Звіт
до лабораторної роботи №2:
«Застосування методу дискретних особливостей для моделювання аеродинамічних процесів»

студента 1-го курсу магістратури
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Кравця Олексія

1 Постановка задачі

Дано контур L_d, що знаходиться в області D, з течією на нескінченості $V_\infty = (u_\infty(t), v_\infty(t))$. Позначимо через L_v вільну границю. Також вважаємо, що течія безвихорова, тобто $\exists\varphi = \varphi(x, y, t) : \vec{V} = \nabla\varphi$. Потенціал φ в області D задовольняє рівняння Лапласа: $\Delta\varphi = 0$.

Крім того на контурі L_d виконується умова непроникності:

$$(\nabla\varphi \cdot \vec{n})\,|_{L_d} = 0,$$

де $\vec{n}$ – нормаль до поверхні L_d.

На вихровому контурі L_v виконуються такі умови:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}\right)^- \quad \text{на } L_v$$
$$p^+ = p^- \quad \text{на } L_v$$

Також вважаємо, що $\lim_{|r|\to\infty} \nabla\varphi = \vec{V}_\infty$, тобто із нескінченності набігає потік сталої швидкості. Також вважаємо, що швидкість скінченна $|\nabla\varphi| < \infty$ на гострих кутах L.

Інтеграл Коші-Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}V_\infty^2 + \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t}$$

Інтегральне представлення аналітичного розв'язку:

$$\Phi(z, t) = \varphi + i\xi = \vec{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)} f(w, t)\ln(z - w)dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)} f(w, t)\ln(z - w)dw + const$$

$$\vec{V}(z, t) = u - iv = \frac{\nabla\Phi(z, t)}{\nabla z} = \vec{V}_\infty + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)} \frac{f(w, t)}{z - w}dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_v(t)} \frac{f(w, t)}{z - w}dw$$

2 Моделювання кінематики

Необхідно дискретизувати контур, розіб'ємо його на M точок $(x_{0j}, y_{0j}), j = \overline{1, M}$. Тепер знайдемо точки колокації:

$$x_k = \frac{x_{0k} + x_{0,k+1}}{2}$$
$$y_k = \frac{y_{0k} + y_{0,k+1}}{2}$$

Також проведемо нормалі в точках колокацій:

$$\overrightarrow{n_k}(x_k, y_k) = (n_{xk}, n_{yk}), \quad k = \overline{1, M-1}$$
$$n_{xk} = \frac{-(y_{0,k+1} - y_{0k})}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}$$
$$n_{yk} = \frac{x_{0,k+1} - x_{0k}}{\sqrt{(x_{0,k+1} - x_{0k})^2 + (y_{0,k+1} - y_{0k})^2}}$$

На рисунку (1) бачимо вигляд контуру. Синіми хрестами позначені точки дискретних особливостей, з червоних точок колокацій виходять нормалі. Напрям нормалей залежить від напрямку обходу контуру. В цьому випадку, ми починаємо рухатися від лівого верхнього кінця і закінчуємо у правому нижньому.

Тепер розв'яжемо задачу чисельно. Вважаємо, що модуль швидкості $|\vec{V}_\infty| = 1$, тобто $V_\infty = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Для обчислення потенціалу і швидкості в момент часу $t = t_{n+1}$ будемо використовувати наступні формули:

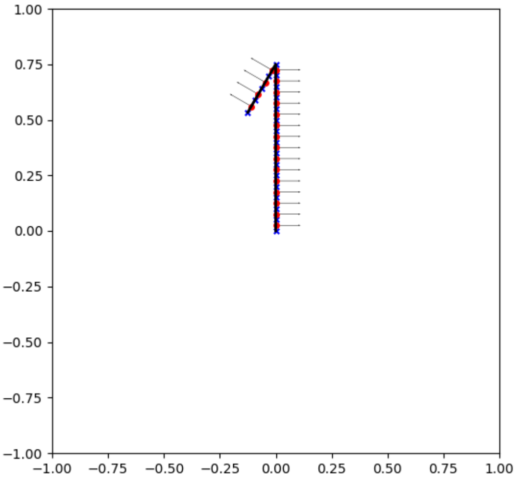

Рис. 1: Вигляд контуру

$$\varphi(x, y, t_{n+1}) = (x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j(t_{n+1})}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_{0j}}{x - x_{0j}}\right)$$
$$+ \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\gamma_i^p}{2\pi} Arctg\left(\frac{y - y_i^p(t_{n+1})}{x - x_i^p(t_{n+1})}\right)$$

$$\vec{V}(x, y, t_{n+1}) = (\cos\alpha, \sin\alpha) + \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1}) \vec{V}(x, y, x_{0j}, y_{0j})$$
$$+ \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \vec{V}(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1}))$$

Перед тим, як почати розв'язувати ці рівняння, введемо декілька величин.

$$R_{0i} = \begin{cases} \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2}, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} > \delta \\ \delta, & \sqrt{(x - x_{0i})^2 + (y - y_{0i})^2} \le \delta \end{cases}$$

$$\vec{V}(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \begin{cases} u(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_{0i} - y}{R_{0i}^2} \\ v(x, y, x_{0i}, y_{0i}) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - x_{0i}}{R_{0i}^2} \end{cases}$$

Для того, щоб знайти коефіцієнти Γ_j необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1}) \left(\vec{V}(x_k, y_k, x_{0j}, y_{0j}) \cdot \vec{n}(x_k, y_k)\right) = -\left[\left(\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}(x_k, y_k)\right)\right. \\ \left. + \sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \left(\vec{V}(x_k, y_k, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \cdot \vec{n}(x_k, y_k)\right)\right], k = \overline{1, M-1} \\ \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1}) = -\sum_p \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i^p \end{cases}$$

Одночасно з цим проходить оновлення точок вихорової границі. Для цього використовуємо метод Ейлера. Тобто $\forall p, i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} x_i^p(t_{n+1}) = x_i^p(t_n) + u(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)\tau_n \\ y_i^p(t_{n+1}) = y_i^p(t_n) + v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)\tau_n \end{cases}$$

де

$$\tau_n = \frac{\min_k \delta_k}{\max_D(|V|)}.$$

На кожному кроці з кінцевих та кутових точок перешкоди вилітають нові вихорові точки. При цьому, вони мають такі властивості:

$$\forall p : \gamma_{n+1}^p = \Gamma_p(t_n);$$

$$\begin{cases} x_{n+1}^p(t_{n+1}) = x_{0p}(t_n) + u(x_{0p}(t_n), y_{0p}(t_n), t_n)\tau_n \\ y_{n+1}^p(t_{n+1}) = y_{0p}(t_n) + v(x_{0p}(t_n), y_{0p}(t_n), t_n)\tau_n \end{cases}$$

2.1 Забезпечення непроникності контуру L_d.

Для забезпечення непроникності контуру необхідно накласти деякі умови. Відстань між двома точками дискретних особливостей повинна бути меньше за 2δ, де δ – константа, що використовується для розрахунку τ. Це дає нам змогу відслідковувати ті вихорові точки, що наблизилися до границі.

Нехай маємо точку дискретної особливості $z_0 = (x_0, y_0)$, до якої наблизилася точка вихорової границі $z_1(t_{n+1}) = (x_i(t_{n+1}), y_i(t_{n+1}))$ на відстань менше 2δ.

Необхідно зрозуміти з якої сторони контуру наблизилася вихорова точка. Тому візьмемо точку $z_1(t_n)$ – точку де була точка $z_1(t_n + 1)$ на минулому кроці, та обрахуємо $\lambda = sign\left((\vec{n_0}, z1(t_n) - z_0)\right)$, де $\vec{n_0}$– нормаль в точці z_0

Тепер можна обрахувати коефіцієнт $k = \lambda|z_0 - z_1|$. Отже змінимо точку $z_1(t_{n+1}) = z_1(t_n) + k\vec{n_0}$.

3 Результати

3.1 Перешкода у вигляді пластинки

Розглянемо результати при $V_\infty = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$.

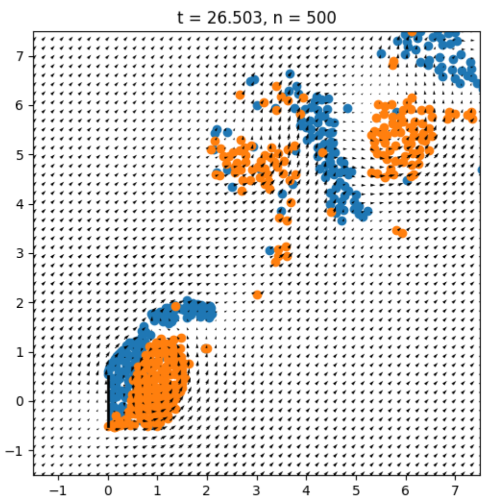

Рис. 2: Результат при швидкості $V_\infty = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$

Розглянемо результати при $V_\infty = 1+0i$. При такій швидкості *"красиві"* вихори виникають пізніше.

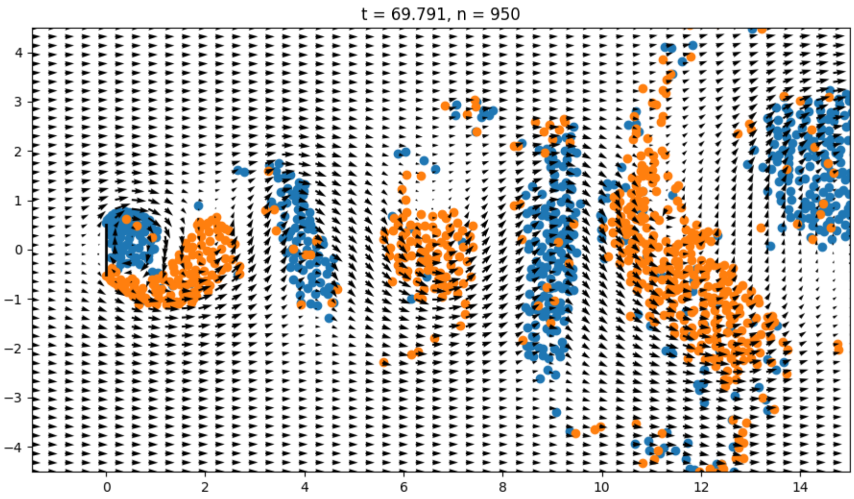

Рис. 3: Результат при швидкості $V_\infty = 1 + 0i$

3.2 Перешкода у вигляді одиниці

Розглянемо результати при $V_\infty = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$.

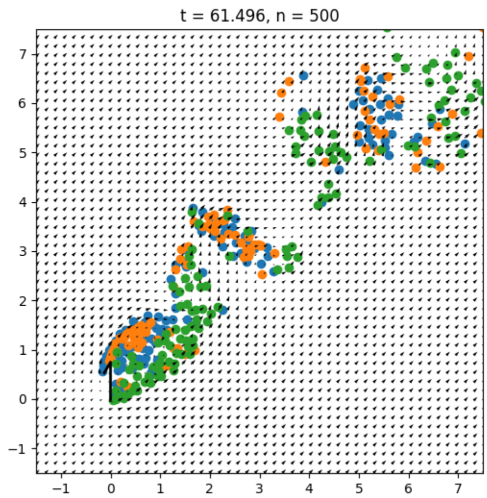

Рис. 4: Результат при швидкості $V_\infty = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$

Розглянемо результати при $V_\infty = 1 + 0i$.

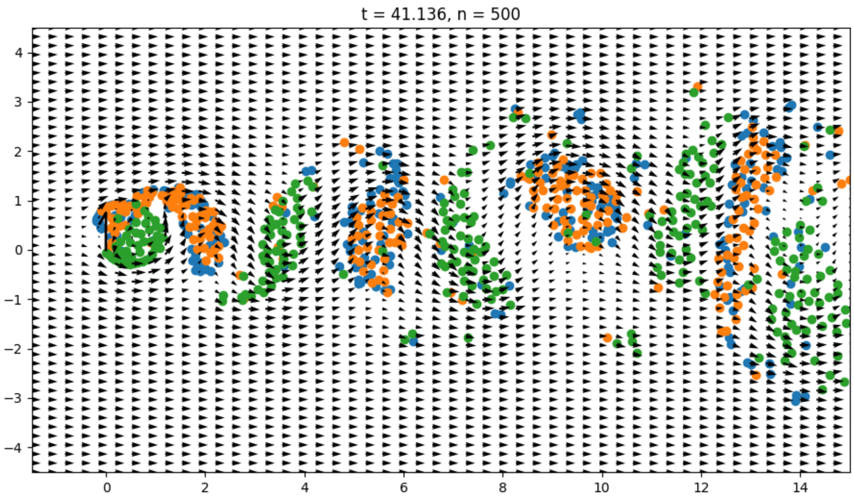

Рис. 5: Результат при швидкості $V_\infty = 1 + 0i$

3.3 Анімації

Щоб переглянути анімації перейдіть за посиланням.

4 Висновок

Було змодельовано задачу обтікання заданого непроникного контура. Для розв'язання даної задачі було використано метод дискретних особливостей. Були отримані анімовані результати. Потрібно зазначити, що реалізація непроникності контуру має помилки, але в модельних задачах вони не впливають на глобальний результат.