Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт
До лабораторної роботи №1
«Розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку методом Скінченних елементів на базі методу Бубнова-Гальоркіна та інтегро-інтерполяційним методом»

Студента 4 курсу
Факультету кібернетики
Групи ОМ-4
Кравця Олексія

Київ, 2019

1. Постановка Задачі

Методом Скінченних елементів і Інтегро-інтерполяційним методом розв'язати граничну задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку, та порівняти результат з вже отриманим результатом роботи методу Бубнова-Гальоркіна.

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + a(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \\ h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0 \\ H_1 y(1) - H_2 y'(1) = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$p(x) = 2 - sin(\pi x) \tag{2}$$
$$a(x) = sin(\pi x) \tag{3}$$
$$q(x) = 5 \tag{4}$$
$$f(x) = 2x^2 + sin(2x) \tag{5}$$
$$h_1 = 0, h_2 = 1 \tag{6}$$
$$H_1 = 1, H_2 = 4 \tag{7}$$

Розв'язати задачу при $N = 50, 100$ двома методами та порівняти результати з попередньою лабораторною роботою.

2. Теоретичні відомості

2.1. Метод Скінченних різниць

Розглянемо систему 1, помножимо диференціальне рівняння на $v(x)$ та проінтегруємо.

$$\int_0^1 \left[-(pu')' + au' + qu\right] v dx = \int_0^1 fv dx \tag{8}$$

Проінтегруємо ліву частину 16 за частинами.

$$\int_0^1 \left[pu'v' + au'v + quv\right] dx - pu'v\Big|_0^1 = \int_0^1 fv dx \tag{9}$$

$$\int_0^1 \left[pu'v' + au'v + quv\right] dx - pu'v\Big|_0^1 = \int_0^1 fv dx \tag{10}$$

Нехай $h_2 \neq 0, H_2 \neq 0$

$$\int_0^1 \left[pu'v' + au'v + quv\right] dx + p(1)u(1)v(1)\frac{H_1}{H_2} + p(0)u(0)v(0)\frac{h_1}{h_2} = \int_0^1 fvdx \quad (11)$$

Виберемо ϕ_i -базисні функції. Побудуємо їх.

Розділимо відрізок $[0,1]$ на N частин. Отримаємо послідовність $\{x_i\}_{i=0}^{N}$. Де

$$x_i = ih, i = \overline{0, N} \quad (12)$$

$$h = \frac{1}{N} \quad (13)$$

Тепер побудуємо функції ϕ_i

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, x \in [x_{i-1}, x] \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (14)$$

$$\phi_0 = \begin{cases} 0, x \geq x_1 \\ \frac{x_i - x}{h}, 0 \leq x < x_1 \end{cases} \quad (15)$$

Розв'язок задачі 1 буде мати вигляд:

$$u \approx u_N = \sum_{i=0}^{N} c_i \phi_i \quad (16)$$

Запишемо задачу у операторному вигляді.

$$(Lu, v) = (f, v) \quad (17)$$

$$u \approx u_N = \sum_{i=1}^{N} (c_i \phi_i) \quad (18)$$

Отже

$$\left(L \sum_{i=1}^{N} (c_i \phi_i), \phi_j \right) = (f, \phi_j), \forall j = \overline{1, N} \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \left(L\phi_i, \phi_j \right) = (f, \phi_j), \forall j = \overline{1, N} \quad (20)$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь $Ac = F$, де $A = [a_{ji}] = [(L\phi_i, \phi_j)], F_j = (f, \phi_j), i, j = \overline{1, N}$ Треба задовольнити головним умовам, в нашому випадку це умови першого типу. Відповідно покладемо $c_0, c_N = 0$, якщо це необхідно.

Помітимо

$$\int_0^1 p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) \neq 0 \tag{21}$$

лише коли $\begin{cases} i = j+1 \\ i = j \end{cases}$

Тому можемо рахувати інтеграли такого вигляду.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x)\phi_i'(x)\phi_{i\pm1}'(x) \tag{22}$$

Також можна помітити, що отримана в результаті матриця буде тридіагональною.

2.2. Інтегро-інтерполяційний метод

Розподілимо $[0, 1]$ на N частин з рівномірним кроком $h = \frac{1}{N}$, де $x_0 = 0$, $x_N = 1$.

Для використання методу перетворимо систему 1 у таку форму:

$$\begin{cases} -(ku')' + qu = f, 0 < x < 1 \\ -ku' + \alpha_1 u = \mu_1, x = 0 \\ ku' + \alpha_2 u = \mu_2, x = 1 \end{cases} \tag{23}$$

Для цього скористаємося формулами:

$$k(x) = -e^{\int \frac{a(x)}{p(x)} dx} \tag{24}$$

$$q(x) = \frac{q(x)}{p(x)} e^{\int \frac{a(x)}{p(x)} dx} \tag{25}$$

$$\alpha_1 = p(0)\frac{h1}{h2}, h2 \neq 0 \tag{26}$$