Задание 3

Alexandra Babicheva

November 2020

Условие задачи

Подкинули монету N раз. Кол-во случаев, когда выпал орёл, на 10% больше, чем кол-во случаев, когда выпала решка. При каком N мы можем сказать, что монета «нечестная» (орёл и решка выпадают с разной вероятностью)?

Решение

По сути, отвечая на вопрос, честная ли монета согласно результатам серии бросков (независимых эксперимeтов), мы проверяем гипотезу о числовом назначении вероятности биноминального распределения.

Тогда, зная что орел в результате экспериментов выпадал на 10% чаще, чем решка, мы получаем точечную оценку вероятности выпадения орла $w = 0.6$

Очевидно, что если монетка честная, мы должны ожидать выпадения орла с вероятностью $p_0 = 0.5$

Теперь можем сформулировать задачу в терминах проверки гипотезы:

$H_0 : w = p_0$ - нулевая гипотеза, "монета честная"
$H_1 : w \neq p_0$ - альтьернативная гипотеза, "монета нечестная"

Для решения задачи предположим, что количество наблюдений достаточно велико: N>30.

Критерий, используемый для проверки данного вида гипотез следующий:

$$t = \frac{w - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 * (1 - p_0)}{N}}}$$

где N - размер выборки

Получив значение критерия, мы на заданном уровне значимости строим критическоую область и если значение критерия в нее попадает - отвергаем нулевую гипотезу, заключая что монета "нечестная". Таким образом, для решения задачи нам нужно найти такое N, чтобы значение критерия оказалось в критической области при заданном уровне значимости.

Так как в задаче уровень значимости не задан, положим что мы хотим знать "честная"ли монета с уровнем доверия 98%, тогда уровень значимости будет равен $\alpha = 0.02$

Добавляем исходные данные в задачу:

$H_0 : w = 0.5$ - нулевая гипотеза, "монета честная"
$H_1 : w > 0.5$ - альтьернативная гипотеза, "монета нечестная"

$$t_N = \frac{0.6 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5*(1-0.5)}{N}}} = \frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.25}{N}}}$$

При уровне значимости $\alpha = 0.02$, (t_c - критическое значение t, граница критической области):

$$P(t_c < t < +\infty) = 0.02$$
$$P(t_c < t < +\infty) = \Phi_0(+\infty) - \Phi_0(t_c) = 0.5 - \Phi_0(t_c) = 0.02$$
$$\Phi_0(t_c) = 0.48$$
$$t_c \approx 2.04$$

$$t_N = \frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.25}{N}}} \approx 2.04$$
$$\sqrt{\frac{0.25}{N}} \approx \frac{0.1}{2.04}$$
$$\sqrt{\frac{0.25}{N}} \approx 0.049$$
$$\frac{0.25}{N} \approx 0.002$$
$$N \approx \frac{0.25}{0.002}$$
$$N = 125$$