Звіт
до лабораторної роботи
«Застосування методу дискретних особливостей для моделювання аеродинамічних процесів та обчислення поля тисків»

студента 2-го курсу магістратури
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Кравця Олексія

1 Постановка задачі

Дано контур L_d, що знаходиться в області D, з течією на нескінченості $V_\infty = (u_\infty(t), v_\infty(t))$. Позначимо через L_v вільну границю. Також вважаємо, що течія безвихорова, тобто $\exists \varphi = \varphi(x, y, t) : \vec{V} = \nabla\varphi$. Потенціал φ в області D задовольняє рівняння Лапласа: $\Delta\varphi = 0$.

Крім того на контурі L_d виконується умова непроникності:

$$(\nabla\varphi \cdot \vec{n})\,|_{L_d} = 0,$$

де $\vec{n}$ – нормаль до поверхні L_d.

На вихровому контурі L_v виконуються такі умови:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)^- \quad \text{на } L_v$$
$$p^+ = p^- \quad \text{на } L_v$$

Також вважаємо, що $\lim_{|r|\to\infty} \nabla\varphi = \vec{V}_\infty$, тобто із нескінченності набігає потік сталої швидкості. Також вважаємо, що швидкість скінченна $|\nabla\varphi| < \infty$ на гострих кутах L.

Інтеграл Коші-Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}V_\infty^2 + \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t}$$

Інтегральне представлення аналітичного розв'язку:

$$\Phi(z,t) = \varphi + i\xi = \vec{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)} f(w,t)\ln(z-w)dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)} f(w,t)\ln(z-w)dw + const$$

$$\vec{V}(z,t) = u - iv = \frac{\nabla\Phi(z,t)}{\nabla z} = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)} \frac{f(w,t)}{z-w}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)} \frac{f(w,t)}{z-w}dw$$

$$C_p(x,y,t) = 2\frac{p - p_\infty}{\rho\vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla\varphi)^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

2 Моделювання кінематики

Необхідно дискретизувати контур, розіб'ємо його на M точок $(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{1, M}$. Тепер знайдемо точки колокації:

$$x_k = \frac{x_{0k} + x_{0,k+1}}{2}$$
$$y_k = \frac{y_{0k} + y_{0,k+1}}{2}$$

Також проведемо нормалі в точках колокацій:

$$\overrightarrow{n_k}(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk}), \quad k = \overline{1, M-1}$$
$$n_{xk} = \frac{-(y_{0,k+1} - y_{0k})}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}$$
$$n_{yk} = \frac{x_{0,k+1} - x_{0k}}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}$$

На рисунку (1) бачимо вигляд контуру. На ньому позначені точки дискретних особливостей, точки колокацій та точки відриву, з яких утворюються вихори.

Тепер розв'яжемо задачу чисельно. Вважаємо, що модуль швидкості $|\vec{V}_\infty| = 1$, тобто $V_\infty = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Для обчислення потенціалу і швидкості в момент часу $t = t_{n+1}$ будемо використовувати наступні формули:

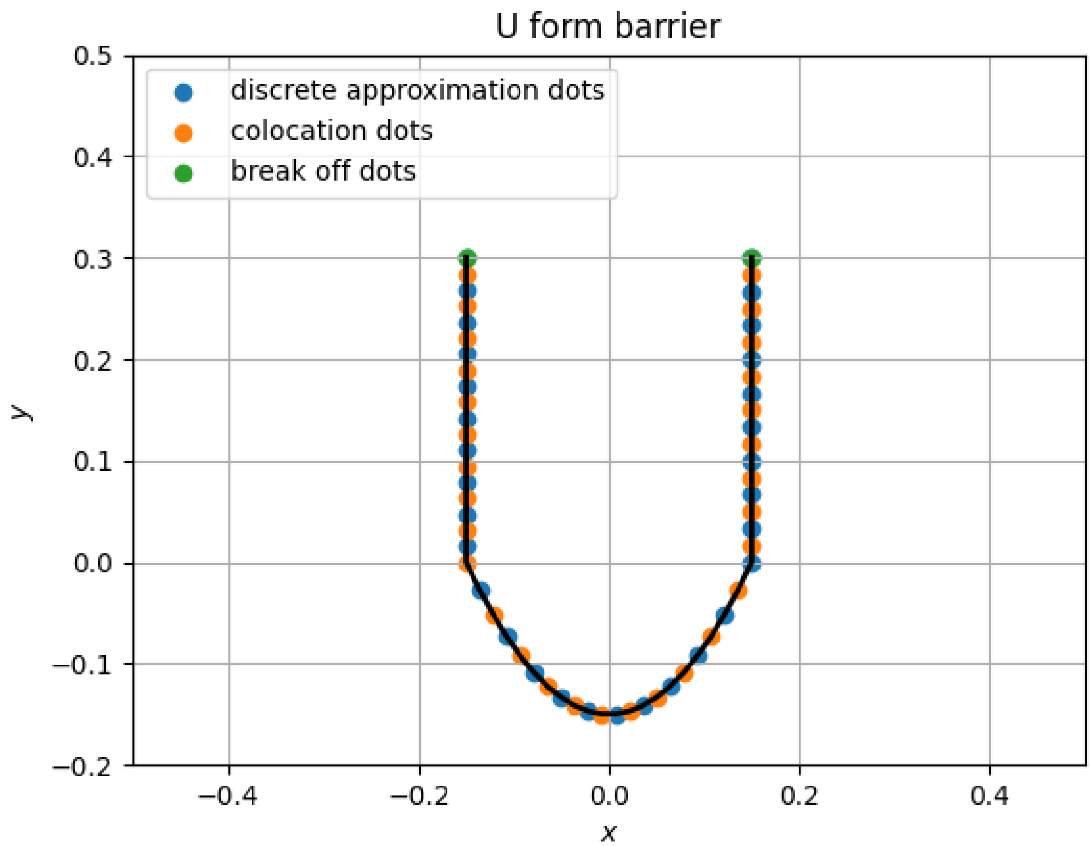

Рис. 1: Вигляд контуру

$$\varphi(x,y,t_{n+1}) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi}Arctg\left(\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}\right)$$
$$+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\gamma_i^p}{2\pi}Arctg\left(\frac{y-y_i^p(t_{n+1})}{x-x_i^p(t_{n+1})}\right)$$

$$\vec{V}(x,y,t_{n+1}) = (\cos\alpha, \sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\vec{V}(x,y,x_{0j},y_{0j})$$
$$+\sum_{p}\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^p\vec{V}(x,y,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))$$

Перед тим, як почати розв'язувати ці рівняння, введемо декілька величин.

$$R_{0i} = \begin{cases} \sqrt{(x-x_{0i})^2+(y-y_{0i})^2}, & \sqrt{(x-x_{0i})^2+(y-y_{0i})^2} > \delta \\ \delta, & \sqrt{(x-x_{0i})^2+(y-y_{0i})^2} \le \delta \end{cases}$$

$$\vec{V}(x,y,x_{0i},y_{0i}) = \begin{cases} u(x,y,x_{0i},y_{0i}) = \frac{1}{2\pi}\frac{y_{0i}-y}{R_{0i}^2} \\ v(x,y,x_{0i},y_{0i}) = \frac{1}{2\pi}\frac{x-x_{0i}}{R_{0i}^2} \end{cases}$$

Для того, щоб знайти коефіцієнти Γ_j необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}(x_k,y_k,x_{0j},y_{0j})\cdot\vec{n}(x_k,y_k)\right) = -\left[\left(\vec{V}_\infty\cdot\vec{n}(x_k,y_k)\right)\right. \\ \left.+\sum_p\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^p\left(\vec{V}(x_k,y_k,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\cdot\vec{n}(x_k,y_k)\right)\right], k=\overline{1,M-1} \\ \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1}) = -\sum_p\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^p \end{cases}$$

Одночасно з цим проходить оновлення точок вихорової границі. Для цього використовуємо метод Ейлера. Тобто $\forall p, i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n),y_i^p(t_n),t_n)\tau_n \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n),y_i^p(t_n),t_n)\tau_n \end{cases}$$

де

$$\tau_n = \frac{\min_k \delta_k}{\max_D(|V|)}.$$

На кожному кроці з кінцевих та кутових точок перешкоди вилітають нові вихорові точки. При цьому, вони мають такі властивості:

$$\forall p : \gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n);$$

$$\begin{cases} x_{n+1}^p(t_{n+1}) = x_{0p}(t_n) + u(x_{0p}(t_n),y_{0p}(t_n),t_n)\tau_n \\ y_{n+1}^p(t_{n+1}) = y_{0p}(t_n) + v(x_{0p}(t_n),y_{0p}(t_n),t_n)\tau_n \end{cases}$$

2.1 Знаходження поля тисків

Маємо наступну аналітичну формулу:

$$C_p(x,y,t) = 2\frac{p-p_\infty}{\rho\vec{V}_\infty^2} = 1 - \frac{(\nabla\varphi)^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

або це можна записати таким чином

$$C_p(x,y,t) = 1 - \frac{\left(\vec{V}(x,y,t)\right)^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2}\left(\frac{\partial\varphi_{\text{дипол}}}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_{\text{конвект}}}{\partial t}\right)$$

Чисельно похідну потенціалу $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ можна знайти за такою формулою:

$$\frac{\partial\varphi(x,y,t_{n+1})}{\partial t} = \sum_{j=1}^{M-1}\left(\vec{D}_j,\vec{V}_j\left(x,y,\overline{x}(t_{n+1}),\overline{y}(t_{n+1})\right)\right) + \sum_p\left(\vec{d}_p,\vec{V}_p\left(x,y,\overline{x}_n^p(t_{n+1}),\overline{y}_n^p(t_{n+1})\right)\right) -$$
$$-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}_j\left(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})\right),\vec{V}(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})\right) -$$
$$-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^p\left(\vec{V}_i\left(x,y,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})\right),\vec{V}(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})\right)$$

де

$$\begin{cases} \vec{D}_j = (x_{0,j+1}-x_{0,j},y_{0,j+1-y_{0,j}})Q_j \\ \vec{d}_p = (x_{0,p}-x_n^p,y_{0,p}-y_n^p) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{x}_j = 0.5(x_{0,j+1}+x_{0,j}) \\ \overline{y}_j = 0.5(y_{0,j+1}+y_{0,j}) \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{x}_n^p = 0.5(x_n^p+x_{0,p}) \\ \overline{y}_n^p = 0.5(y_n^p+y_{0,p}) \end{cases}$$

також роз'яснимо позначення:

$$\dot{\gamma}^p_{n+1} = \frac{\gamma^p_{n+1}}{t_{n+1} - t_n}$$
$$\dot{\Gamma}_j = \frac{(\Gamma_j(t_{n+1}) - \Gamma_j(t_n))}{t_{n+1} - t_n}$$
$$q_j = \dot{\Gamma}_j, \qquad q_p(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_p(t_{n+1}) + \dot{\gamma}^p_{n+1}$$
$$Q_q = q_1, \quad Q_i = \sum_{k=1}^{i} q_k \quad i = 1, 2, \dots M - 1$$

2.2 Забезпечення непроникності контуру L_d.

Для забезпечення непроникності контуру необхідно накласти деякі умови. Відстань між двома точками дискретних особливостей повинна бути меньше за 2δ, де δ – константа, що використовується для розрахунку τ. Це дає нам змогу відслідковувати ті вихорові точки, що наблизилися до границі.

Нехай маємо точку дискретної особливості $z_0 = (x_0, y_0)$, до якої наблизилася точка вихорової границі $z_1(t_{n+1}) = (x_i(t_{n+1}), y_i(t_{n+1}))$ на відстань менше 2δ.

Необхідно зрозуміти з якої сторони контуру наблизилася вихорова точка. Тому візьмемо точку $z_1(t_n)$ – точку де була точка $z_1(t_n + 1)$ на минулому кроці, та обрахуємо $\lambda = sign\left((\vec{n_0}, z1(t_n) - z_0)\right)$, де $\vec{n_0}$– нормаль в точці z_0

Тепер можна обрахувати коефіцієнт $k = \lambda|z_0 - z_1|$. Отже змінимо точку $z_1(t_{n+1}) = z_1(t_n) + k\vec{n_0}$.

3 Результати

3.1 Перешкода у вигляді пластинки

Розглянемо результати при $V_\infty = 1 + 0i$.

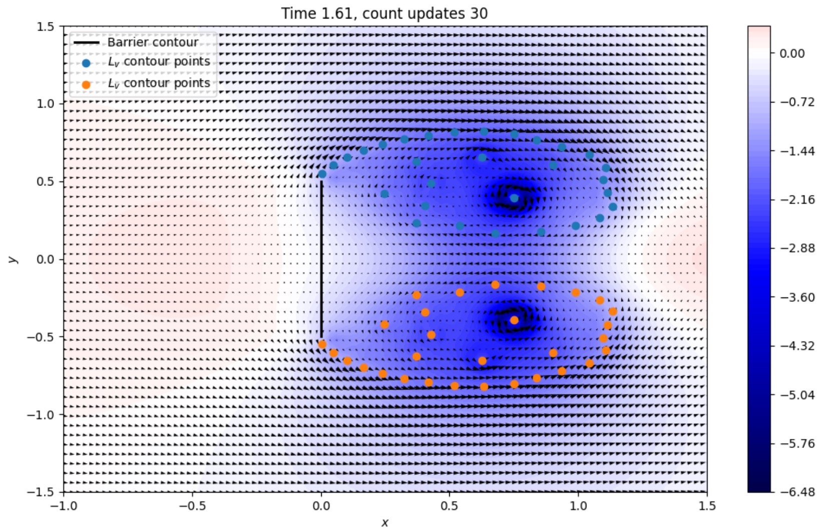

Рис. 2: Результат при швидкості $V_\infty = 1 + 0i$

Збільшимо кількість кроків

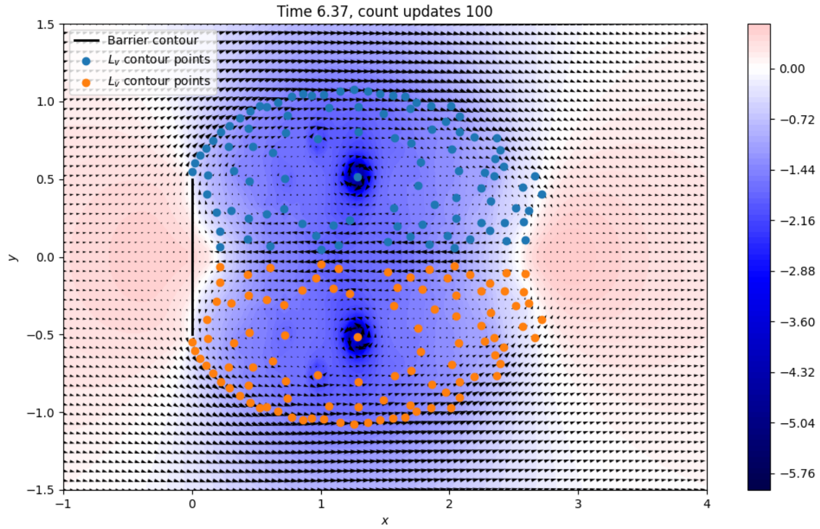

Рис. 3: Результат при швидкості $V_\infty = 1 + 0i$

3.2 Перешкода у вигляді літери U

Розглянемо результати при $V_\infty = 1 + 0i$.

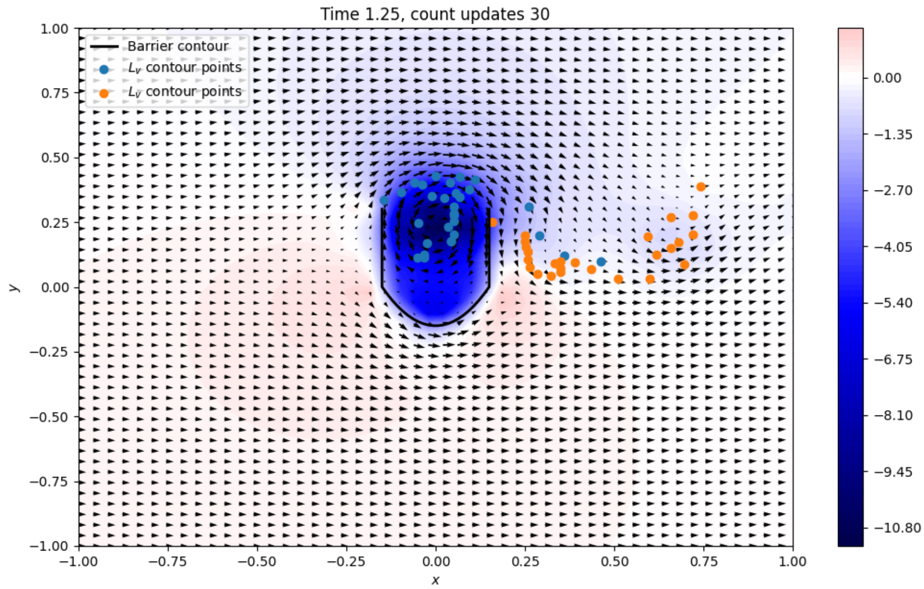

Рис. 4: Результат при швидкості $V_\infty = 1 + 0i$

Збільшимо кількість кроків

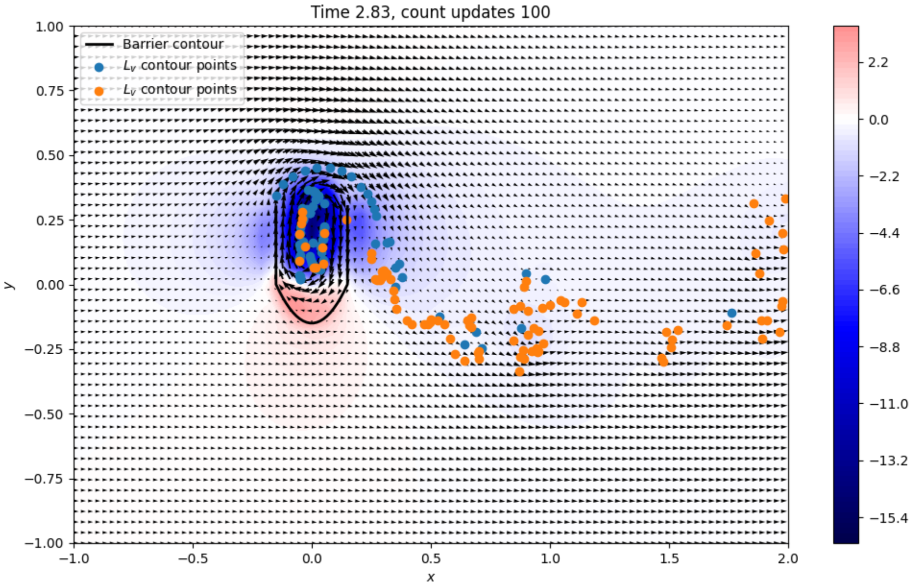

Рис. 5: Результат при швидкості $V_\infty = 1 + 0i$

4 Висновок

Було змодельовано задачу обтікання заданого непроникного контура. Для розв'язання даної задачі було використано метод дискретних особливостей. Було побудоване поле тисків.