Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт
До лабораторної роботи №1
«Розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку методом Скінченних елементів на базі методу Бубнова-Гальоркіна»

Студента 4 курсу
Факультету кібернетики
Групи ОМ-4
Кравця Олексія

Київ, 2019

1. Постановка Задачі

Методом Скінченних елементів розв'язати граничну задачу для звичайного диференціального рівняння другого порядку, та порівняти результат з вже отриманим результатом роботи методу Бубнова-Гальоркіна.

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + a(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x) \\ h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0 \\ H_1 y(1) - H_2 y'(1) = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$p(x) = 2 - sin(\pi x) \tag{2}$$
$$a(x) = sin(\pi x) \tag{3}$$
$$q(x) = 5 \tag{4}$$
$$f(x) = 2x^2 + sin(2x) \tag{5}$$
$$h_1 = 0, h_2 = 1 \tag{6}$$
$$H_1 = 1, H_2 = 4 \tag{7}$$

Розв'язати задачу при $N = 50, 100$ та порівняти результати з попередньою лабораторною роботою.

2. Теоретичні відомості

Ідея методу схожа з методом Бубнова-Гальоркіна і відрізняється лише базисом. Розв'язок буде мати вигляд:

$$u \approx u_N = \sum_{i=0}^{N} c_i \phi_i \tag{8}$$

Де ϕ_i - базисні функції. Побудуємо їх.

Розділимо відрізок $[0, 1]$ на N частин. Отримаємо послідовність $\{x_i\}_{i=0}^{N}$. Де

$$x_i = ih, i = \overline{0, N} \tag{9}$$
$$h = \frac{1}{N} \tag{10}$$

Тепер побудуємо функції ϕ_i

$$\phi_i = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, x \in [x_{i-1}, x] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \tag{11}$$

$$\phi_0 = \begin{cases} 0, x \geq x_1 \\ \frac{x_i-x}{h}, 0 \leq x < x_1 \end{cases} \tag{12}$$

Треба задовольнити головним умовам, в нашому випадку це умови першого типу. Відповідно покладемо $c_0, c_N = 0$, якщо це необхідно.

Помітимо

$$\int_0^1 p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x) \neq 0 \tag{13}$$

лише коли $\begin{cases} i = j+1 \\ i = j \end{cases}$

Тому можемо рахувати інтеграли такого вигляду.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x)\phi_i'(x)\phi_{i\pm1}'(x) \tag{14}$$

Також можна помітити, що отримана в результаті матриця буде тридіагональною.