

M2 Ingénierie et Finance

Options vanille par une méthode de différences finies

Pedro Ferreira
Vincent Torri

27 septembre 2022

On cherche à calculer les prix d'options vanille à exercice européen ou américain utilisant une méthode numérique de résolution de l'équation aux dérivées partielles de Black–Scholes. Les calculs numériques doivent impérativement être effectués avec le langage C++. L'interface utilisateur est à réaliser en Excel.

Entrées

1. Le type de contrat : call ou put.
2. Le type d'exercice : européen ou américain.
3. La maturité de l'option.
4. Le prix d'exercice (strike) de l'option.
5. La date de calcul, si non renseignée on suppose la date du jour.
6. Les paramètres de discrétisation en temps.
7. Les paramètres de discrétisation en spot.
8. Le prix actuel de l'action sous-jacente S_0 .
9. Le taux d'intérêt sans risque, une fonction linéaire par morceaux représentée par des paires $(t_k, r(t_k))$, où $T_0 \leq t_k \leq T$ et $r(t_k)$ est le taux sans risque à la date t_k .
10. La volatilité σ .

Méthode de calcul

On utilisera un schéma aux différences finies de Cranck–Nicolson.

Validations

Pour la validation des résultats on utilisera la formule de Black–Scholes pour comparer les résultats de la méthode numérique à la solution explicite. On vérifiera les cas où l'exercice américain est équivalent à l'exercice européen : call avec $r > 0$ et put avec $r < 0$.

Sorties

Soit $P(S, t, r, \sigma)$ le prix de l'option. Votre code doit calculer les sorties suivantes :

1. Le prix théorique de l'option : P .
2. Le Δ de l'option : $\frac{\partial P}{\partial S}$.
3. Le Γ de l'option : $\frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$.
4. Le Θ de l'option : $\frac{\partial P}{\partial t}$.
5. Le ρ de l'option : $\frac{\partial P}{\partial r}$.
6. Le vega de l'option : $\frac{\partial P}{\partial \sigma}$.
7. Un graphique du prix $P(S, T_0)$ de l'option en fonction du prix de l'action sous-jacente à la date de calcul T_0 .
8. Un graphique de $\Delta(S, T_0)$ de l'option en fonction du prix de l'action sous-jacente à la date de calcul T_0 .
9. Un graphique de la frontière d'exercice de l'option américaine à un instant donné.

Références

- [1] Grégoire Allaire et Sidi Mahmoud Kaber *Algèbre linéaire numérique - Cours et exercices*, Ellipses, 2002
- [2] Stéphane Crepey *Financial Modeling*, Springer, 2013.
- [3] Gene Golub and Charles Van Loan *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 2013
- [4] Pagès Gilles *Numerical Probability - An Introduction with Applications to Finance*, Springer, 2018.
- [5] Paul Wilmott, *Mathematics of Financial Derivatives : a Student Introduction*, Willey, 1995.