Лабораторна робота

Моделювання масопереносу та динамічних впливів в гідродинамічних процесах

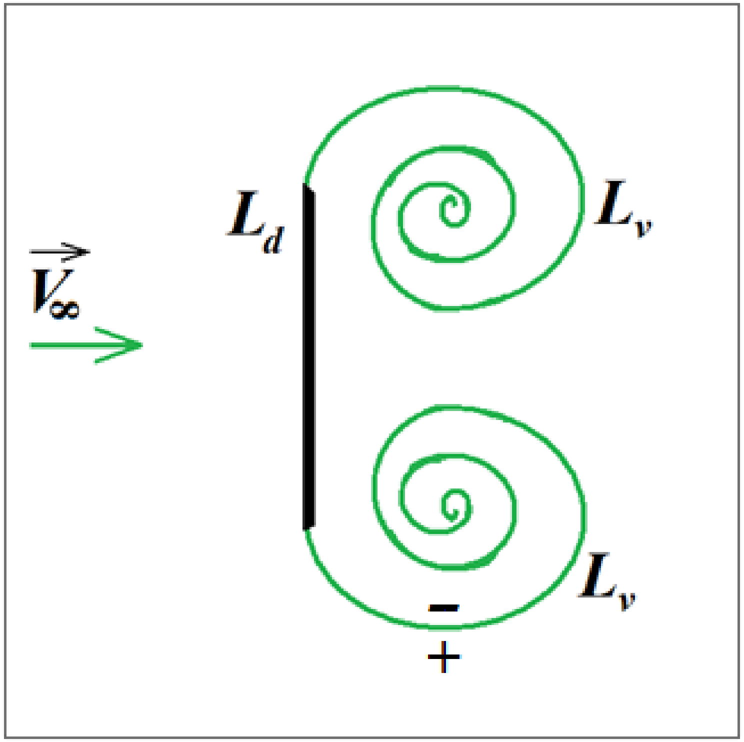
Застосування

1) моделі адвекції плями поверхневого забруднювача;
2) моделі масопереносу донного грунту;
3) Технології обчислення динамічних характеристик

Математична постановка Задачі 1

(для визначення $\varphi = \varphi(r,t): \ \vec{V} = \nabla\varphi$)

$$t \ge t_0: \qquad \Delta\varphi = 0 \qquad \vec{r} \notin L_d, L_v \tag{1}$$



$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \qquad \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t) \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^+ - \varphi^-\right)\Big|_{r_v} = 0 \qquad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t) \tag{3}$$

$$\lim_{|r - r_L| \to \infty} \nabla\varphi = V_\infty \tag{4}$$

$$\frac{\partial\vec{r}_v}{\partial t} = \vec{V}(\vec{r}_v, t) \qquad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t) \tag{5}$$

$$t = t_0: \quad L_0 = L_d(t_0) + L_v(t_0) \tag{6}$$

Математична модель

(інтегральне представлення розв’язку)

$$\bar{V}_\infty = u_\infty - i v_\infty$$

$$\Phi(z,t) = \varphi + i\psi = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_d(t)} f(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_v(t)} f(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega + Const \qquad (7)$$

$$\bar{V}(z,t) = u - iv = \frac{\partial \Phi(z,t)}{\partial z} = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_d(t)} \frac{f(\omega,t)}{z-\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_v(t)} \frac{f(\omega,t)}{z-\omega}d\omega \qquad (8)$$

Умова на детермінованої границі L_d

Умова на вільної границі L_v

$$(9)\quad \begin{cases} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \ge t_0: \\ \operatorname{Re}\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_d} \dfrac{f(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d-\omega)}d\omega\right\} = -\operatorname{Re}\left\{\bar{V}_\infty n(\omega_d) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_v(t)} \dfrac{f(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d-\omega)}d\omega\right\} \\ \displaystyle\int\limits_{L_{dj}} f(\omega_d,t)d\omega_d = -\int\limits_{L_{v_j}(t)} f(\omega_V,t)d\omega_V + C_j,\ j=1,2,... \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \omega_V(t) \in L_v(t), \quad t > t_0: \\ \dfrac{d\bar{\omega}_v(t)}{dt} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_d} \dfrac{f(\omega,t)d\omega}{(\omega_v-\omega)} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_v(t)} \dfrac{f(\omega,t)d\omega}{(\omega_v-\omega)} + \bar{V}_\infty, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v,t) = f(\omega_d,t), \\ t = t_0: \\ L_v(t_0) = L_{v0} \end{cases} \qquad (10)$$

$$\boxed{P(z,t) = P_\infty - \rho \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t) + \frac{\bar{V}(z,t)\cdot\overline{\bar{V}(z,t)}}{2} - \frac{V_\infty \cdot \bar{V}_\infty}{2}\right\}} \qquad (11)$$

Вхідні данні (для дискретизованої моделі)

1) **Контур в системі координат визначається масивом маркованих точок, в яких розташовано систему дискретних особливостей**:

-Впорядкований масив точок $\{\omega_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}\},\ j = 1,\dots,M$ розташування дискретних особливостей:

$$\{x_{0j}, y_{0j}\},\ j = 1,\dots,M$$

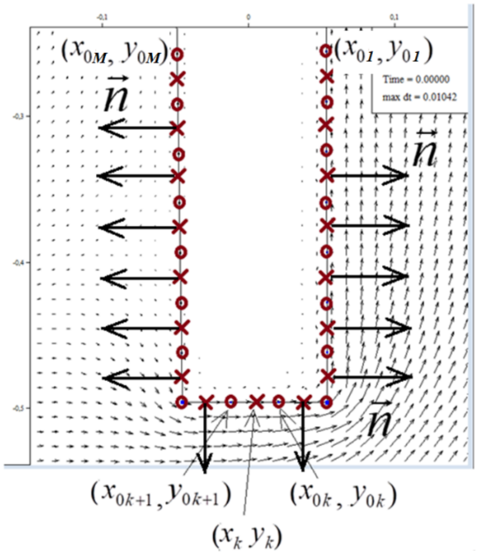
- Впорядкований масив точок колокацій $\{\omega_k = x_k + iy_k\},\ k = 1,\dots,M-1$ розташованих між дискретних особливостей:

$$\{x_k = (x_{0k} + x_{0k+1})/2, y_k = (y_{0k} + y_{0k+1})/2\}$$
$$k = 1,\dots, M-1$$

-Масив нормалей, розташованих в точках колокацій:

$$\vec{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk})$$
$$k = 1,\dots, M-1$$

$$n_{xk} = -(y_{0k+1} - y_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$
$$n_{yk} = (x_{0k+1} - x_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$



2) M -кількість дискретних особливостей

3) Γ_0 -константа, для визначення єдиного розв'язку

4) $\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty)$ $\quad |\vec{V}_\infty| = 1$

Дискретизована модель (при $t = t_{n+1}$)

$$\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$\varphi(x,y,t_{n+1}) = (xu_\infty + yv_\infty) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} Arctg\left(\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}\right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} Arctg\left(\frac{y-y_i^p(t_{n+1})}{x-x_i^p(t_{n+1})}\right) \qquad (12)$$

$$\vec{V}(x,y,t_{n+1}) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x,y,x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \qquad (13)$$

Умова на детермінованої границі L_d

$$(14)\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{n}_k(x_k,y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k,y_k,x_{0j},y_{0j})\right) = \\ = -\left(\vec{n}_k(x_k,y_k) \cdot \vec{V}_\infty\right) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma\left(n(x_k,y_k) \cdot \vec{V}(x_k,y_k,x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))\right) \\ \qquad k = \overline{1, M-1} \\ \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_n) = -\sum_p \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^p \end{cases}$$

Умова на детермінованої границі L_v

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{V}_n \tau_n \qquad (15)$$

$$C_P(x,y,t) = 2\frac{p-p_\infty}{\rho \vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla\varphi)^2}{V_\infty^2} - \frac{2}{V_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad (16)$$

Визначення $\Gamma_1(t_{n+1}),\ldots\ldots,\Gamma_M(t_{n+1})$ для векторного поля швидкостей

$$\vec{V}(x,y,t_{n+1})=(u_\infty,v_\infty)+\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^p\vec{V}(x,y,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})) \quad (17)$$

Із умови

$$\left(\vec{V}(x_k,y_k,t_{n+1})\cdot\vec{n}(x_k,y_k)\right)=0,\quad k=\overline{1,M-1} \quad (18)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{n}_k(x_k,y_k)\cdot\vec{V}_j(x_k,y_k,x_{0j},y_{0j})\right)= \\ =-\left(\vec{n}_k(x_k,y_k)\cdot\vec{V}_\infty\right)-\sum_{p}\sum_{i=1}^{n+1}\gamma\left(n(x_k,y_k)\cdot\vec{V}(x_k,y_k,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right) \quad (19) \\ \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})=-\sum_{p}\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^p \qquad k=\overline{1,M-1} \quad (20)\end{cases}$$

Розв'язок: $\Gamma_1(t_{n+1}),\ldots\ldots,\Gamma_M(t_{n+1})$ (21)

Чисельний розв'язок початково-краєвої задачі відривного обтікання окремого не замкненого контуру

$$\vec{V}(x,y,t_n)=\nabla\varphi(x,y,t_n)=\left(u(x,y,t_n),v(x,y,t_n)\right)=$$
$$=\vec{V}_\infty+\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_n)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^p\vec{V}(x,y,x_i^p(t_n),y_i^p(t_n)) \qquad (22)$$

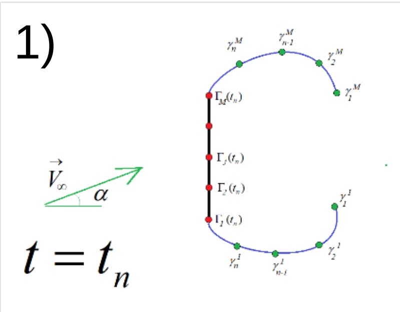
Вектор швидкості $\vec{V}(x,y,x_{0i},y_{0i})=\left(u(x,y,x_{0i},y_{0i}),v(x,y,x_{0i},y_{0i})\right)$ визначений в точці (x,y) індукований вихором з одиничною інтенсивністю, розташованим в точці (x_{0i},y_{0i}) (23)

$$\begin{cases} u(x,y,x_{0i},y_{0i})=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{y_{0i}-y}{R_{0i}^2} & (24)\\ v(x,y,x_{0i},y_{0i})=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{x-x_{0i}}{R_{0i}^2} & (25)\end{cases}$$

де $$R_{0i}=\begin{cases}\sqrt{(x-x_{0i})^2+(y-y_{0i})^2}, & \sqrt{(x-x_{0i})^2+(y-y_{0i})^2}>\delta\\ \delta, & \sqrt{(x-x_{0i})^2+(y-y_{0i})^2}\le\delta\end{cases} \qquad (26)$$

Крок по часу обирається із умови $$\tau_n=\frac{\min\limits_k(\delta_k)}{\max\limits_{D^+}(|V|)} \qquad (27)$$

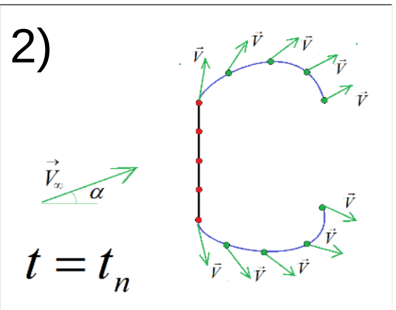
Послідовність кроків при моделювання кінематики



$$\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad (28)$$

$$\varphi(x,y,t_n) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t_n)}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}\right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i^p}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_i^p(t_n)}{x - x_i^p(t_n)}\right) \qquad (29)$$

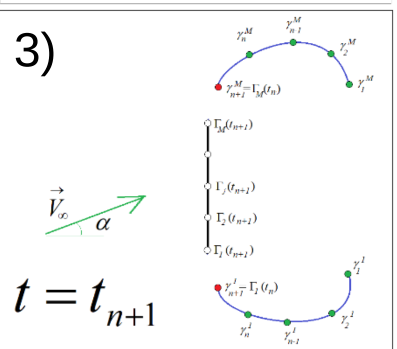
$$\vec{V}(x,y,t_n) = (\cos\alpha, \sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_n)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n}\gamma_i^p \vec{V}(x,y,x_i^p(t_n),y_i^p(t_n)) \qquad (30)$$



Визначення швидкості всіх вихорів, які визначають контур L_v^p що відірвався від P-вихора:

$$\vec{V}(x,y,t_n) = \nabla\varphi(x,y,t_n) = \big(u(x,y,t_n), v(x,y,t_n)\big) = \qquad (31)$$

$$= \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_n)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n}\gamma_i^p \vec{V}(x,y,x_i^p(t_n),y_i^p(t_n))$$

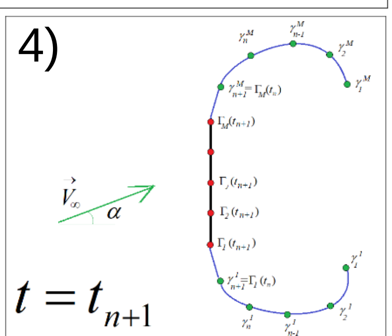


Пересування за час $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ всіх вихорів, які визначають контур L_v^p що відірвався від P- вихора:

$$\forall p,\ i = 1,..,n \qquad (32)$$

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \end{cases}$$

$\gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n)$ -інтенсивність нового вихора, який відірвався від P- вихора

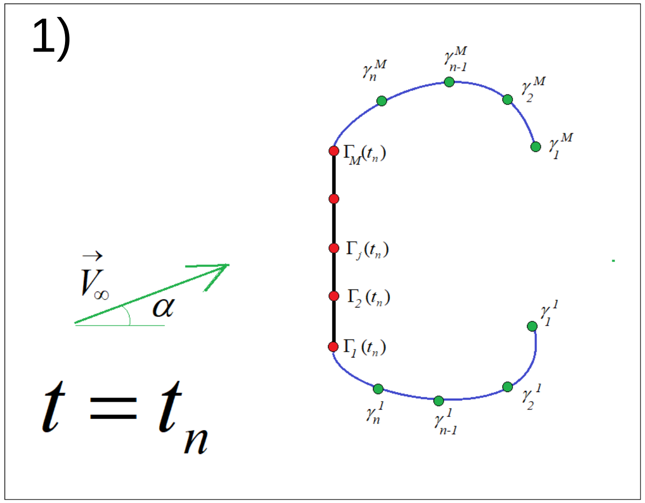


Розвязування СЛАР для визначення $\Gamma_1(t_{n+1}),\ldots\ldots\ldots,\Gamma_M(t_{n+1})$

$$\varphi(x,y,t_{n+1}) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}\right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\gamma_i^p}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})}\right) \qquad (33)$$

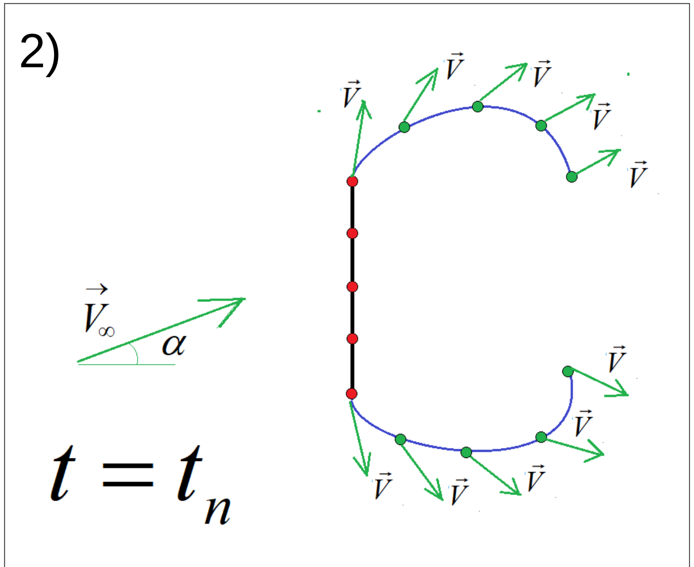
$$\vec{V}(x,y,t_{n+1}) = (\cos\alpha, \sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^p \vec{V}(x,y,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})) \qquad (34)$$

Покрокове моделювання кінематики



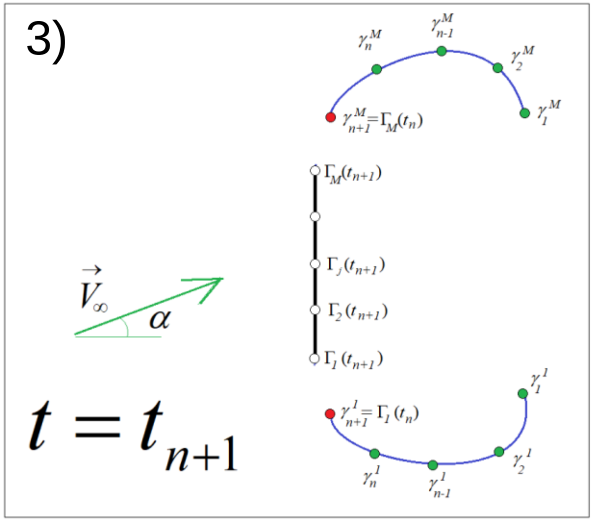
$$\varphi(x,y,t_n) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j(t_n)}{2\pi} Arctg\left(\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}\right) + \sum_{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} Arctg\left(\frac{y-y_i^p(t_n)}{x-x_i^p(t_n)}\right) \tag{35}$$

$$\vec{V}(x,y,t_n) = (\cos\alpha, \sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_n)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j}) + \sum_{p} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^p \vec{V}(x,y,x_i^p(t_n),y_i^p(t_n)) \tag{36}$$



$$\vec{V}(x,y,t) = (u(x,y,t), v(x,y,t)) \tag{37}$$

Покрокове моделювання кінематики

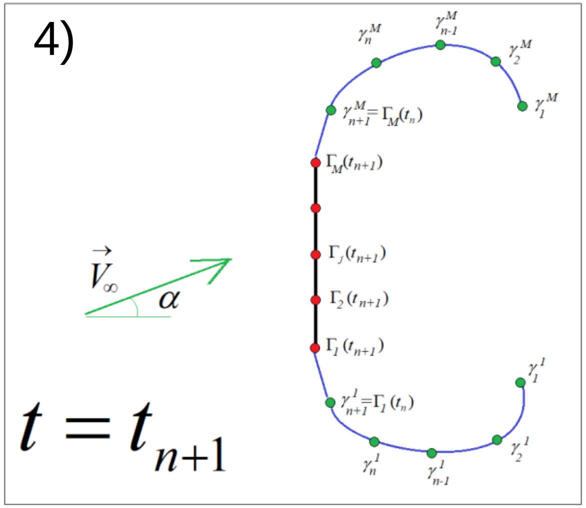


$$\vec V(x,y,t_n) = \big(u(x,y,t_n), v(x,y,t_n)\big) =$$
$$= \vec V_\infty + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_n)\vec V(x,y,x_{0j},y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^p \vec V(x,y,x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \qquad (38)$$

$$\forall p:\ \gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n);\ \ i = 1,..,n+1:$$

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \end{cases} \qquad (39)$$

$\gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n)$ -інтенсивність нового вихора, який відірвався від P- вихора



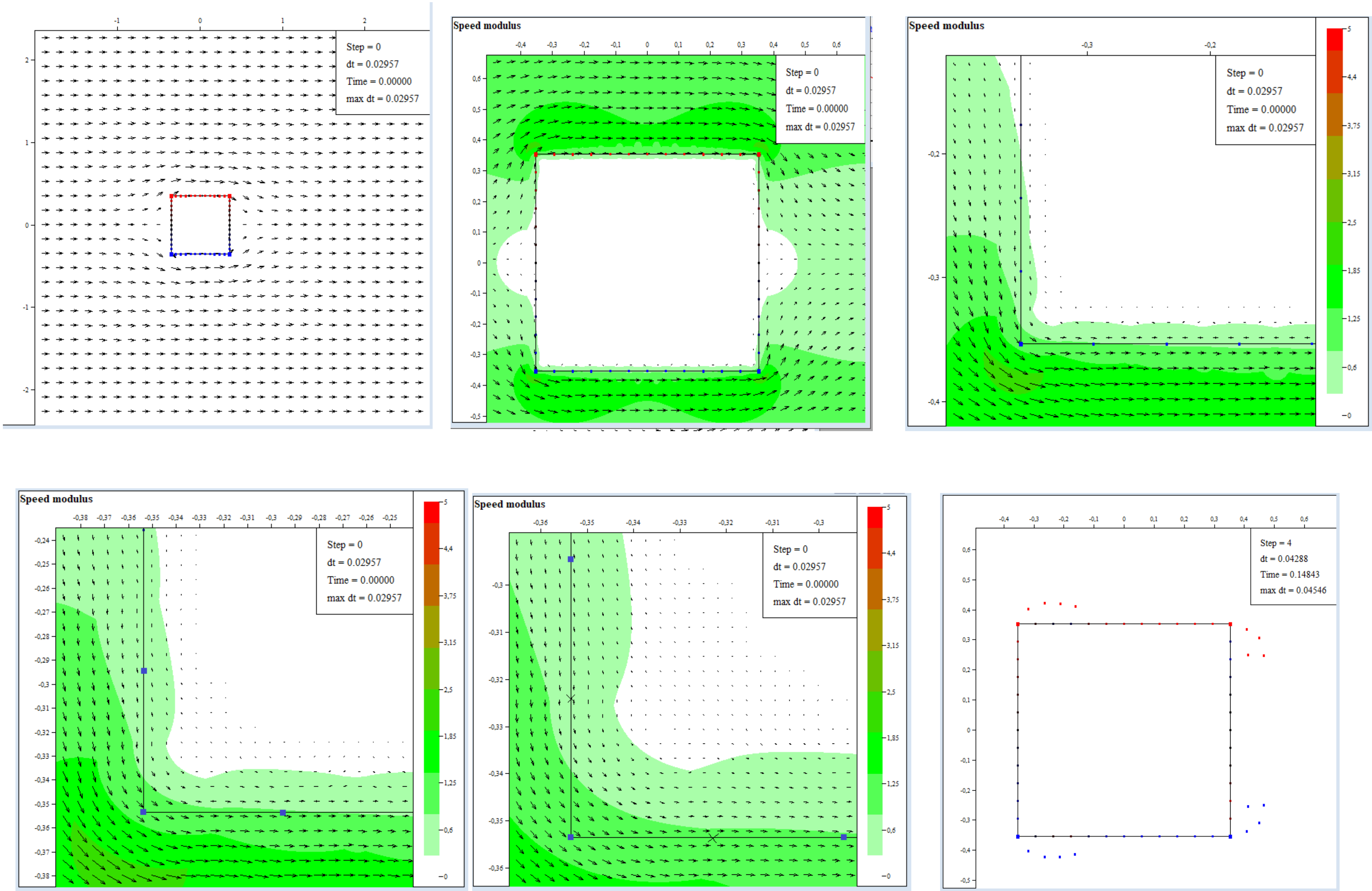
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1})\big(\vec n_k(x_k,y_k)\cdot \vec V_j(x_k,y_k,x_{0j},y_{0j})\big) = \\ = -\big(\vec n_k(x_k,y_k)\cdot \vec V_\infty\big) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \big(n(x_k,y_k)\cdot \vec V(x_k,y_k,x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))\big) \qquad (40) \\ \qquad k = \overline{1, M-1} \\ \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_n) = -\sum_p \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^p \qquad (41) \end{cases}$$

$$\Gamma_1(t_{n+1}),\ldots\ldots,\Gamma_M(t_{n+1}) \qquad (42)$$

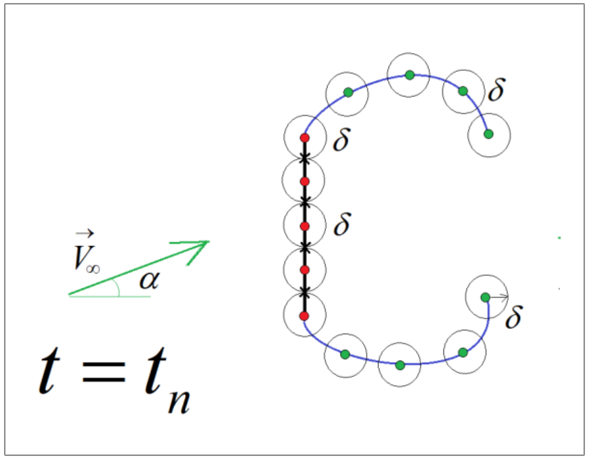
$$\varphi(x,y,t_{n+1}) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}\right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})}\right) \qquad (43)$$

$$\vec V(x,y,t_{n+1}) = (\cos\alpha, \sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1})\vec V(x,y,x_{0j},y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec V(x,y,x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \qquad (44)$$

Локальні особливості дискретної моделі



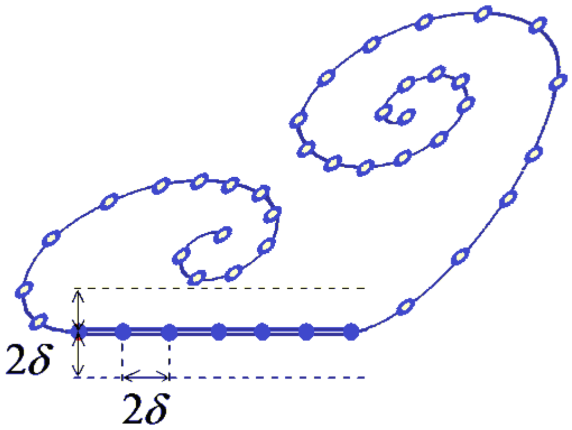
Параметри для забезпечення виконання умови непроникнення для нестаціонарних процесів

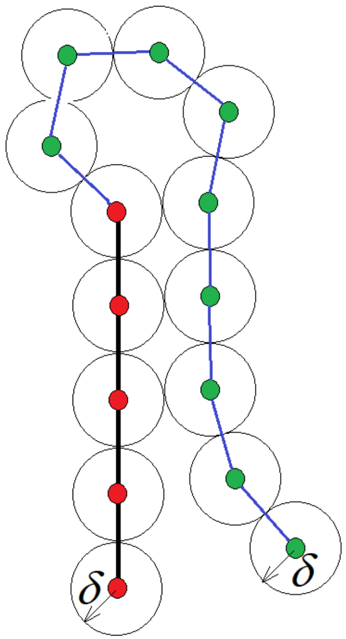


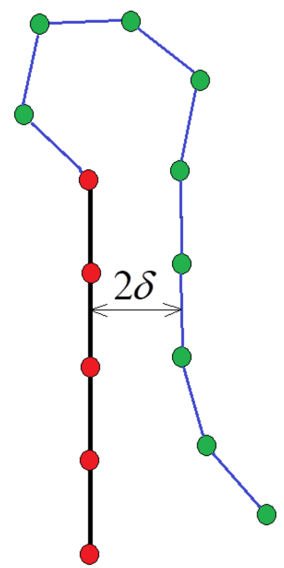
$$\Delta = 2\delta$$

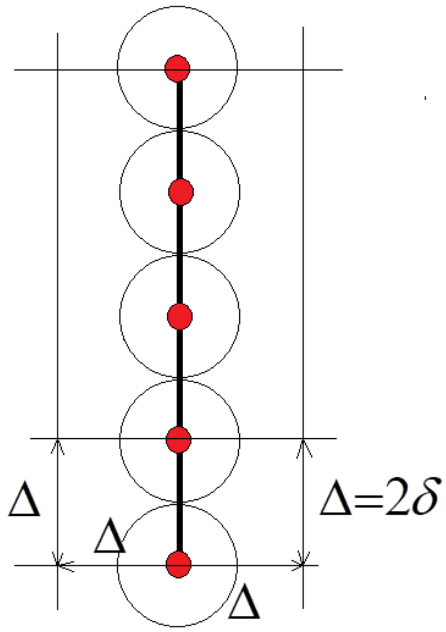
$$\Delta = \frac{L}{M}$$

$$\delta = \frac{L}{2M}$$



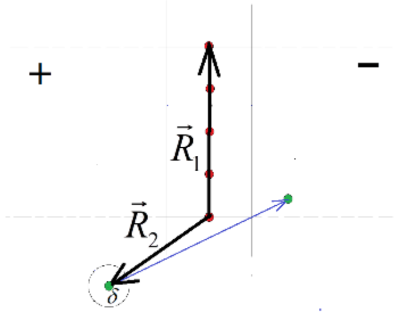






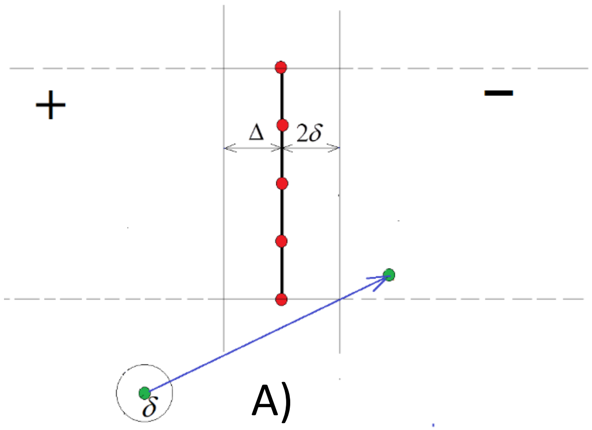
Методи забезпечення виконання умови непроникнення

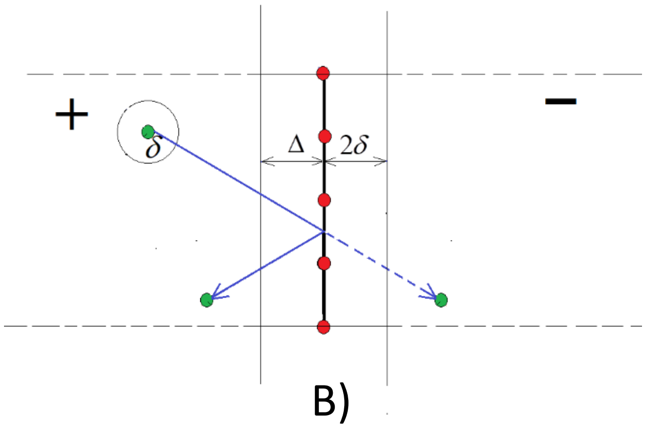
$$sign\left(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2\right) > 0 \quad \Rightarrow r \in D^+$$

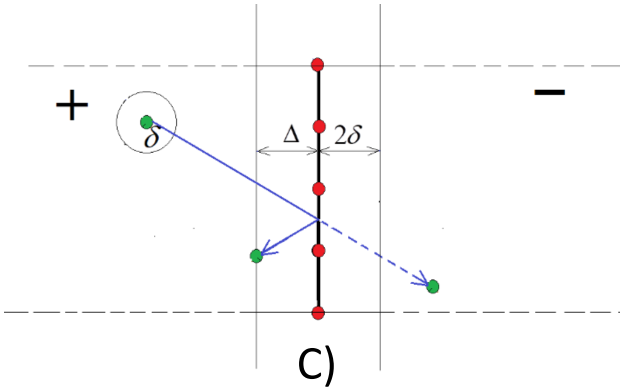


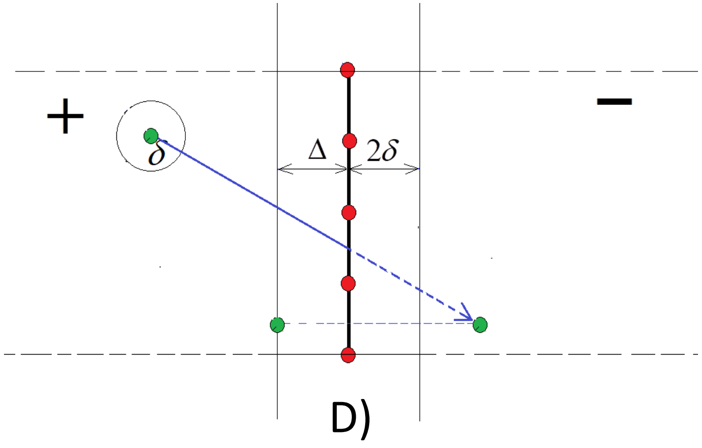
$$sign\left(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2\right) < 0 \quad \Rightarrow r \in D^-$$

Визначення положення маркованої рухомої точки відносно боку елементу контуру









Забезпечення непроникнення маркованої рухомої точки відносно боку елементу контуру

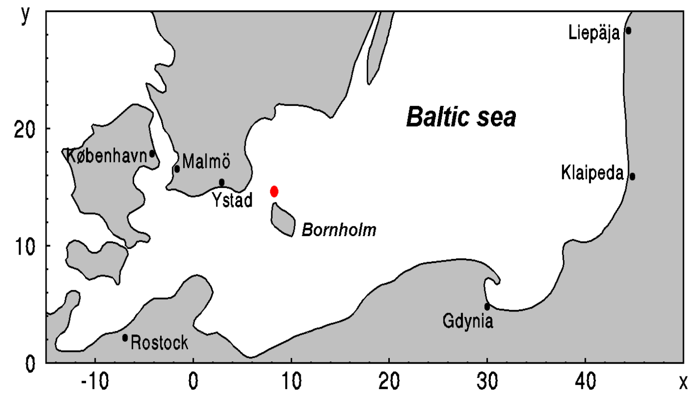
Задачі Коші для визначеня масопереносу (по видомому полю швидкості).

1) Задачі Коші для процесу адвекції .

2) Задачі Коші для масопереносу (грунту).

1) Задача Коші для визначеня масопереносу
(Перенос забруднення на поверхні рідини.
Зведення до задачі адвекції).

Моделювання масопереносу (плями забруднення після катастрофи 31.05.2003р., зіштовхнення сухогрузу Fu Shan Hai та кантейнеровозу Gdynia) в акваторії навколо о.Борнхольм, Балтійське море) при наявності вітру із заданими параметрами.



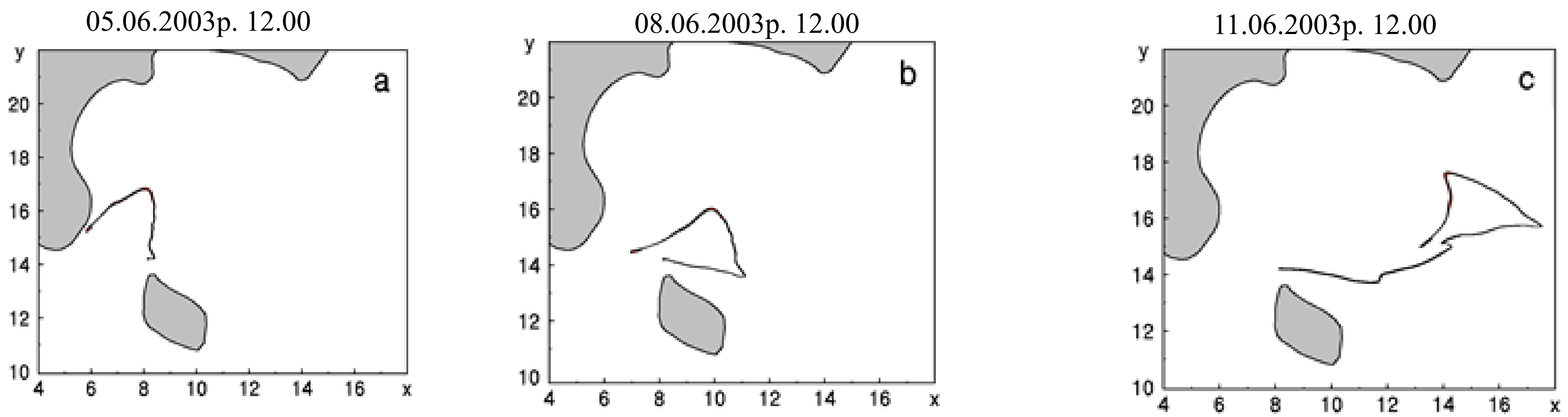


Рис. 46. Прогнозування масопереносу (плям забруднення) а) результат моделювання адвекції.

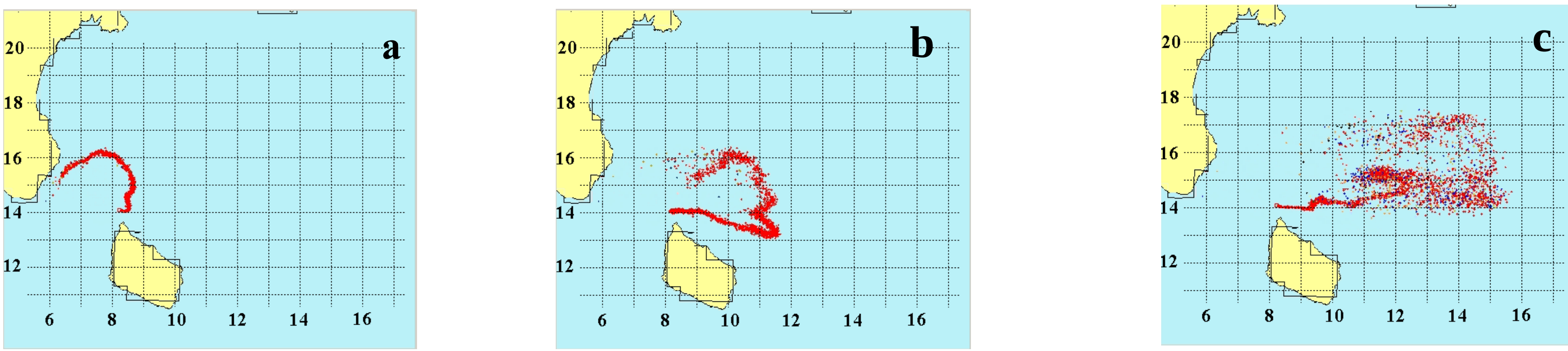


Рис. 47. Прогнозування масопереносу . Данні KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

Результат прогнозування масопереносу (адвекції плями забруднення) в акваторії Дніпро – Бузького лиману при наявності вітру із заданими параметрами

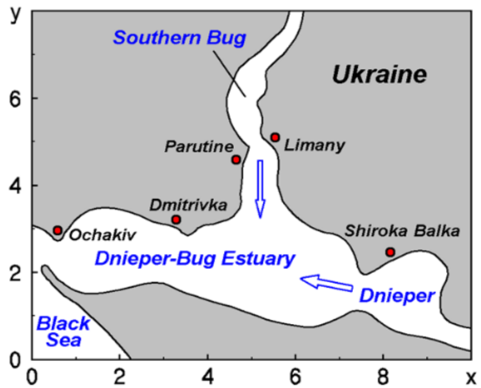


Рис.48. Схема Дніпровсько-Бузького лиману

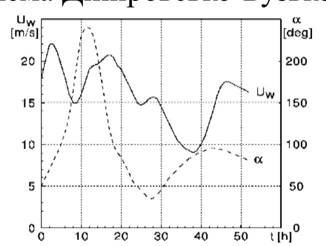


Рис. 49. Діаграма мінливості напрямку і сили вітру в Дніпровсько-Бузькому лимані.

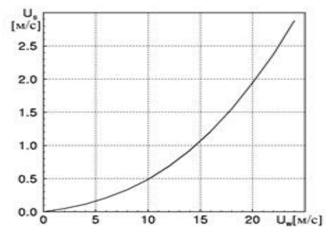


Рис. 50 Залежність швидкості поверхневої течії U_s від швидкості вітру Uw за результатами натурних вимірювань

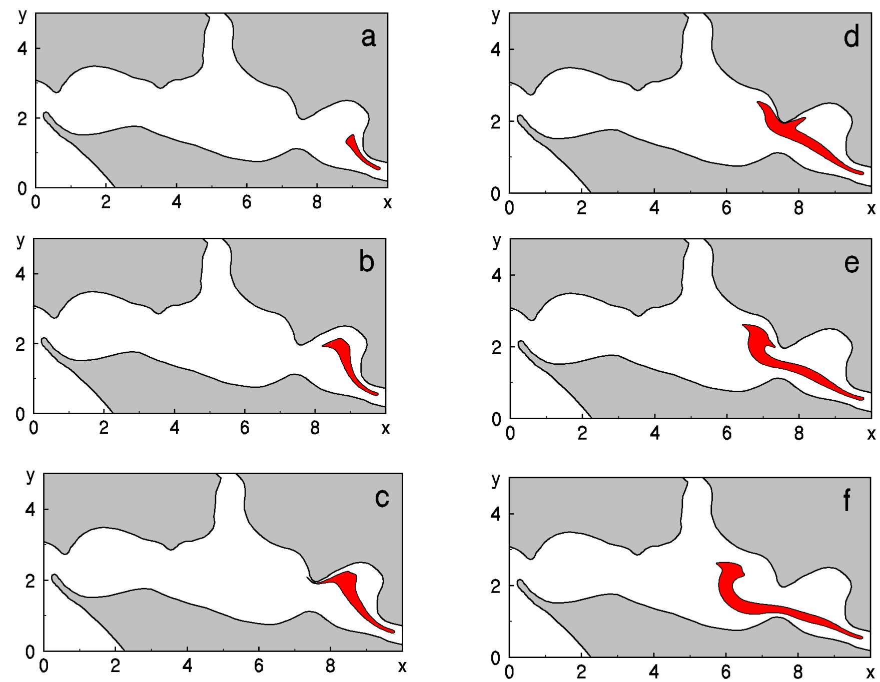


Рис. 51. Прогноз разповсюдження забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані з урахуванням вітрового навантаження .

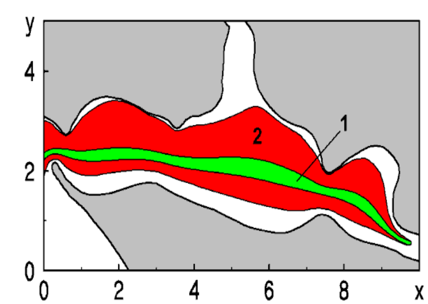
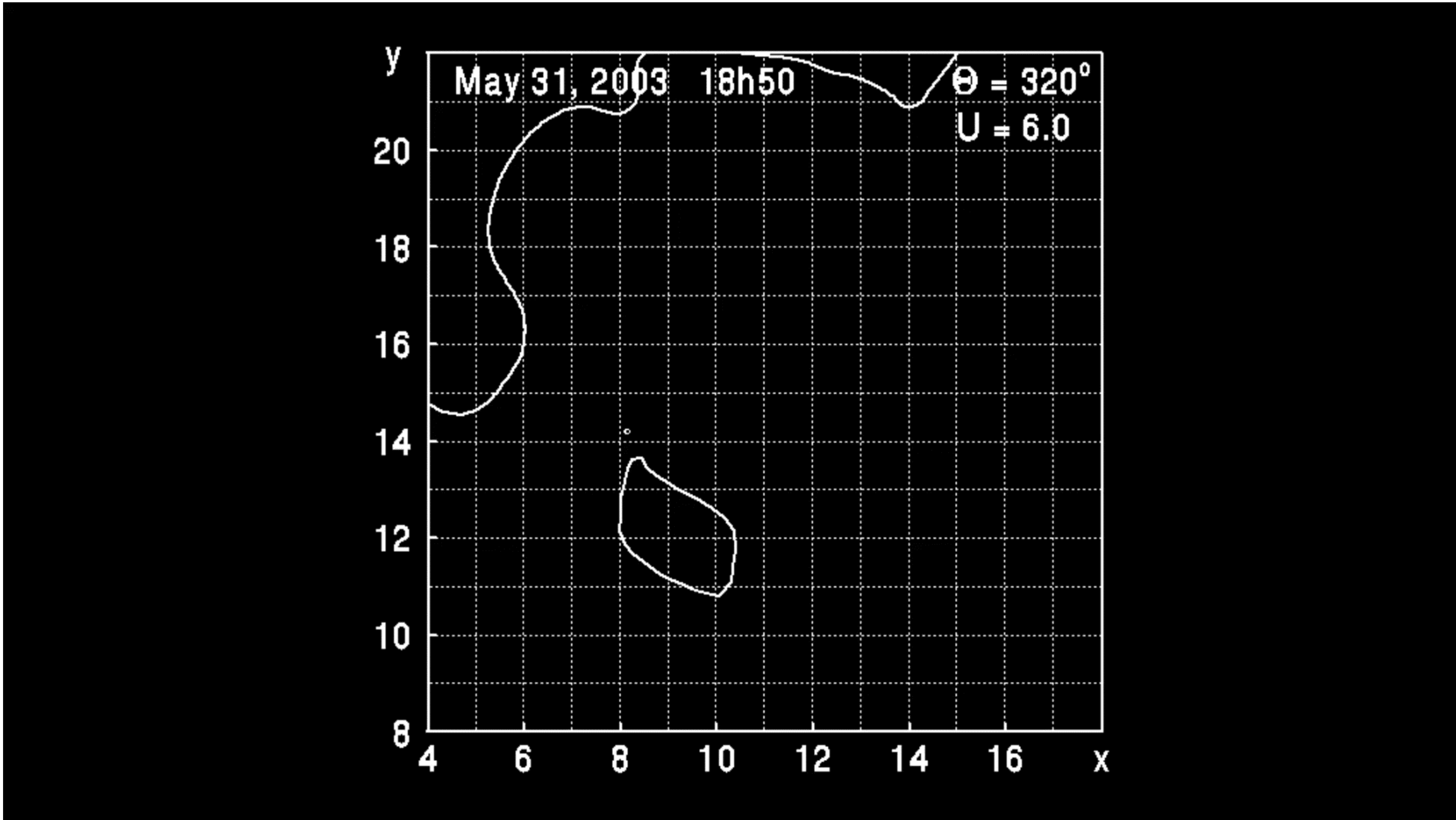
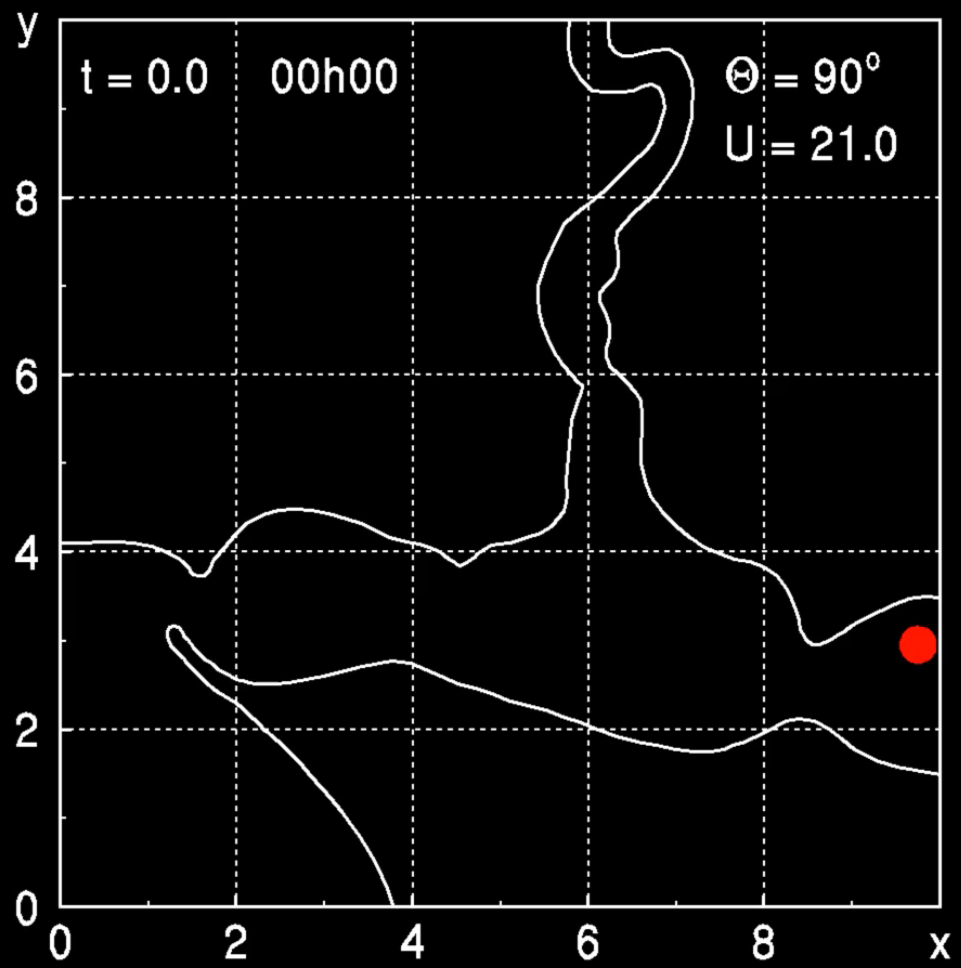


Рис. 52. Прогноз площі забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру (1) і з урахуванням вітрового навантаження (2).

Перенос поверхневого забруднення навколо острова Боронхольм



Перенос поверхневого забруднення в Дніпро-Бузькому лімані



1) Визначення масопереносу по поверхні рідини (при визначеному полю швидкості).

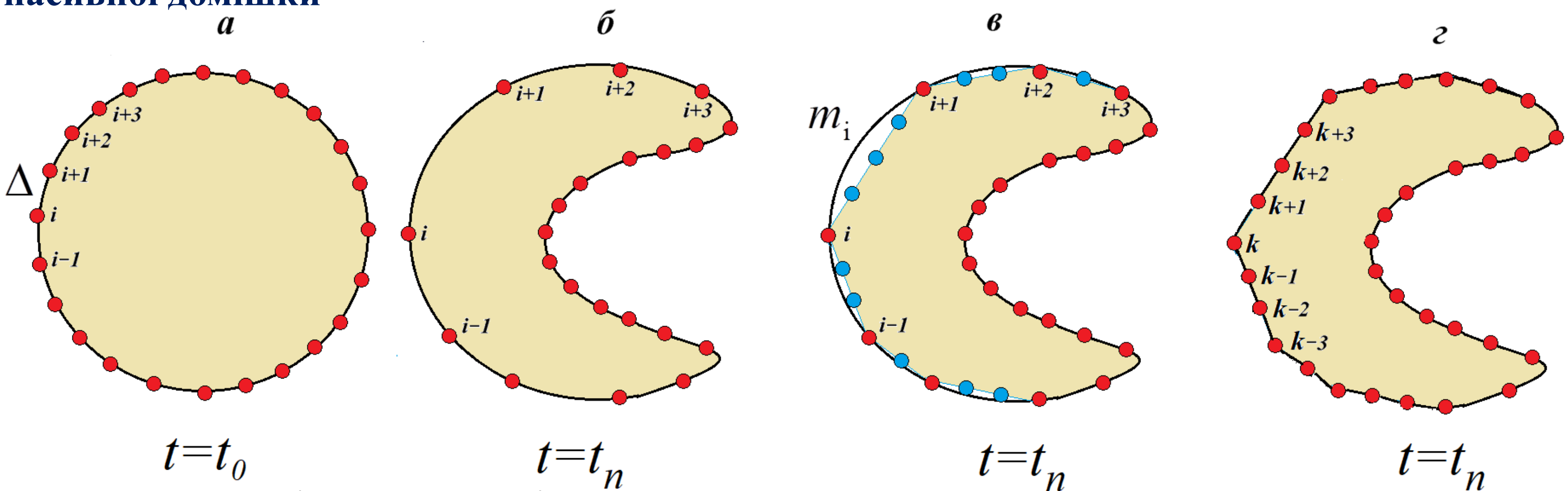
$$\vec{V}(x,y,t)=(u_\infty,v_\infty)+\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n(t)}\gamma_i^p\vec{V}(x,y,x_i^p(t),y_i^p(t))$$

Задачі Коші ставиться для **процесу адвекції- процесу** переносу пасивної домішки.

Задачі Коші ставиться для кожної $i=0,1,2,3,4,.....$ маркованої частинки, яка визначає контур, шо охоплює пляму пасивної домішки

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{V}(\vec{r}_i,t) & (48)\\ \vec{r}_i(t_0)=\vec{r}_{0i} & (49)\end{cases}\qquad i=0,1,2,3,4,.....$$

Схема застосування лінійної інтерполяції при редискретизації контуру, який охоплює пляму пасивної домішки



$$\Delta=\max_i\left|\vec{r}_i(t_0)-\vec{r}_{i+1}(t_0)\right| \qquad (50)$$

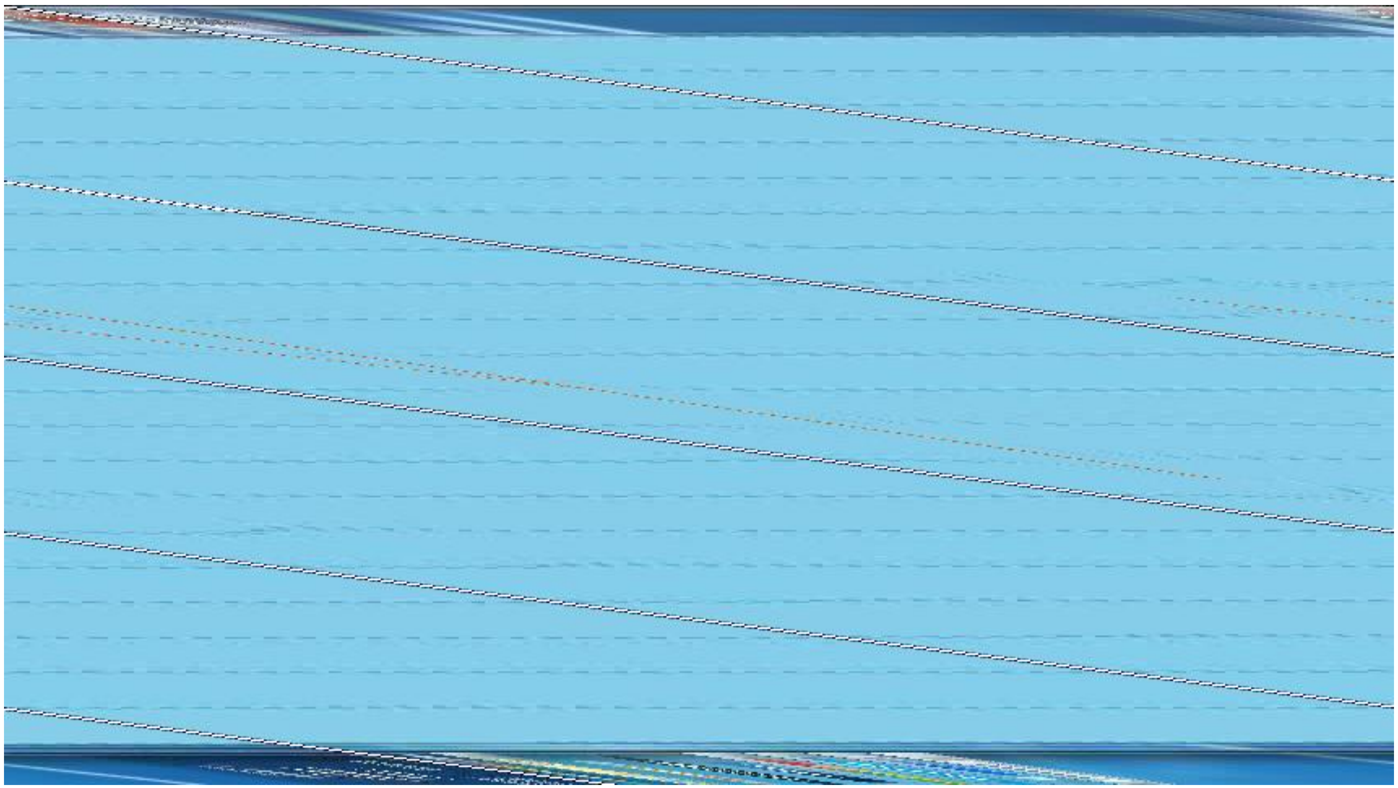
$$\forall t_n,\exists m_i:\left\{2\Delta<\left|\vec{r}_i(t_n)-\vec{r}_{i+1}(t_n)\right|\le(m_i+1)\Delta, i=1,...,M(t_n)\right\} \qquad (51)$$

Визначеня масопереносу (по визначеному полю швидкості).

$$\vec{V}(x,y,t)=(u_\infty,v_\infty)+\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n(t)}\gamma_i^p\vec{V}(x,y,x_i^p(t),y_i^p(t))$$

Тестове моделювання процесу адвекції навколо перешкод різної форми («У», «З»)

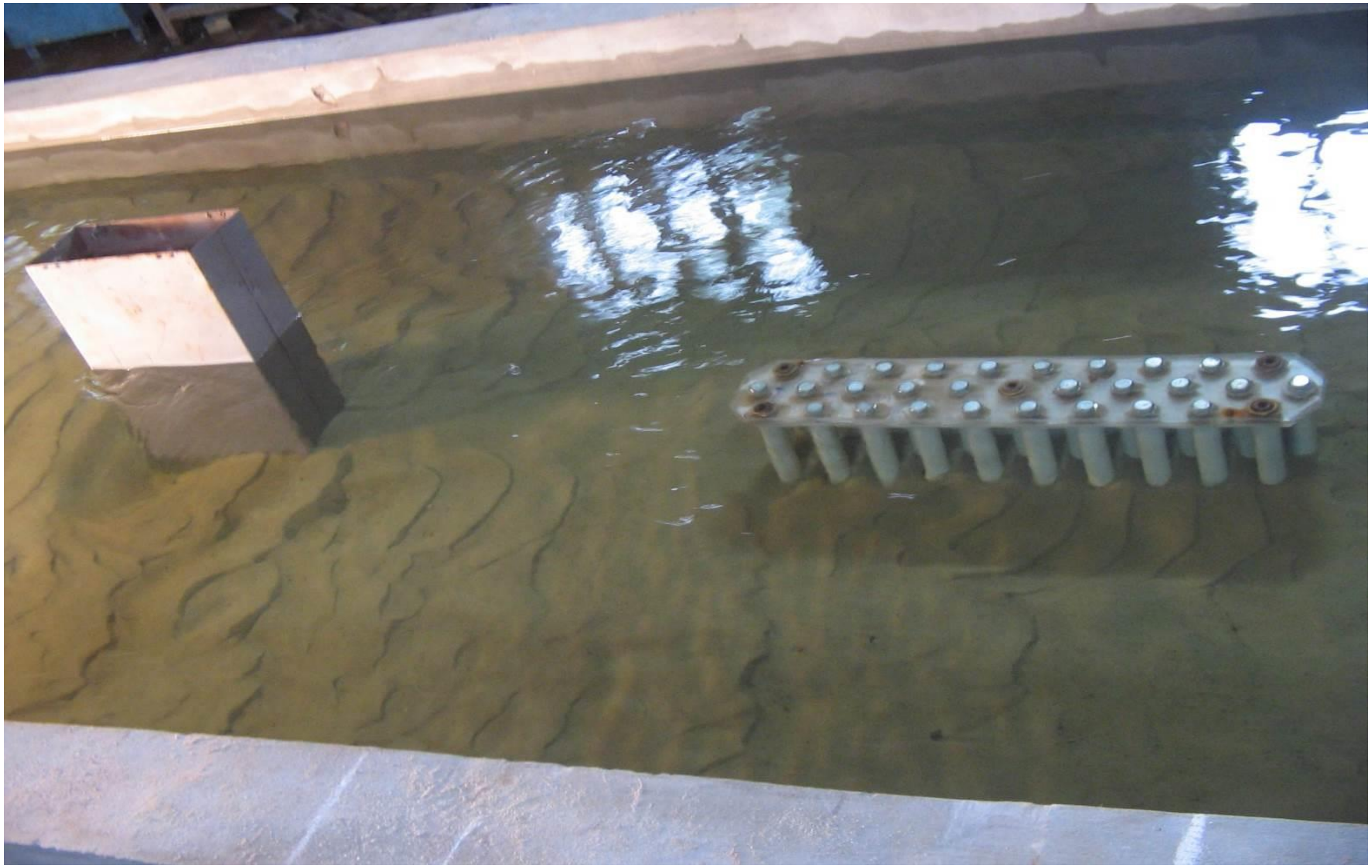
А)



Б)

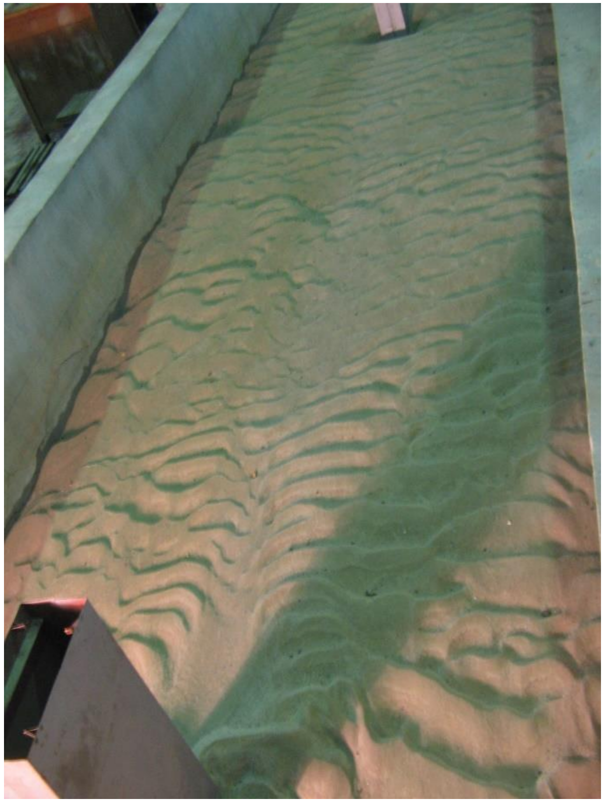
2) Задачі Коші для визначеня масопереносу

(Перенос грунту на пласкої поверхні під впливом течії над поверхнею).



Результати розмиву донного грунту





2) Визначеня масопереносу по поверхні грунту (при видомому полю швидкості).

$$\vec{V}(x,y,t)=(u_\infty,v_\infty)+\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n(t)}\gamma_i^p\vec{V}(x,y,x_i^p(t),y_i^p(t))$$

Задачі Коші (масоперенос грунту навколо перешкоди)

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{W}(\vec{r}_i,t) & (52)\\ \vec{r}_i(t_0)=\vec{r}_{0i} & (53)\end{cases}$$

$$\vec{W}(r_i,t)=\begin{cases}\alpha\vec{V}(\vec{r}_i,t),\alpha<1,\ як\quad що\ \left|V(r,t)\right|>\beta V_\infty,\beta>1;\\ 0,\ як\quad що\ \left|\vec{V}(r_i,t)\right|\le\beta V_\infty,\beta>1.\end{cases}\qquad(54)$$

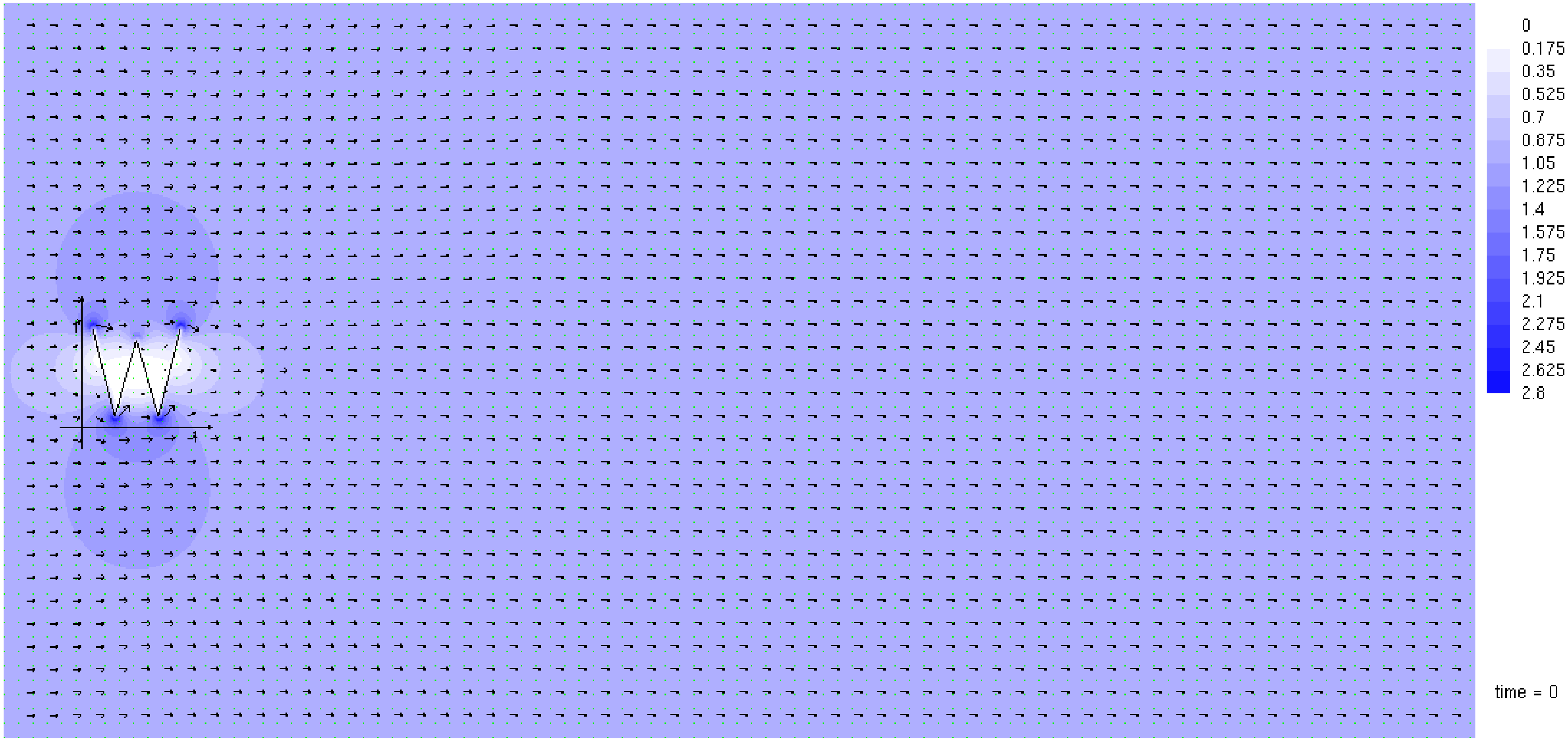
Визначеня масопереносу (по видомому полю швидкості):

$$\vec{V}(x,y,t)=(u_\infty,v_\infty)+\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t)\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n(t)}\gamma_i^p\vec{V}(x,y,x_i^p(t),y_i^p(t))$$

Задачі Коші (масоперенос грунту)

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}=\vec{W}(\vec{r}_i,t)\\ \vec{r}_i(t_0)=\vec{r}_{0i}\end{cases}\qquad \vec{W}(r_i,t)=\begin{cases}\alpha\vec{V}(\vec{r}_i,t),\alpha<1,\text{ як що } |V(r,t)|>\beta V_\infty,\beta>\beta_0;\\ 0,\text{ як що } |\vec{V}(r_i,t)|\le\beta V_\infty,\beta>\beta_0.\end{cases}$$

Моделювання масопереносу навколо перешкоди у вигляді літери W. $\alpha=0{,}3;\ \beta_0=2.$



3) Задача обчислення динамічної характеристики (безрозмірний тиск):

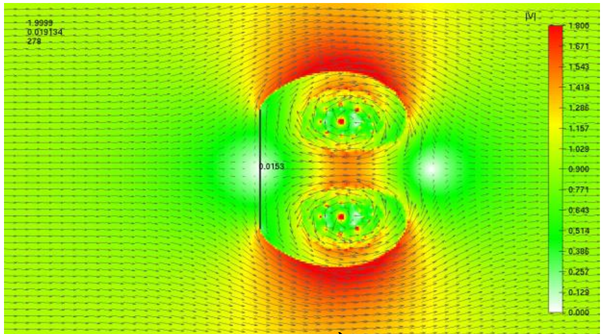
$$c_p(x,y,t) = 1 - \left(\left(\frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial t} \tag{59}$$

Формула обчислення значення похідної за часом (53**)** від дійсної частини дискретного представлення (50), має вигляд:

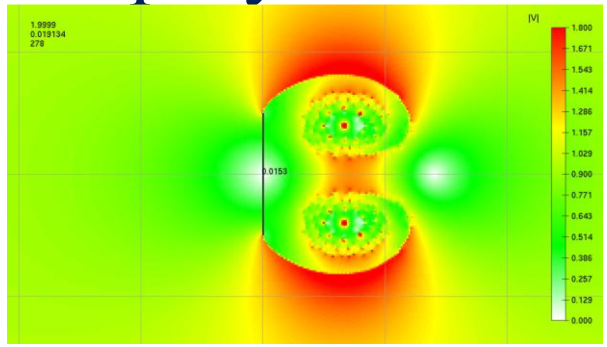
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(x,y,t_{n+1})}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{M-1} \left(\vec{D}_j, \vec{V}_j(x,y,\bar{x}_j(t_{n+1}), \bar{y}_j(t_{n+1})) \right) + \sum_{p} \left(\vec{d}_p, \vec{V}_p(x,y,\bar{x}_n^p(t_{n+1}), \bar{y}_n^p(t_{n+1})) \right) - \\
&- \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})) \right) - \\
&- \sum_{p=1}^{P} \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left(\vec{V}_i(x,y,x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right)
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{cases} \vec{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) Q_j \\ \vec{d}_p = (x_p - x_n^p, y_p - y_n^p) q_p \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}) \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}) \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}) \end{cases} \tag{61}$$

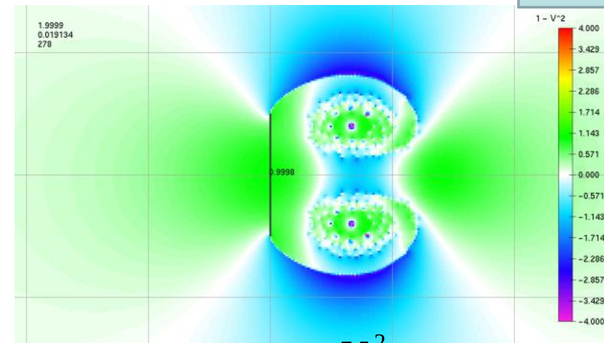
Представлення результатів моделювання



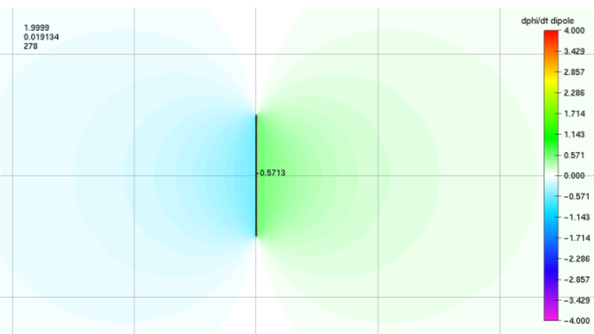
$\vec{V}$



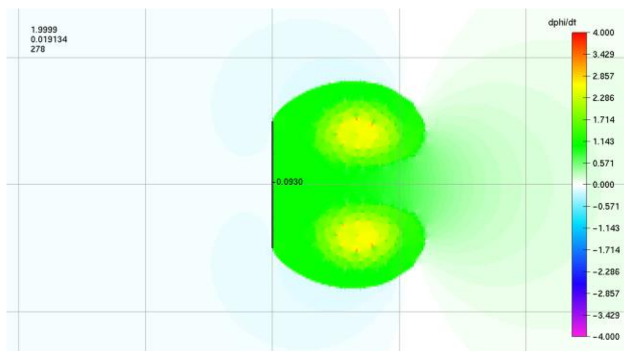
|V|



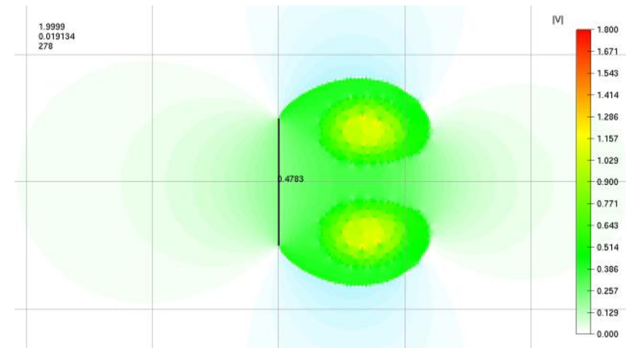
$1-\dfrac{V^2}{V_\infty^2}$



$\dfrac{\partial\varphi_{диполь}}{\partial t}$

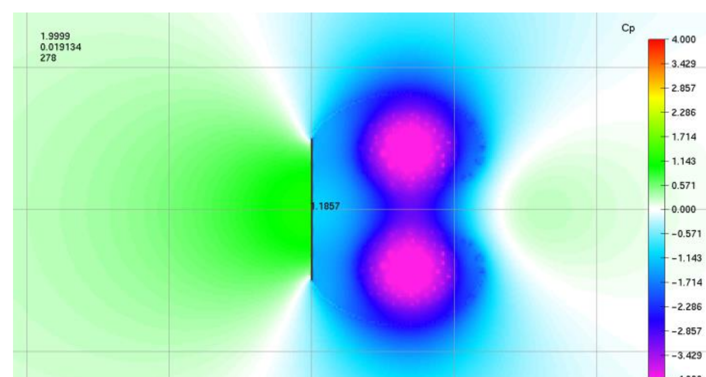


$\dfrac{\partial\varphi_{конвект}}{\partial t}$



$\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$

$$C_p(x,y,t)=1-\frac{\left(\vec{V}(x,y,t)\right)^2}{\vec{V}_\infty^2}-\frac{2}{\vec{V}_\infty^2}\left(\frac{\partial\varphi_{диполь}}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_{конвект}}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t}\right)$$



Алгоритм обчислювальних технологій для врахування утворення нових елементів меж

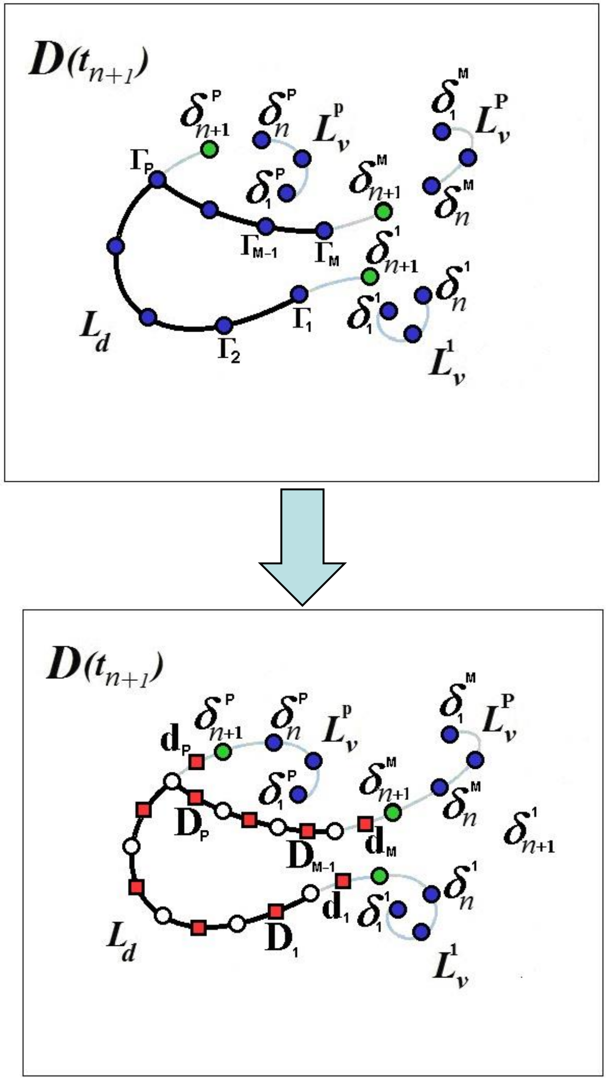


Рис. 21

Перетворення системи вихрових особливостей в систему діполей

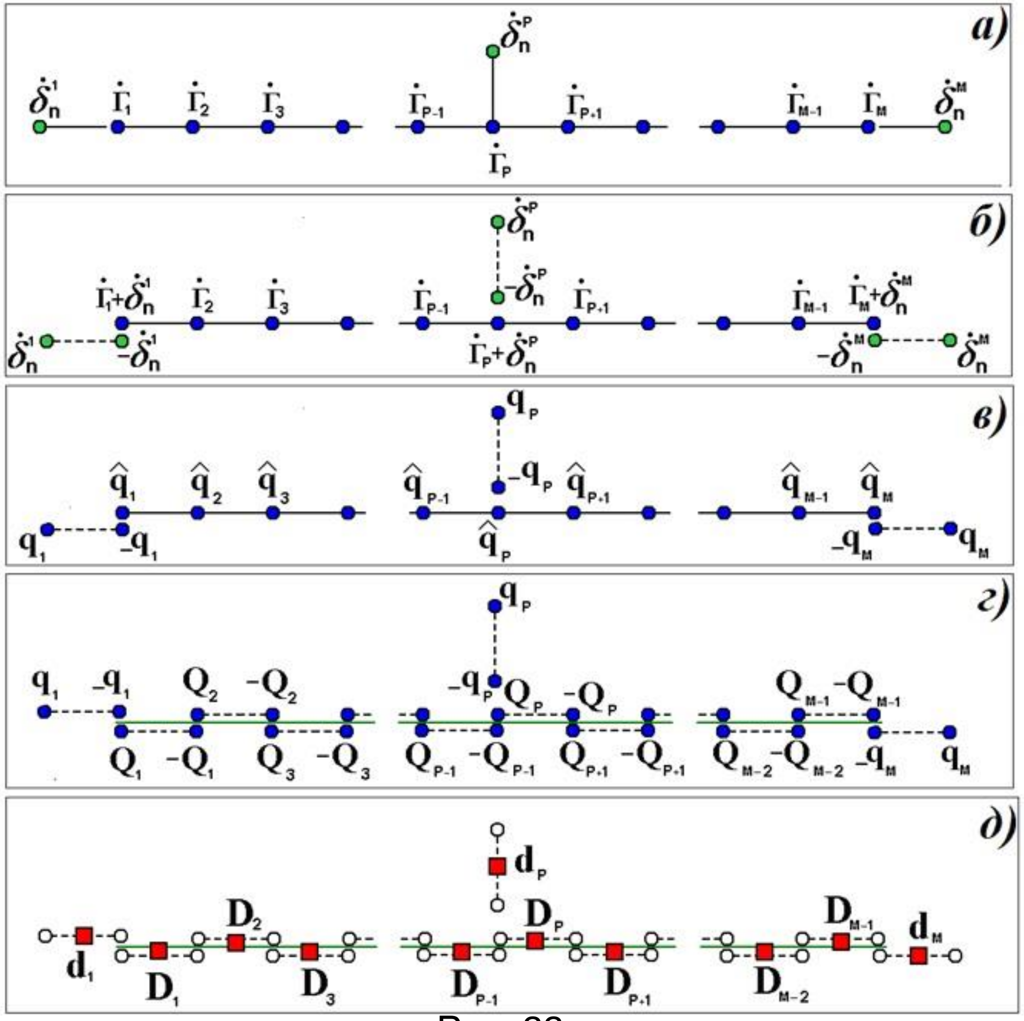


Рис. 22.

Перетворення вихрової системи в дипольну, з врахуванням відриву (породження нових елементів границі)