Exercice 1

Étudier la nature de la série de terme général (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^2+n+2+\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.
3. $u_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$
4. $u_n = 2\ln(n^3+1) - 3\ln(n^2+1)$
5. $u_n = n^{-\alpha^2}$
6. $u_n = \dfrac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}$
7. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$.
8. $u_n = \arccos\left(\dfrac{n^3+1}{n^3+2}\right)$.
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

Exercice 2

Etudier la convergence de la série de terme général u_n et calculer sa somme , en cas de convergence.

1. $u_n = na^n$
2. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$.
4. $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.
5. $u_k = \ln\left(1+\dfrac{2}{k(k+3)}\right)$.
6. $u_k = \ln\left(\cos\dfrac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 3

Montrer que la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1 ou (\alpha = 1 et \beta > 1)$

Exercice 4

Etudier la convergence de la série de terme général (x_n) dans les cas suivants :

1. $x_n = -1+\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$.
2. $x_n = sin(\pi\sqrt{n^2+1})$
3. $\sin(\dfrac{(-1)^n}{n})$
4. $x_n = e - (1-\dfrac{1}{n})^n$
5. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\cos(n)}$

Exercice 5 Règle de Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

1. Soit $x_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Montrer que la serie $\sum(x_{n+1}-x_n)$ est convergente
2. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$.
3. Étudier la convergence de $\sum u_n$.
4. **Application :** $u_n = \dfrac{1.2.3....(2n-1)}{2.4.....2n}$

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $nu_n \to 0$. $\left(\text{considérer } \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k\right)$
2. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 7

On pose $u_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 8

1. Soit, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.
   a. Quelle est la limite de u_{n+1}/u_n ?
   b. Montrer que la série de terme général nu_n est croissante. En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
2. Soit, pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$.
   a. Quelle est la limite de v_{n+1}/v_n ?
   b. Montrer que, si $0 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$. En déduire que la série de terme général v_n converge.

Exercice 9

Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi u)}{u+n+1} du$.

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle
2. En déduire la nature de $\displaystyle\sum \int_n^{n+1} \frac{\cos(\pi x)}{1+x} dx$

Exercice 10

Soit $\sum u_n$ une séries à termes strictement positifs et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Si $\sum u_n$ converge , que peut-on dire de la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{s_n}$
2. On suppose que $\sum u_n$ est divergente .
   a. Soientt $m > p$ dans $\mathbb{N}$ .Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{m} \frac{u_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_p}{s_m}$. Que peut-on déduire pour $\displaystyle\sum \frac{u_n}{s_n}$
   b. prouver que pour tout $n \geq 1$ $\dfrac{1}{s_{n-1}} - \dfrac{1}{s_n} \geq \dfrac{u_n}{(s_n)^2}$
   c. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{(s_n)^2}$ converge

Exercice 11

vérifier que $\dfrac{1}{n\ln(n)} \sim (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)))$ quand n tend ver $+\infty$. En déduire un équivalent simple de la somme $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$

Exercice 12

1. En comparant avec une intégrale , montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ et que $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$
2. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$
   a. Etudier la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$
   b. En déduire que (u_n) converge vers une réel γ appelé constante gamma d'Euler.
3. On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma$
   a. Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{-1}{2n^2}$
   b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice 13

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire que $\sum u_n^2$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de u_0.
3. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + 1 + u_n + O(u_n^2)$. Déduire un équivalent de $(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n})_n$
4. En appliquant la sommation des relations de comparaisons montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$
5. étudier suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de la série $\sum u_n^\alpha$.

Exercice 14

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Trouver deux réels α et l tels que $u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha + l + o(1)$.
3. En déduire un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser la nature de $\sum u_n$.

Exercice 15 d'après CNC 2009

Si α est un réel et n un entier naturel, on pose $\quad C_\alpha^n = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad$ si $\quad n \geq 1 \quad$ et $\quad C_\alpha^0 = 1$.

A. Une relation entre coefficients binomiaux

1. Soient n et m deux entiers naturels avec $n \leqslant m$; montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_m^p C_m^{n-p} = C_{2m}^n$.
2. Soit n un entier naturel.
   a. Vérifier que l'application $\alpha \mapsto C_{2\alpha}^n - \displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_\alpha^p C_\alpha^{n-p}$ est polynomiale puis en donner des zéros.
   b. Montrer alors que pour tout réel α, $C_{2\alpha}^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_\alpha^p C_\alpha^{n-p}$.

B. Recherche d'un équivalent

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + w_n$$
où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série absolument convergente. Étudier la suite $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel **strictement positif**.
2. Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs et γ un réel tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{\gamma}{n} + w'_n$$
où $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le terme général d'une série absolument convergente .
   a. Étudier la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que $b_n \sim \dfrac{\ell}{n^\gamma}$.
   b. Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = (-1)^{n-1} C_{1/2}^n$.
   a. Montrer que $c_n > 0$
   b. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2n-1}{2(n+1)}$.
   c. Établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $C_{1/2}^n \sim C\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.