Dpto. de Economía Cuantitativa

Universidad Complutense de Madrid

Econometría I

Tema 3 Extensiones

Marcos Bujosa

Material de apoyo para el curso *Econometría I*

Actualizado el: 26 de septiembre de 2007 Versión 2.01

Puede encontrar la última versión de este material en:

`http://www.ucm.es/info/ecocuan/mbb/index.html#ectr1`

Índice

Este es un material de apoyo a las clases. En ningún caso sustituye a los libros de texto que figuran en el programa de la asignatura; textos que el alumno debe estudiar para afrontar el examen final con ciertas garantías de éxito.

Referencias recomendadas para la asignatura: Novales (1993), Wooldridge (2006), Verbeek (2004)

Extensiones

1. Transformaciones lineales

- Novales (1993, Sección 3.10, pps. 96–100)
- Novales (1997, Sección 13.4.1, pps. 503–505)
- Wooldridge (2006, Sección 6.1, pps. 201–207 y Sección 2.4, pps 44,45)

1.1. Cambio de escala

⇑ Transformaciones lineales: Cambios de escala 1

$$\mathbf{x}\,\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{x}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{21} & \cdots & \lambda_k x_{k1}\\ \lambda_1 x_{12} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_k x_{k2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1 x_{1N} & \lambda_2 x_{2N} & \cdots & \lambda_k x_{kN}\end{pmatrix}$$

donde $\lambda_j \neq 0$
Llamaremos $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}\,\boldsymbol{\Lambda}$; y $\boldsymbol{Y}^* = \lambda\,\boldsymbol{Y}$; $\lambda \neq 0$
Nuevo modelo con variables trasformadas: $\boldsymbol{Y}^* = \mathbf{x}^*\boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{U}^*$
¿Qué relación hay entre $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\widehat{\boldsymbol{\beta}^*}$?

⇑ Transformaciones lineales: Cambios de escala 2

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}^*} &= (\mathbf{x}^{*\prime}\,\mathbf{x}^*)^{-1}\mathbf{x}^{*\prime}\,\boldsymbol{Y}^* \\
&= (\boldsymbol{\Lambda}'\,\mathbf{x}'\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\,\boldsymbol{\Lambda}'\,\mathbf{x}'\,\lambda\,\boldsymbol{Y} && \text{sustituyendo}\\
&= \lambda\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}'\,\mathbf{x})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}')^{-1}\,\boldsymbol{\Lambda}'\,\mathbf{x}'\,\boldsymbol{Y} && \text{ya que}^{a}\ (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\\
&= \lambda\boldsymbol{\Lambda}^{-1}(\mathbf{x}'\,\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\,\boldsymbol{Y} && \text{simplificando}\\
&= \lambda\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{\beta}}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\widehat{\beta_j^*} = \frac{\lambda}{\lambda_j}\cdot\widehat{\beta_j}$$

para todo $j = 1, \ldots, k$.

[a]con matrices cuadradas
[a]con matrices cuadradas

⇑ Transformaciones lineales: Cambios de escala 3

Por una parte:

$$\widehat{\boldsymbol{e}}^* = \lambda\,\widehat{\boldsymbol{e}};$$

y por tanto $\text{SRC}^* = \widehat{\boldsymbol{e}}^{*\prime}\,\widehat{\boldsymbol{e}}^* = \lambda^2\text{SRC}$.
Además $\text{STC}^* = \sum_1^N \left(y_n^* - \overline{y_n^*}\right)^2 = \lambda^2\text{STC}$.
Así pues,

$$R^{2^*} = 1 - \frac{\text{SRC}^*}{\text{STC}^*} = R^2.$$

Por último

$$\widehat{\mathfrak{s}^2_{\widehat{e}^*}} = \frac{\widehat{\boldsymbol{e}}^{*\prime}\,\widehat{\boldsymbol{e}}^*}{N-k} = \lambda^2\widehat{\mathfrak{s}^2_{\widehat{e}}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{e}}^* = \boldsymbol{Y}^* - \mathbf{x}^*\,\widehat{\boldsymbol{\beta}^*} = \lambda\,\boldsymbol{Y} - \mathbf{x}\boldsymbol{\Lambda}\,\lambda\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \lambda(\boldsymbol{Y} - \mathbf{x}\,\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \lambda\,\widehat{\boldsymbol{e}}$$

$$\text{SRC}^* = \widehat{\boldsymbol{e}}^{*\prime}\,\widehat{\boldsymbol{e}}^* = (\lambda\,\widehat{\boldsymbol{e}})'(\lambda\,\widehat{\boldsymbol{e}}) = \lambda^2\text{SRC}.$$

$$\mathrm{STC}^* = \sum_{n=1}^{N} \left(y_n^* - \overline{y_n^*}\right)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} \left(y_n - \overline{y_n}\right)^2 = \lambda^2 \mathrm{STC}.$$

Además

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}^*}\right) = \widehat{\mathfrak{s}^2_{e^*}}\,(\mathbf{x^*}'\,\mathbf{x^*})^{-1} = \lambda^2 \widehat{\mathfrak{s}^2_{e}}(\mathbf{\Lambda}'\,\mathbf{x}'\,\mathbf{x}\,\mathbf{\Lambda})^{-1};$$

es decir, que

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\beta_j^*}\right) = \widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}^*}\,\boldsymbol{v}\right) = \lambda^2 \widehat{\mathfrak{s}^2_{e}}(\boldsymbol{v}'\,\mathbf{\Lambda}'\,\mathbf{x}'\,\mathbf{x}\,\mathbf{\Lambda}\,\boldsymbol{v})^{-1} = \lambda^2 \widehat{\mathfrak{s}^2_{e}}\lambda_j^{-1}\left([(\mathbf{x}'\,\mathbf{x})^{-1}]_{jj}\right)\lambda_j^{-1} = \frac{\lambda^2}{\lambda_j^2}\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{\beta_j}\right)$$

donde $\boldsymbol{v} = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]$ es un vector fila con todos sus elementos iguales a cero excepto un uno en la posición j-ésima; y donde $[(\mathbf{x}'\,\mathbf{x})^{-1}]_{jj}$ es el elemento j-ésimo de la diagonal principal de $(\mathbf{x}'\,\mathbf{x})^{-1}$.

Modelo lineal simple. Si partiendo del modelo lineal simple

$$\boldsymbol{Y} = a + b\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{U}$$

transformamos el modelo en

$$\boldsymbol{Y^*} = a^* + b^*\,\boldsymbol{x^*} + \boldsymbol{U^*},$$

donde $\boldsymbol{Y^*} = \lambda\,\boldsymbol{Y}$, y $\boldsymbol{x^*} = \lambda_2\,\boldsymbol{x}$; aplicando MCO en el segundo modelo tenemos

$$\widehat{b^*} = \frac{s_{y^*x^*}}{s^2_{x^*}} = \frac{\lambda\cdot\lambda_2\cdot s_{yx}}{\lambda_2^2\cdot s_x^2} = \frac{\lambda}{\lambda_2}\cdot\widehat{b}$$

además

$$\widehat{a^*} = \overline{y^*} - \widehat{b^*}\,\overline{x^*} = \lambda\overline{y} - \frac{\lambda}{\lambda_2}\cdot\widehat{b}\cdot\lambda_2\cdot\overline{x} = \lambda(\overline{y} - \widehat{b}\overline{x}) = \lambda\widehat{a}.$$

Por otra parte de 5.3 en la página~34 del Tema 1, y de 6.2 en la página~39 también del Tema 1

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{a^*}\right) = \frac{\widehat{\mathfrak{s}^2_{e^*}}\,\overline{x^{*2}}}{N\cdot s^2_{x^*}} = \frac{\lambda^2\widehat{\mathfrak{s}^2_{e}}\cdot\lambda_2^2\overline{x^2}}{N\cdot\lambda_2^2 s_x^2} = \lambda^2\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{a}\right)$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{b^*}\right) = \frac{\widehat{\mathfrak{s}^2_{e^*}}}{N\cdot s^2_{x^*}} = \frac{\lambda^2\widehat{\mathfrak{s}^2_{e}}}{N\cdot\lambda_2^2 s_x^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda_2^2}\widehat{\mathrm{Var}}\left(\widehat{b}\right)$$

EJERCICIO 1. ¿Varía el valor del estadístico $\mathcal{T}$ para la contrastación de la significación individual con los cambios de escala? ¿Y el valor del estadístico $\mathcal{T}$ para otros contrastes de hipótesis individuales del tipo $H_0 : \beta_k = k$, con k distinto de cero?

A resolver en clase

EJERCICIO 2. Conociendo la siguiente tabla de conversiones:

Pies y Metros
1 pie = 30.48 cm

Euro y Dolar (1990)
1 euro (ecu) = 1.25 dolares

Y por tanto $1Pie^2 = 0.092m^2$; calcule que efecto marginal (sobre el precio medido en miles de euros) tenía en el año 1990 incrementar un metro cuadrado la superficie de un piso del campus de la Universidad de San Diego (véase el "recuadro de resultados de estimación en el precio de las viviendas" (pag. 17 del Tema 1):).

Verifique con el ordenador que obtiene los mismos resultados que analíticamente (tendrá que generar nuevas variables con las unidades de medida modificadas y repetir con ellas la estimación del modelo). Compruebe también los valores de los otros estadísticos vistos para el caso del Modelo Lineal Simple.

1.2. Cambio de origen de los regresores

Transformaciones lineales: Cambio de origen de los regresores 4

$$\mathbf{x} + \Big[\underset{[N\times 1]}{\mathbf{0}} ; \mathbf{B} \Big] = \begin{pmatrix} 1 & x_{12}+b_2 & \cdots & x_{1k}+b_k \\ 1 & x_{22}+b_2 & \cdots & x_{2k}+b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N2}+b_2 & \cdots & x_{Nk}+b_k \end{pmatrix} = \mathbf{x}^*$$

Nuevo modelo: $\boldsymbol{Y} = \mathbf{x}^* \boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{U}^*$
Escribimos

$$\boldsymbol{\beta}^* = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \boldsymbol{\beta_2^*} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}^* = \Big[\underset{[N\times 1]}{\mathbf{1}} ; \quad \mathbf{x_2^*} \Big]; \quad \mathbf{B} = \underset{[N\times 1]}{\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{b}',$$

donde $\boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} b_2 & \cdots & b_k \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{x} + \Big[\underset{[N\times 1]}{\mathbf{0}} \quad \mathbf{B} \Big] = \big[\mathbf{1},\ \boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}, \dots,\ \boldsymbol{x}_{\blacktriangledown k}\big] + \big[\mathbf{0},\ \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{b}_k\big] = \big[\mathbf{1},\ \boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2} + \boldsymbol{b}_2, \dots,\ \boldsymbol{x}_{\blacktriangledown k} + \boldsymbol{b}_k\big] = \mathbf{x}^*$$

Además

$$\underset{[N\times 1]}{\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_k \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_k \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Nótese que sumar una constante c al vector de “unos” es equivalente a multiplicar dicho vector por la constante $\lambda_1 = (1+c)$, por tanto este caso está comprendido entre los “cambios de escala”. Por otra parte, sumar una contante c al vector $\boldsymbol{Y}$ es equivalente a restar dicha constante al vector de “unos”(despejando $\boldsymbol{Y}$ en la ecuación del modelo lineal), por tanto este caso también está comprendido entre los “cambios de escala” por el mismo motivo que el anterior.

Transformaciones lineales: Cambio de origen de los regresores 5

Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x_2^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \boldsymbol{\beta_2^*} \end{bmatrix} + \boldsymbol{U}^* & &= \mathbf{1}\,\beta_1^* + \mathbf{x_2^*}\boldsymbol{\beta_2^*} + \boldsymbol{U}^* \\ &= \mathbf{1}\,\beta_1^* + [\mathbf{x_2} + \mathbf{1}\cdot\boldsymbol{b}']\,\boldsymbol{\beta_2^*} + \boldsymbol{U}^* & &= \mathbf{1}(\beta_1^* + \underset{[1\times 1]}{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{\beta_2^*}}) + \mathbf{x_2}\boldsymbol{\beta_2^*} + \boldsymbol{U}^* \end{aligned}$$

Por tanto el nuevo modelo es

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1^* + \boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{\beta_2^*} \\ \boldsymbol{\beta_2^*} \end{bmatrix} + \boldsymbol{U}^* = \quad \mathbf{x}\boldsymbol{\beta}^{**} + \boldsymbol{U}^*$$

¿Qué relación hay entre $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ y $\widehat{\boldsymbol{\beta}^{**}}$? $\qquad \widehat{\boldsymbol{\beta}^{**}} = (\mathbf{x}'\,\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\,\boldsymbol{Y}$
Modelos con idénticas variables explicativas: $\Rightarrow \widehat{\boldsymbol{\beta}^{**}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$

Primera componente: $(\widehat{\beta_1^*} + \boldsymbol{b}'\,\widehat{\boldsymbol{\beta_2^*}}) = \widehat{\beta_1} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\beta_1^*} = \widehat{\beta_1} - \boldsymbol{b}'\,\widehat{\boldsymbol{\beta_2}}$

Todas las demás: $\widehat{\boldsymbol{\beta_2^*}} = \widehat{\boldsymbol{\beta_2}}$

donde los estimadores con un sólo asterisco corresponden a la regresión con los datos transformados. Por otra parte, el vector de estimadores con dos asteriscos corresponde a una nueva re-escritura del modelo transformado; que resulta coincidir con el modelo sin transformar, pues tiene las mismas variables explicativas. Dicho vector ($\widehat{\boldsymbol{\beta}^{**}}$) es, por tanto, igual a $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$; pero está expresado en términos de los estimadores con un sólo asterisco (los que se obtienen directamente a partir del modelo con las variables transformadas); es decir:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta^{**}}} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta_1^*} + \boldsymbol{b}'\,\widehat{\boldsymbol{\beta_2^*}} \\ \widehat{\beta_2^*} \\ \widehat{\beta_3^*} \\ \vdots \\ \widehat{\beta_k^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta_1^*} + \boldsymbol{b}'\,\widehat{\boldsymbol{\beta_2^*}} \\ \widehat{\boldsymbol{\beta_2^*}} \end{pmatrix} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2} \\ \widehat{\beta_3} \\ \vdots \\ \widehat{\beta_k} \end{pmatrix}$$

⇑ **Transformaciones lineales: Cambio de origen de los regresores** 6

Puesto que:

$$\widehat{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{*}} = \boldsymbol{Y} - \mathbf{x}^{\boldsymbol{*}}\widehat{\boldsymbol{\beta^*}} = \boldsymbol{Y} - \mathbf{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{e}},$$

entonces $\text{SRC}^* = \widehat{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{*}\prime}\,\widehat{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{*}} = \widehat{\boldsymbol{e}}'\,\widehat{\boldsymbol{e}} = \text{SRC}$;
y

$$R^{2^*} = 1 - \frac{\text{SRC}^*}{\text{STC}} = 1 - \frac{\text{SRC}}{\text{STC}} = R^2.$$

Por último

$$\widehat{\mathfrak{s}^2_{\widehat{e}^*}} = \frac{\widehat{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{*}\prime}\,\widehat{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{*}}}{N-k} = \frac{\widehat{\boldsymbol{e}}'\,\widehat{\boldsymbol{e}}}{N-k} = \widehat{\mathfrak{s}^2_{\widehat{e}}}$$

Ejercicio 3. ¿Que relación hay con el “modelo en desviaciones respecto a la media” (pag. 26 del Tema 1)?

Modelo lineal simple. Si partiendo del modelo lineal simple

$$\boldsymbol{Y} = a + b\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{U}$$

transformamos el modelo en

$$\boldsymbol{Y} = a^* + b^*(\boldsymbol{x^*} + c) + \boldsymbol{U^*},$$

donde c es una constante. Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y} =& a^* + b^*(\boldsymbol{x^*} + c) + \boldsymbol{U^*} \\ =& a^* + b^*\,\boldsymbol{x^*} + b^*c + \boldsymbol{U^*} \\ =& (a^* + b^*c)\,\mathbf{1} + b^*\,\boldsymbol{x^*} + \boldsymbol{U^*} \end{aligned}$$

Puesto que los regresores de este modelo y los del modelo inicial son idénticos, aplicando MCO tenemos que

$$\widehat{a} = \widehat{a^*} + \widehat{b^*}c; \qquad \widehat{b^*} = \widehat{b^*},$$

o bien; $\widehat{a^*} = \widehat{a} - \widehat{b^*}\,c$.

1.3. Cambios de escala y origen simultáneamente

⇑ Transformaciones lineales: Cambios de escala y origen en regresores **7**

$$\boldsymbol{Y}^{*}=\lambda\,\boldsymbol{Y};\qquad \mathbf{x_2^{*}}=\mathbf{x_2}\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{1}\boldsymbol{b}$$

Nuevo modelo

$$\boldsymbol{Y}^{*}=\lambda\,\boldsymbol{Y}=\mathbf{1}(\beta_1^{*}+\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{\beta_2^{*}})+(\mathbf{x_2}\boldsymbol{\Lambda})\,\boldsymbol{\beta_2^{*}}+\boldsymbol{U}^{*}$$

Entonces

$$\widehat{\boldsymbol{\beta_2^{*}}}=\lambda\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{\beta_2}}$$

$$\widehat{\beta_1^{*}}+\boldsymbol{b}'\,\widehat{\boldsymbol{\beta_2^{*}}}=\lambda\widehat{\beta_1}\qquad\Rightarrow\qquad \widehat{\beta_1^{*}}=\lambda\left(\widehat{\beta_1}-\boldsymbol{b}'\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{\beta_2}}\right)$$

Como en los casos anteriores, el coeficiente de determinación R^2 no se ve alterado, aunque $\widehat{\boldsymbol{e}}^{*}=\lambda\,\widehat{\boldsymbol{e}}$; y consecuentemente $\widehat{s^2_{\boldsymbol{e}^*}}=\lambda^2\widehat{s^2_{\boldsymbol{e}}}$.

2. Errores de especificación

- Novales (1993, Sección 3.11, pps. 100–103)
- Wooldridge (2006, Secciones 3.3 y 3.4, pps. 96–101 y 107–108)

2.1. Omisión de variables relevantes

⇑ Errores de especificación: Omisión de variables relevantes **8**

1. Correcto: $Y_n=\beta_1+\beta_2x_{n2}+\beta_3x_{n3}+U_n$ (No restringido)
2. Incorrecto: $Y_n=\beta_1^{*}+\beta_2^{*}x_{n2}+U_n{}^{*}$ (Restringido)

¿Qué cabe esperar respecto a $\operatorname{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta^{*}}}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)$ y a $\operatorname{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta^{*}}}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)$ en el modelo incorrecto?
(Ver propiedades del estimador MCRL página 15 de Tema 2)

Recuerde las notas 4 y 6 en la página 13 del Tema 1 para el desarrollo de la siguiente transparencia.

⇑ Errores de especificación: Omisión de variables relevantes **9**

De 2 (y 5.1 en la página˜33 del Tema 1): $\widehat{\beta_2^{*}}=\dfrac{\sum Y_n\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)}{\sum\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)^2}$

sustituyendo Y_n por su modelo correcto (1):

$$\widehat{\beta_2^{*}}=\frac{\beta_2\sum\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)^2+\beta_3\sum x_{n3}\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)+\sum U_n\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)}{\sum\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)^2}$$

cuya esperanza es

$$\operatorname{E}\left(\widehat{\beta_2^{*}}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)=\beta_2+\beta_3\frac{\sum x_{n3}\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)}{\sum\left(x_{n2}-\overline{x_2}\right)^2}=\beta_2+\beta_3\frac{s_{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}}}{s^2_{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}}}. \tag{2.1}$$

¿Qué pasa cuando la correlación entre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ y $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ es cero?

Ejercicio 4. Calcule el valor esperado de $\widehat{\beta_1^{*}}$. ¿Que pasa si $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ es ortogonal tanto a $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ como a $\mathbf{1}$?

Tras resolver el ejercicio anterior, repase la regresión particionada del Tema 1.

⇑ **Errores de especificación: Omisión de variables relevantes** 10

De 5.2 en la página~34 del tema 1, sabemos que:

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{\beta_2^*}\;\middle|\;\mathbf{x}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_{n2} - \overline{x_2})^2}$$

y se puede demostrar (Sección A.1) que

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{\beta_2}\;\middle|\;\mathbf{x}\right) = \frac{\sigma^2}{(1 - R_{23}^2)\sum (x_{n2} - \overline{x_2})^2}$$

donde R_{23}^2 es el R^2 de la regresión de $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ sobre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ (coef. de corr. entre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ y $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ al cuadrado).

- ¿Qué varianza es mayor?
- ¿Qué pasa si correlación entre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ y $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ nula?
- ¿Qué pasa cuando R_{23}^2 es aproximadamente 1?

Véase la Sección A.1 en la página~17 en el apéndice para la derivación $\operatorname{Var}\left(\widehat{\beta_2}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)$ en un modelo con tres regresores.

Cuando se omite un variable, ésta entra a formar parte de las perturbaciones $\boldsymbol{U}$. Si la correlación entre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ y $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ es nula, seguirán cumpliéndose los supuestos 1 a 4, por lo que la estimación del modelo reducido no presentara problemas (es un ejemplo de la regresión ortogonal particionada vista en el Tema 1).

Si por el contrario la correlación entre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ y $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ es aproximadamente 1, la varianza del estimador se hace enorme en el modelo completo. Esto implica una bajísima precisión en las estimaciones. Por otra parte, si la correlación es casi uno, la información (respecto a las relaciones lineales) aportada por la variable $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ no es nueva (ya está incluida en $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$). Por ello, pese a que esta variable es relevante en el modelo, excluirla no supone un elevado coste (salvo que lo que deseemos calcular es precisamente el efecto de dicha variable sobre la variable dependiente). Situaciones en las que R_{23}^2 es aproximadamente 1 se denominan situaciones de multicolinealidad y se estudian en la siguiente sección.

2.2. Inclusión de variables irrelevantes

⇑ **Errores de especificación: Inclusión de variables irrelevantes** 11

1. Correcto: $Y_n = \beta_1^* + \beta_2^* x_{n2} + {U_n}^*$ (Restringido)
2. Incorrecto: $Y_n = \beta_1 + \beta_2 x_{n2} + \beta_3 x_{n3} + U_n$ (No restringido)

¿Qué cabe esperar respecto a $\operatorname{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)$ y a $\operatorname{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)$ en el modelo incorrecto?

Siempre que se cumplan los supuestos 1 a 4: $\widehat{\beta_j}$ insesgado

(en concreto ¿$\operatorname{E}\left(\widehat{\beta_3}\right)$?) ¿y si $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ no es ortogonal a $\boldsymbol{U}$?

Si se cumplen los cuatro supuestos del Modelo Clásico de Regresión Lineal, los estimadores MCO son insesgados, por lo que $\operatorname{E}\left(\widehat{\beta_3}\right) = 0$, pues cero es el coeficiente que acompaña a un regresor que no debería estar en el modelo.

Ejercicio 5. ¿Qué efecto sobre $\operatorname{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)$ tiene la inclusión de un regresor que tiene correlación con las perturbaciones?

⇑ **Errores de especificación: Inclusión de variables irrelevantes** 12

De 5.2 en la página~34 del tema 1, varianza en el modelo correcto es:

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{\beta_2^*} \mid \mathbf{x}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum (x_{n2} - \overline{x_2})^2}$$

Y varianza en el incorrecto

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{\beta_2} \mid \mathbf{x}\right) = \frac{\sigma^2}{(1 - R^2_{23}) \sum (x_{n2} - \overline{x_2})^2}$$

donde R^2_{23} es el R^2 de la regresión de $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ sobre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$.

- ¿Qué varianza es mayor?
- ¿Qué pasa si correlación entre $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$ y $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ nula?
- ¿Qué pasa cuando R^2_{23} es aproximadamente 1?

Si la correlación entre los regresores es nula, la inclusión de la nueva variable no tiene ningún efecto. Pero a medida que la correlación crece en valor absoluto, la varianza del estimador se incrementa; disminuyendo consiguientemente la precisión de los estimadores.

3. Multicolinealidad

- Novales (1993, Capítulo 10, pp. 344)
- Wooldridge (2006, Sección 3.4, pps. 103–108)

⇑ **Multicolinealidad: Tipos** 13

Multicolinealidad → incertidumbre en determinación valores coeficientes.

Estricta o perfecta: $|\mathbf{x}'\mathbf{x}| = 0$ rango $\underset{[k \times k]}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} < k$.

- incumplimiento Supuesto 4: independencia lineal
- Infinitas soluciones.

No estricta o de grado: $|\mathbf{x}'\mathbf{x}| \simeq 0$

- Alta correlación entre regresores.
- A mayor correlación menor determinante $|\mathbf{x}'\mathbf{x}|$ y mayor gravedad del problema.

Ejemplo de multicolinealidad exacta: Sea

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 x_{2n} + \beta_3 x_{3n} + U_n,$$

donde $x_{2n} = \lambda x_{3n}$ entonces:

$$Y_n = \beta_1 + (\lambda\beta_2 + \beta_3) x_{3n} + U_n,$$

tiene una solución para β_1 y otra para $(\lambda\beta_2+\beta_3)$, pero ésta última es compatible con infinitas combinaciones de valores para β_2 y β_3.

Volvamos sobre el Ejemplo 2 en la página~6 del Tema 1. ¿Cómo puedo distinguir los efectos debidos a la experiencia y a la antigüedad, si en mi muestra nadie ha cambiado de trabajo? Es decir, ¿Si experiencia y antigüedad son los mismos datos? La respuesta es que no puedo, sólo puedo captar el efecto conjunto.

¿Y si en mi muestra **casi** nadie ha cambiado de trabajo? Entonces la correlación entre los datos no es uno, pero es **casi** uno. En la sección anterior hemos visto que en este caso las varianzas de los estimadores se hacen muy grandes. Veámoslo ahora con un poco más de detalle.

⇑ **Multicolinealidad No estricta: Efectos** **14**

- varianzas y covarianzas de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ se hacen grandes:
$$\mathrm{Var}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}\;\middle|\;\mathbf{x}\right)=\sigma^2(\mathbf{x}'\,\mathbf{x})^{-1}=\sigma^2\frac{[\mathrm{Adj}(\mathbf{x}'\,\mathbf{x})]'}{|\mathbf{x}'\,\mathbf{x}|}$$
Poca precisión
(pequeñas variaciones muestra → grandes variaciones en estimación).
¿interpretación de parámetros individuales?.
- Propensión a aceptar casi cualquier hipótesis paramétrica $\boxed{\text{T0.22}}$
(en concreto $H_0: \; \beta_i = 0 \;\to\; \mathcal{T} = \frac{\widehat{\beta_j}}{\widehat{\mathrm{Dt}}(\widehat{\beta_j})} \sim t_{N-k}$.)
- Pero no afecta al contraste de significación conjunta
$$\mathcal{F}=\frac{N-k}{k-1}\frac{R^2}{1-R^2}\sim F_{k-1,\;N-k,}.$$
OK predicción

⇑ **Multicolinealidad No estricta: Causas** **15**

- Variables explicativas **no estacionarias** que evolucionen de forma parecida (*transformación de los datos*).
- Inclusión variables expl. cuya información ya está incorporada en otras vbles. expl. (*excluir dichas variables*)
- Inclusión de retardos de variables expl. —frecuentemente correlación elevada.
- Problemas de escala de los datos —$|\mathbf{x}'\,\mathbf{x}|$ depende de las unidades de medida— (*cambiar la escala*).

⇑ **Multicolinealidad No estricta: Detección** **16**

- Examen de la correlación de las vbles. expl.
  - Cálculo de correlaciones simples (sólo entre pares)
  - Regresiones entre vbles. expl.
- Análisis del tamaño de $\mathbf{x}'\,\mathbf{x}$
  - Examinar determinante
(producto de auto-valores en matrices simétricas)
¿Cuando es pequeño? → Tamaños relativos de los auto-valores (*número de condición*):
$$\text{Si } \sqrt{\frac{\text{mayor autovalor}}{\text{menor autovalor}}}>20\Rightarrow\;\text{problemas}$$

⇑ **Multicolinealidad No estricta: Soluciones** **17**

¡Difícil solución!
(insuficiente información para estimar TODOS parámetros)

- obtener más datos
- Imponer restricciones (información extra-muestral)
- Suprimir variables (sección anterior)
- Transformar variables
Ejemplo Prof. M. Jerez — GNP vs Melanoma

4. Variables ficticias (*dummies*)

- Novales (1993, Secciones 4.10 y 4.11, pps. 139–145)
- Wooldridge (2006, Capítulo 7)
- Johnston y Dinardo (2001, Secciones 4.5 y 4.6, pps. 145–160)

- Gujarati (2003, Capítulo 9)

Variables ficticias (*dummies*) 18

Variable discreta que clasifica "categorías"
(Usualmente toma valores 0 ó 1)
Usos:

- inclusión de información cualitativa (empresa, sexo, etc.)
- división de la muestra en dos periodos (contraste cambio estructural)

4.1. Uso para el contrastes de homogeneidad

Variables ficticias: contrastes de homogeneidad (constante) 19

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 x_n + U_n, \quad n = 1, \dots, N \tag{4.1}$$

Partición en sub-muestras A y B.
Si sospechamos que β_1 cambia $\rightarrow$ Modelo no restringido:

$$Y_n = \beta_1^A D_n^A + \beta_1^B D_n^B + \beta_2 x_n + U_n, \tag{4.2}$$

donde

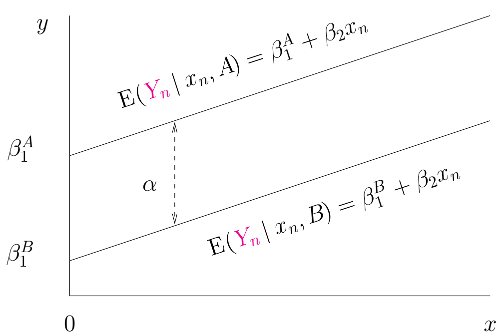
$$D_n^A = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in A \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}, \quad D_n^B = \begin{cases} 1 \text{ si } n \in B \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que siempre $D_n^A + D_n^B = 1$.

Nota 1. El concepto de partición de un conjunto tiene un significado preciso, en nuestro ejemplo $A \cup B =$ toda la muestra y $A \cap B = \emptyset$

Supongamos que tenemos los datos ordenados; primero los que pertenecen a la categoría A, y luego los de la categoría B. Entonces la matriz de regresores tiene la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_{j-1} \\ 1 & 0 & x_j \\ 0 & 1 & x_{j+1} \\ 0 & 1 & x_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & x_N \end{bmatrix}$$



Variables ficticias: contrastes de homogeneidad (constante) 20

Contraste $H_0: \ \beta_1^A = \beta_1^B$. Dos opciones:

1. Sumas residuales (página 16 del Tema 2):

   Estimando (4.1) y (4.2) $\quad \left(H_1: \ \beta_1^A \overset{\geq}{\underset{\leq}{\neq}} \beta_1^B \right)$

2. Por sustitución: $\quad D_n^B = 1 - D_n^A$ en (4.2);

$$Y_n = \beta_1^B + \alpha D_n^A + \beta_2 x_n + U_n, \tag{4.3}$$

   donde $\alpha \equiv \beta_1^A - \beta_1^B \quad$ (4.1 y 4.3 idénticas bajo H_0).
   Ahora $H_0: \ \alpha = 0$;
   (basta contraste de signif. individual; *uni o bilateral*).

Sustituyendo $\quad D_n^B = 1 - D_n^A$ en (4.2) tenemos:

$$\begin{aligned} Y_n &= \beta_1^A D_n^A + \beta_1^B D_n^B + \beta_2 x_n + U_n \\ &= \beta_1^A D_n^A + \beta_1^B (1 - D_n^A) + \beta_2 x_n + U_n \\ &= \beta_1^B + (\beta_1^A - \beta_1^B) D_n^A + \beta_2 x_n + U_n \\ &= \beta_1^B + \alpha D_n^A + \beta_2 x_n + U_n, \end{aligned}$$

Ahora la matriz de regresores es

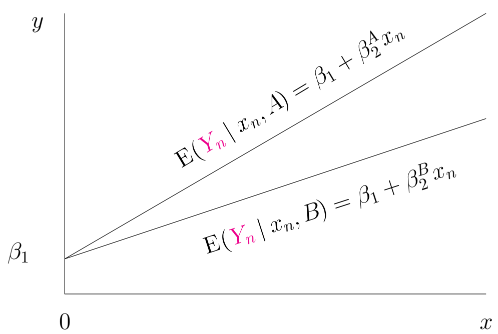
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & x_{j-1} \\ 1 & 1 & x_j \\ 1 & 0 & x_{j+1} \\ 1 & 0 & x_{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_N \end{bmatrix}$$

Variables ficticias: contrastes de homogeneidad (pendiente) 21

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 x_n + U_n, \quad n = 1, \dots, N$$

Partición en sub-muestras A y B.
Si sospechamos β_2 (pendiente) cambia $\longrightarrow$ Modelo no restringido:

$$Y_n = \beta_1 + \ \beta_2^A D_n^A x_n \ + \ \beta_2^B D_n^B x_n \ + U_n, \tag{4.4}$$



Variables ficticias: contrastes de homogeneidad (pendiente) 22

Contraste $H_0: \ \beta_2^A = \beta_2^B$. Dos opciones:

1. Por sumas residuales:

   Estimando (4.1) y (4.4) $\left(H_1: \ \beta_2^A \overset{\geq}{\underset{\leq}{\neq}} \beta_2^B \right)$

2. Por sustitución: $D_n^B = 1 - D_n^A$ en (4.4);

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2^B x_n + \delta D_n^A x_n + U_n, \tag{4.5}$$

   donde $\delta \equiv \beta_2^A - \beta_2^B$,
   (4.1 y 4.5 idénticas bajo H_0).
   Ahora $H_0: \ \delta = 0$;
   (basta contraste de signif. individual; *uni o bilateral*).

Sustituyendo $D_n^B = 1 - D_n^A$ en (4.4) tenemos,

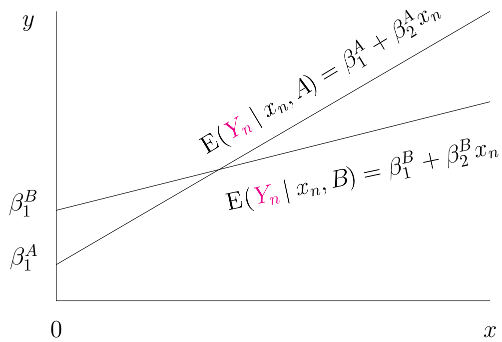
$$\begin{aligned} Y_n &= \beta_1 + \beta_2^A D_n^A x_n + \beta_2^B D_n^B x_n + U_n \\ &= \beta_1 + \beta_2^A D_n^A x_n + \beta_2^B (1 - D_n^A) x_n + U_n \\ &= \beta_1 + \beta_2^B x_n + (\beta_2^A - \beta_2^B) D_n^A x_n + U_n \\ &= \beta_1 + \beta_2^B x_n + \delta D_n^A x_n + U_n, \end{aligned}$$

Ahora la matriz de regresores es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{j-1} & x_{j-1} \\ 1 & x_j & x_j \\ 1 & x_{j+1} & 0 \\ 1 & x_{j+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & 0 \end{bmatrix}$$

A resolver en clase

Ejercicio 6. Generalice el procedimiento para el caso en el que tanto la constante como la pendiente cambian de una sub-muestra a otra:



Ejercicio 7. Resuelva el ejercicio propuesto nº 5 del profesor José Alberto Mauricio.
http://www.ucm.es/info/ecocuan/jam/ectr1/index.html#Material.

Este procedimiento se puede generalizar a más de dos sub-muestras y más variables explicativas simultáneamente.

4.2. Interpretación de los coeficientes de las variables ficticias

Ejemplo 8. [**Interpretación de los coeficientes**] Relación entre salario por hora trabajada percibido por el trabajador n-ésimo (W_n) y su nivel de estudios (variable cualitativa representada por 3 dummies:)

$$E_{n1} = \begin{cases} 1, & \text{sin estudios o sólo estudios primarios } (\textbf{EP}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$E_{n2} = \begin{cases} 1, & \text{con estudios medios (no superiores) } (\textbf{EM}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$E_{n3} = \begin{cases} 1, & \text{con estudios superiores } (\textbf{ES}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$W_n = \alpha_1 E_{n1} + \alpha_2 E_{n2} + \alpha_3 E_{n3} + U_n$$

La matriz de regresores es $\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \underset{[N1\times 1]}{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underset{[N2\times 1]}{\mathbf{1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underset{[N3\times 1]}{\mathbf{1}} \end{pmatrix},$$

donde $\underset{[Nj\times 1]}{\mathbf{1}}$ es un vector columna de unos de dimensión igual al número de trabajadores con educación de nivel j (Nj). Este es un claro ejemplo de regresión ortogonal particionada, donde las ecuaciones normales son: $\mathbf{x}'\,\mathbf{x}\,\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{x}'\,\boldsymbol{w}$, es decir,

$$\begin{bmatrix} N1 & 0 & 0 \\ 0 & N2 & 0 \\ 0 & 0 & N3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\alpha_1} \\ \widehat{\alpha_2} \\ \widehat{\alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i\in EP} w_i \\ \sum_{i\in EM} w_i \\ \sum_{i\in ES} w_i \end{bmatrix},$$

por lo tanto $\widehat{\alpha_j} = \frac{\sum_{i=1}^{Nj} w_i}{Nj} = \bar{w}_j$; es decir, es el salario medio en cada nivel de educación.

⇑ **Interpretación de los coeficientes: Ejemplo sencillo** **23**

W_n =Salario del trabajador n-ésimo

$$E_{n1} = \begin{cases} 1, & \text{sin estudios o sólo estudios primarios } (\textbf{EP}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$E_{n2} = \begin{cases} 1, & \text{con estudios medios (no superiores) } (\textbf{EM}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$E_{n3} = \begin{cases} 1, & \text{con estudios superiores } (\textbf{ES}) \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$W_n = \alpha_1 E_{n1} + \alpha_2 E_{n2} + \alpha_3 E_{n3} + U_n \tag{4.6}$$

Interpretación de los coeficientes: Ejemplo sencillo **24**

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \underset{[N1\times 1]}{\mathbf{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underset{[N2\times 1]}{\mathbf{1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underset{[N3\times 1]}{\mathbf{1}} \end{pmatrix}$$

Nj: número de trabajadores del grupo j.
Ecuaciones normales: $\mathbf{x'}\,\mathbf{x}\,\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{x'}\,\boldsymbol{w}$

$$\begin{bmatrix} N1 & 0 & 0 \\ 0 & N2 & 0 \\ 0 & 0 & N3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\alpha_1} \\ \widehat{\alpha_2} \\ \widehat{\alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i\in EP} w_i \\ \sum_{i\in EM} w_i \\ \sum_{i\in ES} w_i \end{bmatrix},$$

por lo tanto $\widehat{\alpha_j} = \frac{\sum_{i=1}^{Nj} w_i}{Nj} = \bar{w}_j$; el salario medio en cada grupo.

Nota 2. Se debe tener cuidado con los problemas de multicolinealidad exacta que pueden aparecer, y cómo interpretar los coeficientes asociados a las "dummies". Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9. [**Interpretación de los coeficientes**] Relación entre salario por hora trabajada percibido por el trabajador n-ésimo (W_n), su antigüedad en la empresa (a_n), los años de experiencia en el sector (x_n), y su nivel de estudios (variable cualitativa representada por las 3 dummies anteriores)

El modelo lineal completo es:

$$W_n = \beta_1 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \alpha_1 E_{n1} + \alpha_2 E_{n2} + \alpha_3 E_{n3} + U_n$$

Pero puesto que $1 = E_{n1} + E_{n2} + E_{n3}$ para todo n; hay *multicolinealidad exacta* y no es posible la estimación de los parámetros. Hay varias soluciones posibles, y todas pasan por eliminar uno de los regresores linealmente dependientes:

Solución1. reemplazar la constante por $E_{n1} + E_{n2} + E_{n3}$:

$$\begin{aligned} W_n &= \beta_1(E_{n1} + E_{n2} + E_{n3}) + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \alpha_1 E_{n1} + \alpha_2 E_{n2} + \alpha_3 E_{n3} + U_n \\ &= \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + (\beta_1 + \alpha_1)E_{n1} + (\beta_1 + \alpha_2)E_{n2} + (\beta_1 + \alpha_3)E_{n3} + U_n \\ &= \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \delta_1 E_{n1} + \delta_2 E_{n2} + \delta_3 E_{n3} + U_n \end{aligned}$$

modelo sin término cte. En (4.7) β_1 es el salario "autónomo" común a todos (indep. de a, x, E), y α_j es el efecto derivado del nivel de estudios j. Aquí $\delta_j = (\beta_1 + \alpha_j)$ es una combinación del salario "autónomo" y del nivel de estudios j.

Solución2. reemplazar (*por ejemplo*) E_{n2} por por $(1 - E_{n1} - E_{n3})$

$$\begin{aligned} W_n &= \beta_1 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \alpha_1 E_{n1} + \alpha_2(1 - E_{n1} - E_{n3}) + \alpha_3 E_{n3} + U_n \\ &= (\beta_1 + \alpha_2) + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + (\alpha_1 - \alpha_2)E_{n1} + (\alpha_3 - \alpha_2)E_{n3} + U_n \\ &= \theta_0 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \theta_1 E_{n1} + \theta_3 E_{n3} + U_n \end{aligned}$$

Aquí $\theta_0 = (\beta_1 + \alpha_2)$ es como δ_2 de (4.8); $\theta_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)$ diferencia entre los componentes atribuibles (*exclusivamente*) a E_1 y E_2; $\theta_3 = (\alpha_3 - \alpha_2)$ diferencia entre los componentes atribuibles (*exclusivamente*) a E_3 y E_2 (nótese que el referente es la categoría eliminada).
Piense en la interpretación con otras soluciones alternativas.

Interpretación de los coeficientes: Ejemplo con multicolinealidad **25**

Contemplemos además las variables *antigüedad en la empresa* (a_n), los años de *experiencia* en el sector (x_n)

$$W_n = \beta_1 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \alpha_1 E_{n1} + \alpha_2 E_{n2} + \alpha_3 E_{n3} + U_n \tag{4.7}$$

Aquí

- β_1 salario "autónomo" común a todos los trabajadores
- β_2 efecto antigüedad
- β_3 efecto experiencia
- α_j efecto del nivel de estudios j

(Pero $1 = E_{n1} + E_{n2} + E_{n3}$)

Interpretación de los coeficientes: Ejemplo con multicolinealidad **26**

Solución1. reemplazar la constante 1 por $E_{n1} + E_{n2} + E_{n3}$. Operando:

$$W_n = \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \delta_1 E_{n1} + \delta_2 E_{n2} + \delta_3 E_{n3} + U_n \tag{4.8}$$

- $\delta_j = (\beta_1 + \alpha_j)$ combinación de salario "autónomo" y estudios j

Solución2. reemplazar E_{n2} por $(1 - E_{n1} - E_{n3})$. Operando:

$$W_n = \theta_0 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \theta_1 E_{n1} + \theta_3 E_{n3} + U_n \tag{4.9}$$

- $\theta_0 = (\beta_1 + \alpha_2)$ es como δ_2 de (4.8) (autónomo + Estudios 2)
- $\theta_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)$ pérdida por pertenecer a E_1 en lugar de E_2
- $\theta_3 = (\alpha_3 - \alpha_2)$ ganancia por pertenecer a E_3 en lugar de E_2

(referente es la categoría eliminada E_2)

Piense en la interpretación con otras soluciones alternativas.

Los *"contrastes de homogeneidad de los parámetros"* (entre distintas sub-muestras **excluyentes y exhaustivas**, i.e., entre distintas particiones de una muestra dada) se pueden realizar mediante *dummies*. Podemos asociar un subconjunto de índices n *"a una característica determinada"* (sexo, región geográfica, nivel de educación, sector económico, empresa, etc.) que define a una sub-muestra de interés particular.

Ejemplo 10. [**contrastes de homogeneidad entre distintos grupos (continuación del anterior)**] Supongamos ahora que queremos realizar un contraste de homogeneidad de los efectos derivados de los distintos niveles de educación (que en el modelo original (4.7) se expresaría como $H_0: \ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$). Puesto que no podemos trabajar con el modelo original debido al problema de multicolinealidad, podemos reescribir la hipótesis de homogeneidad como

$$H_0: \ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \ \text{ y } \ \alpha_3 - \alpha_2 = 0$$

es decir, empleando (4.9) podemos realizar el contraste de significatividad conjunta de los parámetros θ_1 y θ_3.

$$H_0: \ \theta_1 = 0 \ \text{ y } \ \theta_3 = 0$$

⇑ contrastes de homogeneidad entre grupos 27

¿afecta el nivel de educación?

- Modelo original (4.7)
  $W_n = \beta_1 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \alpha_1 E_{n1} + \alpha_2 E_{n2} + \alpha_3 E_{n3} + U_n$
  $H_0 : \ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$
  No se puede por multicolinealidad
- Modelo transformado (4.9)
  $W_n = \theta_0 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \theta_1 E_{n1} + \theta_3 E_{n3} + U_n$

$$H_0 : \ \theta_1 = 0 \ \text{ y } \ \theta_3 = 0$$

Observación. Supongamos que deseamos estimar el efecto de los tres niveles de educación sobre el salario: (4.7) no puede estimarse por el problema de multicolinealidad; y al estimar (4.8) ó (4.9) no disponemos de estimaciones individuales de α_1, α_2 y α_3.

Una forma de estimar estos parámetros es imponer una restricción lineal sobre α_1, α_2 y α_3 (¡siempre y cuando dicha restricción tenga sentido, claro!). Por ejemplo, si impusiéramos la restricción $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$ (algo que implica un tipo de renormalización tal que la suma de los efectos es cero —algo que no está claro que sea cierto...) y sustituyendo α_1 por $(-\alpha_2 - \alpha_3)$ en el modelo original (4.7) tenemos:

$$\begin{aligned} W_n &= \beta_1 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + (-\alpha_2 - \alpha_3) E_{n1} + \alpha_2 E_{n2} + \alpha_3 E_{n3} + U_n \\ &= \beta_1 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \alpha_2 (E_{n2} - E_{n1}) + \alpha_3 (E_{n3} - E_{n1}) + U_n \\ &= \beta_1 + \beta_2 a_n + \beta_3 x_n + \alpha_2 E^*_{n2} + \alpha_3 E^*_{n3} + U_n \qquad (4.10) \end{aligned}$$

donde $E^*_{n2} = (E_{n2} - E_{n1})$, y $E^*_{n3} = (E_{n3} - E_{n1})$. Al estimar (4.10) se obtiene $\widehat{\alpha_2}$ y $\widehat{\alpha_3}$; Finalmente podemos calcular $\widehat{\alpha_1} = -\widehat{\alpha_2} - \widehat{\alpha_3}$.

Pero nótese que el efecto estimado para los distintos niveles de educación está “forzado” para que cumpla la restricción $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, algo que producirá sesgos si dicha restricción es falsa.

5. Bibliografía

Gujarati, D. N. (2003). *Basic Econometrics*. McGraw-Hill, cuarta ed. ISBN 0-07-112342-3. International edition. 10

Johnston, J. y Dinardo, J. (2001). *Métodos de Econometría*. Vicens Vives, Barcelona, España, primera ed. ISBN 84-316-6116-x. 9

Novales, A. (1993). *Econometría*. McGraw-Hill, segunda ed. 1, 2, 6, 8, 9

Novales, A. (1997). *Estadística y Econometría*. McGraw-Hill, Madrid, primera ed. ISBN 84-481-0798-5. 2

Verbeek, M. (2004). *A Guide to Modern Econometrics*. John Wiley & Sons, Inc., segunda ed. 1

Wooldridge, J. M. (2006). *Introducción a la econometría. Un enfoque moderno*. Thomson Learning, Inc., segunda ed. 1, 2, 6, 8, 9

6. Trasparencias

Lista de Trasparencias

A. Demostraciones

A.1. Derivación de la varianza del estimador $\widehat{\beta_j}$ en el modelo con tres regresores

De las ecuaciones 3.12 y 3.13 en la página siguiente del Tema 1, sabemos que

$$\widehat{\beta_2} = \frac{s_{x_2Y} \cdot s_{x_3}^2 - s_{x_3Y} \cdot s_{x_2x_3}}{s_{x_2}^2 \cdot s_{x_3}^2 - \left(s_{x_2x_3}\right)^2} = \frac{S_{2Y} \cdot S_{33} - S_{3Y} \cdot S_{23}}{\Delta}$$

$$\widehat{\beta_3} = \frac{s_{x_3Y} \cdot s_{x_2}^2 - s_{x_2Y} \cdot s_{x_2x_3}}{s_{x_2}^2 \cdot s_{x_3}^2 - \left(s_{x_2x_3}\right)^2} = \frac{S_{3Y} \cdot S_{22} - S_{2Y} \cdot S_{23}}{\Delta}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_{2Y} =& N s_{x_2Y} = \sum_n Y_n(x_{2n} - \overline{x_2}) \\
S_{3Y} =& N s_{x_3Y} = \sum_n Y_n(x_{3n} - \overline{x_3}) \\
S_{22} =& N s_{x_2}^2 = \sum_n x_{2n}(x_{2n} - \overline{x_2}) \\
S_{33} =& N s_{x_3}^2 = \sum_n x_{3n}(x_{3n} - \overline{x_3}) \\
S_{23} =& N s_{x_2x_3} = \sum_n x_{3n}(x_{2n} - \overline{x_2});
\end{aligned}$$

y donde $\Delta = N^2\left[s_{x_2}^2 \cdot s_{x_3}^2 - \left(s_{x_2x_3}\right)^2\right]$.

Puesto que el modelo es $Y_n = \boldsymbol{x}_{n\triangleright}\boldsymbol{\beta} + U_n$, tenemos por un lado que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(S_{2Y}) =& \operatorname{Var}\left(\sum Y_n(x_{2n} - \overline{x_2})\right) = \operatorname{Var}\left(\sum(\boldsymbol{x}_{n\triangleright}\boldsymbol{\beta} + U_n)(x_{2n} - \overline{x_2})\right) \\
=& \operatorname{Var}\left((\text{suma de términos ctes.}) + \sum U_n(x_{2n} - \overline{x_2})\right) \\
=& \operatorname{Var}\left(\sum U_n(x_{2n} - \overline{x_2})\right)
\end{aligned}$$

y puesto que $\operatorname{Cov}(U_i, U_j) = 0$, en este caso la varianza de la suma es igual a la suma de las varianzas

$$\begin{aligned}
=& \sum \operatorname{Var}\left(U_n(x_{2n} - \overline{x_2})\right) \\
=& \sum \operatorname{Var}(U_n)\,(x_{2n} - \overline{x_2})^2 \\
=& \sigma^2 \sum (x_{2n} - \overline{x_2})^2 \\
=& \sigma^2 S_{22}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\boxed{\operatorname{Var}(S_{2Y}) = \sigma^2 S_{22}}$. Del mismo modo podemos deducir que $\boxed{\operatorname{Var}(S_{3Y}) = \sigma^2 S_{33}}$.

Por otro lado, para calcular la covarianza $\operatorname{Cov}(S_{2Y}, S_{3Y})$ necesitamos calcular primero las esperanzas. Ya que el modelo es $Y_n = \beta_1 + \beta_2 x_{2n} + \beta_3 x_{3n} + U_n$, tenemos

$$\begin{aligned} S_{2Y} =& \sum Y_n(x_{2n} - \overline{x_2}) \\ =& \sum(\beta_1 + \beta_2 x_{2n} + \beta_3 x_{3n} + U_n)(x_{2n} - \overline{x_2}) \\ =& \beta_1 \sum(x_{2n} - \overline{x_2}) + \beta_2 \sum x_{2n}(x_{2n} - \overline{x_2}) + \beta_3 \sum x_{3n}(x_{2n} - \overline{x_2}) + \sum U_n(x_{2n} - \overline{x_2}) \\ =& 0 + \beta_2 S_{22} + \beta_3 S_{23} + \sum U_n(x_{2n} - \overline{x_2}) \end{aligned}$$

y entonces

$$\mathrm{E}(S_{2Y}) = \beta_2 S_{22} + \beta_3 S_{23},$$

puesto que la esperanza de $\mathrm{E}(U_n) = 0$. Del mismo modo podemos deducir que

$$S_{3Y} = \beta_2 S_{23} + \beta_3 S_{33} + \sum U_n(x_{3n} - \overline{x_3}) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}(S_{3Y}) = \beta_2 S_{23} + \beta_3 S_{33},$$

Ahora podemos calcular

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(S_{2Y}, S_{3Y}) =& \mathrm{E}(S_{2Y} \cdot S_{3Y}) - \mathrm{E}(S_{2Y}) \cdot \mathrm{E}(S_{3Y}) \\ =& \mathrm{E}\Big(\Big(\beta_2 S_{22} + \beta_3 S_{23} + \sum U_n(x_{2n} - \overline{x_2})\Big)\Big(\beta_2 S_{23} + \beta_3 S_{33} + \sum U_n(x_{3n} - \overline{x_3})\Big)\Big) - \mathrm{E}(S_{2Y}) \cdot \mathrm{E}(S_{3Y}) \\ =& \mathrm{E}\Big(\Big(\mathrm{E}(S_{2Y}) + \sum U_n(x_{2n} - \overline{x_2})\Big)\Big(\mathrm{E}(S_{3Y}) + \sum U_n(x_{3n} - \overline{x_3})\Big)\Big) - \mathrm{E}(S_{2Y}) \cdot \mathrm{E}(S_{3Y}) \end{aligned}$$

y puesto que $\mathrm{E}(U_n) = 0$, la esperanza de los productos cruzados es cero y

$$\begin{aligned} =& \mathrm{E}(S_{2Y}) \cdot \mathrm{E}(S_{3Y}) + \mathrm{E}\Big(\Big(U_n(x_{2n} - \overline{x_2})\Big)\Big(\sum U_n(x_{3n} - \overline{x_3})\Big)\Big) - \mathrm{E}(S_{2Y}) \cdot \mathrm{E}(S_{3Y}) \\ =& \sigma^2 S_{23} \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(\widehat{\beta_2}\right) =& \frac{1}{\Delta^2}\Big(S_{33}^2 \operatorname{Var}(S_{2Y}) + S_{23}^2 \operatorname{Var}(S_{3Y}) - 2S_{33}S_{23}\operatorname{Cov}(S_{2Y}, S_{3Y})\Big) \\ =& \frac{1}{\Delta^2}\sigma^2\Big(S_{33}^2 S_{22} + S_{23}^2 S_{33} - 2S_{33}S_{23}S_{23}\Big) = \frac{\sigma^2 S_{33}\Delta}{\Delta^2} \\ =& \frac{\sigma^2 S_{33}}{S_{22}S_{33} - S_{23}^2} = \frac{\sigma^2}{S_{22} - S_{23}^2/S_{33}} \\ =& \frac{\sigma^2}{S_{22}\left(1 - \frac{S_{23}^2}{S_{22}S_{33}}\right)}; \end{aligned}$$

y recordando que el cuadrado del coeficiente de correlación simple entre x_2 y x_3 es $\frac{S_{23}^2}{S_{22}S_{33}}$, que es precisamente el coeficiente de determinación R_{23}^2 para del modelo lineal simple

$$X_{2n} = a + bX_{3n} + U_n$$

(véase el Ejercicio 34 en la página˜30 del Tema 1)

Por tanto

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{\beta_2}\right) = \frac{\sigma^2}{(1 - R_{23}^2)\sum(x_{2n} - \overline{x_2})^2}.$$

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. En el caso de contrastes de la significación individual tenemos $H_0 : \beta_j = 0; \qquad H_1 : \beta_j \neq 0.$ Y

$$\mathcal{T}^{*j} \equiv \frac{\widehat{\beta_j^*} - 0}{\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j^*}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\beta_j} - \frac{\lambda}{\lambda_j}0}{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda_j}(\widehat{\beta_j} - 0)}{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j}\right)} = \mathcal{T}^j$$

La conclusión es que, si un parámetro es estadísticamente significativo en un modelo, también lo es si se cambia la escala de los datos del modelo.

Para otros contrastes es resultado es ligeramente diferente. Supongamos las hipótesis

$$H_0 : \beta_j = k; \qquad H_1 : \beta_j \neq k.$$

para el modelo original, y

$$H_0 : \beta_j^* = k; \qquad H_1 : \beta_j^* \neq k.$$

para el modelo transformado (nótese que el valor de k es el mismo en ambos casos). Entonces:

$$\mathcal{T}^{*j} \equiv \frac{\widehat{\beta_j^*} - k}{\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j^*}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\beta_j} - k}{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j}\right)} \neq \frac{\widehat{\beta_j} - k}{\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j}\right)} = \mathcal{T}^j.$$

Ahora bien si en el modelo transformado cambiamos k por $k^* = \frac{\lambda}{\lambda_j}k$, entonces

$$\mathcal{T}^{*j} \equiv \frac{\widehat{\beta_j^*} - k^*}{\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j^*}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\beta_j} - \frac{\lambda}{\lambda_j}k}{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda_j}(\widehat{\beta_j} - k)}{\frac{\lambda}{\lambda_j}\widehat{\text{Dt}}\left(\widehat{\beta_j}\right)} = \mathcal{T}^j$$

Es decir, si re-escalamos la hipótesis nula convenientemente, el estadístico no cambia.

Ejercicio 1

Ejercicio 2.

$$precio = \frac{1}{1.25} \cdot price; \qquad sup = \frac{1}{0.092} \cdot sqft;$$

por tanto

$$\widehat{a^*} = \widehat{a} \cdot \frac{1}{1.25} = 52.3509 \cdot \frac{1}{1.25} = 41.881 \qquad \text{el regresor cte. sigue siendo 1}$$

$$\widehat{b^*} = \widehat{b} \cdot \frac{0.092}{1.25} = 0.138750 \cdot \frac{0.092}{1.25} = 0.010212$$

Guión de GNU Gretl para este ejercicio

Ejercicio 2

Ejercicio 3. El modelo en desviaciones respecto a la media es un cambio de origen tanto de los regresores como del regresando.

Ejercicio 3

Ejercicio 4. Puesto que $\widehat{\beta_1^*} = \frac{1}{N}\sum Y_n - \widehat{\beta_2^*}\overline{x_2}$;

$$\begin{aligned}\widehat{\beta_1^*} =& \frac{1}{N}\sum(\beta_1 + \beta_2 x_{n2} + \beta_3 x_{n3} + U_n) - \widehat{\beta_2^*}\overline{x_2} \\ =& \beta_1 + \beta_2\overline{x_2} + \beta_3\overline{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}} - \widehat{\beta_2^*}\overline{x_2} + \frac{\sum U_n}{N}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\text{E}\left(\widehat{\beta_1^*} \,\middle|\, \mathbf{x}\right) &= \beta_1 + \beta_2\overline{x_2} + \beta_3\overline{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}} - \text{E}\left(\widehat{\beta_2^*}\overline{x_2} \,\middle|\, \mathbf{x}\right) \\ &= \beta_1 + \beta_3\left(\overline{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}} - \frac{s_{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}}}{s^2_{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}}}\overline{x_2}\right) \qquad \text{sustituyendo } \text{E}\left(\widehat{\beta_2^*} \,\middle|\, \mathbf{x}\right) \text{ de (2.1)}\end{aligned}$$

Por una parte, si $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ es ortogonal a $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}$, entonces $s_{\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 2}\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}} = 0$; por otra parte, que $\boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ sea ortogonal a $\mathbf{1}$ quiere decir que

$$\mathbf{1}' \cdot \boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3} = \sum \boldsymbol{x}_{n3} = 0;$$

por tanto su media es cero, y el estimador $\widehat{\beta_2^*}$ es insesgado.

En este caso las perturbaciones del modelo incorrecto $\boldsymbol{U}^{*} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{x}_{\blacktriangledown 3}$ son ortogonales a los regresores presentes en el modelo; por tanto todos los supuestos se cumplen y consecuentemente los estimadores $\widehat{\beta_1^*}$ y $\widehat{\beta_2^*}$ son insesgados.

Ejercicio 4

Ejercicio 5.

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}} \,\middle|\, \mathbf{x}\right) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}' \underbrace{\mathrm{E}(\boldsymbol{U} \mid \mathbf{x})}_{\neq 0}$$

por lo que las estimaciones serán sesgadas. Nótese que lo importante de este resultado no es si la variable es relevante o no en el modelo, lo crucial es que tiene correlación con las perturbaciones.

Por otra parte la matriz de varianzas y covarianzas de las perturbaciones sera

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{U} \mid \mathbf{x}) = \mathrm{E}\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}' \,\middle|\, \mathbf{x}\right) - \mathrm{E}(\boldsymbol{U} \mid \mathbf{x})\,\mathrm{E}\left(\boldsymbol{U}' \,\middle|\, \mathbf{x}\right) = \sigma^2\,\mathbf{I} + \mathbf{w}$$

donde $\mathbf{w}$ es una matriz distinta de cero. Esto quiere decir que las perturbaciones presentaran correlaciones entre si. Por ello el Teorema de Gauss-Markov deja de tener efecto (observe como para su demostración se empleó el hecho de que $\mathrm{Var}(\boldsymbol{U} \mid \mathbf{x}) = \sigma^2\,\mathbf{I}$, una condición que no es válida si $\mathrm{E}(\boldsymbol{U} \mid \mathbf{x}) \neq 0$.) Este tipo de dificultades se abordarán en la asignatura Econometría II.

Ejercicio 5

Ejercicio 6. El modelo restringido es

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 x_n + U_n{}^*, \quad n = 1, \ldots, N$$

y el modelo sin restringir (general)

$$Y_n = \beta_1^A D_n^A \;+\; \beta_1^B D_n^B \;+\; \beta_2^A D_n^A x_n \;+\; \beta_2^B D_n^B x_n \;+ U_n,$$

La hipótesis nula contiene dos restricciones:

$$H_0 : \beta_1^A = \beta_1^B \text{ y conjuntamente } \beta_2^A = \beta_2^B$$

por tanto el contraste es necesariamente un contraste F con hipótesis alternativa:

$$H_1 : \text{ la nula es falsa.}$$

De nuevo tenemos dos opciones

1. Por sumas residuales: estimando ambos modelos y empleando el estadístico de la ecuación 5.5 en la página˜16 del tema 2.
2. Por sustitución: $D_n^B = 1 - D_n^A$ en el modelo sin restringir:

$$\begin{aligned} Y_n =& \beta_1^B + (\beta_1^A - \beta_1^B)D_n^A + \beta_2^B x_n + (\beta_2^A - \beta_2^B)D_n^A x_n + U_n \\ =& \beta_1^B + \alpha D_n^A + \beta_2^B x_n + \delta D_n^A x_n + U_n \end{aligned}$$

en cuyo caso la hipótesis nula se transforma en

$$H_0 : \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

es decir, un contraste de significación conjunta de α y β (compárese con el contraste de Chow de cambio estructural de la página 17)

Ejercicio 6