Міністерство освіти та науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт
До лабораторної роботи №3
«Побудова різницевої схеми рівняння теплопровідності»

Студента 4 курсу
Факультету кібернетики
Групи ОМ-4
Кравця Олексія

Київ, 2019

1. Постановка задачі

Визначити час, після якого тепмература в середині мідної кулі діаметром 10см дорівнюватиме $10°C$, якщо поверхня кулі підтримується при нульовій температурі, а початкова температура кулі дорівнює $50°C$. Фізичні характеристики мідної кулі мають $\lambda = 398\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$, $c = 0.38\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, $\rho = 8900\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

2. Теоретична частина

Одновимірне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m k(x,t)\frac{du}{dx}\right) - q(x,t)u + f(x,t), x \in (a,b), t > 0 \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in [a,b] \tag{2}$$

$$\alpha_1 k(a,t)\frac{du(a,t)}{dx} = \beta_1 u(a,t) - \mu_1(t) \tag{3}$$

$$-\alpha_2 k(b,t)\frac{du(b,t)}{dx} = \beta_2 u(b,t) - \mu_2(t) \tag{4}$$

Якщо рівняння розглядається у циліндричних або сферичних координатах $(m = 1, 2)$, то в центрі може додатися умова симетрії

$$\lim_{x\to 0} x^m k\frac{du}{dx} = 0 \tag{5}$$

де $k(x,t), q(x,t), f(x,t), u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ задані функції; $\alpha_k, \beta_k, (k = 1, 2)$ - зажані невід'ємні сталі, причому $0 < k_0 \leq k(x,t) \leq k_1$, $q(x,t) \geq 0$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0, k = 1, 2$, ($k_0, k_1$ - деякі сталі)

Розв'язок на сітці $\{x_i = a + ih, h = \frac{(b-a)}{N}, i = \overline{0,N}\} \times \{t_j = j\tau, \tau = \frac{j}{M}, j = \overline{0,M}\}$ знаходио з різницевої схеми.

$$\widetilde{x_i^m} y_{t,i}^j = \sigma(\widetilde{p_i} y_{\overline{x}}^{j+1})_{x,i} - \sigma\widetilde{x_i^m}\overline{q_i}y_i^{j+1} + (1-\sigma)(\widetilde{p_i}y_{\overline{x}}^j)_{x,i} - (1-\sigma)\widetilde{x_i^m}\overline{q_i}y_i^j + \widetilde{x_i^m}\overline{f_i} \tag{6}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), i = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \sigma\alpha_1\widetilde{p_1}y_{\overline{x},1}^{j+1} + (1-\sigma)\alpha_1\widetilde{p_1}y_{\overline{x},1}^j &= x_0^m\beta_1\sigma y_0^{j+1} + (1-\sigma)\beta_1 x_0^m y_0^j \\ &- x_0^m\overline{\mu_1} + \frac{h}{2}\alpha_1\widetilde{x_0^m}y_{t,0}^j - \frac{h}{2}\alpha_1\widetilde{x_0^m}(\overline{f_0} - \sigma\overline{q_0}y_0^{j+1} + (1-\sigma)\overline{q_0}y_0^j) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\sigma\alpha_2\widetilde{p_N}y_{\overline{x},N}^{j+1} + (1-\sigma)\alpha_2\widetilde{p_N}y_{\overline{x},N}^{j} = x_N^m\beta_2\sigma y_N^{j+1} + (1-\sigma)\beta_2 x_N^m y_N^j$$
$$- x_N^m\overline{\mu_2} + \frac{h}{2}\alpha_2\widetilde{x_N^m}y_{t,N}^j - \frac{h}{2}\alpha_2\widetilde{x_N^m}(\overline{f_N} - \sigma\overline{q_N}y_N^{j+1} + (1-\sigma)\overline{q_N}y_N^j) \quad (9)$$

$$\widetilde{x_0^m} = h^{-1}\int_{x_0}^{x_1} x^m dx \quad (10)$$

$$\widetilde{x_N^m} = h^{-1}\int_{x_{N-1}}^{x_N} x^m dx \quad (11)$$

$$\widetilde{x_i^m} = (2h)^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x^m dx \quad (12)$$

$$\widetilde{p_i} = x_{i-\frac{1}{2}}^m\overline{k_{1-\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

3. Практична частина

Рівняння поставленної задачі:

$$c\rho\frac{du}{dt} = \frac{\lambda}{x^2}\frac{\partial}{\partial}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right), x \in (0, R), t > 0 \tag{14}$$

$$u(x, 0) = 50, x \in [0, R] \tag{15}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0 \tag{16}$$

$$u(R, t) = 0, t > 0 \tag{17}$$

де $R = 0.05$м, $u_{kp} = 50°C$. Введемо безрозмірні змінні

$$\nu(x, t) = \frac{u(x, t) - u_{kp}}{u_{kp}} \tag{18}$$

$$t_1 = \frac{\lambda t}{c\rho R^2} \tag{19}$$

$$x_1 = \frac{x}{R} \tag{20}$$

Отримали задачу відносно $\nu(x_1, t_1)$:

$$\frac{\partial \nu(x, t)}{\partial t_1} = \frac{1}{x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), x_1 \in (0, 1), t_1 > 0 \tag{21}$$

$$\nu(x_1, 0) = \frac{u(x, 0) - u_{kp}}{u_{kp}} = 0, x_1 \in [0, 1] \tag{22}$$

$$\lim_{x_1\to 0} x_1^2\frac{\partial \nu}{\partial x_1} = 0, t > 0 \tag{23}$$

$$\nu(1, t) = \frac{u(R, t) - u_{kp}}{u_{kp}} = -1, t > 0 \tag{24}$$

Умовою зупинки алгоритму буде $\nu(0, t_{end}) = -\frac{4}{5}$, знайдене t_{end} - це відповідь. Застосіємо схему Кранка-Ніколсона $\sigma = 0.5$, з кроками $\tau = 0.001, h = 0.01$.

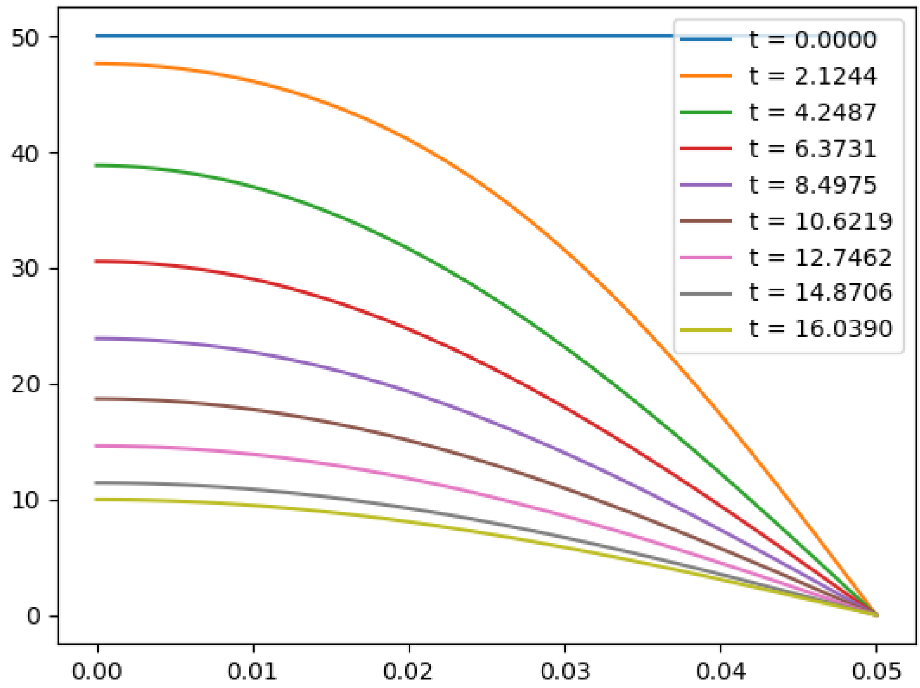

Рис. 1. $\sigma = 0.5, h = 0.01, \tau = 0.001$

Програма виконується за 755 кроків, $t_{end} = 16.0390$ секунд.

4. Практична частина

Будемо розглядати задачу на діаметрі кулі. Рівняння поставленної задачі:

$$c\rho\frac{du}{dt} = \frac{\lambda}{x^2}\frac{\partial}{\partial}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right), x \in (0, R), t > 0 \tag{25}$$

$$u(x, 0) = 50, x \in [0, R] \tag{26}$$

$$u(0, t) = 0, t > 0 \tag{27}$$

$$u(R, t) = 0, t > 0 \tag{28}$$

де $R = 0.1$м, $u_{kp} = 50°C$. Введемо безрозмірні змінні

$$\nu(x, t) = \frac{u(x, t) - u_{kp}}{u_{kp}} \tag{29}$$

$$t_1 = \frac{\lambda t}{c\rho R^2} \tag{30}$$

$$x_1 = \frac{x}{R} \tag{31}$$

Отримали задачу відносно $\nu(x_1, t_1)$:

$$\frac{\partial \nu(x, t)}{\partial t_1} = \frac{1}{x_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), x_1 \in (0, 1), t_1 > 0 \tag{32}$$

$$\nu(x_1, 0) = \frac{u(x, 0) - u_{kp}}{u_{kp}} = 0, x_1 \in [0, 1] \tag{33}$$

$$\nu(0, t) = -1, t > 0 \tag{34}$$

$$\nu(1, t) = \frac{u(R, t) - u_{kp}}{u_{kp}} = -1, t > 0 \tag{35}$$

Умовою зупинки алгоритму буде $\nu(0.5, t_{end}) = -\frac{4}{5}$, знайдене t_{end} - це відповідь.

Застосіємо схему Кранка-Ніколсона $\sigma = 0.5$, з кроками $\tau = 0.001, h = 0.01$. Програма виконується за 189 кроків, $t_{end} = 16.0603$ секунд.

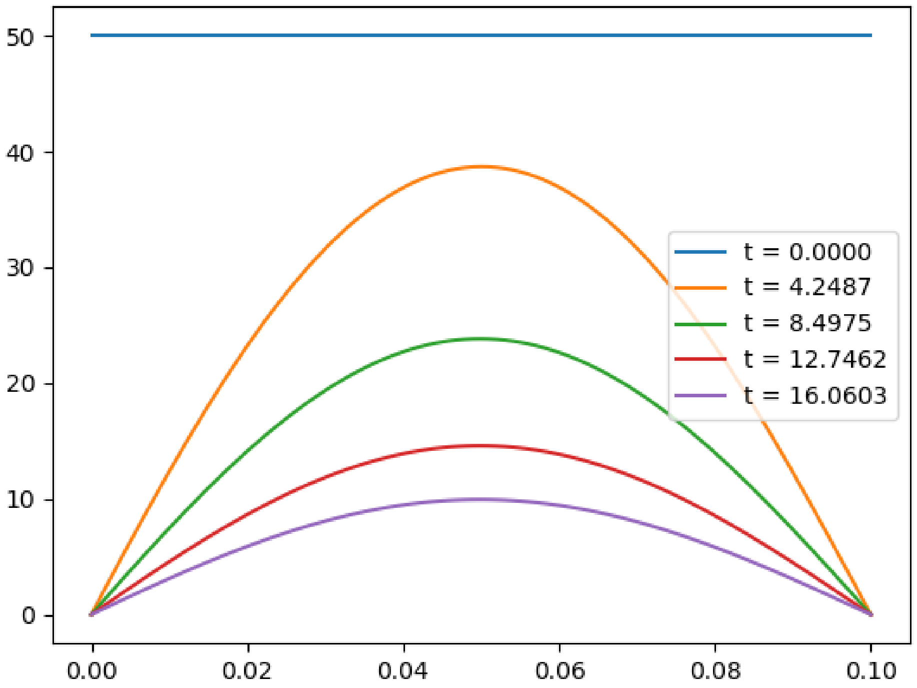

Рис. 2. $\sigma = 0.5, h = 0.01, \tau = 0.001$