Звіт
до лабораторної роботи №3:
«Чисельне моделювання в'язкої ньютонівської нестислої рідини.»

студента 1-го курсу магістратури
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Кравця Олексія

Зміст

1 Постановка задачі

Для моделювання будемо використовувати лінеаризовану систему рівнянь Нав'є-Стокса.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega = \{0 \le x \le a, 0 \le y \le d\},\ t > 0 \tag{3}$$

Де $u(x, y, t)$ – складова швидкості по осі x, $v(x, y, t)$ – складова швидкості по осі y, $p(x, y, t)$ – тиск. ρ – густина, ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості.

Маємо наступні початкові умови:

$$u|_{t=0} = u^0(x, y); \quad v|_{t=0} = v^0(x, y); \quad p|_{t=0} = p^0(x, y) \tag{4}$$

та граничні умови (першого роду):

$$\begin{aligned}
&u|_{x=0} = u^0(y, t); \quad v|_{x=0} = v^0(y, t); \quad p|_{x=0} = p^0(y, t);\\
&u|_{x=a} = u^a(y, t); \quad v|_{x=a} = v^a(y, t); \quad p|_{x=a} = p^a(y, t);\\
&u|_{y=0} = u^0(x, t); \quad v|_{y=0} = v^0(x, t); \quad p|_{y=0} = p^0(x, t);\\
&u|_{y=d} = u^d(x, t); \quad v|_{y=d} = v^d(x, t); \quad p|_{y=d} = p^d(x, t);
\end{aligned} \tag{5}$$

Також дано точний розв'язок:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= -e^{-t}e^{\frac{2y}{d}}\sin\left(\frac{2x}{d}\right)\\
v(x, y, t) &= e^{-t}e^{\frac{2y}{d}}\cos\left(\frac{2x}{d}\right)\\
p(x, y, t) &= \frac{d}{2}\rho e^{-t}e^{\frac{2y}{d}}\cos\left(\frac{2x}{d}\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

Саме з формул (6) обраховуються формули (4), (5).

Необхідно побудувати динаміку зміни векторного поля швидкостей, а також динаміку зміни тиску. Порівняти обчислений розв'язок з точним.

2 Опис чисельного методу

Позначимо τ – часовий крок, h_x – крок по осі x, h_y – крок по осі y.

Якщо (1) продиференціювати по x, а (2) – по y, і скласти отримані рівняння, х врахуванням (3), отримаємо рівняння Пуасона для тиску

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right), \quad \text{де } D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{7}$$

Рівняння (7) можна апроксимувати на п'яти-точковому шаблоні.

$$\Delta_h p^{n+1}_{i,j} = S^n_{i,j} \tag{8}$$

де

$$S^n_{i,j} = \frac{D^n_{i,j}}{\tau} + \frac{1}{Re}\Delta_h D^n_{i,j} \tag{9}$$

Тут

$$
\begin{aligned}
D_{i,j}^n &= L_1 u_{i,j}^n + L_2 v_{i,j}^n \\
L_1 u_{i,j}^n &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h_x} \\
L_2 v_{i,j}^n &= \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n}{2h_y} \\
\Delta_h p_{i,j}^n &= \frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{h_y^2}
\end{aligned} \tag{10}
$$

Зауважимо, що у своїх розрахунках я змінив формулу (9) та знехтував доданком з числом Рейнольдса.

$$
S_{i,j}^n = \frac{D_{i,j}^n}{\tau} \tag{11}
$$

2.1 Двокроковий симетризований алгоритм

Для оновлення $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ будемо використовувати двокроковий симетризований алгоритм.

Давайте розглянемо точки u_i^n, j, для яких виконується $i + j + n \vdots 2$. Будемо оновлювати їх за явною різницевою схемою:

$$
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho}\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \nu\left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h_y^2}\right) \tag{12}
$$

Тепер розглянемо точки, що залишилися, тобто точки $u_{i,j}^n$ для яких $i + j + n$ не ділиться на 2. Будемо оновлювати їх за неявною різницевою схемою:

$$
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = -\frac{1}{\rho}\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \nu\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2}\right) \tag{13}
$$

Завдяки (12) можемо явно розв'язати (13)

$$
u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \frac{\tau}{\rho}\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2h_x} + \frac{\tau\nu\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h_y^2}\right)}{1 + 2\tau\nu\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right)} \tag{14}
$$

Аналогічно можна знайти $v_{i,j}^{n+1}$.

2.2 Алгоритм

Чисельний метод знаходження u, v, p:

- Знаходимо тиск p^{n+1} з рівняння (8) ітераційним методом верхньої релаксації [1, стор.182-183]:

$$
p_{i,j}^{r+1} = p_{i,j}^r + \frac{w}{2(1+\beta^2)}\left[p_{i+1,j}^r + p_{i-1,j}^{r+1} + \beta^2 p_{i,j+1}^r + \beta^2 p_{i,j-1}^{r+1} - h_x^2 S_{i,j} - 2(1+\beta^2)p_{i,j}^r\right] \tag{15}
$$

  де $\beta = \frac{h_x}{h_y}$, $r = 1, 2, \ldots$ – номер ітерації. Часовий індекс n опущений для спрощення запису. w – параметр релаксації $1 \le w \le 2$, його обраховуємо автоматично по формулам з [1].

- Компоненти швидкості u^{n+1}, v^{n+1} знаходимо, використовуючи двокроковий симетризований алгоритм. Формули (12 - 14).

3 Результати

Візьмемо такі параметри:

$$a = 3.1; \quad d = 1;$$
$$h_x = 0.1; \quad h_y = 0.1;$$
$$t_0 = 0; \quad \tau = 0.1;$$
$$\rho = 1; \quad \nu = 1.$$

Тоді після одного кроку роботи алгоритму та після 100 кроків маємо такі результати (рис. 1)

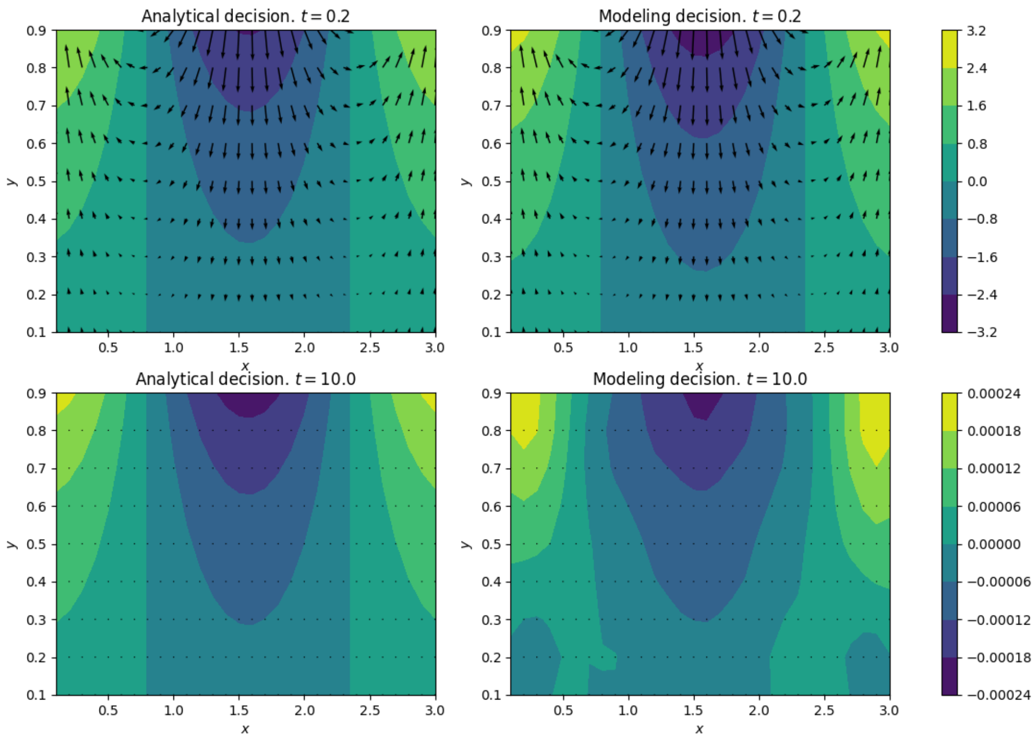

Рис. 1: Результати після 1 та 100 кроків.

Побудуємо графіки абсолютної похибки по крокам (рис. 2)

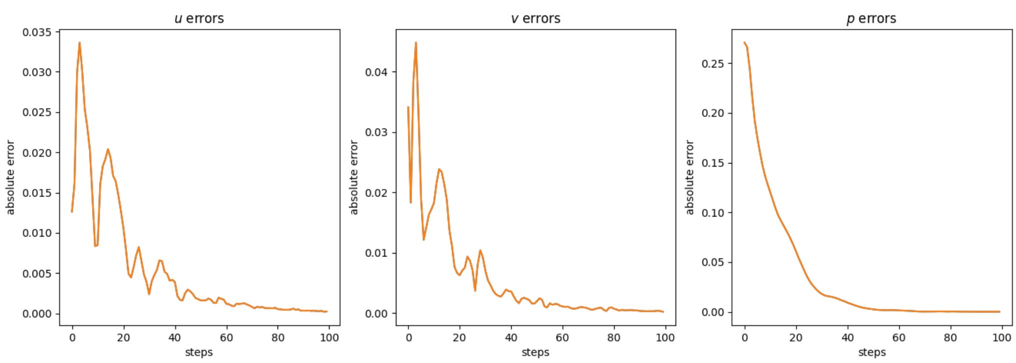

Рис. 2: Абсолютна похибка по крокам

Бачимо, що похибка для тиску p доволі велика, вона зменшується з плином часу, оскільки зменшується саме значення тиску p. Також легко побачити, що і швидкість зменшується та прямує до нуля із збільшенням часу.

Анімацію можна знайти за посиланнями

- Аналітичний розв'язок
- Чисельне моделювання

3.1 Особливості моделювання

Під час тестування програми я помітив цікаву поведінку програми при виборі дуже малого часового кроку $\tau = 0.0001$. При такому значенні кроку виникає помилка при обрахуванні значення тиску p. Це можна побачити на рисунку 3.

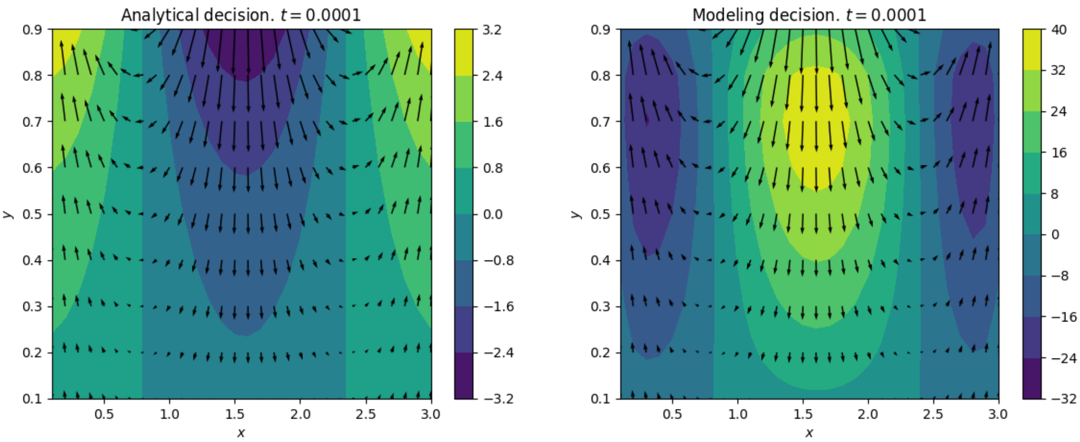

Рис. 3: Демонстрація помилки при обрахуванні p

Як видно з рисунка 3 виникає велика помилка при обрахуванні тиску. На мій погляд така помилка пов'язана із методом оновлення p та малим значенням часового кроку τ.

Ми оновлюємо значення тиску за формулою (15), де S_i, j обраховується за формулою (11). Легко побачити, що при дуже малих значеннях τ значення $S_{i,j}$ стає дуже великим, і навіть множник h_x^2 не може компенсувати цього.

Зрозуміло, що значення тиску при такій малій зміні часу не повинно сильно змінитися, але у формулу оновлення (15) додається велике значення $S_{i,j}$, що спричиняє помилки.

Тому необхідно брати значення часового кроку τ приблизно рівне кроку по осі x h_x.

4 Висновок

Було проведено чисельне моделювання в'язкої ньютонівської нестислої рідини. Знайшли деякі особливості методу моделювання.

Література

[1] Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М. "Мир" 1980. с-616.