2024-2025

iTeam University
Mathématiques pour l'ingénieur
TD : Séries Numériques

Exercice 1

Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum \frac{3^n}{n};\quad \sum ne^{\frac{1}{n}} - n;\quad \sum (1-\frac{1}{n})^n;\quad \sum (e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+a}})\ a>0$$

$$\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}};\quad \sum \frac{1}{n\cos^2 n};\quad \sum \frac{1}{(\ln n)^n};\quad \sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right);\quad \sum \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}};$$

$$\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}\ a\in\mathbb{R}_+^*;\quad \sum \frac{n+\cos(n)}{e^n+\sin(n)};\quad \sum \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}};\quad \sum \frac{n^2}{(1+\delta)^n},\ |\delta|<\frac{1}{2}$$

$$\sum (\cos(n)+\sin(n))\,e^{-n};\quad \sum e^{1/n} - (\cos(1/n)+\sin(1/n))\,;\quad \sum 3^{1/n} - 2^{1/n};\quad \sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{a}{k}\right),\quad a\in\mathbb{R}_+\setminus\{n\pi,\ \ n\in\mathbb{N}\}.$$

1. On suppose que $a\neq 1$. En étudiant la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ préciser :
   (a) La nature de la série $\sum u_n$.
   (b) la nature de la suite u_n.
2. Si $a_n = \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$.
3. Plaçons nous dans le cas où $a=1$. Donner alors la nature de la suite $\ln(u_n)$, et en déduire la nature de la suite (u_n).

Exercice 3

On considère la série numérique

$$\sum \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}.$$

1. Étudier la nature de cette série.

2. Établir le résultat

$$\frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)} = \frac{2\times 2^k-3^k}{(3^k-2^k)} = \frac{2\times 2^{k+1}-3^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})}$$

3. En déduire la somme de la série.

Exercice 4

Dans cet exercice, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } u_n = S_{n-1} - \ln n.$$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $x_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.
   (a) Faire un développement limité de x_n à l'ordre 2.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum x_n$?
2. (a) Calculer $u_{n+1} - u_n$.
   (b) En déduire la convergence de la suite (u_n), puis un équivalent de S_n.