Звіт
до лабораторної роботи №1:
«Чисельне моделювання для рівняння теплопровідності.»

студента 1-го курсу магістратури
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Кравця Олексія

Зміст

1 Постановка задачі

Маємо наступне рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \tag{1}$$

в наступній прямокутній області $[0, l_1] \times [0, l_2]$, $t \in (0, 1)$.
Також даний тестовий розв'язок для варіанту 1:

$$\omega_{test}(x,y,t) = Ae^{k_1 x + k_2 y + (k_1^2 + k_2^2)at} \tag{2}$$

Відновлюємо праву частину f по відомому тестовому розв'язку (2). Розпишемо це

$$f(x,y,t) = \frac{\partial \omega_{test}}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 \omega_{test}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_{test}}{\partial y^2}\right) = (k_1^2 + k_2^2)aAe^{(\cdots)} - a\left(k_1^2 Ae^{(\cdots)} + k_2^2 Ae^{(\cdots)}\right) = 0$$

Розглядаємо задачу з першими крайовими умовами.

$$\begin{aligned}
\omega(x,y,0) &= \omega_{test}(x,y,0) \\
\omega(0,y,t) &= \omega_{test}(0,y,t) \\
\omega(l_1,y,t) &= \omega_{test}(l_1,y,t) \\
\omega(x,0,t) &= \omega_{test}(x,0,t) \\
\omega(x,l_2,t) &= \omega_{test}(x,l_2,t)
\end{aligned} \tag{3}$$

2 Опис методів

2.1 Явна різницева схема

Позначимо u наближений розв'язок, h - крок по простору (спільний для x, y), τ - крок по часу. Тоді можемо так записати рівняння (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x,y,t) \tag{4}$$

Позначимо $x_k = kh$, $y_m = mh$, $t_\nu = \nu\tau$, $f_{km}^\nu = f(x_k, y_m, t_\nu)$

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 u_{k,m}^\nu &= \frac{u_{k-1,m}^\nu - 2u_{k,m}^\nu + u_{k+1,m}^\nu}{h^2} \\
\Lambda_2 u_{k,m}^\nu &= \frac{u_{k,m-1}^\nu - 2u_{k,m}^\nu + u_{k,m+1}^\nu}{h^2} \\
\Lambda u_{k,m}^\nu &= \Lambda_1 u_{k,m}^\nu + \Lambda_2 u_{k,m}^\nu
\end{aligned}$$

Явна різницева схема має такий вигляд

$$\frac{u_{k,m}^\nu - u_{k,m}^{\nu-1}}{\tau} - a\Lambda u_{k,m}^{\nu-1} = f_{k,m}^{\nu-1} \tag{5}$$

Ця схема стійка при $\tau \le h^2/4$.

2.2 Метод змінних напрямків

Позначення не змінилися.

Метод змінних напрямків складається з двох полукроків

$$\frac{u_{k,m}^{\nu-1/2} - u_{k,m}^{\nu-1}}{\tau/2} - a\Lambda_1 u_{k,m}^{\nu-1/2} - a\Lambda_2 u_{k,m}^{\nu-1} = f_{k,m}^{\nu-1/2} \tag{6}$$

$$\frac{u_{k,m}^{\nu} - u_{k,m}^{\nu-1/2}}{\tau/2} - a\Lambda_1 u_{k,m}^{\nu-1/2} - a\Lambda_2 u_{k,m}^{\nu} = f_{k,m}^{\nu} \tag{7}$$

Рівняння (6), (7) можна переписати у вигляді, що дозволяє використати метод прогонки. Розпишемо рівняння (6)

$$\frac{a\tau}{2h^2}u_{k-1,m}^{\nu-1/2} - \left(1 + \frac{a\tau}{h^2}\right)u_{k,m}^{\nu-1/2} + \frac{a\tau}{2h^2}u_{k+1,m}^{\nu-1/2} = F_{k,m}^{\nu-1/2}, \quad \text{де}$$
$$F_{k,m}^{\nu-1/2} = \frac{\tau}{2}\left(-a\Lambda_2 u_{k,m}^{\nu-1} - f_{k,m}^{\nu-1/2}\right) - u_{k,m}^{\nu-1}$$

Отже для кожного фіксованого m маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що можна вирішити методом прогонки.

Розпишемо рівняння (7)

$$\frac{a\tau}{2h^2}u_{k,m-1}^{\nu} - \left(1 + \frac{a\tau}{h^2}\right)u_{k,m}^{\nu} + \frac{a\tau}{2h^2}u_{k,m+1}^{\nu} = F_{k,m}^{\nu}, \quad \text{де}$$
$$F_{k,m}^{\nu} = \frac{\tau}{2}\left(-a\Lambda_1 u_{k,m}^{\nu-1/2} - f_{k,m}^{\nu-1/2}\right) - u_{k,m}^{\nu-1/2}$$

Ця схема абсолютна стійка.

2.3 Двокроковий симетризований алгоритм

Позначення не змінилися. Додамо позначення c - кількість пройдених алгоритмом кроків.

Візьмемо точки $u_{k,m}$, що задовольняють умові: $(k+u+c)$ ділиться на 2. Будемо оновлювати їх за явної різницевою схемою.

$$\frac{u_{k,m}^{\nu} - u_{k,m}^{\nu-1}}{\tau} - a\Lambda u_{k,m}^{\nu-1} = f_{k,m}^{\nu-1} \tag{8}$$

Після цього розглянемо точки, що залишилися, вони задовольняють умові: $(k+u+c)$ не ділиться на 2. Будемо оновлювати їх за неявно різницевою схемою, завдяки рівнянню (8) можна буде явним чином отримати $u_{k,m}^{\nu}$.

$$\frac{u_{k,m}^{\nu} - u_{k,m}^{\nu-1}}{\tau} - a\Lambda u_{k,m}^{\nu} = f_{k,m}^{\nu} \tag{9}$$

Розпишемо рівняння (9), що отримати $u_{k,m}^{\nu}$ явним чином.

$$u_{k,m}^{\nu} = \left(f_{k,m}^{\nu} + \frac{u_{k,m}^{\nu-1}}{\tau} + a\left(\frac{u_{k-1,m}^{\nu} + u_{k+1,m}^{\nu}}{h^2}\right) + a\left(\frac{u_{k,m-1}^{\nu} + u_{k,m+1}^{\nu}}{h^2}\right)\right)\frac{\tau h^2}{h^2 + 4a\tau}$$

Ця схема абсолютна стійка, та більш точна на парних часових кроках.

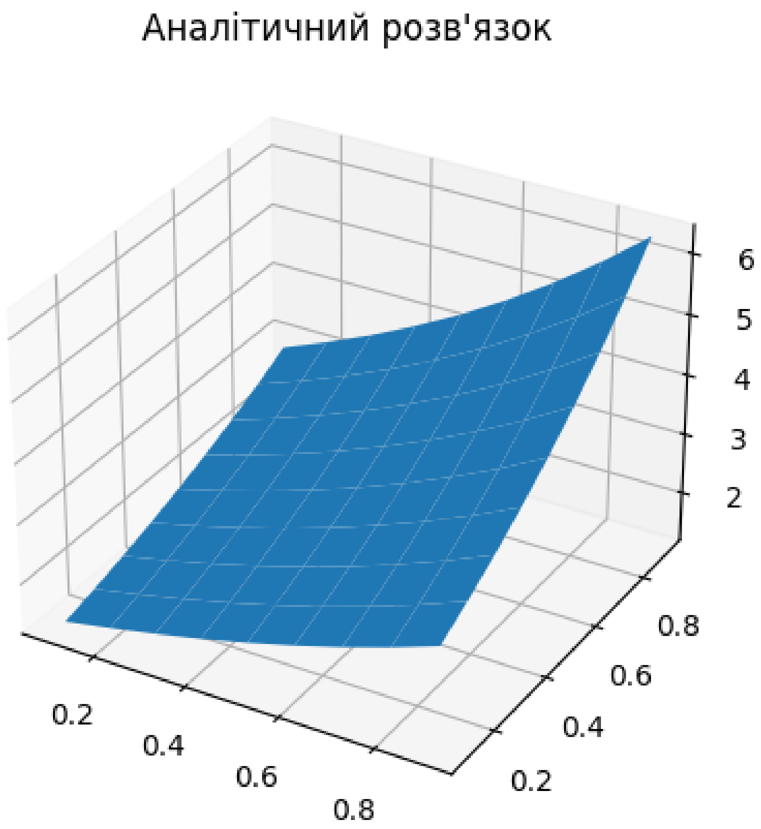

Рис. 1: Рисунок аналітичного розв'язку на 100 часовому кроці.

3 Результати

Розглядаємо задачу в області $[0, 1] \times [0, 1]$, початковий час $t_0 = 0$. Просторовий крок $h = 0.1$, часовий крок $\tau = h * *2/4$ для збіжності явної схеми.

Параметри для рівняння (1), (2) рівні 1, крім $a = 0.1$.

На рисунку (2) позначені методи:

- *method1* - Явна різницева схема;
- *method2* - Метод змінних напрямків;
- *method3* - Двокроковий симетризований алгоритм.

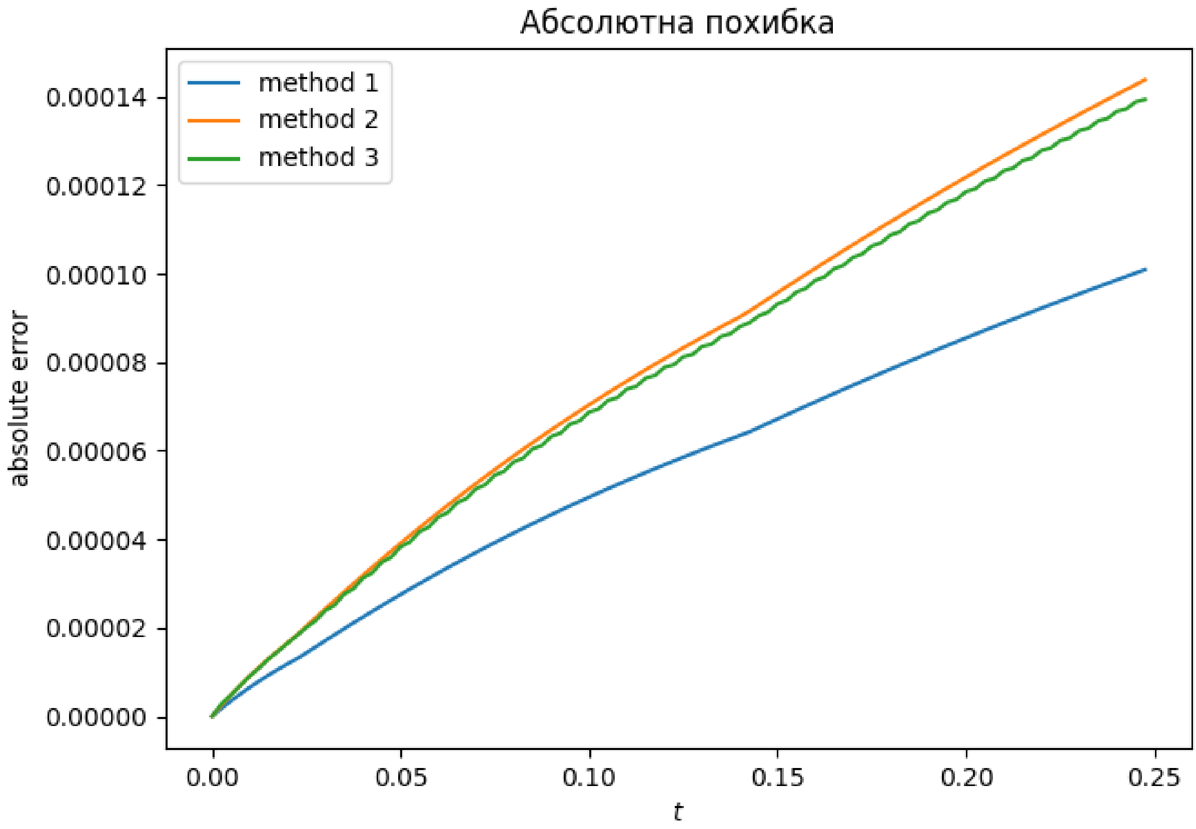

Рис. 2: Графіки абсолютної помилки

На 100 часовому кроці маємо такі значення абсолютної похибки:

- Явна різницева схема - $e = 1E^{-4}$;
- Метод змінних напрямків - $e = 1.4E^{-4}$;
- Двокроковий симетризований алгоритм - $e = 1.4E^{-4}$.

4 Висновки

Ми реалізували та провели тести трьох методів чисельного моделювання. На тестах видна залежність двокрокового симетризованого алгоритму від парності часового кроку.

Література

[1] Е.А.Волков Численные методы, 1987, Москва «Наука»

[2] Грищенко О.Ю., Оноцький В.В. Дисипативніть двокрокових симетризованих алгоритмів для гіперболічних рівнянь переносу, 2000, «Вісник Київського університету»