

# XVA Project: GPR for Derivative Portfolio Modeling and Application to CVA Computations

**Rapport final**

Submitted by:

**Alaa Bouattour**

M2QF

April 17, 2025



# Contents

<b>1</b>	<b>Définition du problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Approximation du pricing 1D par Processus Gaussien (Notebook 1)</b>	<b>2</b>
2.1	Problématique et cadre simplifié . . . . .	2
2.2	Principe théorique du GP . . . . .	2
2.3	Méthodes de sélection des points d'entraînement . . . . .	3
2.4	Résultats : Call, Put et Straddle . . . . .	3
2.4.1	Prédiction du Call . . . . .	3
2.4.2	Prédiction du Put . . . . .	4
2.4.3	Straddle = Call + Put . . . . .	4
2.5	Limites de l'approche . . . . .	5
2.6	Conclusion de l'exemple 1D . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Vers les GPs multi-sortie (Notebook 2)</b>	<b>5</b>
3.1	Motivation : au-delà des GPs mono-sortie . . . . .	5
3.2	Principe théorique du Multi-output GP . . . . .	5
3.3	Expérience exploratoire : structure d'erreur et corrélations entre sorties . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Application au calcul de la CVA (Notebook 3)</b>	<b>8</b>
4.1	Simulation des facteurs de marché et modélisation du portefeuille . . . . .	8
4.2	Modélisation du risque de défaut et cadre mathématique de la CVA . . . . .	8
4.3	Calcul de la CVA par simulation directe (baseline) . . . . .	9
4.3.1	Analyse préalable : expositions et distribution des défauts . . . . .	9
4.3.2	Formule approchée (analytique) . . . . .	10
4.3.3	Formule par Monte Carlo (réévaluation directe) . . . . .	10
4.4	Application du modèle MGP au calcul de la CVA . . . . .	11
4.4.1	Objectif de l'approche par MGP . . . . .	11
4.4.2	Construction du jeu d'entraînement par LHS . . . . .	11
4.4.3	Entraînement et prédiction du MGP . . . . .	12
4.4.4	Résultats CVA et précision du modèle . . . . .	12
4.4.5	Analyse de l'erreur sur l'exposition (EPE) . . . . .	12
4.4.6	Schéma récapitulatif de la méthodologie . . . . .	13
4.5	Synthèse des résultats numériques . . . . .	14
4.6	Analyse a posteriori du modèle MGP . . . . .	14
4.6.1	Analyse de la matrice de covariance inter-tâches $\Omega$ . . . . .	14
4.7	Calcul des sensibilités (Greeks) . . . . .	15
4.8	Perspectives . . . . .	15

# 1 Définition du problème

On souhaite **calculer la CVA (Credit Valuation Adjustment)** d'un portefeuille de produits dérivés, en tenant compte du **risque de défaut** de la contrepartie, et cela au moindre coût de calcul.

En pratique, la méthode classique pour évaluer la CVA consiste à :

1. **Simuler** un grand nombre de scénarios de marché (évolution de la sous-jacente, des taux, etc.) jusqu'à l'échéance  $T$ .
2. **Réévaluer** le portefeuille de dérivés à chaque pas de temps et dans chaque scénario, afin d'obtenir l'**exposition** (la valeur positive du portefeuille).
3. **Intégrer** l'exposition au risque de défaut, via un modèle d'intensité ou des probabilités de défaut bootstrapées, pour calculer la **perte espérée** liée au défaut.

Le **problème** : cette approche peut devenir *extrêmement coûteuse* en temps de calcul, car chaque scénario nécessite une réévaluation complète du portefeuille (souvent en recourant à des pricers sophistiqués).

**Objectif** : Remplacer la réévaluation brute dans chaque scénario par un *métamodèle*, c'est-à-dire un **Processus Gaussien (GP)**, entraîné au préalable *hors-ligne*, qui saura **approximer la valeur du portefeuille** de manière rapide et contrôlée.

## 2 Approximation du pricing 1D par Processus Gaussien (Notebook 1)

### 2.1 Problématique et cadre simplifié

Dans ce premier exemple, on considère un portefeuille composé d'un seul produit : un call, un put, ou leur combinaison (straddle). On se place dans le modèle Black-Scholes avec les paramètres fixes suivants :  $r = 1\%$ ,  $\sigma = 20\%$ ,  $T = 1$  an,  $K = 100$ . Seule la variable  $S$  (prix du sous-jacent) varie sur l'intervalle  $[50, 150]$ .

L'objectif est de reconstruire la fonction  $S \mapsto \text{Prix}(S)$  à l'aide d'un **GP entraîné sur un petit nombre de points** (ici on a choisi 5 points), et de comparer sa précision aux valeurs exactes obtenues via la formule de Black-Scholes. Cet exemple est une simple illustration parce qu'une formule exacte existe déjà.

### 2.2 Principe théorique du GP

Un GP est un modèle de régression bayésienne non paramétrique défini comme une distribution gaussienne sur les fonctions :

$$f \sim \mathcal{GP}(\mu(\cdot), k(\cdot, \cdot))$$

où  $k$  est un noyau (souvent de type RBF) contrôlant la corrélation entre les points. Pour une nouvelle entrée  $x^*$ , la prédiction suit :

$$\hat{f}(x^*) = k(x^*, X)[k(X, X) + \alpha I]^{-1}Y$$

où  $X$  et  $Y$  sont les données d'entraînement. L'hyperparamètre  $\alpha$  joue le rôle de bruit : en le prenant très petit, on force le GP à interpoler les points.

Les hyperparamètres du noyau (longueur d'échelle, amplitude) sont déterminés en maximisant la log-vraisemblance marginale, ce qui peut conduire à des fonctions très lissées si les points sont peu informatifs.

## 2.3 Méthodes de sélection des points d'entraînement

On a testé trois méthodes différentes pour choisir les  $n = 5$  points d'entraînement du GP :

(i) **Grille uniforme :**

Générée par `np.linspace(50, 150, n)`. Permet une couverture homogène, mais n'adapte pas la densité aux variations locales de la fonction.

(ii) **Grille aléatoire :**

Points échantillonnés par `np.random.uniform(50, 150, n)`. Très flexible, mais peut donner des résultats catastrophiques si les points sont mal répartis.

(iii) **Grille dense autour du strike :**

Utilise une loi de probabilité centrée sur le strike  $K = 100$ . Dans le code, on a implémenté une version simple où on utilise une répartition uniforme dans une fenêtre  $[K - 20, K + 20]$ .

## 2.4 Résultats : Call, Put et Straddle

### 2.4.1 Prédiction du Call

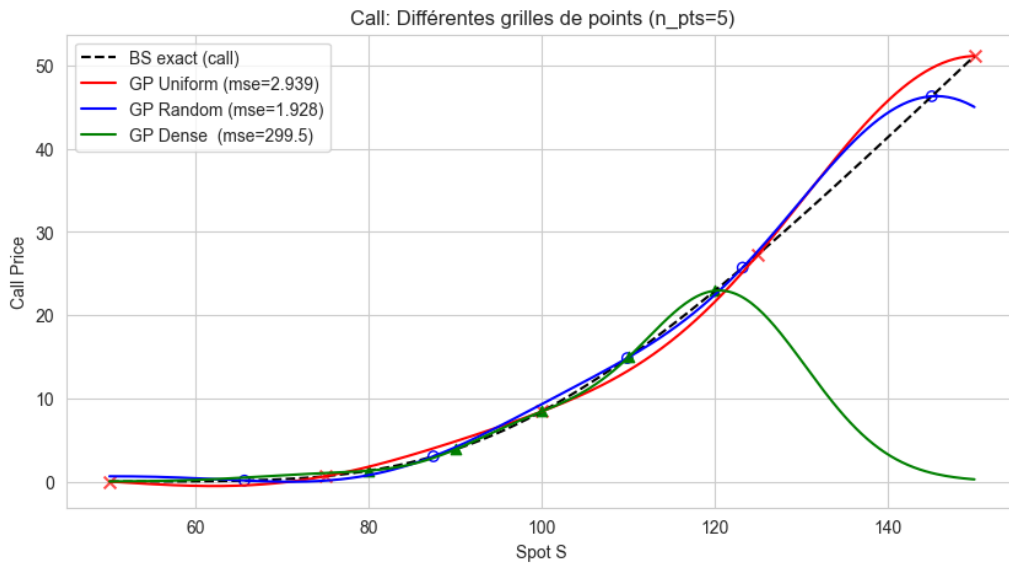


Figure 1: Prédiction du prix du Call avec différentes grilles de 5 points.

On constate que la grille aléatoire obtient ici la meilleure approximation ( $MSE = 1,93$ ), suivie de la grille uniforme. En revanche, la grille dense échoue, car les points sont trop concentrés autour du strike  $K$ , ce qui perturbe l'extrapolation dans les zones éloignées.

Ce premier résultat met en évidence un point fondamental pour la suite de cette étude : **la répartition des points d'entraînement est un facteur critique de performance**. Ce constat est d'ailleurs abordé dans l'article de référence, qui insiste sur l'importance d'un maillage pertinent pour les portefeuilles complexes.

**Remarque :** dans ce test, le choix a été fait de n'utiliser que cinq points d'entraînement afin de *pousser le modèle à ses limites*. Il aurait bien entendu été possible d'améliorer la MSE en augmentant le nombre de points, mais cela ne constituait pas l'objectif ici.

### 2.4.2 Prédiction du Put

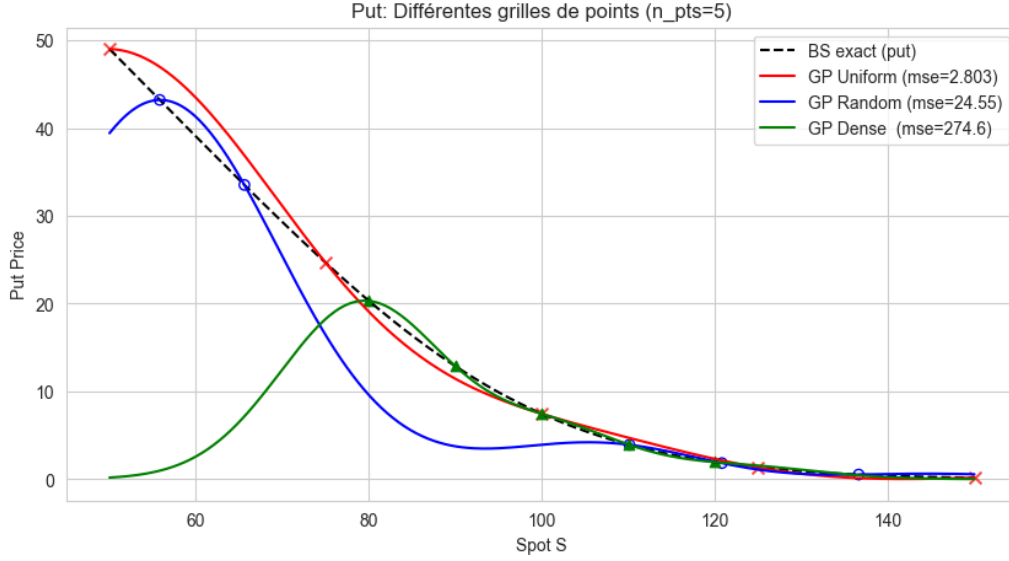


Figure 2: Prédiction du prix du Put selon les mêmes grilles.

Pour le put, la grille uniforme donne les meilleurs résultats. En effet, les grilles aléatoire et dense sont ici mal réparties, notamment en étant trop éloignées du strike, ce qui nuit à la qualité de l'approximation.

### 2.4.3 Straddle = Call + Put

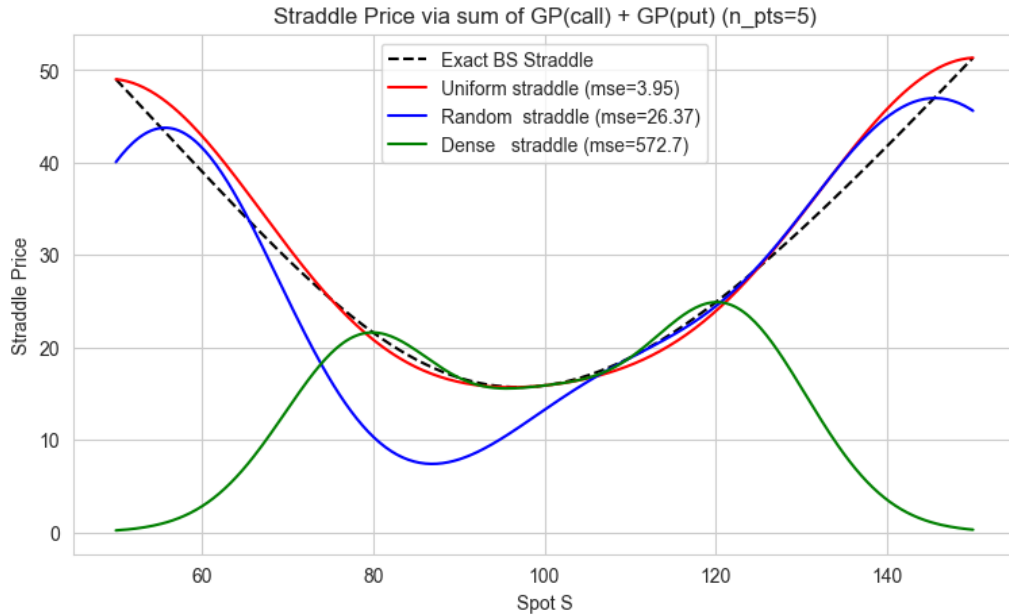


Figure 3: Approximation d'un straddle (call + put) par somme des deux GPs.

Cette expérience montre qu'il est possible d'approximer la valeur d'un portefeuille comme une **somme linéaire** de prédictions issues de plusieurs GPs, sans avoir besoin d'entraîner un nouveau modèle global. Cette approche fonctionne particulièrement bien lorsque chaque GP individuel est suffisamment précis.

Dans ce cas simple, la grille uniforme s'avère à nouveau la plus performante. Cependant, dans des configurations plus complexes, nécessitant un plus grand nombre de points d'entraînement, une répartition uniforme peut ne plus être optimale. Il est alors envisageable que des grilles aléatoires ou densifiées autour de certaines zones (par exemple là où la volatilité est plus élevée) offrent de meilleures performances, en concentrant les points dans les régions les plus informatives du domaine.

## 2.5 Limites de l'approche

- **Extrapolation non fiable** : en dehors des points d'entraînement, la prédiction retourne vers la moyenne, ce qui est faux pour un call linéaire en  $S$  à la monnaie.
- **Interpolation non garantie** : même avec un  $\alpha$  très faible, le GP ne passe pas exactement par les points sauf si on fixe manuellement les hyperparamètres.

## 2.6 Conclusion de l'exemple 1D

Ce premier test simple nous a permis de :

- **Valider la pertinence** des processus gaussiens comme métamodèle de pricing.
- Identifier le **rôle critique de la grille de points** dans la qualité de l'interpolation.

# 3 Vers les GPs multi-sortie (Notebook 2)

## 3.1 Motivation : au-delà des GPs mono-sortie

L'exemple précédent a montré qu'il est possible d'approximer séparément les fonctions de prix du call et du put, puis d'en déduire le prix du straddle comme somme des deux prédictions. Toutefois, cette approche suppose l'entraînement de plusieurs modèles indépendants, ce qui :

- Ne prend pas en compte les **corrélations** entre les produits ;
- Peut devenir coûteux si le portefeuille contient un grand nombre de produits ;
- Ne donne **aucune information sur la variance conjointe** des erreurs de prédiction.

Dans un contexte de valorisation de portefeuille ou de calcul d'exposition, ces limitations peuvent être critiques. Cela motive le recours aux **Processus Gaussiens multi-sortie (MGP)** : une extension naturelle des GPs permettant de modéliser plusieurs fonctions corrélées simultanément.

## 3.2 Principe théorique du Multi-output GP

Un **Multi-output Gaussian Process (MGP)** est un processus gaussien vectoriel, c'est-à-dire une famille de fonctions aléatoires corrélées :

$$\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^d, \quad \text{avec} \quad \mathbf{f} \sim \mathcal{GP}(\boldsymbol{\mu}(x), \mathbf{K}(x, x'))$$

Le noyau matriciel  $\mathbf{K}(x, x')$  encode à la fois :

- la dépendance spatiale entre les entrées  $x, x' \in \mathbb{R}^p$  via un noyau scalaire  $k(x, x')$  ;

- la dépendance entre les différentes sorties  $f_1, \dots, f_d$  via une matrice  $\Omega \in \mathbb{R}^{d \times d}$ .

Ce modèle adopte une structure **séparable** pour la covariance :

$$\text{Cov}[\mathbf{f}(x), \mathbf{f}(x')] = k(x, x') \cdot \Omega$$

où le produit est un produit scalaire-matrice.

En notant  $x_1, \dots, x_n$  les entrées du jeu de données, la variable aléatoire :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(x_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nd}$$

suit une loi gaussienne de moyenne  $\boldsymbol{\mu}$  et de covariance :

$$\text{Cov}[\mathbf{f}] = K_X \otimes \Omega$$

où :

- $K_X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice de Gram entre les entrées selon  $k$  ;
- $\Omega \in \mathbb{R}^{d \times d}$  est la matrice de covariance inter-sortie ;
- $\otimes$  désigne le produit de Kronecker.

Cette structure permet d'exploiter la corrélation entre les différentes fonctions à estimer, tout en conservant une formulation matricielle exploitable numériquement.

### 3.3 Expérience exploratoire : structure d'erreur et corrélations entre sorties

Afin d'illustrer l'intérêt des GPs multi-sortie (MGP), nous avons mené deux expériences complémentaires centrées sur la modélisation conjointe des prix de Call et de Put. Ces expériences visent à évaluer la capacité du MGP à capturer les relations entre sorties, ainsi qu'à analyser la structure d'erreur induite par ce type de modèle.

**Expérience 1 – Modélisation d'un straddle.** Nous avons entraîné un MGP sur un ensemble fixe de points d'entraînement pour approximer conjointement les prix du Call et du Put. À partir de ces prédictions, nous avons reconstruit le prix du Straddle en sommant les deux sorties.

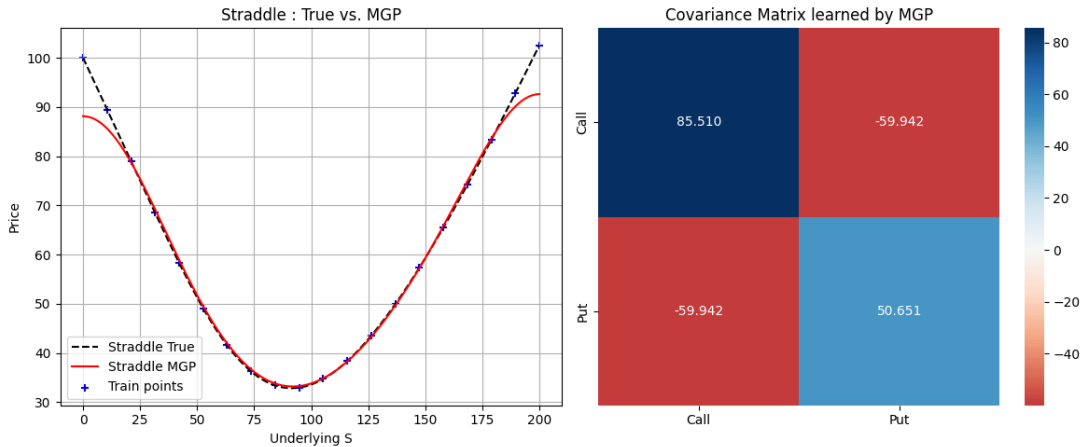


Figure 4: À gauche : prédiction du prix du straddle via MGP ; à droite : matrice de covariance inter-sortie  $\Omega$  estimée par le modèle

- Le modèle MGP parvient à approcher fidèlement le prix du straddle, ce qui montre que la somme des prédictions est cohérente avec la structure réelle.
- La matrice de covariance  $\Omega$  apprise par le modèle présente une **forte corrélation négative** entre Call et Put ( $\Omega_{1,2} \approx -60$ ), illustrant l'existence d'un lien structurel entre ces deux produits dérivés.

**Expérience 2 – Analyse dynamique des erreurs.** Dans un second temps, nous avons répété l'entraînement du MGP pour des tailles de jeu d'entraînement croissantes. À chaque itération, nous avons :

- calculé la MSE sur les prédictions du Call, du Put et du Straddle ;
- estimé la covariance empirique entre les erreurs de prédiction du Call et du Put.

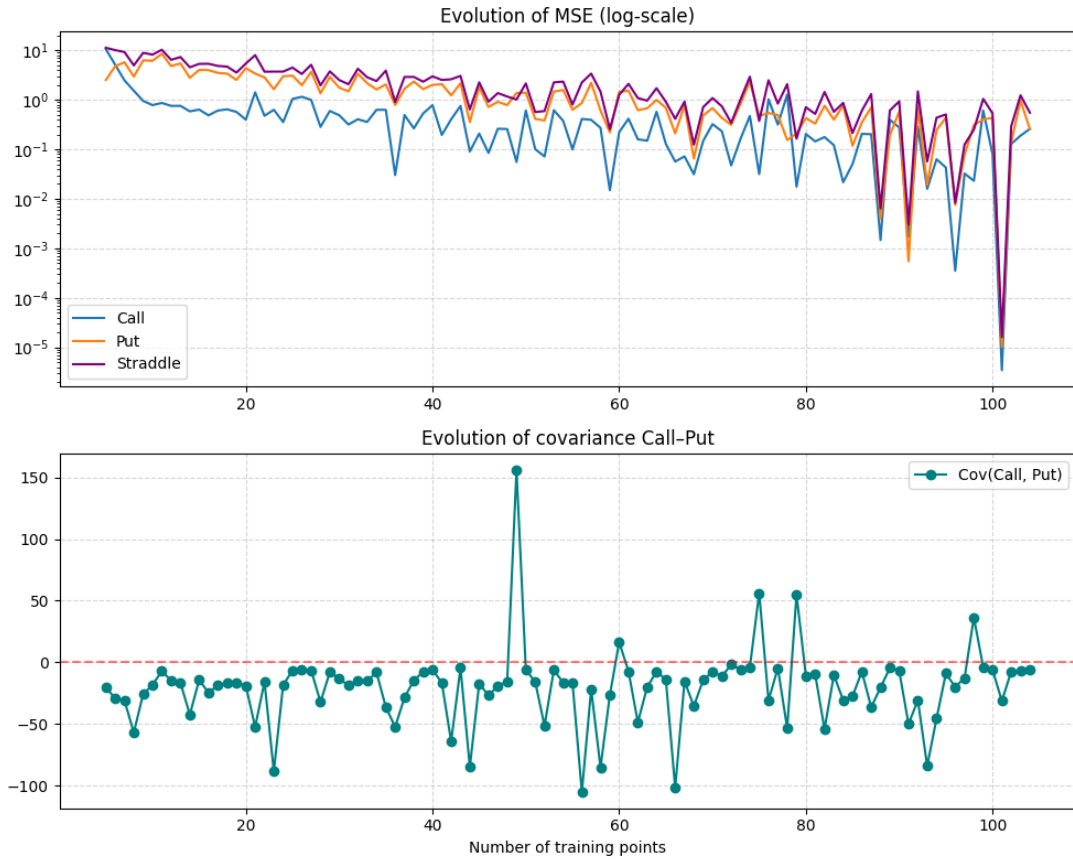


Figure 5: Évolution de la MSE (log-échelle) et de la covariance des erreurs Call-Put en fonction du nombre de points d'entraînement

Les résultats montrent que :

- la MSE diminue progressivement pour les trois produits, validant l'apprentissage du modèle ;
- la **covariance entre erreurs** est majoritairement **négative**, confirmant la tendance observée dans l'expérience 1 ;
- cependant, des épisodes transitoires de **covariance positive** apparaissent, notamment autour de 55–60 points d'entraînement. Cela peut indiquer un changement temporaire dans la structure d'apprentissage du modèle, une répartition atypique des données ou une instabilité locale.



**Conclusion.** Ces deux expériences soulignent la pertinence de l'approche multi-sortie pour modéliser conjointement des produits dérivés liés. Le MGP permet non seulement une meilleure gestion des interdépendances entre sorties, mais également une estimation directe de la covariance des erreurs, précieuse dans des applications telles que la gestion du risque, la CVA ou la simulation de portefeuilles.

## 4 Application au calcul de la CVA (Notebook 3)

Cette section se focalise sur l'application de la modélisation par processus gaussien à la quantification du risque de contrepartie. Après avoir introduit dans la partie précédente du projet un modèle de Gaussian Process Multitâche (MGP) pour approximer les valeurs de produits financiers à partir des facteurs de marché (dans le cas d'un straddle), nous cherchons ici à appliquer ces techniques dans le cadre du calcul de la Credit Valuation Adjustment (CVA). Cette correction de valorisation permet d'intégrer le risque de défaut du contrepartie dans la valeur d'un portefeuille de dérivés.

Nous commençons par construire un référentiel de simulation complet (trajectoires de marché, intensités de défaut, expositions), que nous utilisons ensuite pour deux approches :

1. une méthode directe de calcul de la CVA par réévaluation brute (baseline Monte Carlo),
2. une approche par métamodélisation (GP), exposée dans la partie suivante.

### 4.1 Simulation des facteurs de marché et modélisation du portefeuille

**Portefeuille simulé** Le portefeuille considéré comprend trois produits :

- D1 : un call européen sur  $S_1$  avec strike  $K_1 = 100$  ;
- D2 : un put européen sur  $S_2$  avec strike  $K_2 = 120$  ;
- D3 : une option d'échange (Margrabe) entre  $S_1$  et  $S_2$ .

Chaque instrument est valorisé par une formule fermée (Black-Scholes ou Margrabe), ce qui permet d'obtenir une vérité de terrain pour l'exposition.

**Facteurs de marché simulés** Les sous-jacents  $S_1$ ,  $S_2$  et le taux de change  $R_{FX}$  suivent des dynamiques de type géométrique brownienne (GBM) avec corrélations croisées. On simule  $M = 4000$  trajectoires mensuelles sur  $T = 1$  an. La matrice de corrélation utilisée est :

$$\text{Cov} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{1R} \\ \rho_{12} & 1 & \rho_{2R} \\ \rho_{1R} & \rho_{2R} & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_{12} = 0.6, \quad \rho_{1R} = 0.4, \quad \rho_{2R} = 0.35.$$

### 4.2 Modélisation du risque de défaut et cadre mathématique de la CVA

**Modèle de défaut (Cox)** Le défaut est modélisé via un processus de Cox avec intensité stochastique dépendant de  $S_1$  :

$$\gamma_t = \gamma_0 \left( \frac{S_{1,0}}{S_1(t)} \right)^\eta$$

Cette intensité augmente lorsque  $S_1$  diminue, ce qui modélise un risque de défaut wrong-way. Le temps de défaut  $\tau$  est simulé comme le premier instant où l'intégrale de  $\gamma_t$  dépasse un seuil aléatoire tiré de  $-\log U$  ( $U$  est uniforme sur  $[0, 1]$ ).

**Formule de la CVA** La CVA théorique s'écrit :

$$\text{CVA}_0 = (1 - R) \cdot \mathbb{E} \left[ \int_0^T \beta(t) \cdot \pi^+(t, X_t) dD_t \right]$$

avec ici  $\beta(t) = e^{-rt}$  et  $\pi^+(t, X_t)$  l'exposition positive du portefeuille.

### Paramètres utilisés

- Intensité :  $\gamma_0 = 0.2$ ,  $\eta = 1.3$  (WWR)
- Taux de recouvrement :  $R = 0.4$  et  $LGD = 1 - R = 0.6$
- Taux d'actualisation :  $r = 1\%$

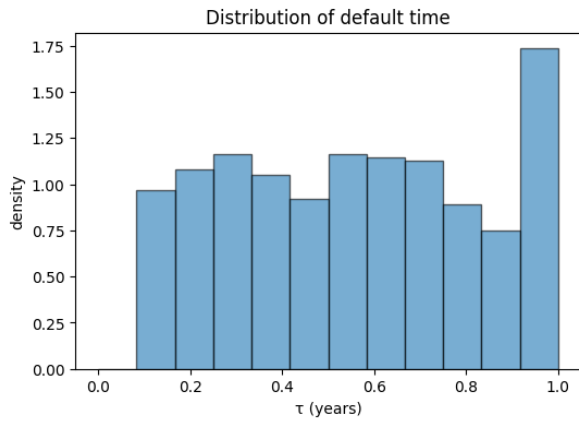
### 4.3 Calcul de la CVA par simulation directe (baseline)

Nous mettons en œuvre deux méthodes pour approximer la CVA en utilisant les trajectoires simulées du portefeuille et les temps de défaut associés. Cette approche sert de référence pour évaluer la pertinence de l'approximation par métamodèle (GP) que nous introduirons ensuite.

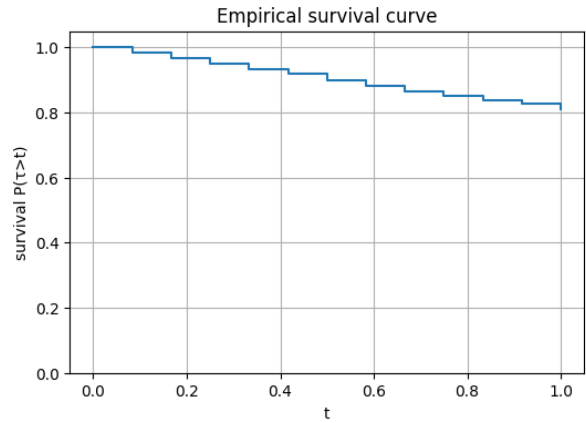
#### 4.3.1 Analyse préalable : expositions et distribution des défauts

Avant de calculer la CVA, il est utile de comprendre deux grandeurs clés :

- **Exposition positive moyenne (EPE)** : moyenne des expositions positives du portefeuille au cours du temps. Elle reflète l'ampleur du risque de crédit potentiel. Voir graphe 7.
- **Distribution des temps de défaut** : densité empirique de  $\tau$  simulée sous le modèle de Cox. Elle met en évidence les périodes où les défauts sont les plus probables. Voir graphe 6a.



(a) Distribution empirique des temps de défaut ( $\tau$ )



(b) Courbe de survie empirique :  $\mathbb{P}(\tau > t)$

Figure 6: Analyse des temps de défaut : histogramme et courbe de survie

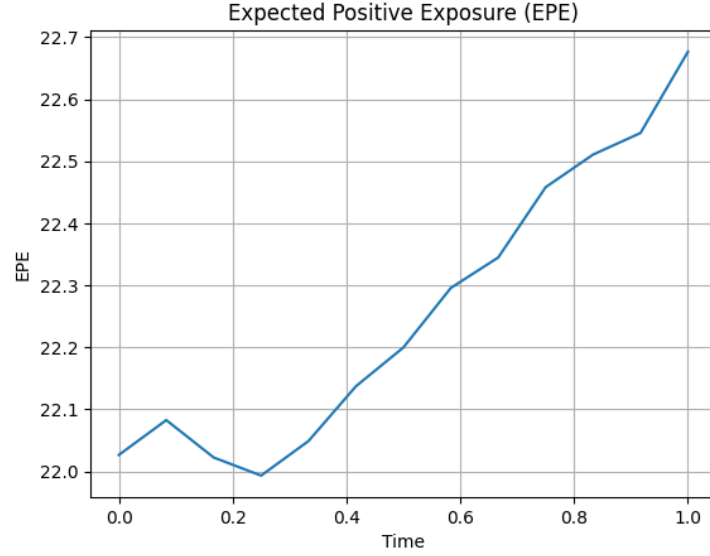


Figure 7: Profil de l'exposition positive moyenne (EPE)

#### 4.3.2 Formule approchée (analytique)

Cette méthode repose sur une simplification de la définition de la CVA : on suppose que l'exposition moyenne  $\mathbb{E}[\pi^+]$  est représentative sur toute la période. On multiplie ensuite par la probabilité de défaut avant l'échéance :

$$\text{CVA} \approx (1 - R) \cdot \mathbb{E}[\pi^+] \cdot \mathbb{P}(\tau \leq T)$$

**Interprétation** Il s'agit d'une approximation rapide, qui donne un ordre de grandeur, mais ne tient pas compte du moment exact où le défaut a lieu. Elle est utilisable lorsque l'exposition varie peu dans le temps.

#### Résultats :

- EPE moyenne :  $\mathbb{E}[\pi^+] = 22.26$
- Probabilité de défaut avant  $T$  : 17.38%
- CVA approchée : 2.320

#### 4.3.3 Formule par Monte Carlo (réévaluation directe)

Cette méthode suit fidèlement la définition de la CVA. Pour chaque trajectoire  $m$ , on :

- tire un temps de défaut  $\tau_m$ ,
- évalue l'exposition  $\pi^+(\tau_m)$ ,
- applique un facteur d'escompte  $\beta(\tau_m)$ ,
- et moyenne sur toutes les trajectoires :

$$\text{CVA} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (1 - R) \cdot \pi^+(\tau_m) \cdot \beta(\tau_m) \cdot \mathbf{1}_{\tau_m \leq T}$$

**Interprétation** Cette méthode capture précisément le lien entre les scénarios de défaut et les expositions correspondantes. Elle est nécessaire dès qu'on souhaite tenir compte de la structure temporelle ou de la dépendance entre facteurs et défaut (WWR).

**Résultat obtenu :** CVA simulée = 2.263

**Comparaison** Légère sousestimation par rapport à la formule approchée (2.320 vs. 2.263), ce qui reflète la concentration des défauts aux périodes de faible exposition. La formule Monte Carlo, plus fine, est utilisée comme référence pour l'évaluation de la méthode par processus gaussien dans la suite.

La suite consiste à remplacer les réévaluations exactes du portefeuille par une approximation par processus gaussien multitâche (MGP).

## 4.4 Application du modèle MGP au calcul de la CVA

### 4.4.1 Objectif de l'approche par MGP

Après avoir obtenu une estimation de la CVA par réévaluation exacte via les formules fermées (Black-Scholes, Margrabe), nous cherchons à remplacer cette étape par un **métamodèle** basé sur un **Gaussian Process Multitâche (MGP)**. L'objectif est de prédire les prix de portefeuille sur une large grille de scénarios simulés, en utilisant un entraînement sur un nombre limité de points judicieusement choisis.

### 4.4.2 Construction du jeu d'entraînement par LHS

Nous générons 3000 points d'entraînement selon un **plan d'expériences de type Latin Hypercube Sampling (LHS)** dans l'espace  $(t, S_1, S_2)$ . Cette méthode garantit une bonne couverture de l'espace d'entrée, évitant les concentrations ou les lacunes caractéristiques des grilles uniformes.

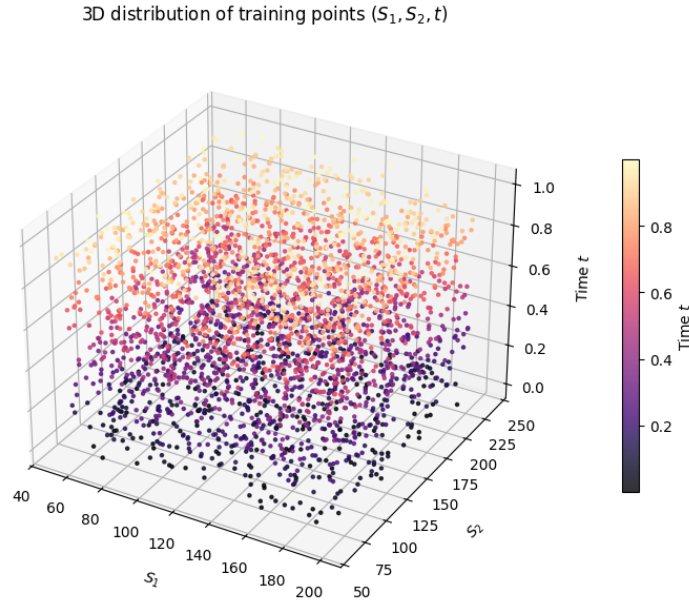


Figure 8: Répartition des points d'entraînement  $(S_1, S_2, t)$  générés par LHS

#### 4.4.3 Entraînement et prédiction du MGP

Le modèle MGP est entraîné pendant **12 minutes** sur les 3000 points. La prédiction sur les **52 000 scénarios** simulés (issus du MC) est ensuite réalisée en **2 minutes seulement**.

**Remarque importante :** dans notre cas, les valeurs exactes de portefeuille proviennent de formules fermées. Mais dans un cas général où chaque réévaluation nécessiterait une simulation MC, cette approche représenterait un **gain de temps majeur**. Ici, nous avons atteint une performance comparable à la méthode brute, avec un modèle entraîné une seule fois.

#### 4.4.4 Résultats CVA et précision du modèle

- CVA estimée via GP : 2.2586
- Erreur relative par rapport à la réévaluation brute :  $-0.20\%$

Ces résultats valident l'efficacité de l'approche MGP, capable de reproduire fidèlement la CVA brute sans nécessiter de réévaluations coûteuses.

#### 4.4.5 Analyse de l'erreur sur l'exposition (EPE)

Nous comparons maintenant l'exposition positive moyenne (EPE) estimée par la méthode MGP et la méthode brute.

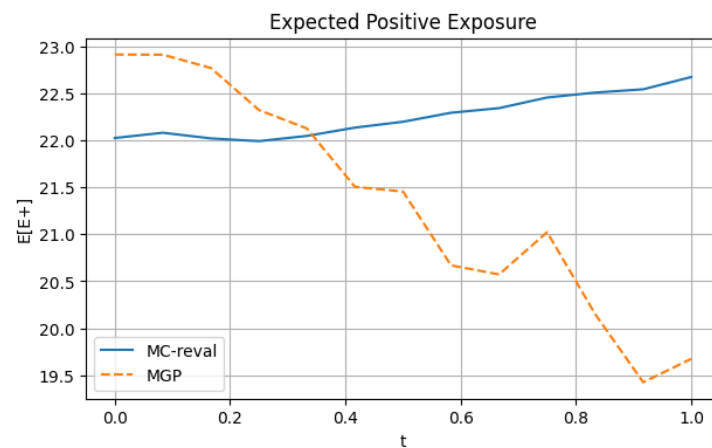


Figure 9: Comparaison du profil EPE : méthode brute vs approximation GP

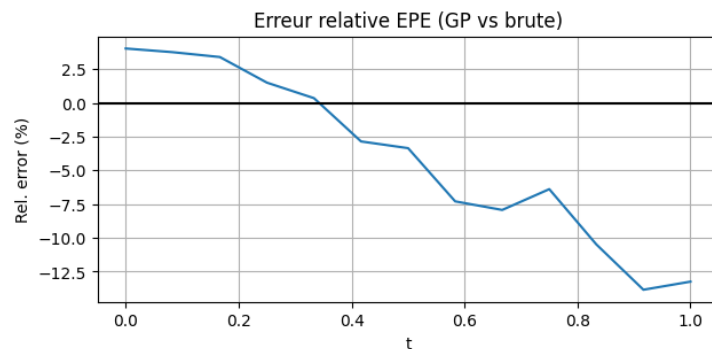


Figure 10: Erreur relative sur l'EPE entre la méthode GP et la méthode brute

**Interprétation.** On observe une **sous-estimation progressive** de l'EPE par le modèle GP sur les temps longs. Ce biais est probablement dû à :

- une complexité accrue de la surface de prix pour les maturités longues,
- un manque de points d'entraînement dans certaines zones critiques,
- une moindre performance des GP multitâches en extrapolation temporelle.

Malgré cela, l'erreur reste contenue ( $\sim 10\%$  maximum) et n'impacte que faiblement la CVA finale.

#### 4.4.6 Schéma récapitulatif de la méthodologie

Nous résumons ci-dessous le pipeline complet d'estimation de la CVA par méthode exacte et par approximation MGP.

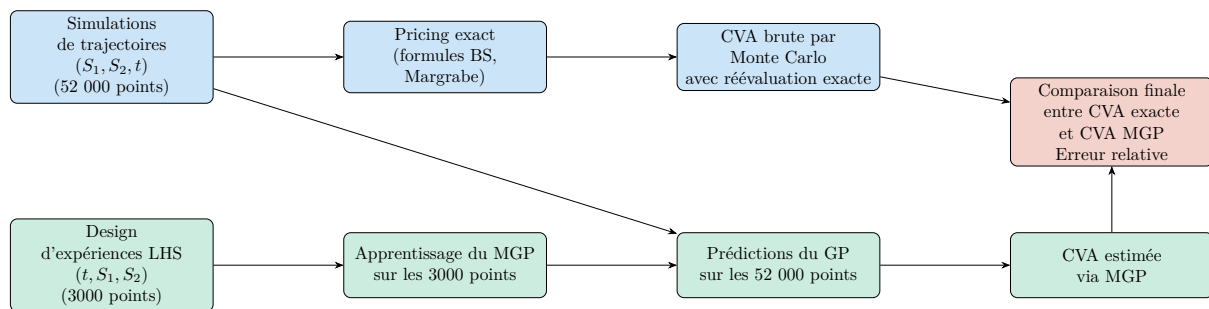


Figure 11: Pipeline de calcul de la CVA : comparaison entre méthode exacte et approximation par MGP

**Commentaires.** Le pipeline présenté dans le schéma permet de comparer deux approches pour l'estimation de la CVA : une méthode exacte et une méthode approchée par Gaussian Process Multitâche (MGP).

- **Partie en bleu (méthode exacte)** : on commence par générer 52 000 scénarios complets de marché  $(S_1, S_2, t)$ . Ces scénarios sont ensuite valorisés à chaque date à l'aide de formules analytiques fermées (Black-Scholes, Margrabe). Cela est rendu possible uniquement car les produits considérés sont simples. La CVA brute est obtenue par Monte Carlo, avec réévaluation exacte à la date de défaut. Cette méthode est précise, mais coûteuse si les produits sont complexes.
- **Partie en vert (approche MGP)** : un design d'expériences de type Latin Hypercube Sampling (LHS) est utilisé pour sélectionner intelligemment 3 000 points  $(t, S_1, S_2)$  dans l'espace d'entrée. Le modèle de MGP est entraîné sur ces points uniquement. Ensuite, ce modèle permet de prédire efficacement les valeurs de portefeuille sur les mêmes 52 000 scénarios que ceux utilisés pour l'approche exacte. Cela rend la comparaison cohérente, tout en réduisant drastiquement le coût de calcul.
- **Partie en rouge** : une comparaison finale est effectuée entre les deux approches, permettant d'évaluer la précision du MGP via l'erreur relative sur la CVA.

## 4.5 Synthèse des résultats numériques

Nous résumons dans le tableau suivant les différentes valeurs obtenues pour la CVA, selon les méthodes considérées :

Méthode	CVA estimée
Formule approchée (analytique)	2.320
Monte Carlo avec réévaluation exacte	2.263
Approximation par MGP	2.259

Table 1: Comparaison des résultats numériques obtenus pour la CVA (4 chiffres significatifs).

### Commentaires

- La **formule approchée** surestime légèrement la CVA, car elle repose sur une approximation uniforme de l'exposition moyenne dans le temps.
- La **méthode de Monte Carlo**, avec réévaluation exacte au temps de défaut, est utilisée comme référence.
- L'**approximation par MGP** fournit une estimation très proche de la référence avec une erreur relative inférieure à 0.2%. Cela montre que le MGP peut remplacer efficacement une réévaluation coûteuse dans des contextes plus complexes.

## 4.6 Analyse a posteriori du modèle MGP

Nous souhaitons maintenant inspecter les propriétés internes du modèle MGP appris, afin d'évaluer sa robustesse, son interprétabilité et son potentiel d'usage pour le calcul des sensibilités (Greeks).

### 4.6.1 Analyse de la matrice de covariance inter-tâches $\Omega$

L'un des avantages majeurs du modèle de **processus gaussien multitâche (MGP)** est la possibilité d'analyser a posteriori les relations entre les différentes composantes du portefeuille à travers la matrice de covariance inter-tâches  $\Omega$ . Cette matrice permet d'identifier les interactions et la structure de corrélation captée automatiquement par le modèle entre les différentes options.

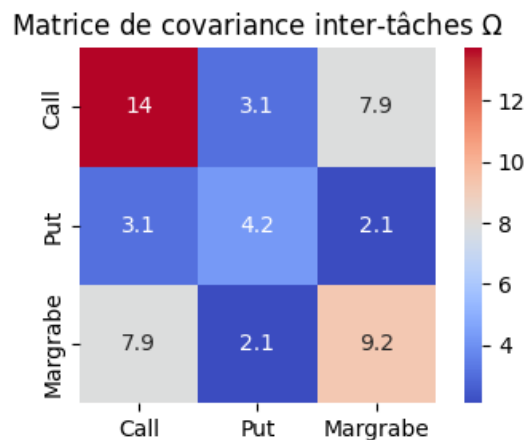


Figure 12: Matrice de covariance inter-tâches  $\Omega$  (estimée)

### Lecture diagonale : variabilité des tâches

- **Call** : variance = 14, indiquant une grande variabilité (ou incertitude) dans cette tâche, souvent liée à la sensibilité élevée du call à  $S_1$ .
- **Put** : variance = 4.2, beaucoup plus faible, car la fonction de prix du put sur  $S_2$  est probablement plus stable dans notre domaine simulé.
- **Margrabe** : variance = 9.2, intermédiaire entre les deux, reflétant la dépendance aux deux sous-jacents.

### Lecture hors-diagonale : dépendances croisées

- **Call**  $\leftrightarrow$  **Margrabe** : covariance élevée (7.9), reflétant une dépendance naturelle puisque la Margrabe favorise des scénarios où  $S_1$  est élevé.
- **Put**  $\leftrightarrow$  **Margrabe** : corrélation plus faible (2.1), cohérente avec le fait que le put dépend principalement de  $S_2$  seul.
- **Call**  $\leftrightarrow$  **Put** : faible covariance (3.1), logique car les sous-jacents sont différents mais le temps  $t$  est un facteur commun.

**Conclusion** Cette lecture fine de  $\Omega$  permet de valider la **cohérence structurelle du modèle** et de s'assurer que le MGP capte correctement les interdépendances économiques attendues. Cela représente un atout méthodologique du GPM, impossible à obtenir dans une approche « boîte noire » classique.

## 4.7 Calcul des sensibilités (Greeks)

L'article (Section 3.2) montre que les dérivées des prédictions GP peuvent être calculées de façon analytique grâce à :

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \mathbb{E}[f(x^*)] = \frac{\partial}{\partial x^*} \mu(x^*) + \left( \frac{\partial}{\partial x^*} K_{x^*, X} \right) \alpha$$

où  $\alpha = (K_{X, X} + \sigma^2 I)^{-1} Y$ .

**Objectif** : Cela permet de dériver les valeurs de portefeuille par rapport à  $S_1$ ,  $S_2$  ou  $t$ , et donc d'obtenir :

- $\Delta$  : sensibilité au sous-jacent  $S_1$  ou  $S_2$
- $\Theta$  : sensibilité au temps

**Proposition** : tracer les courbes de  $\Delta(t)$  et comparer avec les formules BS.

## 4.8 Perspectives

L'analyse du cœur du modèle permet :

- de comprendre le comportement du modèle en extrapolation,
- de détecter les zones où la variance prédictive est élevée (informations manquantes),
- d'exploiter les dérivées du noyau pour un calcul efficace des Greeks.

Ces propriétés font du MGP un outil non seulement rapide, mais aussi informatif pour la gestion des risques.



## Conclusion

Ce projet m'a permis d'explorer de manière approfondie la problématique du calcul de la *Credit Valuation Adjustment* (CVA) pour un portefeuille de dérivés, en m'appuyant sur des méthodes quantitatives et de simulation. J'ai choisi de m'éloigner de l'approche proposée par Crépey et Dixon [1], afin de construire une modélisation plus simple mais suffisamment réaliste.

Au-delà des aspects techniques, ce projet m'a permis de consolider mes compétences en modélisation probabiliste, en simulation Monte Carlo, et en calibration de modèles. Il m'a également sensibilisé à l'importance des compromis entre rigueur mathématique, faisabilité numérique et interprétabilité dans un contexte appliqué à la finance de marché.

## References

- [1] Stéphane Crépey and Matthew Dixon. Gaussian process regression for derivative portfolio modeling and application to cva computations.