

# Лабораторна робота

Моделювання динамічного поля (поля тисків)  
та масопереносу

в гідродинамічних процесах

(застосування

- 1) моделі адвекції плями поверхневого забруднювача;
- 2) моделі масопереносу донного ґрунту )

# Математична постановка Задачі 1

(для визначення  $\varphi = \varphi(r, t): \vec{V} = \nabla \varphi$  )

$$t \geq t_0 : \quad \Delta \varphi = 0 \quad \vec{r} \notin L_d, L_v \quad (1)$$

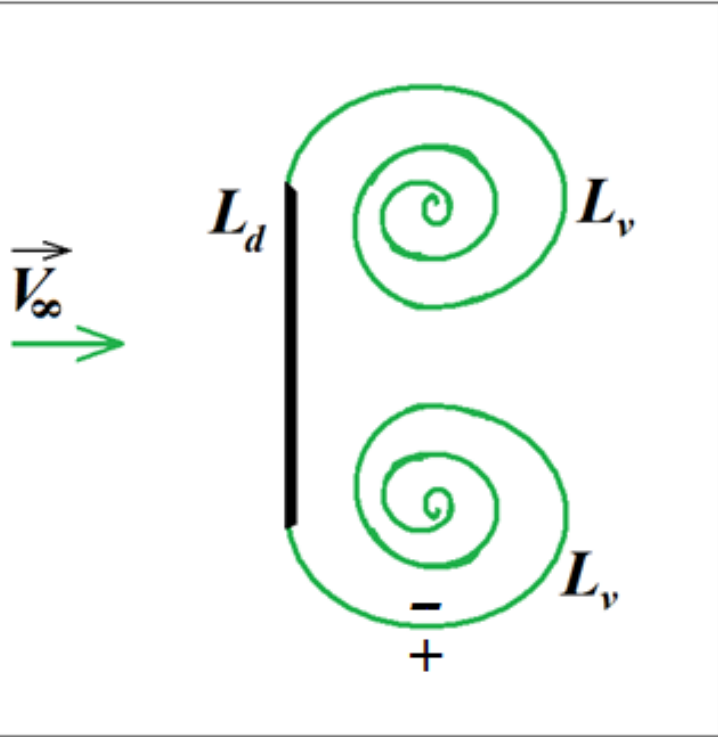
$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \vec{r} = \vec{r}_d \in L_d(t) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (\varphi^+ - \varphi^-) \Big|_{r_v} = 0 \quad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t) \quad (3)$$

$$\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = V_\infty \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_v}{\partial t} = \vec{V}(\vec{r}_v, t) \quad \vec{r} = \vec{r}_v \in L_v(t) \quad (5)$$

$$t = t_0 : \quad L_0 = L_d(t_0) + L_v(t_0) \quad (6)$$



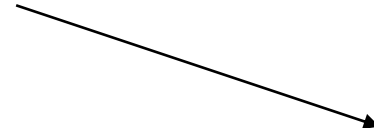
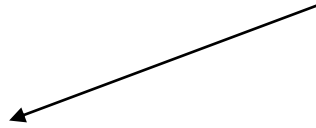
# Математична модель

(інтегральне представлення розв'язку)

$$\bar{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty \quad (7)$$

$$\Phi(z, t) = \varphi + i\psi = \bar{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + Const$$

$$\bar{V}(z, t) = u - iv = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \bar{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega \quad (8)$$

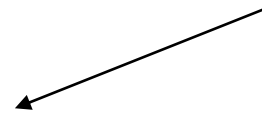
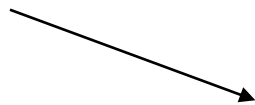


Умова на детермінованій границі  $L_d$

Умова на вільній границі  $L_v$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \geq t_0: \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} = -\operatorname{Re} \left\{ \bar{V}_\infty n(\omega_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} \\ \int_{L_{dj}} f(\omega_d, t) d\omega_d = - \int_{L_{vj}(t)} f(\omega_v, t) d\omega_v + C_j, j=1,2,\dots \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \omega_v(t) \in L_v(t), \quad t > t_0: \\ \frac{d\bar{\omega}_v(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \bar{V}_\infty, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v, t) = f(\omega_d, t), \\ t = t_0: \\ L_v(t_0) = L_{v0} \end{array} \right.$$



$$P(z, t) = P_\infty - \rho \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, t) + \frac{\bar{V}(z, t) \cdot \overline{\bar{V}(z, t)}}{2} - \frac{V_\infty \cdot \bar{V}_\infty}{2} \right\} \quad (11)$$

# Вхідні данні ( для дискретизованої моделі)

- 1) **Контур в системі координат визначається масивом маркованих точок, в яких розташовано систему дискретних особливостей:**

-Впорядкований масив точок  $\{\omega_{0j} = x_{0j} + iy_{0j}\}, j = 1, \dots, M$  розташування дискретних особливостей:

$$\{x_{0j}, y_{0j}\}, j = 1, \dots, M$$

- Впорядкований масив точок колокацій  $\{\omega_k = x_k + iy_k\}, k = 1, \dots, M - 1$  розташованих між дискретних особливостей:

$$\{x_k = (x_{0k} + x_{0k+1})/2, y_k = (y_{0k} + y_{0k+1})/2\}$$

$$k = 1, \dots, M - 1$$

-Масив нормалей, розташованих в точках колокацій:

$$\vec{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk})$$

$$n_{xk} = -(y_{0k+1} - y_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$

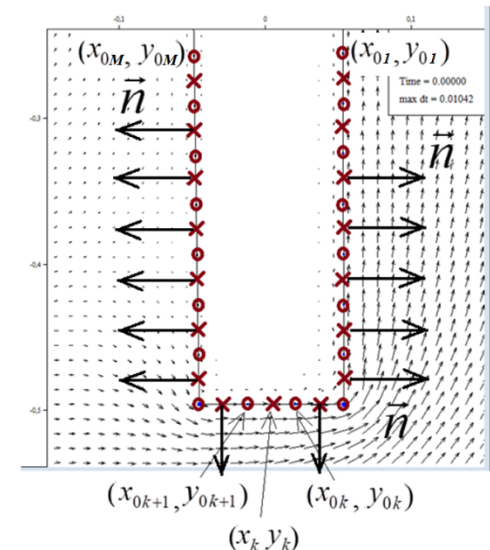
$$n_{yk} = (x_{0k+1} - x_{0k}) / \sqrt{(x_{0k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0k+1} - y_{0k})^2}$$

$$k = 1, \dots, M - 1$$

2)  $M$  -кількість дискретних особливостей

3)  $\Gamma_0$  -константа, для визначення єдиного розв'язку

4)  $\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty)$   $|\vec{V}_\infty| = 1$

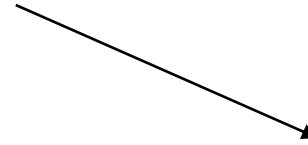
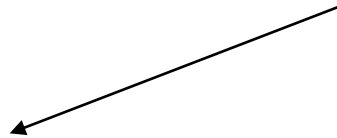


# Дискретизована модель (при $t = t_{n+1}$ )

$$\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = (xu_\infty + yv_\infty) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) \quad (12)$$

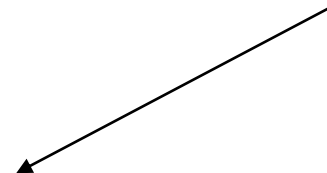
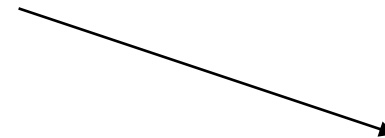
$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \quad (13)$$



Умова на детермінованій границі  $L_d$

Умова на детермінованій границі  $L_v$

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = \\ = -(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_\infty) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (n(x_k, y_k) \cdot \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))) \\ \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) = - \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{V}_n \tau_n \\ k = \overline{1, M-1} \end{array} \quad (15)$$



$$C_p(x, y, t) = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho \vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla \varphi)^2}{V_\infty^2} - \frac{2}{V_\infty^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (16)$$

# Визначення $\Gamma_1(t_{n+1}), \dots, \Gamma_M(t_{n+1})$ для векторного поля швидкостей

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \quad (17)$$

Із умови

$$\left( \vec{V}(x_k, y_k, t_{n+1}) \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right) = 0, \quad k = \overline{1, M-1} \quad (18)$$

## Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = \\ & = -(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_\infty) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) = - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \end{aligned} \right. \quad k = \overline{1, M-1} \quad (20)$$

Розв'язок:

$$\Gamma_1(t_{n+1}), \dots, \Gamma_M(t_{n+1}) \quad (21)$$

# Чисельний розв'язок початково-краєвої задачі відривного обтікання окремого не замкненого контуру

$$\begin{aligned}\vec{V}(x, y, t_n) &= \nabla \varphi(x, y, t_n) = (u(x, y, t_n), v(x, y, t_n)) = \\ &= \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n))\end{aligned}\quad (22)$$

Вектор швидкості  $\vec{V}(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = (u(x, y, x_{0i}, y_{0i}), v(x, y, x_{0i}, y_{0i}))$  визначений в точці  $(x, y)$  індукований вихором з одиничною інтенсивністю, розташованим в точці  $(x_{0i}, y_{0i})$

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, y, x_{0i}, y_{0i}) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{y_{0i} - y}{R_{0i}^2} \end{aligned} \right. \quad (24)$$

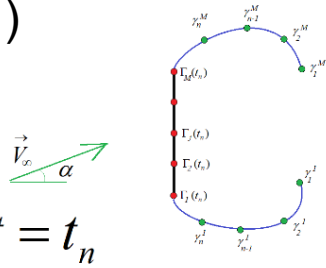
$$\left\{ \begin{aligned} v(x, y, x_{0i}, y_{0i}) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x - x_{0i}}{R_{0i}^2} \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\text{де } R_{0i} = \begin{cases} \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} > \delta \\ \delta, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} \leq \delta \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{Крок по часу обирається із умови} \quad \tau_n = \frac{\min(\delta_k)}{\max_{D^+}(|V|)} \quad (27)$$

# Послідовність кроків при моделювання кінематики

1)

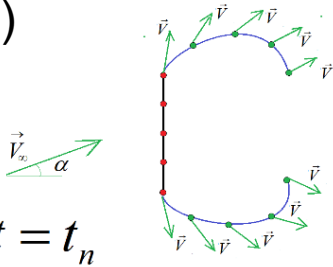


$$\vec{V}_\infty = (u_\infty, v_\infty) = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (28)$$

$$\varphi(x, y, t_n) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_n)}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_n)}{x - x_i^p(t_n)} \right) \quad (29)$$

$$\vec{V}(x, y, t_n) = (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \quad (30)$$

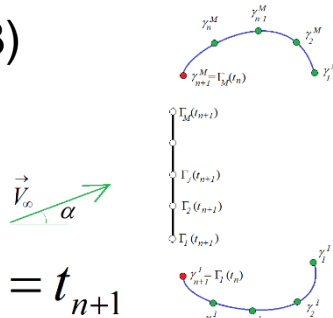
2)



Визначення швидкості всіх вихорів, які визначають контур  $L_v^P$  що відірвався від  $P$ -вихора:

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, y, t_n) &= \nabla \varphi(x, y, t_n) = (u(x, y, t_n), v(x, y, t_n)) = \\ &= \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \end{aligned} \quad (31)$$

3)



Пересування за час  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  всіх вихорів, які визначають контур  $L_v^P$  що відірвався від  $P$ -вихора:

$$\forall p, i = 1, \dots, n \quad (32)$$

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \end{cases}$$

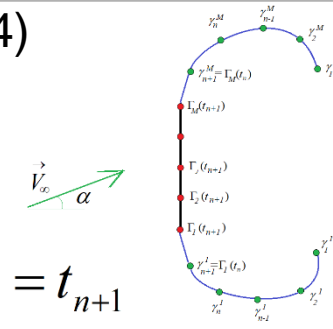
$\gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n)$  -інтенсивність нового вихора, який відірвався від  $P$ -вихора

Розв'язування СЛАР для визначення  $\Gamma_1(t_{n+1}), \dots, \Gamma_M(t_{n+1})$

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) \quad (33)$$

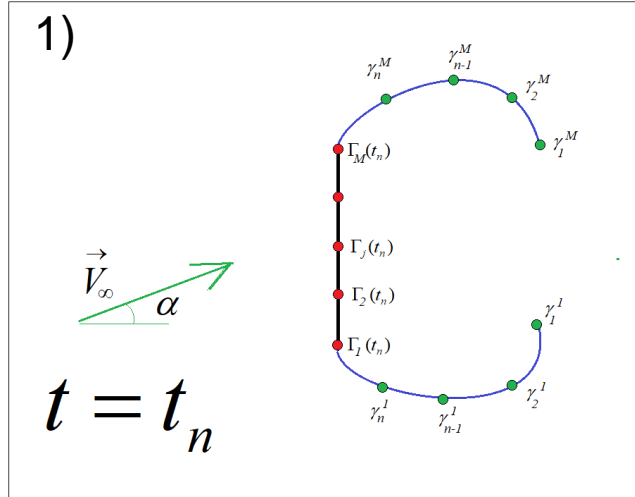
$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \quad (34)$$

4)



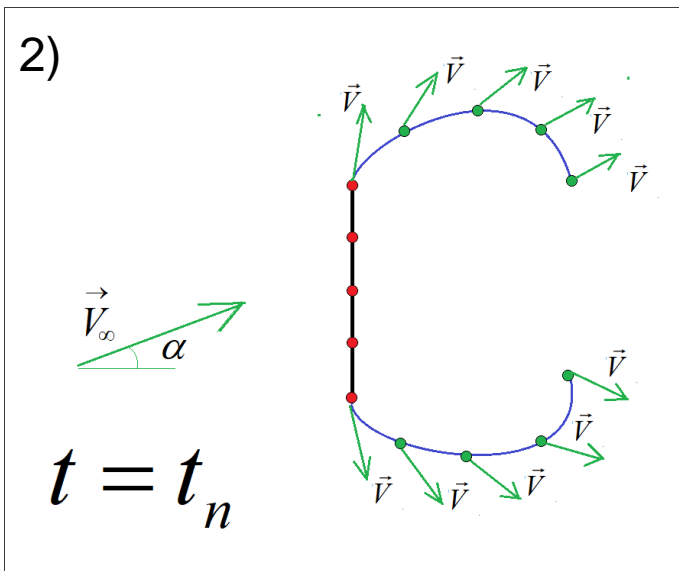


# Покрокове моделювання кінематики



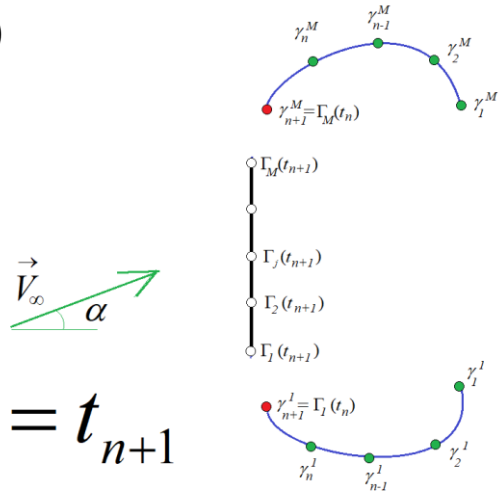
$$\varphi(x, y, t_n) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_n)}{2\pi} \operatorname{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \operatorname{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_n)}{x - x_i^p(t_n)} \right) \quad (35)$$

$$\vec{V}(x, y, t_n) = (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \quad (36)$$



$$\vec{V}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t)) \quad (37)$$

3)



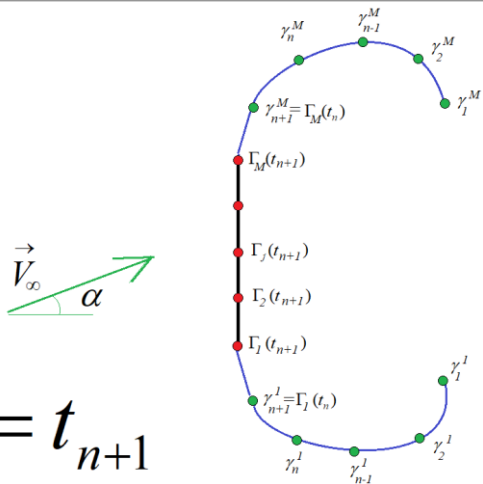
$$\vec{V}(x, y, t_n) = (u(x, y, t_n), v(x, y, t_n)) = \vec{V}_\infty + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \quad (38)$$

$$\forall p: \gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n); \quad i = 1, \dots, n+1:$$

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)(t_{n+1} - t_n) \end{cases} \quad (39)$$

$$\gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n) \quad \text{-інтенсивність нового вихора, який відірвався від } P\text{-вихора}$$

4)



$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_j(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j})) = \\ & = -(\vec{n}_k(x_k, y_k) \cdot \vec{V}_\infty) - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p (n(x_k, y_k) \cdot \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))) \end{aligned} \right. \quad (40)$$

$$\sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) = - \sum_p \sum_{i=1}^n \gamma_i^p \quad k = \overline{1, M-1} \quad (41)$$

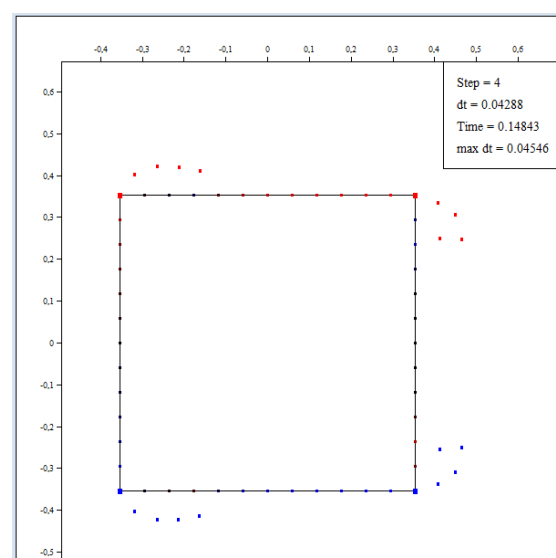
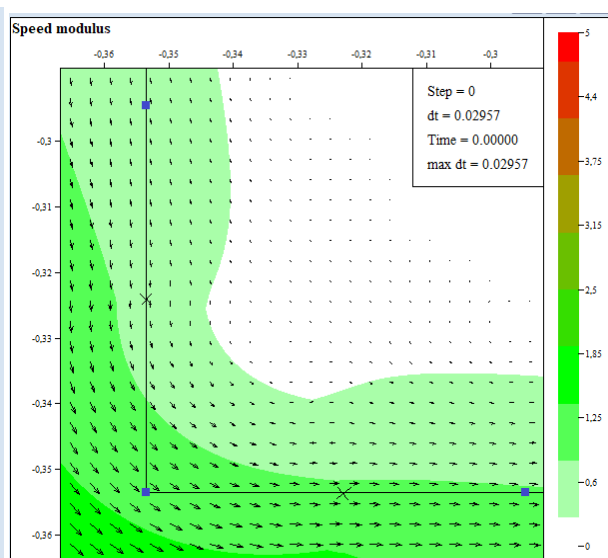
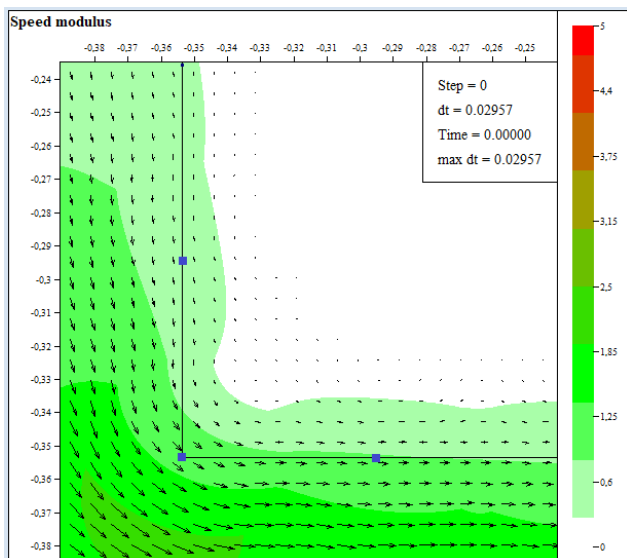
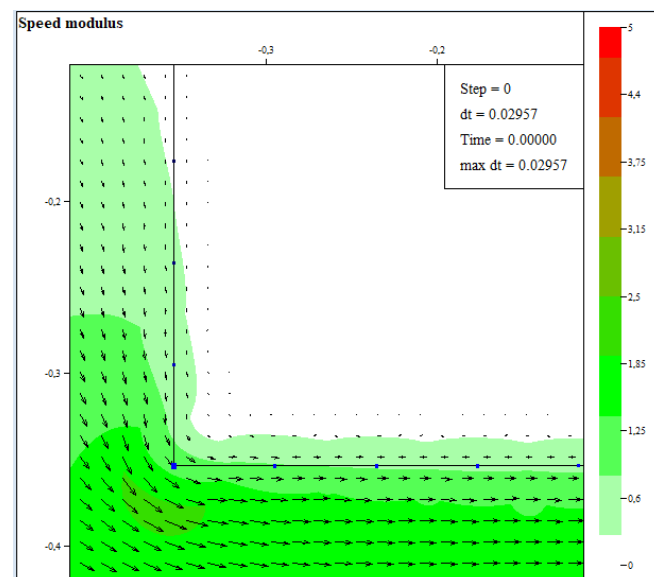
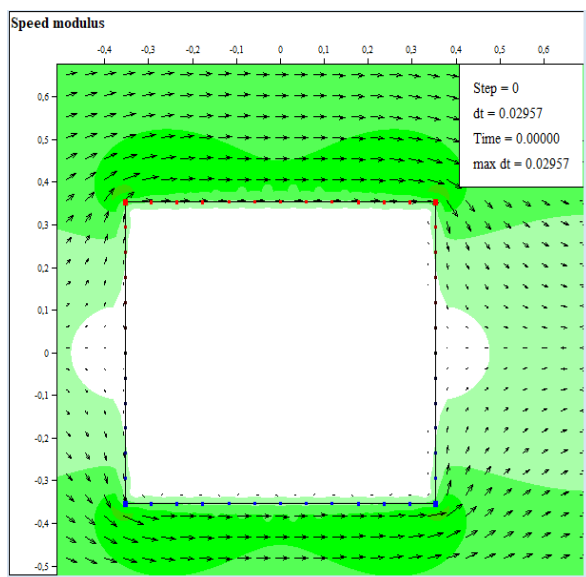
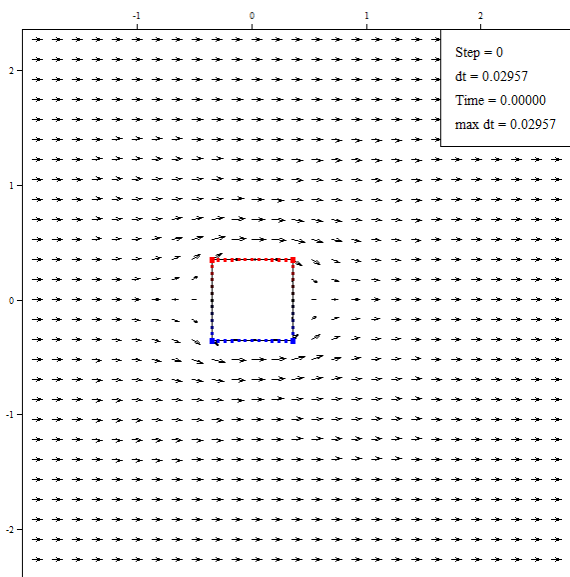
$$\Gamma_1(t_{n+1}), \dots, \Gamma_M(t_{n+1}) \quad (42)$$

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) \quad (43)$$

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \quad (44)$$

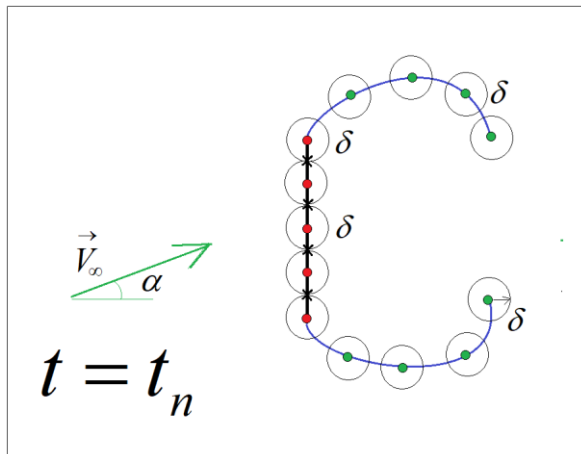
# Локальні особливості дискретної моделі

11



# Параметри для забезпечення виконання умови непроникнення для нестационарних процесів

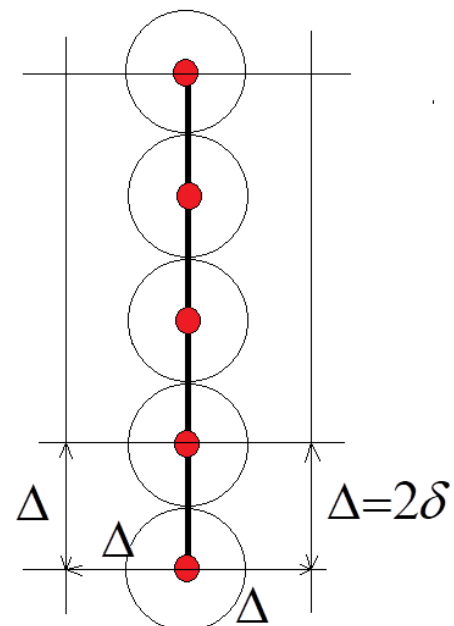
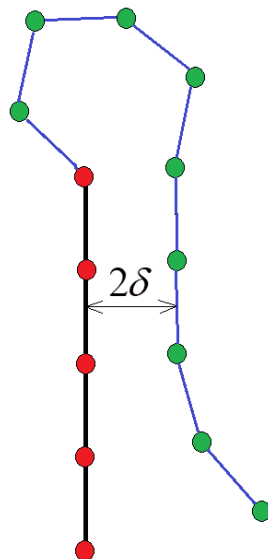
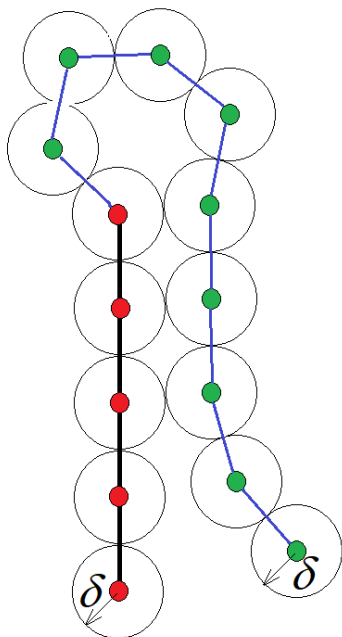
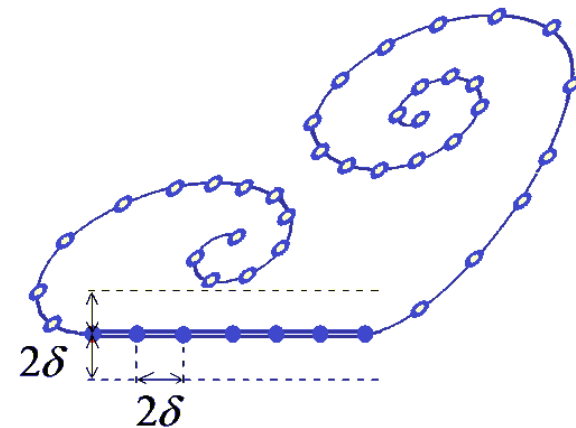
12



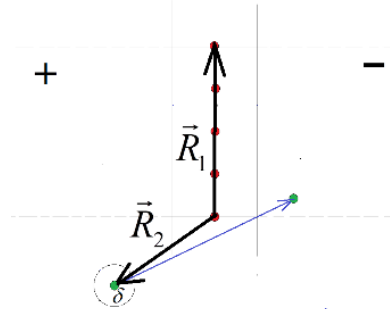
$$\Delta = 2\delta$$

$$\Delta = \frac{L}{M}$$

$$\delta = \frac{L}{2M}$$

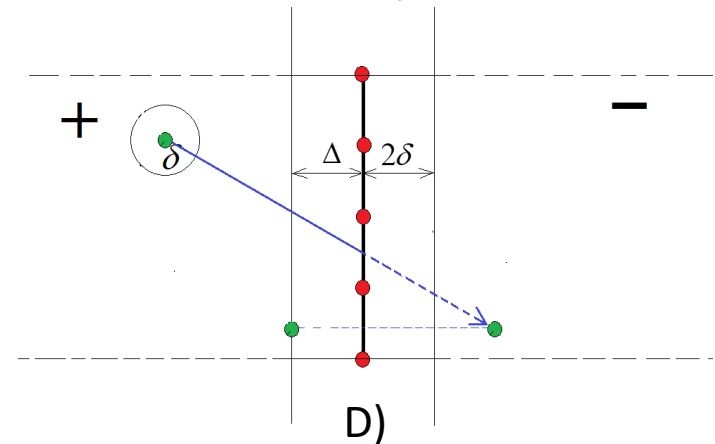
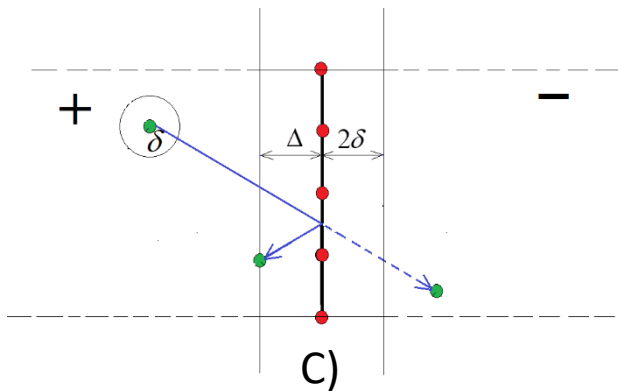
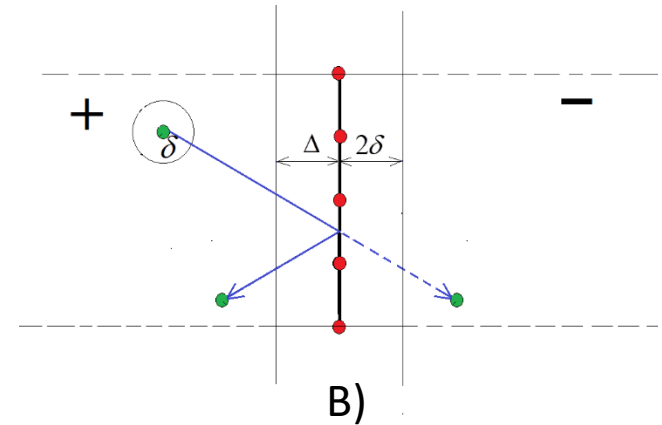
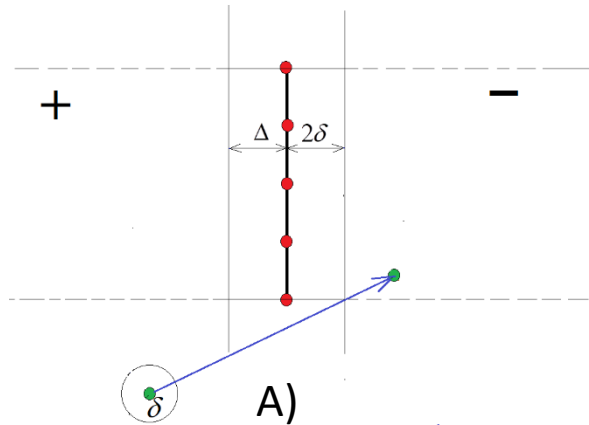


$$\text{sign}(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) > 0 \Rightarrow r \in D^+$$

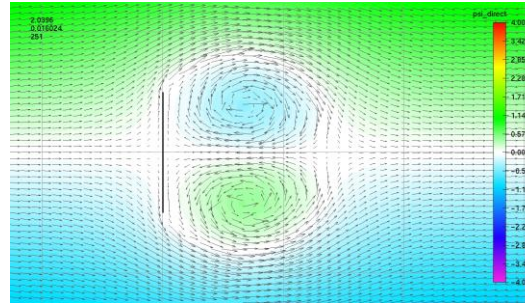


$$\text{sign}(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) < 0 \Rightarrow r \in D^-$$

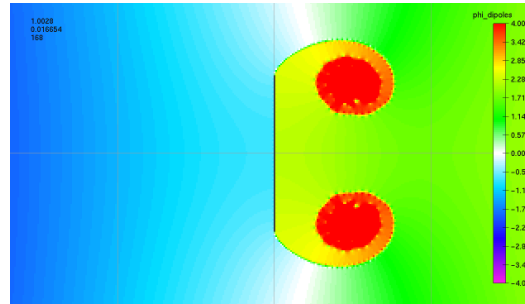
Визначення положення маркованої рухомої точки відносно боку елемента контуру



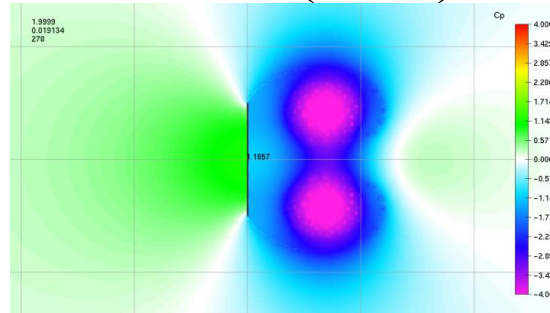
Забезпечення непроникнення маркованої рухомої точки відносно боку елемента контуру



$$\vec{V}(x, y, t) = (u_{\infty}, v_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t)) \quad (45)$$



$$\varphi(x, y, t) = (xu_{\infty} + yv_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t)}{x - x_i^p(t)} \right) \quad (46)$$



$$C_P(x, y, t) = 2 \frac{p - p_{\infty}}{\rho \vec{V}_{\infty}^2} = 1 - \frac{(\nabla \varphi)^2}{\vec{V}_{\infty}^2} - \frac{2}{\vec{V}_{\infty}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (47)$$

# 1) Обчислення поля тисків

$$\vec{V}(x, y, t) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

$$C_p(x, y, t) = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho \vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla \varphi)^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

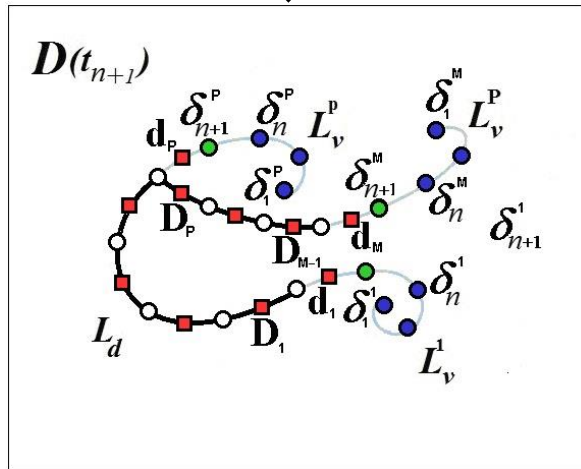
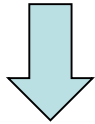
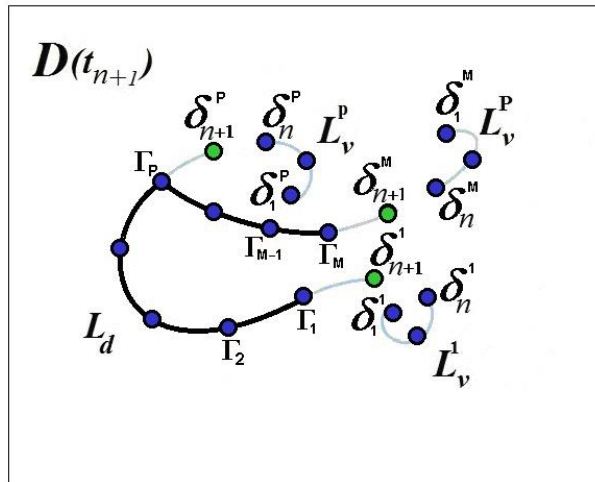
$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} \left( \vec{D}_j, \vec{V}_j(x, y, \bar{x}_j(t_{n+1}), \bar{y}_j(t_{n+1})) \right) + \sum_p \left( \vec{d}_p, \vec{V}_p(x, y, \bar{x}_n^p(t_{n+1}), \bar{y}_n^p(t_{n+1})) \right) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left( \vec{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})) \right) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left( \vec{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned}$$

де

$$\begin{cases} \vec{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j) \mathcal{Q}_j \\ \vec{d}_p = (x_p - x_n^p, y_p - y_n^p) q_p \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}) \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}) \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}) \end{cases}$$

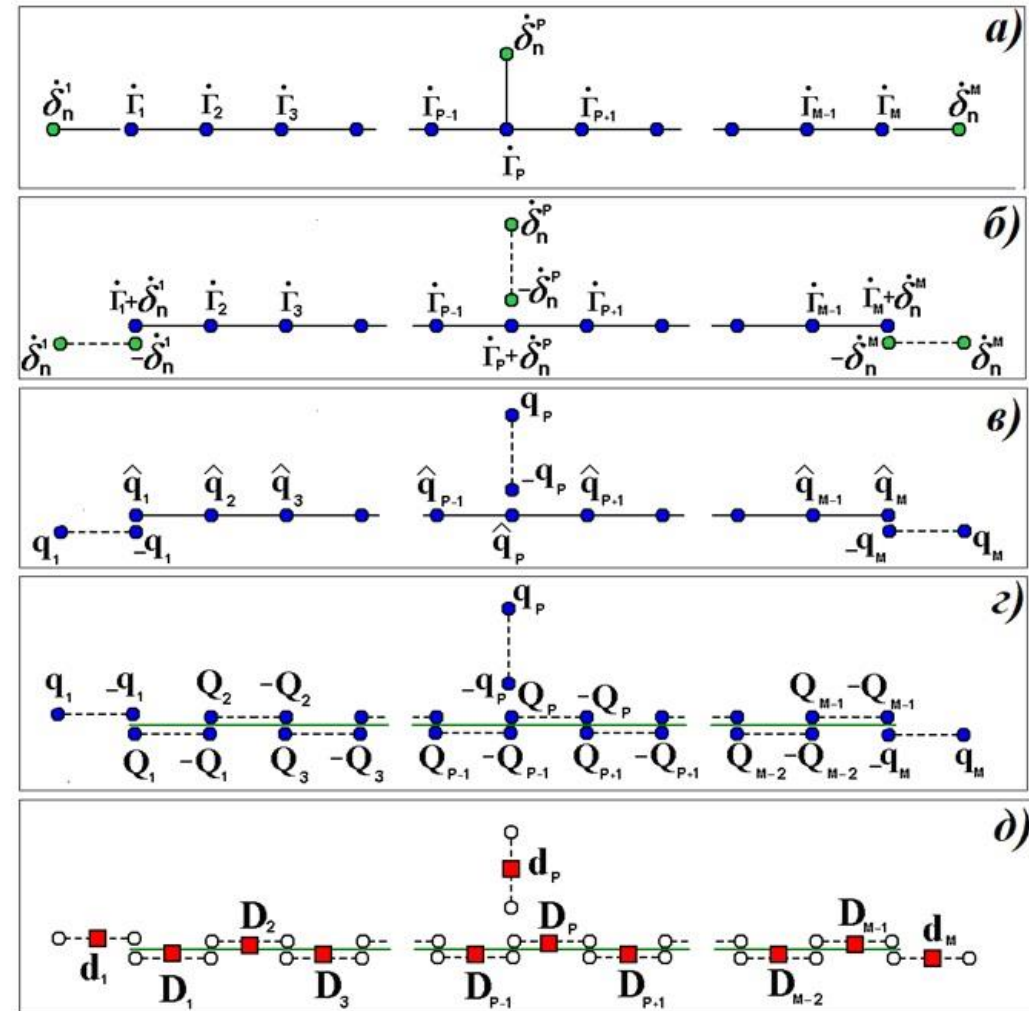
$$C_p(x, y, t) = 1 - \frac{(\vec{V}(x, y, t))^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2} \left( \frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t} \right)$$

# Discrete singularities and computational algorithm for accounting for flow separation



**Fig.21**

Transformation of the Vortex System into the System of Dipoles and Vortices



**Fig.22**

The transformation of the vortex system into a system of dipoles, taking into account the separation



$$\dot{\delta}_{n+1}^p = \delta_{n+1}^p / (t_{n+1} - t_n)$$

$$\dot{\Gamma}_j(t_{n+1}) = (\Gamma_j(t_{n+1}) - \Gamma_j(t_n)) / (t_{n+1} - t_n)$$

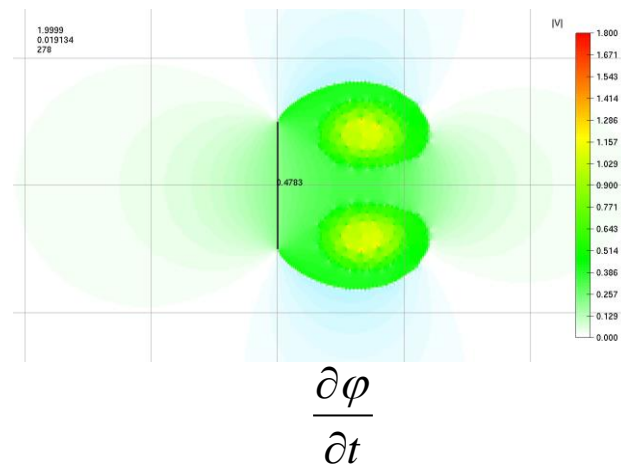
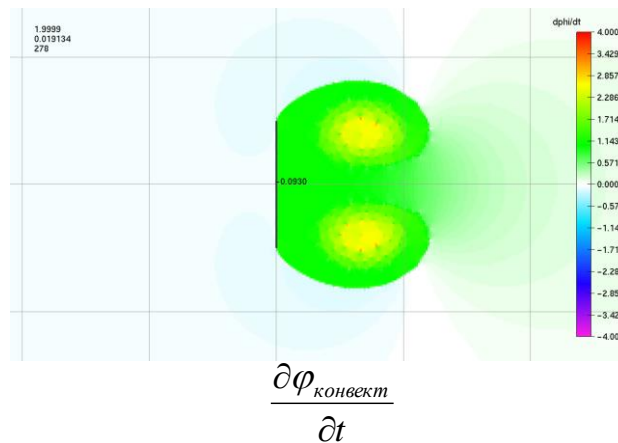
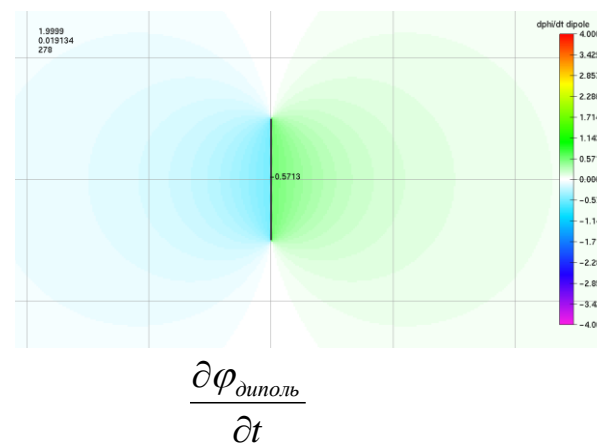
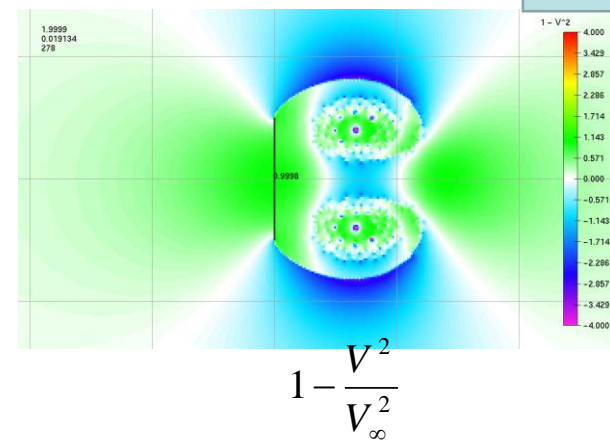
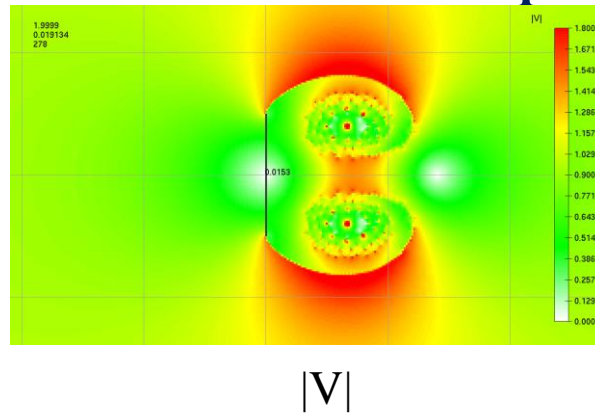
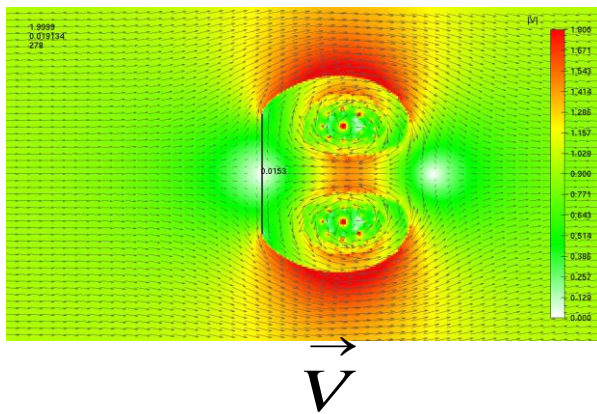
$$\hat{q}_j = \hat{q}_i(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_j(t_{n+1})$$

$$\hat{q}_p(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_p(t_{n+1}) + \dot{\delta}_{n+1}^p$$

$$Q_1 = \hat{q}_1 \quad Q_i = \sum_{k=1}^i \hat{q}_k \quad i=1,2,\dots,M-1.$$

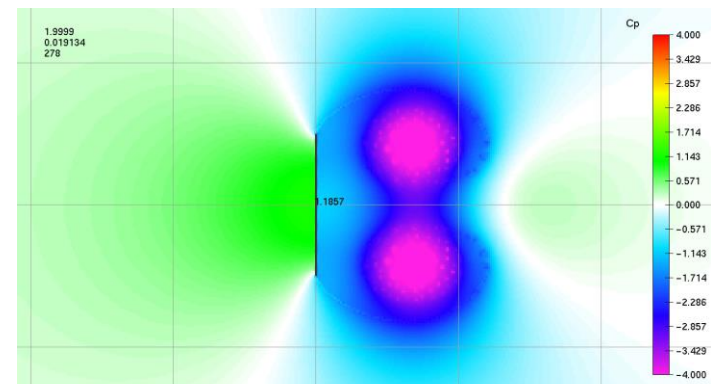
# Вплив нестационарності

16



$$C_P(x, y, t) = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho \vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla \varphi)^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$C_P(x, y, t) = 1 - \frac{(\vec{V}(x, y, t))^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2} \left( \frac{\partial \varphi_{\text{диполь}}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_{\text{конвект}}}{\partial t} \right)$$



## **Задачі Коші для визначення масопереносу (по відомому полю швидкості).**

2) Задачі Коші для процесу адвекції .

3) Задачі Коші для масопереносу (грунту).

## 2) Визначення масопереносу (по визначеному полю швидкості). 17

$$\vec{V}(x, y, t) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

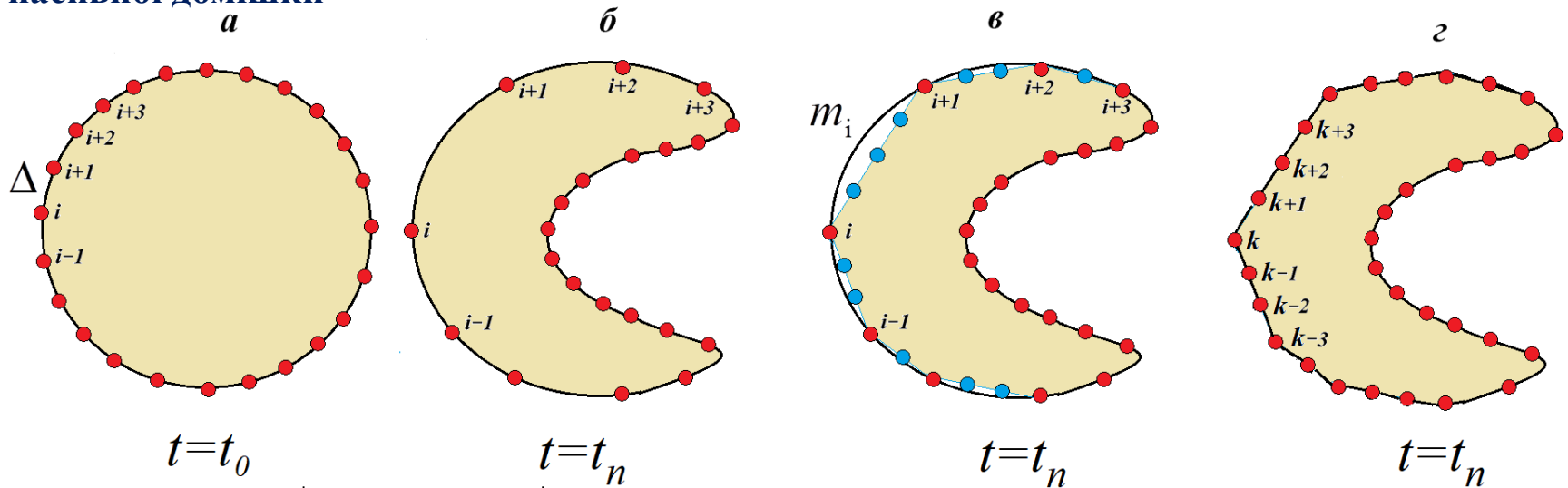
Задачі Коші ставиться для **процесу адвекції- процесу** переносу пасивної домішки.

Задачі Коші ставиться для кожної  $i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  маркованої частинки, яка визначає контур, що охоплює пляму пасивної домішки

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}(\vec{r}_i, t) \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (48)$$

$$\vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i} \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (49)$$

Схема застосування лінійної інтерполяції при редискретизації контуру, який охоплює пляму пасивної домішки



$$\Delta = \max_i |\vec{r}_i(t_0) - \vec{r}_{i+1}(t_0)| \quad (50)$$

$$\forall t_n, \exists m_i : \{2\Delta < |\vec{r}_i(t_n) - \vec{r}_{i+1}(t_n)| \leq (m_i + 1)\Delta, i = 1, \dots, M(t_n)\} \quad (51)$$

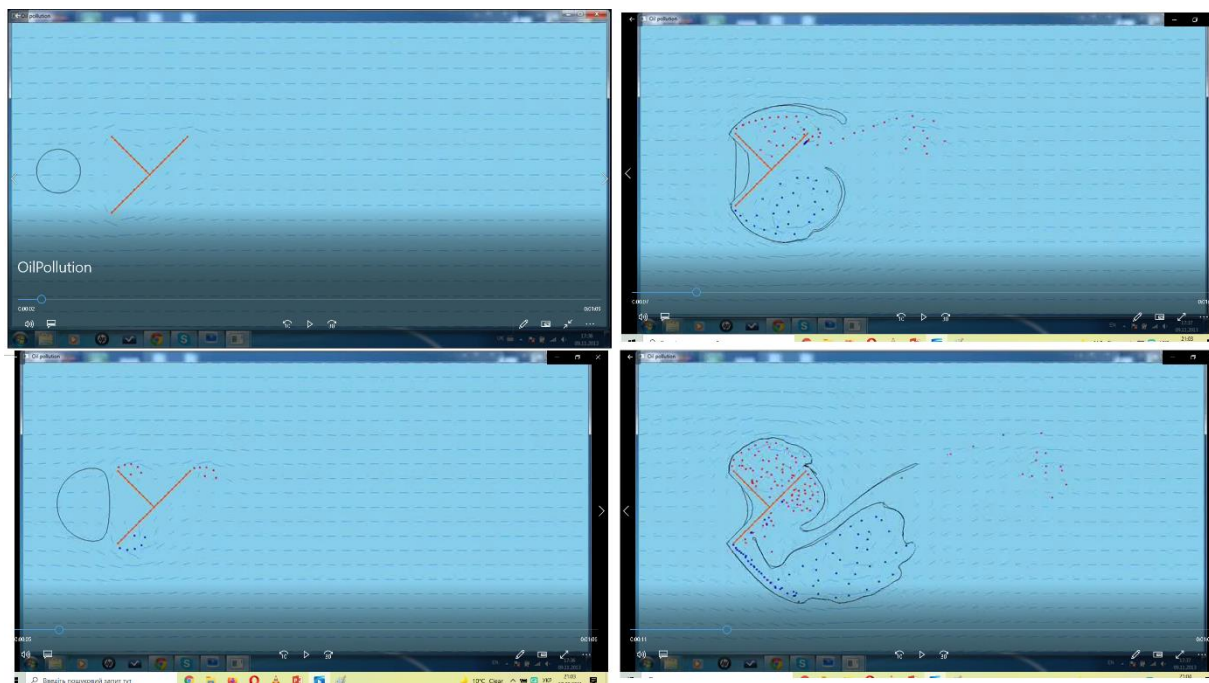
## Визначення масопереносу (по визначеному полю швидкості).

$$\vec{V}(x, y, t) = (u_{\infty}, v_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

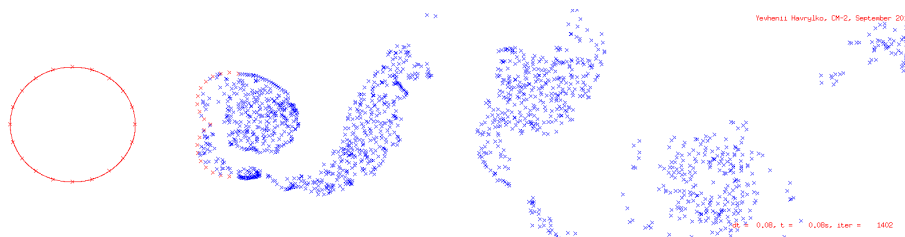
Тестове моделювання процесу адвекції навколо перешкод різної форми («У», «З»)

A)

$$\begin{cases} \vec{r}_i(t_{n+1}) = \vec{r}_i(t_n) + \vec{V}(\vec{r}_i, t_n) \Delta t \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i}, \forall i \end{cases}$$



Б)

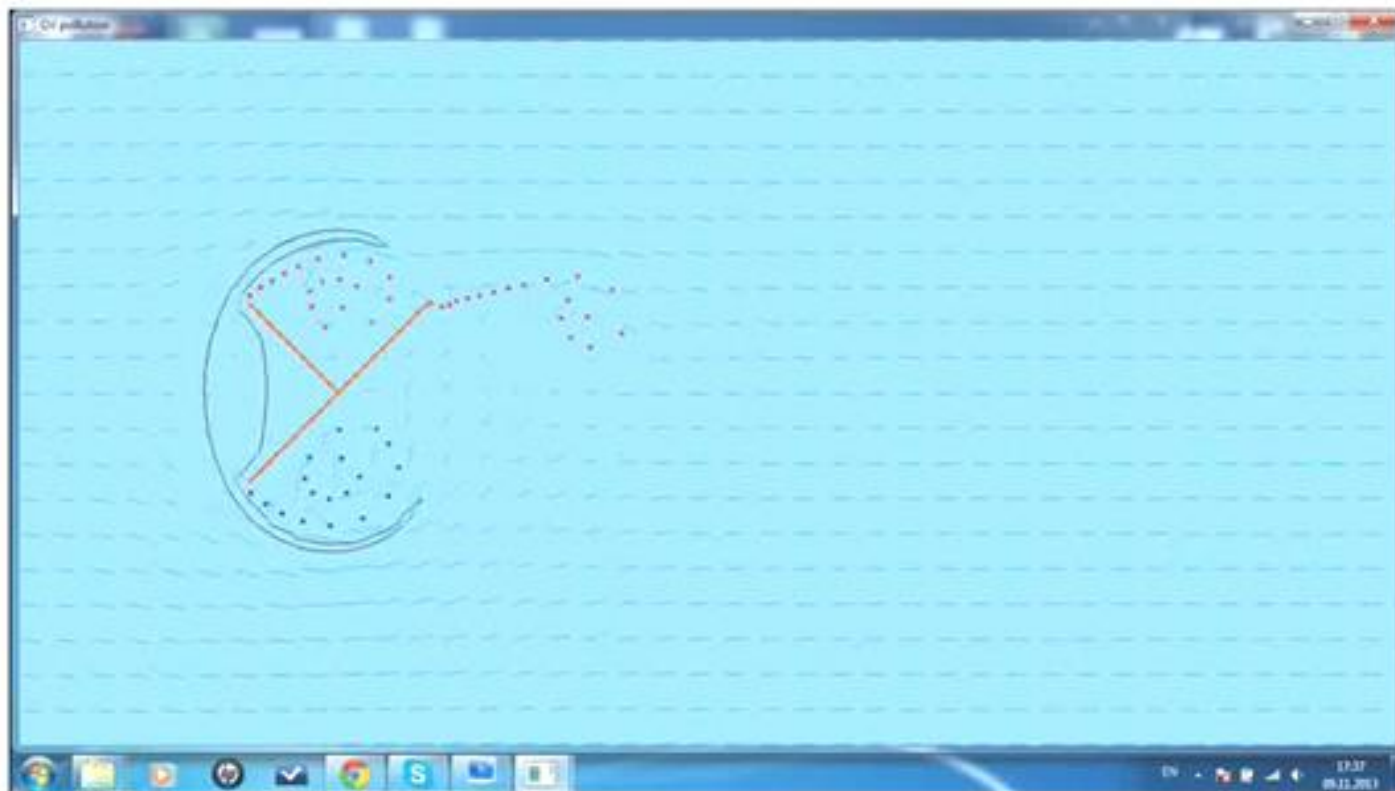


**Визначення масопереносу (по визначеному полю швидкості).**

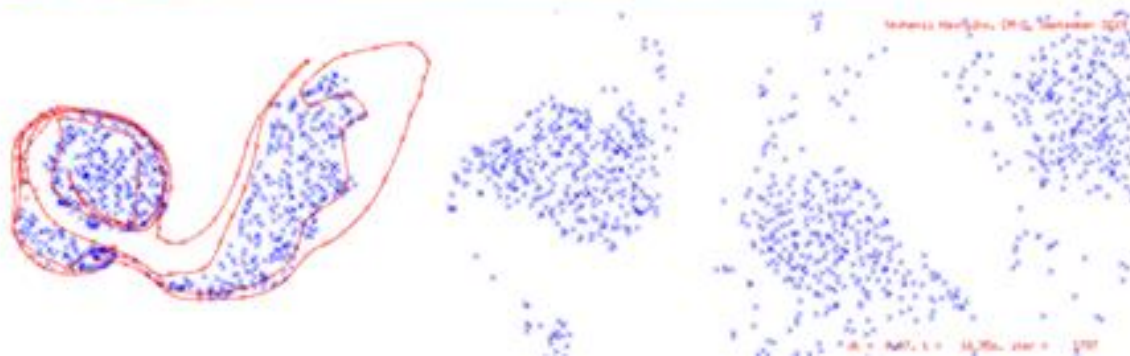
$$\vec{V}(x, y, t) = (u_{\infty}, v_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

Тестове моделювання процесу адвекції навколо перешкод різної форми («У», «З»)

А)



Б)



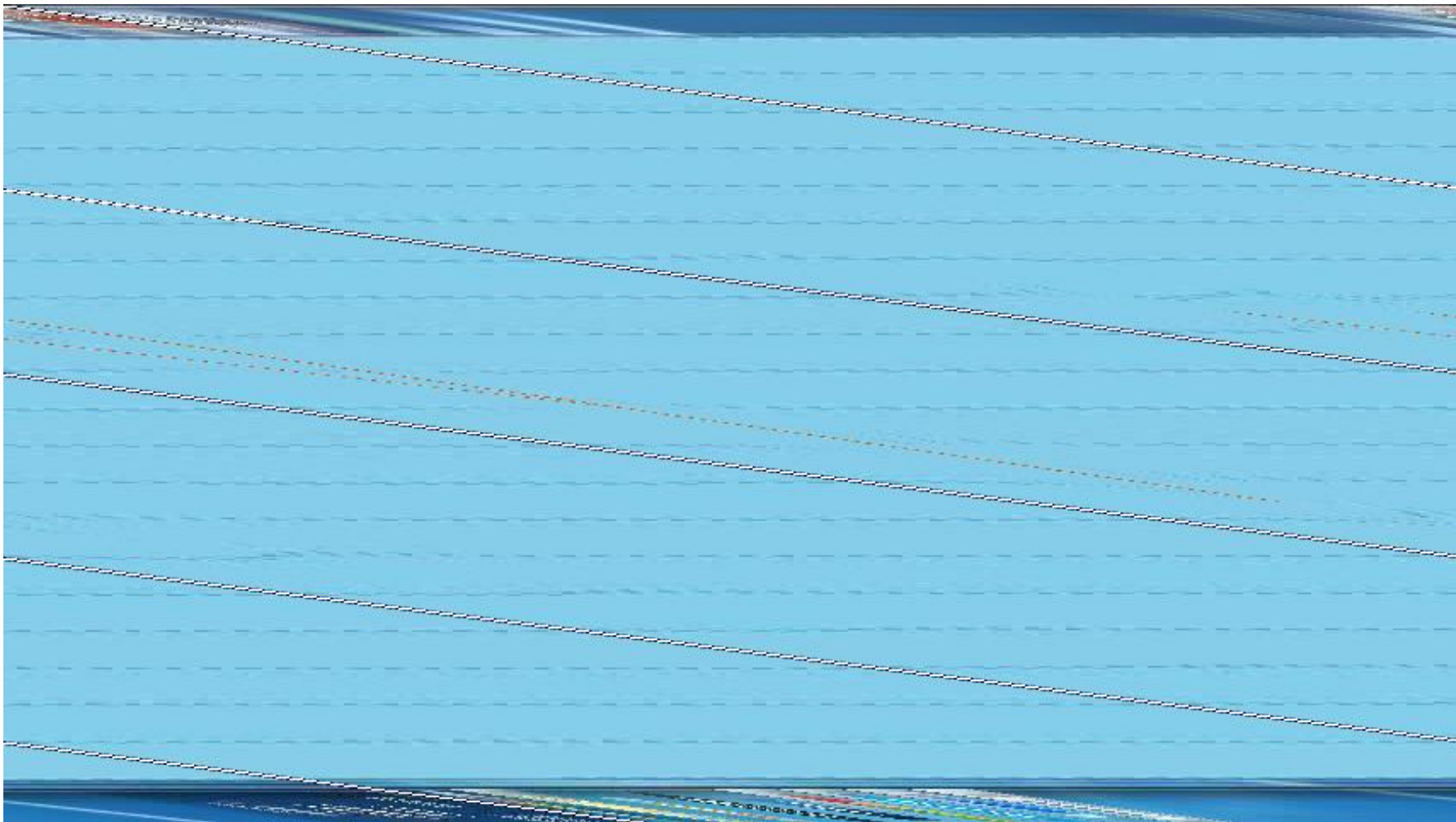


## Визначення масопереносу (по визначеному полю швидкості).

$$\vec{V}(x, y, t) = (u_{\infty}, v_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

Тестове моделювання процесу адвекції навколо перешкод різної форми («У»)

А)



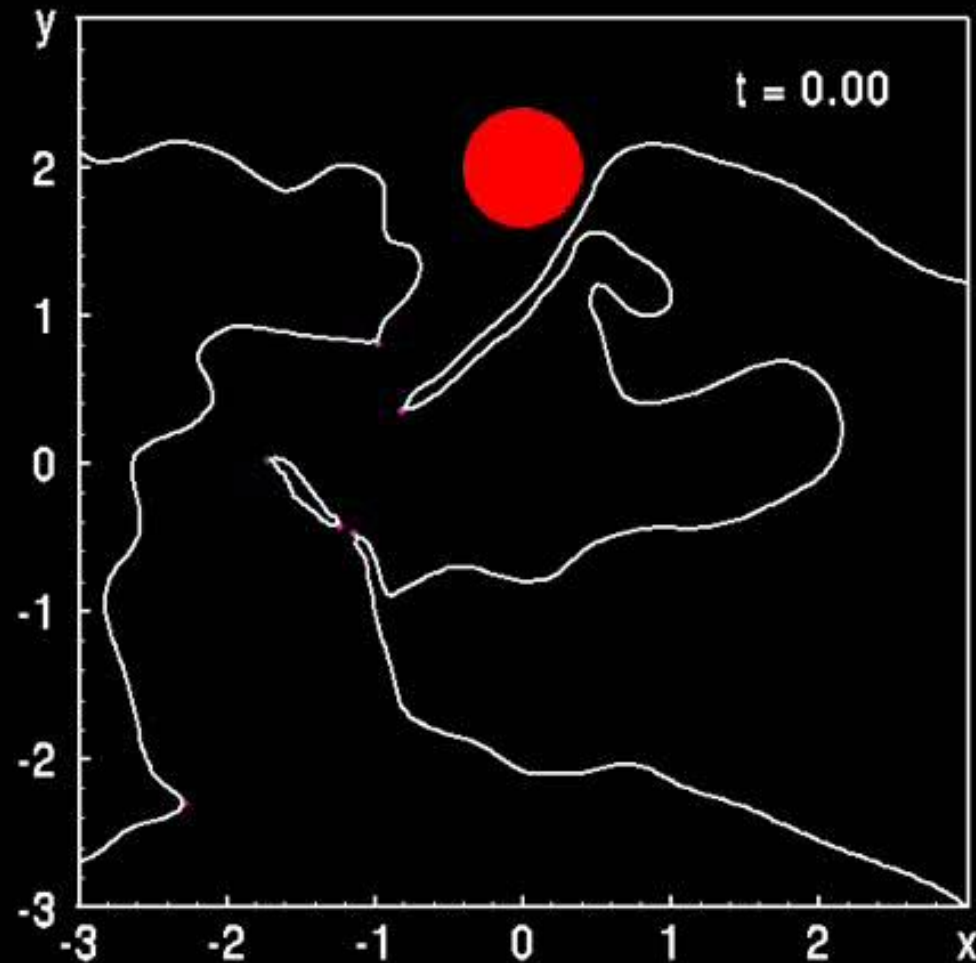
$$\vec{V}(x, y, t) = (u_{\infty}, v_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

Б) Тестове моделювання процесу адвекції навколо перешкод різної форми («З»)





# Моделювання розповсюдження забруднювача в акваторії



### 3) Визначення масопереносу (по відомому полю швидкості).

$$\vec{V}(x, y, t) = (u_{\infty}, v_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

Масоперенос: Задачі Коші (рух ґрунту навколо перешкоди)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{W}(\vec{r}_i, t) \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i} \end{cases} \quad (52)$$

(53)

$$\vec{W}(r_i, t) = \begin{cases} \alpha \vec{V}(\vec{r}_i, t), \alpha < 1, \text{ як } |V(r, t)| > \beta V_{\infty}, \beta > 1; \\ 0, \text{ як } |V(r_i, t)| \leq \beta V_{\infty}, \beta > 1. \end{cases} \quad (54)$$

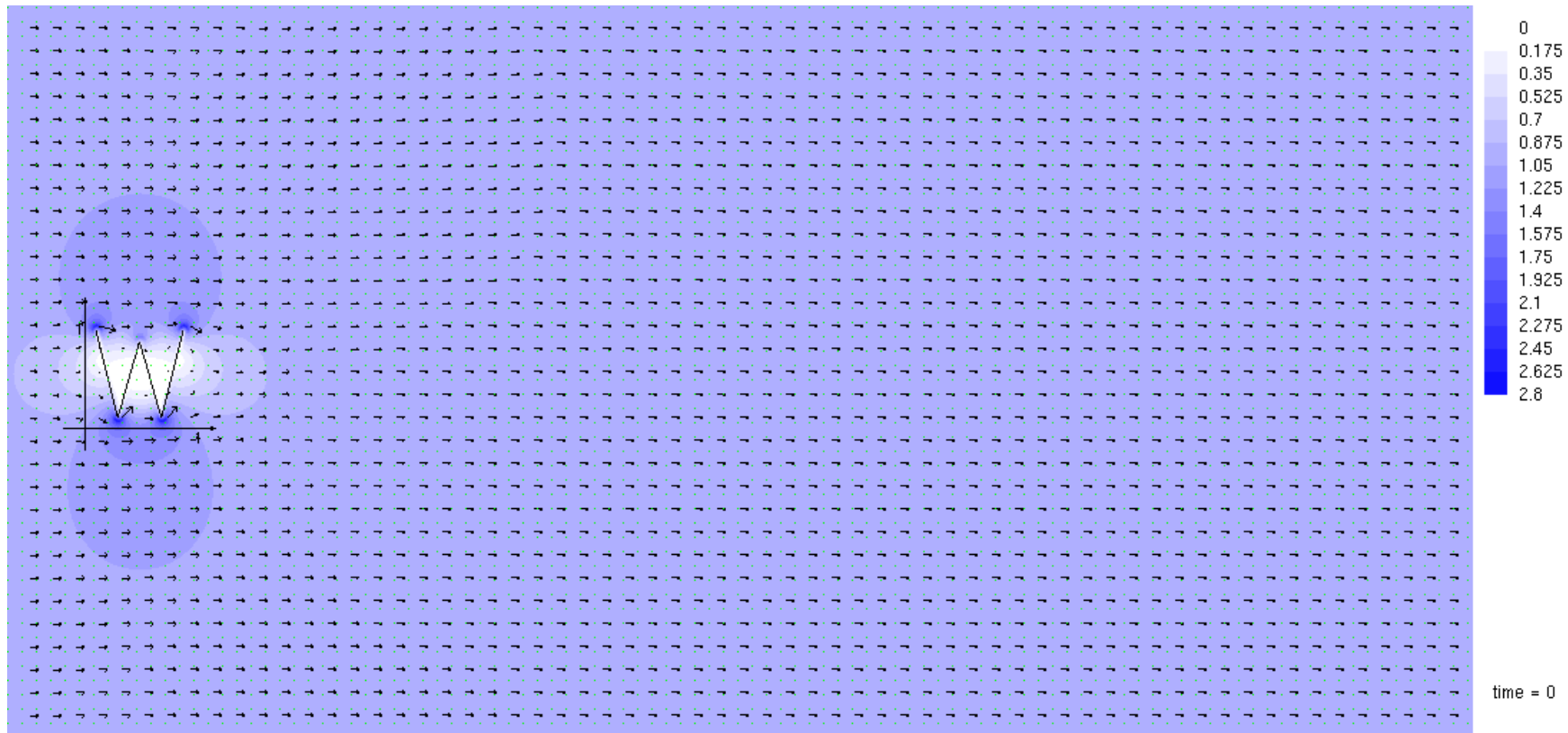
### 3) Визначення масопереносу (по відомому полю швидкості):

$$\vec{V}(x, y, t) = (u_\infty, v_\infty) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n(t)} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t), y_i^p(t))$$

Задачі Коші (масоперенос ґрунту)

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{W}(\vec{r}_i, t) \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i} \end{cases} \quad \vec{W}(r_i, t) = \begin{cases} \alpha \vec{V}(\vec{r}_i, t), \alpha < 1, \text{ як } |V(r, t)| > \beta V_\infty, \beta > \beta_0; \\ 0, \text{ як } |V(r_i, t)| \leq \beta V_\infty, \beta > \beta_0. \end{cases}$$

Моделювання масопереносу навколо перешкоди у вигляді літери W.  $\alpha = 0,3; \beta_0 = 2$ .



## Визначення масопереносу (по відомому полю швидкості).

$$\forall t_{n+1} : \vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (u_{\infty}, v_{\infty}) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}_j(x, y, x_{0j}, y_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \vec{V}_i^p(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))$$

Розв'язання задачі Коші (масоперенос ґрунту навколо перешкоди-  $W$ ):

$$\begin{cases} \vec{r}_i(t_{n+1}) = \vec{r}_i(t_n) + \vec{W}(r_i, t_n) \Delta t \\ \vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{0i}, \forall i \end{cases}$$

$$\vec{W}(r_i, t) = \begin{cases} \alpha \vec{V}(\vec{r}_i, t), \alpha < 1, \text{ як } |V(r, t)| > \beta V_{\infty}, \beta > 1; \\ 0, \text{ як } |V(r_i, t)| \leq \beta V_{\infty}, \beta > 1. \end{cases}$$

