}(0, y)$ значение $\bar{\kappa}$ не только не уменьшается, но и растет с увеличением ϕ для некоторых линий. Это связано с тем, что при отклонении от верного направления суммирования, на проекции растет по площади область медленно изменяющейся яркости, которая при взвешенном суммировании делает оценку $\bar{\kappa}$ нестабильной.

Чтобы уменьшить вклад таких областей и подчеркнуть резкие переходы, воспользуемся разностью гауссиан (Difference of Gaussians, DoG):

$$I_f = G(\sigma_1) * I - G(\sigma_2) * I, \quad \sigma_1 < \sigma_2, \quad (14)$$

где $G(\sigma)$ — ядро Гауссова фильтра со среднеквадратичным отклонением σ .

Побочным эффектом такой фильтрации являются колебания сигнала из положительных значений в отрицательные в областях, соответствующие резкому перепаду на I . Поэтому дополнительно на I_f сохраним только неотрицательные значения.

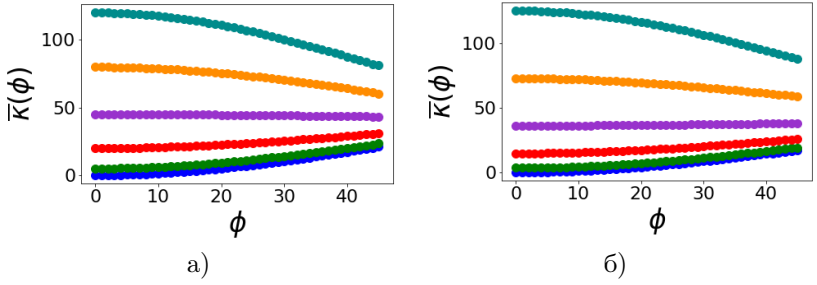


Рис. 4 — Результат вычисления $\bar{\kappa}(\phi)$ от значений I_{ϕ° для а) $k_1 = 0$; б) $k_1 = 1.4$.

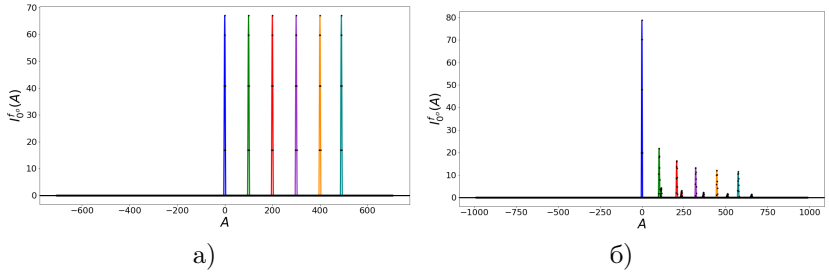


Рис. 5 — Распределение интенсивности на I_{f0° для а) $k_1 = 0$; б) $k_1 = 1.4$.

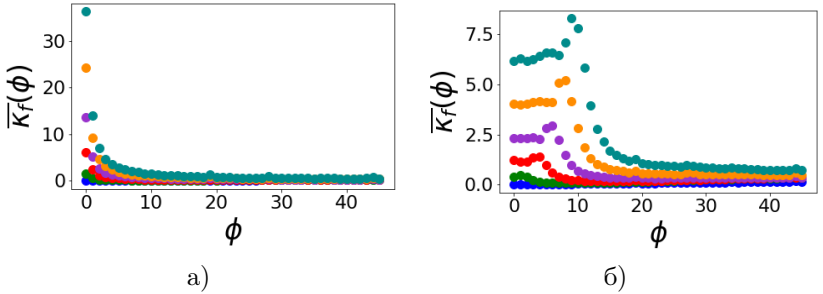


Рис. 6 — Результат вычисления $\bar{\kappa}_f(\phi)$ от значений $I_{f\phi^\circ}$ для а) $k_1 = 0$; б) $k_1 = 1.4$.

Как видно из графиков на рисунке 6, такая фильтрация действительно позволяет значительно минимизировать значение $\bar{\kappa}_f(\phi)$ при отклонении от верного направления интегрирования на угол ϕ . Здесь вычисление $\bar{\kappa}_f(\phi)$ аналогично $\bar{\kappa}(\phi)$, но $\kappa_{a_i}(\phi) = I_{f\phi^\circ}(a_i)$.

Для эффективного подсчета сумм вдоль всех возможных прямых было выбрано быстрое преобразование Хафа.

В третьей главе изложен алгоритм восстановления фото- и видеоизображений, подвергнутых радиальной дисторсии.

Предлагаемый алгоритм восстановления оценивает параметр дисторсии в предположении, что наблюдаемые на изображении границы были прямыми в сцене, но приобрели кривизну в результате действия радиальной дисторсии. В таком случае исправление, близкое к правильному, даст изображение, границы которого в большинстве своем стали прямыми.

Для поиска такого исправления алгоритм выполняет ряд тестовых восстановлений входного изображения и выбирает среди них то, на котором границы выглядят наиболее прямыми. Для этого сравниваются Хаф-образы изображений границ восстановленных изображений. Сравнение осуществляется следующим образом: сначала вычисляется оценка формы прямых для каждого пучка параллельных границ под определенным наклоном, затем вычисляется общая оценка формы для всего Хаф-образа. Восстановление, для которого оценка по модулю максимальна, считается правильным.

Пусть дано изображение I_d , искаженное радиальной дисторсией. Известно, что дисторсия на I_d описывается моделью Брауна с известными параметрами дисторсии $\tilde{k} = k_i$, ($i = 1, \dots, n$):

$$d(r) = r(1 + \sum_{i=1}^n k_i r^{2i}). \quad (15)$$

Рассмотрим задачу формирования изображения I со скомпенсированной радиальной дисторсией. Для каждого пикселя с координатами (x, y) на формируемом изображении I осуществим геометрическое преобразование координат по формуле (15) с набором параметров \tilde{k} . Значение яркости в пикселе с координатами (x_d, y_d) на искаженном изображении I_d будет искомым значением для пикселя на формируемом изображении I . При этом, поскольку изображение I_d задано только в узлах целочисленной сетки координат, для нецелых значений x_d и y_d целочисленные значения должны быть получены путем интерполяции функции I_d .

Пусть дано изображение I_d , искаженное радиальной дисторсией. Известно, что дисторсия на I_d описывается моделью Брауна вида (15), но параметры модели неизвестны. Предположим, что изображение I_d было искажено либо с набором параметров \tilde{k}_1 , либо \tilde{k}_2 . При исправлении дисторсии с набором параметров, наиболее близким к истинному, на полученном изображении I линии будут выглядеть более прямыми, чем при исправлении дисторсии с другими наборами параметров. Рассмотрим задачу сравнения изображений, восстановленных с параметрами \tilde{k}_1 и \tilde{k}_2 соответственно, и выбора такого набора параметров, который даст на изображении наибольшее количество прямолинейных границ.

Выделим на изображении I_d границы путем вычисления модуля градиента яркости в каждой точке изображения. Полученное изображение с нечетко выделенными границами обозначим как J .

Далее выполним два пробных восстановления изображения J с параметрами \tilde{k}_1 и \tilde{k}_2 соответственно. Обозначим результаты такого восстановления как I_1 и I_2 соответственно. Пусть H_1 и H_2 – результаты БПХ изображений I_1 и I_2 . Тогда восстановленный до отрезка криволинейный участок даст в соответствующей строке Хаф-образа более резкий пик, а сохранивший криволинейность – более размытый.

Чтобы уменьшить вклад размытых пиков и усилить вклад более резких, полученные Хаф-образы фильтруются построчно с помощью DoG.

Теперь обратим внимание, что преобразование радиальной дисторсии и ее обращение не сохраняет длины и площади, поэтому один и тот же отрезок на исходном изображении может иметь разный интеграл интенсивности на восстановленных изображениях и разную амплитуду пиков на соответствующих Хаф-образах. Для того, чтобы корректно сравнивать Хаф-образы полученных изображений, разные образы одного отрезка должны быть одинаковыми по амплитуде. Иначе говоря, необходимо восстанавливать изображения таким образом, чтобы интегральная интенсивность границ сохранялась независимо от выбранного набора параметров дисторсии.

Создадим пустое (все значения которого равны нулю) изображение I' . Пусть имеется обратное к (15) преобразование координат, позволяющее для каждого пикселя (x_d, y_d) изображения I_d найти координаты (x, y) на изображении I' . Тогда для каждого пикселя I_d выполним операцию $I'(x, y) = I'(x, y) + I_d(x_d, y_d)$.

Предложенное преобразование изображений удовлетворяет сформулированному требованию сохранения интегральной интенсивности вдоль кривых, хотя и непригодно для визуализации, поскольку не обеспечивает дискретной непрерывности образа, и может использоваться только для пробного восстановления изображений.

Теперь обратим внимание на то, что параметры дисторсионного искажения влияют на глобальный масштаб изображения, поэтому при восстановлении изображения возможен выход части сцены за его границы, что нарушит интегральную интенсивность по кадру.

Введем понятие неподвижной окружности. Назовем так невырожденную окружность на I_d с радиусом r_{crit} , не изменяющимся при пробном исправлении радиальной дисторсии. Для этого введем дополнительное масштабирование изображения I' с коэффициентом k_0 : для выбранной окружности при заданных параметрах дисторсии можно подобрать k_0 так, что выбранная окружность будет иметь один и тот же радиус и на искаженном, и на восстановленном изображениях. Поскольку за пределами

неподвижной окружности сохранение интеграла интенсивности не гарантируется, то будем обнулять все пиксели на изображении за пределами неподвижной окружности.

Предложенная процедура для пробного восстановления с сохранением интеграла интенсивности по изображению требует вычисления преобразования координат, обратного к (15). Пусть дано изображение I_d , предположительно искаженное радиальной дисторсией с набором параметров $\tilde{k} = k_i$, ($i = 1, \dots, n$). Положим $r_d = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}$ и перепишем уравнение (15) в следующем виде:

$$r_d = d'(r) = r(1 + \sum_{i=1}^n k'_i r^{2i}). \quad (16)$$

Найдем масштабирующее преобразование с коэффициентом k_0 , сохраняющее радиус неподвижной окружности:

$$k_0 d'^{-1}(r_{crit}) = r_{crit}. \quad (17)$$

С учетом масштабирования с коэффициентом k_0 и замены $k_i = k_0 k'_i$ для $i > 0$ преобразование координат (16) приобретает вид:

$$r_d = d(r) = r(\sum_{i=0}^n k_i r^{2i}) \quad (18)$$

Уравнение (18) не имеет аналитического решения относительно r при $n > 1$, поэтому будем искать решение численно. Поскольку обратное преобразование с фиксированными параметрами дисторсии требуется вычислять многократно (трудоемкость пропорциональна площади изображения), разумно единожды построить приближенную модель обратного преобразования и пользоваться ей вместо численного решения уравнения (18) в каждой точке. В связи с тем, что преобразование радиальной дисторсии достаточно гладкое, а точки относительно центра радиального искажения смещены симметрично, значение функции $r = d^{-1}(r_d)$ численно оценивалось для m равноотстоящих друг от друга значений r_d на участке $[0, r_{crit}]$ и использовалась линейная интерполяция для вычисления r для всех точек на входном изображении. В проведенных ниже численных экспериментах m бралось равным 300. Само искаженное изображение предварительно масштабировалось до изображения с максимальной стороной 480.

Вычисление преобразования координат, обратного к (15), накладывает на модель вида (18) требование монотонности. Поэтому наложим ограничения на возможные значения параметров дисторсии k таким образом, чтобы преобразование (15) было монотонным на участке $[0, r_{crit}]$. Проверка на монотонность может быть задана как аналитически, так и численно.

Так, в случае однопараметрической модели необходимо и достаточно выполнение одно из следующих условий: $k_1 > 0$ или $r_{crit} \leq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{-3k_1}}$ на I_d при $k_1 < 0$. Для двухпараметрической модели справедливо выполнение одного из следующих условий: $k_2 > \frac{9}{20}k_1^2$ или $k_1, k_2 > 0$ или $r_{crit} \leq d(\sqrt{\frac{3k_1 + \sqrt{9k_1^2 - 20k_2}}{-10k_2}})$. Более сложные модели можно проверить численно: при численном обращении $r = d^{-1}(r_d)$ достаточно проверить выполнение условия $d^{-1}(r_d) < d^{-1}(r_d + \Delta_{r_d})$ при $r_d < r_d + \Delta_{r_d}$.

Определим такой вектор F , чтобы в каждом его элементе содержалась оценка прямолинейности для множества границ определенной тангенты t . В качестве такой оценки возьмем дисперсию значений в строке t Хаф-образа P . Тогда оценка прямолинейности пучка параллельных прямых для каждой тангенты t будем вычислять следующим образом:

$$F_t = \sigma^2(P_t, W_t), \quad \sigma^2(P_t, W_t) = \frac{\sum_s P_{s,t}^2 W_{s,t}}{\sum_s W_{s,t}} - \left(\frac{\sum_s P_{s,t} W_{s,t}}{\sum_s W_{s,t}} \right)^2, \quad (19)$$

где $W_{s,t}$ — квадрат расстояния от прямой, параметризованной через s, t , до оптического центра изображения, P — результат построчной фильтрации Хаф-образа H изображения J .

Полученный вектор F будем называть угловым дескриптором.

На угловом дескрипторе F ожидается наличие пиков от пучков квазипараллельных границ, причем от их прямолинейности зависит как амплитуда пиков, так и скорость их спадения. В качестве меры выраженности пиков, учитывающей оба эти эффекта, воспользуемся величиной энтропии сигнала.

Пусть полученный при наборе параметров \tilde{k} угловой дескриптор $F^{\tilde{k}}$ имеет L уровней значений яркости, а частота появления уровня l равна $P_l(F^{\tilde{k}})$. Тогда энтропия полученного углового дескриптора $F^{\tilde{k}}$ определяется следующим образом:

$$E(F^{\tilde{k}}) = - \sum_{l=1}^L P_l(F^{\tilde{k}}) \log P_l(F^{\tilde{k}}). \quad (20)$$

Очевидно, что уменьшение кривизны линий на изображении приведет к большей выраженности пиков в угловом дескрипторе и уменьшению $E(F^{\tilde{k}})$ соответственно (или увеличению $|E(F^{\tilde{k}})|$).

Пусть у нас есть набор кадров \tilde{I} , полученных из одного неизвестного источника. Определим оценку восстановленности изображения с параметрами \tilde{k} для \tilde{I} как:

$$E(F^{\tilde{k}}) = \sum_j E(F_j^{\tilde{k}}), \quad (21)$$

где $E(F_j^{\tilde{k}})$ – оценка восстановленности j -ого кадра из \tilde{I} с параметрами \tilde{k} .

Заметим теперь, что если в наборе \tilde{I} есть кадры, не содержащие образов прямых, то оптимум функционала может достигаться в произвольной точке и оценка $E(F^{\tilde{k}})$ окажется смещенной.

Предположим, что существует способ для каждого из изображений грубо оценить вероятность того, что учет этого изображения приводит к улучшению общей оценки дисторсии. Назовем эту оценку коэффициентом информативности изображения. Тогда оценочный функционал для набора \tilde{I} в целом можно переписать следующим образом

$$E(F^{\tilde{k}}) = \sum_j C_j E(F_j^{\tilde{k}}) \quad (22)$$

где C_j – коэффициент информативности изображения I_j .

Рассмотрим в качестве оценки информативности изображения I_j дисперсию модуля градиента яркости на J_j . Для подавления шума и границ мелких объектов из полученного изображения вычитается оно же, но размытое фильтром Гаусса:

$$\Psi^j = \max(0, J_j - G(\sigma_x, \sigma_y) * J_j), \quad (23)$$

где $G(\sigma_x, \sigma_y)$ – ядро гауссова двумерного фильтра со среднеквадратичными отклонениями σ_x и σ_y . В приведенных ниже экспериментах σ_x и σ_y брались равными 2.0, а J_j предварительно масштабировалось до изображения с максимальной стороной 480.

С учетом сказанного выше, оценка информативности C_j для изображения I_j определяется следующим образом:

$$C_j = \sum_x \sum_y (\Psi_{x,y}^j)^2 - \left(\sum_x \sum_y \Psi_{x,y}^j \right)^2 \quad (24)$$

Представленный алгоритм повторяет идею, описанную для единичного изображения, с той лишь разницей, что для оценки восстановленности $E(F^{\tilde{k}})$ использует информацию сразу с нескольких кадров.

Четвертая глава посвящена проведению экспериментального анализа предложенного алгоритма. Предложен количественный способ оценки выраженности остаточной дисторсии, основанный не на прямом сравнении параметров в моделях дисторсии, а на по-точечной величине расхождения соответствующих координат точек на изображении идеальном и восстановленном. Предложенный алгоритм был протестирован на собранном наборе фото- и видеоизображений и показал высокую точность работы, что подтверждается дополнительно и наглядным иллюстративным материалом.

Дополнительно модель дисторсии Брауна в реализованном алгоритме калибровки была заменена на модель подводной дисторсии Седлачек-Коха,

имеющая основным параметром коэффициент преломления воды. Модифицированный алгоритм был успешно протестирован на изображениях с подводной дисторсией, что свидетельствует не только о высокой точности, но и широкой степени применимости предложенного алгоритма.

Пусть дано две искажающие функции $\hat{d}(r)$ и $d(r)$ с известными параметрами k_i . Первая получена автоматически по результатам анализа входного изображения I_d и является приближением $d(r)$. Последняя описывает действие радиальной дисторсии в оптической системе, с помощью которой было получено изображение I_d , т.е. результат обращения $d(r)$ на I_d даст идеальное изображение I , как если бы оно было получено камерой-обскурой.

Введем регулярную прямоугольную сетку $N \times M$, которая имеет смысл идеального изображения (без дисторсии), и определим качество компенсации дисторсии как среднюю норму отклонения в узлах сетки:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}_d &= \frac{1}{NM} \sum_{i,j=1}^{N,M} \Delta_d(x_i, y_j) \quad , \\ \Delta_d(x, y) &= ||r - \hat{d}^{-1}(d(r))||_2\end{aligned}\tag{25}$$

где $r = (x, y)$ - исходное положение точки до искажения.

Так как масштаб изображения при восстановлении не должен влиять на оценку качества восстановления, следует модифицировать вычисление качества компенсации дисторсии:

$$\begin{aligned}\Delta_{d,p}(x, y) &= ||r - \Gamma_p(\hat{d}^{-1}(d(r)))||_2 \\ \Upsilon_d &= \min_p \frac{1}{NM} \sum_{i,j=1}^{N,M} \Delta_{d,p}(x_i, y_j) \quad ,\end{aligned}\tag{26}$$

где Γ_p – преобразование масштабирования с параметром p .

Для ввода относительной оценки качества компенсации дисторсии определим степень качества восстановления изображения в отсутствие всякой компенсации:

$$\Upsilon_0 = \Upsilon_d|_{d(r)=r}.\tag{27}$$

Тогда относительную оценку качества компенсации дисторсии определим следующим образом:

$$Q_d = 10 \cdot \left(1 - \frac{\Upsilon_d}{\Upsilon_0 + \epsilon}\right),\tag{28}$$

где 10 – коэффициент, используемый для приведения оценки к 10-балльной шкале, а ϵ – параметр, регулирующий толерантность оценки восстановления малых дисторсий.

Таблица 1 — Сравнение точности работы алгоритма в сравнении с известным ранее.

Версия алгоритма	Условное обозначение тестового набора данных							
	1n	1w	2n	2w	3	4w	5w	Ср.
Алгоритм С.М. Карпенко и соавт.	9	3	8.8	2	5.4	2.8	4.26	5.03
Предлагаемый алгоритм	10	8.7	10	9	9.3	8.4	8.53	9.13

Таблица 2 — Сравнение точности работы алгоритма на видеоданных в покадровом режиме и при интеграции оценки.

Версия алгоритма	Условное обозначение тестового набора данных								
	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	Ср.
Покадровая	4.7	4.9	6.9	4.9	4.4	5.8	4.15	4.9	5.11
Предлагаемая	9.5	9.5	7.8	9.5	8.5	8.5	7.8	9.5	8.82

Результаты работы разработанного алгоритма на фото- и видеоизображениях приведены в таблицах **1** и **2** соответственно. Здесь 0 – наихудший результат работы алгоритма, 10 – лучший. В таблице **1** приведены также значения качества работы алгоритма, предложенного С.М. Карпенко с соавт., с которым сравнивалось качество работы разработанного алгоритма. В таблице **2** приведены значения качества модификации разработанного алгоритма для случая видеоизображения.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Проведен аналитический обзор современных методов автоматической калибровки радиальной дисторсии на изображениях и видео, полученных из неизвестного источника; выявлены преимущества и недостатки таких методов.
2. Проведен анализ поведения одно- и двухпараметрической моделей дисторсии в плоскости изображения и показана ограниченность этих моделей.
3. Исследовано геометрическое преобразование прямых под действием радиальной дисторсии и сформулированы общие закономерности такого преобразования.
4. Исследовано влияние отдельной линии на изображении на точность и устойчивость оценки параметров радиальной дисторсии.
5. Разработан алгоритм автоматической калибровки радиальной дисторсии на единичном изображении из неизвестного источника.
6. Разработан алгоритм комбинирования результатов автокалибровки на единичном изображении сцены для случая последовательности изображений из одного неизвестного источника.
7. Разработана метрика для оценки качества работы предложенных алгоритмов.

8. Разработанные в диссертации алгоритмы реализованы с возможностью их внедрения в промышленные системы распознавания и проведен их экспериментальный анализ.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Kunina, I. A.* Blind radial distortion compensation in a single image using fast Hough transform [текст] / I. A. Kunina, S. A. Gladilin, D. P. Nikolaev // Computer optics / под ред. A. V. Soifer(Samara). — 443001, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151, ком. 403, 2016. — т. 40, Special issue 3. — с. 395–403. — DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-395-403.
2. Blind radial distortion compensation from video using fast Hough transform [текст] / I. A. Kunina [и др.] // ICRMV 2016. т. 10253 / под ред. J. Z. Alexander V. Bernstein Adrian Olaru. — SPIE, фев.2017. — с. 1–7. — DOI: 10.1117/12.2254867.
3. Коррекция радиальной дисторсии при погружении камеры под воду [текст] / Д. Д. Сеньшина [и др.] // Сенсорные системы. — 2020. — т. 34, № 3. — с. 262–272. — DOI: 10.31857/S0235009220030087.
4. *Панфилова, Е. И.* Использование оконного преобразования Хафа для поиска протяженных границ на изображении [текст] / Е. И. Панфилова, И. А. Кунина // Сенсорные системы. — 2020. — т. 34, № 4. — с. 340–353. — DOI: 10.31857/S0235009220030075.
5. *Панфилова, Е. И.* Использование оконного преобразования Хафа для поиска протяженных границ на изображении [текст] / Е. И. Панфилова, И. А. Кунина // ИТиС 2019. — 2020. — с. 359.

Кунина Ирина Андреевна

Модели и алгоритмы калибровки радиальной дисторсии камеры по особенностям Хаф-спектра изображений при неконтролируемой съемке

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. тех. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1.5. Тираж 20 экз.

Типография _____