

**Звіт**  
**до лабораторної роботи №2:**  
**«Застосування методу дискретних особливостей для**  
**моделювання аеродинамічних процесів»**

студента 1-го курсу магістратури  
факультету комп'ютерних наук та кібернетики  
Кравця Олексія

# 1 Постановка задачі

Дано контур  $L_d$ , що знаходиться в області  $D$ , з течією на нескінченності  $V_\infty = (u_\infty(t), v_\infty(t))$ . Позначимо через  $L_v$  вільну границю. Також вважаємо, що течія безвихорова, тобто  $\exists \varphi = \varphi(x, y, t) : \vec{V} = \nabla \varphi$ . Потенціал  $\varphi$  в області  $D$  задовольняє рівняння Лапласа:  $\Delta \varphi = 0$ .

Крім того на контурі  $L_d$  виконується умова непроникності:

$$(\nabla \varphi \cdot \vec{n})|_{L_d} = 0,$$

де  $\vec{n}$  – нормаль до поверхні  $L_d$ .

На вихровому контурі  $L_v$  виконуються такі умови:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\right)^+ = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\right)^- \quad \text{на } L_v$$

$$p^+ = p^- \quad \text{на } L_v$$

Також вважаємо, що  $\lim_{|r| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_\infty$ , тобто із нескінченності набігає потік сталої швидкості. Також вважаємо, що швидкість скінченна  $|\nabla \varphi| < \infty$  на гострих кутах  $L$ .

Інтеграл Коші-Лагранжа:

$$\frac{\nabla \varphi}{\nabla t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2 + \frac{\nabla \varphi_\infty}{\nabla t}$$

Інтегральне представлення аналітичного розв'язку:

$$\Phi(z, t) = \varphi + i\xi = \vec{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f(w, t) \ln(z - w) dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(w, t) \ln(z - w) dw + const$$

$$\vec{V}(z, t) = u - iv = \frac{\nabla \Phi(z, t)}{\nabla z} = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f(w, t)}{z - w} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(w, t)}{z - w} dw$$

# 2 Моделювання кінематики

Необхідно дискретизувати контур, розіб'ємо його на  $M$  точок  $(x_{0j}, y_{0j})$ ,  $j = \overbrace{1, M}$ . Тепер знайдемо точки колокації:

$$x_k = \frac{x_{0k} + x_{0,k+1}}{2}$$

$$y_k = \frac{y_{0k} + y_{0,k+1}}{2}$$

Також проведемо нормалі в точках колокації:

$$\vec{n}_k(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk}), \quad k = \overline{1, M-1}$$

$$n_{xk} = \frac{-(y_{0,k+1} - y_{0k})}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}$$

$$n_{yk} = \frac{x_{0,k+1} - x_{0k}}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}$$

На рисунку (1) бачимо вигляд контуру. Синіми хрестами позначені точки дискретних особливостей, з червоних точок колокацій виходять нормалі. Напрямок нормалей залежить від напрямку обходу контуру. В цьому випадку, ми починаємо рухатися від лівого верхнього кінця і закінчуємо у правому нижньому.

Тепер розв'яжемо задачу чисельно. Вважаємо, що модуль швидкості  $|\vec{V}_\infty| = 1$ , тобто  $V_\infty = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ . Для обчислення потенціалу і швидкості в момент часу  $t = t_{n+1}$  будемо використовувати наступні формули:

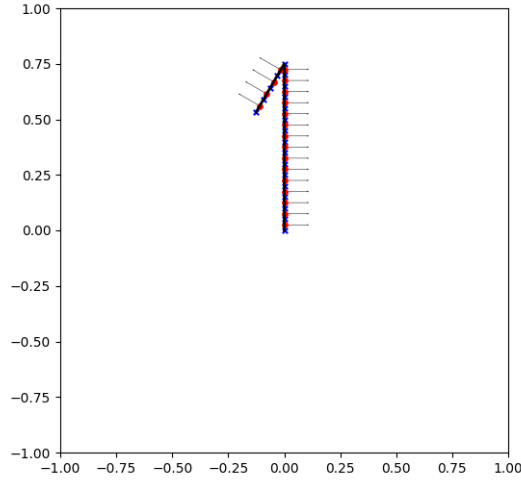


Рис. 1: Вигляд контуру

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y, t_{n+1}) &= (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}} \right) \\
&+ \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} \text{Arctg} \left( \frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})} \right) \\
\vec{V}(x, y, t_{n+1}) &= (\cos \alpha, \sin \alpha) + \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j}) \\
&+ \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))
\end{aligned}$$

Перед тим, як почати розв'язувати ці рівняння, введемо декілька величин.

$$R_{0i} = \begin{cases} \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} > \delta \\ \delta, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} \leq \delta \end{cases}$$

$$\vec{V}(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \begin{cases} u(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_{0i} - y}{R_{0i}^2} \\ v(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - x_{0i}}{R_{0i}^2} \end{cases}$$

Для того, щоб знайти коефіцієнти  $\Gamma_j$  необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) \left( \vec{V}(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j}) \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right) = - \left[ \left( \vec{V}_\infty \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right) \right. \\ \left. + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \left( \vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \cdot \vec{n}(x_k, y_k) \right) \right], k = \overline{1, M-1} \\ \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) = - \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \end{cases}$$

Одночасно з цим проходить оновлення точок вихорової границі. Для цього використовуємо метод Ейлера. Тобто  $\forall p, i = \overline{1, n}$ :

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n) \tau_n \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n) \tau_n \end{cases}$$

де

$$\tau_n = \frac{\min_k \delta_k}{\max_D(|V|)}.$$

На кожному кроці з кінцевих та кутових точок перешкоди вилітають нові вихорові точки. При цьому, вони мають такі властивості:

$$\forall p : \gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n);$$

$$\begin{cases} x_{n+1}^p(t_{n+1}) = x_{0p}(t_n) + u(x_{0p}(t_n), y_{0p}(t_n), t_n)\tau_n \\ y_{n+1}^p(t_{n+1}) = y_{0p}(t_n) + v(x_{0p}(t_n), y_{0p}(t_n), t_n)\tau_n \end{cases}$$

## 2.1 Забезпечення непроникності контуру $L_d$ .

Для забезпечення непроникності контуру необхідно накласти деякі умови. Відстань між двома точками дискретних особливостей повинна бути менше за  $2\delta$ , де  $\delta$  – константа, що використовується для розрахунку  $\tau$ . Це дає нам змогу відслідковувати ті вихорові точки, що наблизилися до границі.

Нехай маємо точку дискретної особливості  $z_0 = (x_0, y_0)$ , до якої наблизилася точка вихорової границі  $z_1(t_{n+1}) = (x_i(t_{n+1}), y_i(t_{n+1}))$  на відстань менше  $2\delta$ .

Необхідно зрозуміти з якої сторони контуру наблизилася вихорова точка. Тому візьмемо точку  $z_1(t_n)$  – точку де була точка  $z_1(t_n + 1)$  на минулому кроці, та обрахуємо  $\lambda = \text{sign}((\vec{n}_0, z_1(t_n) - z_0))$ , де  $\vec{n}_0$  – нормаль в точці  $z_0$

Тепер можна обрахувати коефіцієнт  $k = \lambda|z_0 - z_1|$ . Отже змінимо точку  $z_1(t_{n+1}) = z_1(t_n) + k\vec{n}_0$ .

## 3 Результати

Щоб переглянути анімації перейдіть по [ссилці](#).

## 4 Висновок

Було змодельовано задачу обтікання заданого непроникного контура. Для розв’язання даної задачі було використано метод дискретних особливостей. Були отримані анімовані результати. Потрібно зазначити, що реалізація непроникності контуру має помилки, але в модельних задачах вони не впливають на глобальний результат.