# Syntax natürlicher Sprachen

## Vorlesung 10: Getypte Merkmalstrukturen und Unifikation

Martin Schmitt

Ludwig-Maximilians-Universität München

18.12.2018

# Themen der heutigen Vorlesung

1. Formale Grundlagen
   - Merkmalstrukturen
   - Subsumption
   - Unifikation
   - Bedingungen

2. Implementierung
   - Merkmalstrukturen
   - Unifikation

# Nächstes Thema

1. Formale Grundlagen
   - Merkmalstrukturen
   - Subsumption
   - Unifikation
   - Bedingungen
2. Implementierung
   - Merkmalstrukturen
   - Unifikation

# Getypte Merkmalstrukturen

Carpenter, Bob (1992). *The Logic of Typed Feature Structures.* Englisch. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press.

# Typen

**Definition (Type, $\sqsubseteq$)**

Sei **Type** eine endliche Menge von Typen mit **Vererbungshierarchie** $\sqsubseteq$.

Wenn für $A, B \in$ **Type** gilt, dass $A \sqsubseteq B$, dann

- *erbt* $B$ Informationen von $A$.
- wird $B$ von $A$ *subsumiert*.
- ist $A$ allgemeiner als $B$.
- ist $A$ Obertyp von $B$.
- ist $B$ Untertyp von $A$.

# Vererbung

## Eigenschaften von **Type**, $\sqsubseteq$

- wohldefinierte Unifikationsoperation
- transitiv ($\forall A, B, C \in \mathbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq C \implies A \sqsubseteq C$)
- reflexiv ($\forall A \in \mathbf{Type}.\ A \sqsubseteq A$)
- antisymmetrisch ($\forall A, B \in \mathbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A \implies A = B$) (keine Vererbungsschleifen)

→ partielle Ordnung (d. h. nicht alle Elemente von **Type** müssen miteinander vergleichbar sein)

- Existenz eines eindeutigen allgemeinsten Typs ($\exists_1 A \in \mathbf{Type}.\ \forall B \in \mathbf{Type}.\ A \sqsubseteq B$)

→ $\perp$ definiert als kleinstes Element von **Type** bzgl. $\sqsubseteq$

# Vererbung

## Eigenschaften von **Type**, $\sqsubseteq$

- wohldefinierte Unifikationsoperation
- transitiv ($\forall A, B, C \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \land B \sqsubseteq C \implies A \sqsubseteq C$)
- reflexiv ($\forall A \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq A$)
- antisymmetrisch ($\forall A, B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \land B \sqsubseteq A \implies A = B$) (keine Vererbungsschleifen)

→ partielle Ordnung (d. h. nicht alle Elemente von **Type** müssen miteinander vergleichbar sein)

- Existenz eines eindeutigen allgemeinsten Typs ($\exists_1 A \in \textbf{Type}.\ \forall B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B$)

→ $\bot$ definiert als kleinstes Element von **Type** bzgl. $\sqsubseteq$

# Vererbung

## Eigenschaften von **Type**, $\sqsubseteq$

- wohldefinierte Unifikationsoperation
- transitiv ($\forall A, B, C \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq C \implies A \sqsubseteq C$)
- reflexiv ($\forall A \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq A$)
- antisymmetrisch ($\forall A, B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A \implies A = B$) (keine Vererbungsschleifen)

$\rightarrow$ partielle Ordnung (d. h. nicht alle Elemente von **Type** müssen miteinander vergleichbar sein)

- Existenz eines eindeutigen allgemeinsten Typs ($\exists_1 A \in \textbf{Type}.\ \forall B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B$)

$\rightarrow$ $\perp$ definiert als kleinstes Element von **Type** bzgl. $\sqsubseteq$

# Vererbung

## Eigenschaften von **Type**, $\sqsubseteq$

- wohldefinierte Unifikationsoperation
- transitiv $(\forall A, B, C \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq C \implies A \sqsubseteq C)$
- reflexiv $(\forall A \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq A)$
- antisymmetrisch $(\forall A, B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A \implies A = B)$ (keine Vererbungsschleifen)

→ partielle Ordnung (d. h. nicht alle Elemente von **Type** müssen miteinander vergleichbar sein)

- Existenz eines eindeutigen allgemeinsten Typs $(\exists_1 A \in \textbf{Type}.\ \forall B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B)$

→ $\perp$ definiert als kleinstes Element von **Type** bzgl. $\sqsubseteq$

# Vererbung

## Eigenschaften von **Type**, $\sqsubseteq$

- wohldefinierte Unifikationsoperation
- transitiv ($\forall A, B, C \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq C \implies A \sqsubseteq C$)
- reflexiv ($\forall A \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq A$)
- antisymmetrisch ($\forall A, B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A \implies A = B$) (keine Vererbungsschleifen)

$\rightarrow$ partielle Ordnung (d. h. nicht alle Elemente von **Type** müssen miteinander vergleichbar sein)

- Existenz eines eindeutigen allgemeinsten Typs ($\exists_1 A \in \textbf{Type}.\ \forall B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B$)

$\rightarrow$ $\perp$ definiert als kleinstes Element von **Type** bzgl. $\sqsubseteq$

# Vererbung

## Eigenschaften von **Type**, $\sqsubseteq$

- wohldefinierte Unifikationsoperation
- transitiv ($\forall A, B, C \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq C \implies A \sqsubseteq C$)
- reflexiv ($\forall A \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq A$)
- antisymmetrisch ($\forall A, B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A \implies A = B$) (keine Vererbungsschleifen)

→ partielle Ordnung (d. h. nicht alle Elemente von **Type** müssen miteinander vergleichbar sein)

- Existenz eines eindeutigen allgemeinsten Typs ($\exists_1 A \in \textbf{Type}.\ \forall B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B$)

→ $\perp$ definiert als kleinstes Element von **Type** bzgl. $\sqsubseteq$

# Vererbung

## Eigenschaften von **Type**, $\sqsubseteq$

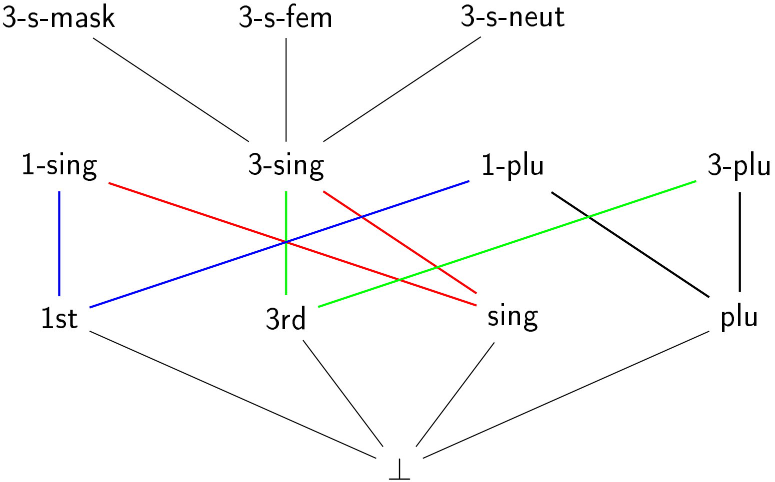
- wohldefinierte Unifikationsoperation
- transitiv ($\forall A, B, C \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \land B \sqsubseteq C \implies A \sqsubseteq C$)
- reflexiv ($\forall A \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq A$)
- antisymmetrisch ($\forall A, B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B \land B \sqsubseteq A \implies A = B$) (keine Vererbungsschleifen)

$\rightarrow$ partielle Ordnung (d. h. nicht alle Elemente von **Type** müssen miteinander vergleichbar sein)

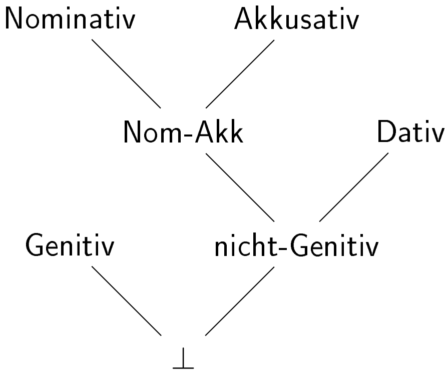
- Existenz eines eindeutigen allgemeinsten Typs ($\exists_1 A \in \textbf{Type}.\ \forall B \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq B$)

$\rightarrow$ $\perp$ definiert als kleinstes Element von **Type** bzgl. $\sqsubseteq$

# Beispiel: Typhierarchie



# Noch ein Beispiel: Typhierarchie




Vgl. z. B. die Paradigmen:

der Hund, des **Hundes**, dem Hund, den Hund

**das** Buch, des **Buches**, dem Buch, **das** Buch

# Merkmale

**Definition (Feat)**

Sei **Feat** eine *endliche* Menge von Merkmalen (engl. *features*).

(Ohne weitere Anforderungen an Struktur oder Eigenschaften)

# Merkmale

## Definition (**Feat**)

Sei **Feat** eine *endliche* Menge von Merkmalen (engl. *features*).

(Ohne weitere Anforderungen an Struktur oder Eigenschaften)

## Beispiel

**Feat** = {GEN, CASE, NUM, AGR, PER, MOOD, CAT, TENSE}

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow$ **Type** : totale Typisierungsfunktion
- $\delta :$ **Feat** $\times\, Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\begin{bmatrix} \text{CAT} & N \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{CASE} & \mathit{Nom} \\ \text{NUM} & \mathit{Pl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow$ **Type** : totale Typisierungsfunktion
- $\delta :$ **Feat** $\times\, Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\begin{bmatrix} \text{CAT} & N \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{CASE} & \mathit{Nom} \\ \text{NUM} & \mathit{Pl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow$ **Type** : totale Typisierungsfunktion
- $\delta :$ **Feat** $\times\, Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\begin{bmatrix} \text{CAT} & N \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{CASE} & \mathit{Nom} \\ \text{NUM} & \mathit{Pl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\begin{bmatrix} \text{CAT} & N \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{CASE} & Nom \\ \text{NUM} & Pl \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \to \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \to Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} \mathrm{CAT} & N \\ \mathrm{AGR} & \begin{bmatrix} \mathrm{CASE} & Nom \\ \mathrm{NUM} & Pl \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow$ **Type** : totale Typisierungsfunktion
- $\delta :$ **Feat** $\times\, Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 & \text{CAT} & N \\ & \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{CASE} & Nom \\ \text{NUM} & Pl \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \to \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \to Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 & \text{CAT} & N \\ q_2 & \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{CASE} & \mathit{Nom} \\ \text{NUM} & \mathit{Pl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \to \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \to Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 \ \mathrm{CAT} & N \\ q_2 \ \mathrm{AGR} & \begin{bmatrix} q_3 \ \mathrm{CASE} & Nom \\ \mathrm{NUM} & Pl \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & N \\ q_2 \ \text{AGR} & \begin{bmatrix} q_3 \ \text{CASE} & Nom \\ q_4 \ \text{NUM} & Pl \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1\ \mathrm{CAT} & \theta(q_1)\ N \\ q_2\ \mathrm{AGR} & \begin{bmatrix} q_3\ \mathrm{CASE} & \mathit{Nom} \\ q_4\ \mathrm{NUM} & \mathit{Pl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \to$ **Type** : totale Typisierungsfunktion
- $\delta :$ **Feat** $\times\, Q \to Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & \theta(q_1)\ N \\ q_2 \ \text{AGR} & \begin{bmatrix} q_3 \ \text{CASE} & \theta(q_3)\ \mathit{Nom} \\ q_4 \ \text{NUM} & \mathit{Pl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \rightarrow$ **Type** : totale Typisierungsfunktion
- $\delta :$ **Feat** $\times\, Q \rightarrow Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1\ \mathrm{CAT} & \theta(q_1)\ N \\ q_2\ \mathrm{AGR} & \begin{bmatrix} q_3\ \mathrm{CASE} & \theta(q_3)\ \mathit{Nom} \\ q_4\ \mathrm{NUM} & \theta(q_4)\ \mathit{Pl} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \to \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \to Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 \text{ CAT} & \theta(q_1)\ N \\ q_2 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_3 \text{ CASE} & \theta(q_3)\ Nom \\ q_4 \text{ NUM} & \theta(q_4)\ Pl \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

**Feat** $=$ $\{\text{CAT}, \text{AGR}, \text{CASE}, \text{NUM}\}$

# Merkmalstrukturen

## Definition

Eine Merkmalstruktur über **Type** und **Feat** ist definiert als Tupel $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ mit:

- $Q$ : endliche Menge von Knoten (Einträge)
- $\bar{q} \in Q$ : Wurzelknoten
- $\theta : Q \to \textbf{Type}$ : totale Typisierungsfunktion
- $\delta : \textbf{Feat} \times Q \to Q$ : partielle Merkmal-Wert-Funktion

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Merkmalstrukturen.

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & \theta(q_1)\ N \\ q_2 \ \text{AGR} & \begin{bmatrix} q_3 \ \text{CASE} & \theta(q_3)\ Nom \\ q_4 \ \text{NUM} & \theta(q_4)\ Pl \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

**Feat** $=$ $\{\text{CAT}, \text{AGR}, \text{CASE}, \text{NUM}\}$

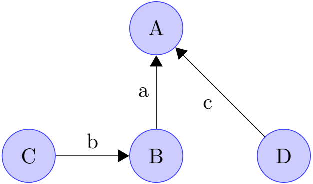
**Type** $=$ $\{N, Nom, Pl, \bot, \textbf{fs}\}$

# Visualisierung als Graph I

## Beschrifteter Graph

Ein *beschrifteter* Graph ist definiert als Tupel $G = (V, E, l_V, l_E, L_V, L_E)$ mit

- $V$ : Menge der Knoten (engl. *vertices*)
- $E \subseteq V \times V$ : Menge der Kanten (engl. *edges*)
- $l_V : V \to L_V$ : Beschriftungsfunktion für Knoten (engl. *label*)
- $l_E : E \to L_E$ : Beschriftungsfunktion für Kanten
- $L_X$ : Menge von Beschriftungen für $X$



# Visualisierung als Graph II

## Visualisierung

Der Graph zu einer Merkmalstruktur $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ ist gegeben durch:

- $V := Q$
- $E := \{(q_1, q_2) \mid \exists f.\ \delta(f, q_1) = q_2\}$
- $L_V :=$ **Type**; $l_V := \theta$
- $L_E :=$ **Feat**; $l_E(q_1, q_2) := \{f \mid \delta(f, q_1) = q_2\}$

## Anmerkung

Zur Vereinfachung werden einelementige Mengen ohne Mengenklammern geschrieben.

Also $a$ statt $\{a\}$.

# Visualisierung als Graph II

## Visualisierung

Der Graph zu einer Merkmalstruktur $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ ist gegeben durch:

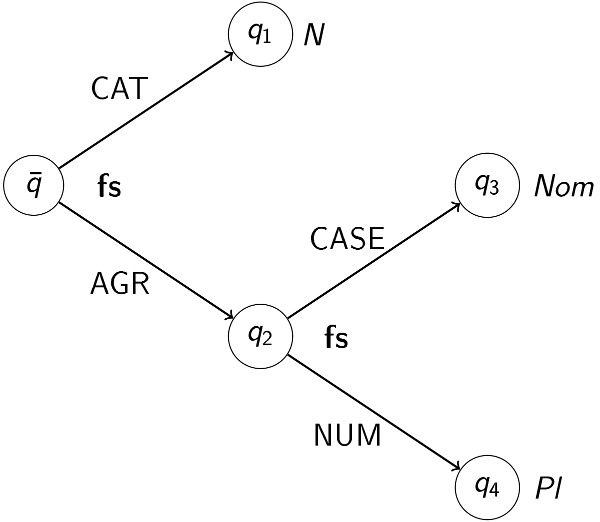
- $V := Q$
- $E := \{(q_1, q_2) \mid \exists f.\ \delta(f, q_1) = q_2\}$
- $L_V :=$ **Type**; $l_V := \theta$
- $L_E :=$ **Feat**; $l_E(q_1, q_2) := \{f \mid \delta(f, q_1) = q_2\}$

## Anmerkung

Zur Vereinfachung werden einelementige Mengen ohne Mengenklammern geschrieben.

Also $a$ statt $\{a\}$.

# Beispiel: Graphdarstellung



# Variablen

## Variablen

- **Var** sei eine abzählbar unendliche Menge von Variablen.
- Häufig wird **Var** $= \mathbb{N}$ benutzt.
- Es gibt aber auch andere Möglichkeiten;
  z. B. im NLTK: ASCII-Identifier (`?x`, `?y`, ...)

## Definition (Zuweisungsfunktion, Valuation)

Eine Zuweisung $\alpha : \mathbf{Var} \to \mathcal{F}$ ist eine totale Funktion, die alle Variablen an Merkmalstrukturen (Knoten, Einträge) bindet.

# Variablen

## Variablen

- **Var** sei eine abzählbar unendliche Menge von Variablen.
- Häufig wird **Var** $= \mathbb{N}$ benutzt.
- Es gibt aber auch andere Möglichkeiten;
  z. B. im NLTK: ASCII-Identifier (`?x`, `?y`, ...)

## Definition (Zuweisungsfunktion, Valuation)

Eine Zuweisung $\alpha : \mathbf{Var} \to \mathcal{F}$ ist eine totale Funktion, die alle Variablen an Merkmalstrukturen (Knoten, Einträge) bindet.

# Reentrance

## Reentrance (dt. *Wiedereintritt*)

Durch das Aufstellen von Bedingungen (s. später) können Variablen an verschiedene Teile von Merkmalstrukturen gebunden werden. *Diese müssen gleich sein.*

# Reentrance

## Reentrance (dt. *Wiedereintritt*)

Durch das Aufstellen von Bedingungen (s. später) können Variablen an verschiedene Teile von Merkmalstrukturen gebunden werden. *Diese müssen gleich sein.*

## Beispiel

$$\begin{bmatrix} \text{ORTH} & \textit{folgt} \\ \text{SYN} & \begin{bmatrix} \text{SBJ} & \boxed{1} \\ \text{OBJ} & \boxed{2} \end{bmatrix} \\ \text{SEM} & \begin{bmatrix} \text{AGT} & \boxed{1} \\ \text{PAT} & \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Reentrance

## Reentrance (dt. *Wiedereintritt*)

Durch das Aufstellen von Bedingungen (s. später) können Variablen an verschiedene Teile von Merkmalstrukturen gebunden werden.
*Diese müssen gleich sein.*

## Beispiel

$$\begin{bmatrix} \text{ORTH} & \textit{folgt} \\ \text{SYN} & \begin{bmatrix} \text{SBJ} & \boxed{1} \\ \text{OBJ} & \boxed{2} \end{bmatrix} \\ \text{SEM} & \begin{bmatrix} \text{AGT} & \boxed{1} \\ \text{PAT} & \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \text{ORTH} & \textit{folgt} \\ \text{SYN} & \begin{bmatrix} \text{SBJ} & \boxed{1}\textit{Hund} \\ \text{OBJ} & \boxed{2}\textit{Katze} \end{bmatrix} \\ \text{SEM} & \begin{bmatrix} \text{AGT} & \boxed{1} \\ \text{PAT} & \boxed{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h : Q \to Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in$ **Feat**, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$$\bar{q}\begin{bmatrix} q_1 & \text{CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}'\begin{bmatrix} q'_1 & \text{CAT} & N \\ q'_2 & \text{GEN} & mask \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} h(\bar{q}) = \bar{q}' \\ h(q_1) = q'_1 \end{array}$$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h : Q \to Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in$ **Feat**, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$$\bar{q} \begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}' \begin{bmatrix} q_1' \ \text{CAT} & N \\ q_2' \ \text{GEN} & mask \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} h(\bar{q}) &= \bar{q}' \\ h(q_1) &= q_1' \end{aligned}$$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h : Q \to Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in$ **Feat**, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$\bar{q} \begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}' \begin{bmatrix} q_1' \ \text{CAT} & N \\ q_2' \ \text{GEN} & mask \end{bmatrix}$

$h(\bar{q}) = \bar{q}'$

$h(q_1) = q_1'$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h : Q \to Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in$ **Feat**, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$\bar{q} \begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}' \begin{bmatrix} q_1' \ \text{CAT} & N \\ q_2' \ \text{GEN} & mask \end{bmatrix}$

$h(\bar{q}) = \bar{q}'$

$h(q_1) = q_1'$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h\colon Q \to Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in$ **Feat**, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$\bar{q} \begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}' \begin{bmatrix} q_1' \ \text{CAT} & N \\ q_2' \ \text{GEN} & \mathit{mask} \end{bmatrix}$

$h(\bar{q}) = \bar{q}'$
$h(q_1) = q_1'$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h: Q \rightarrow Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in$ **Feat**, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$$\bar{q} \begin{bmatrix} q_1 \text{ CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}' \begin{bmatrix} q_1' \text{ CAT} & N \\ q_2' \text{ GEN} & \mathit{mask} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} h(\bar{q}) = \bar{q}' \\ h(q_1) = q_1' \end{array}$$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h : Q \to Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in$ **Feat**, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$$\bar{q} \begin{bmatrix} q_1 \text{ CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}' \begin{bmatrix} q_1' \text{ CAT} & N \\ q_2' \text{ GEN} & mask \end{bmatrix}$$

$h(\bar{q}) = \bar{q}'$
$h(q_1) = q_1'$

# Subsumption

## Erweiterung auf Merkmalstrukturen

$F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$ subsumiert $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$, genau dann wenn es eine totale Funktion $h\colon Q \to Q'$ gibt, sodass:

- $h(\bar{q}) = \bar{q}'$
- $\theta(q) \sqsubseteq \theta'(h(q))$ für alle $q \in Q$
- $h(\delta(f, q)) = \delta'(f, h(q))$ für alle $q \in Q$ und $f \in \mathbf{Feat}$, für die $\delta(f, q)$ definiert ist

## Beispiel

$$\bar{q} \begin{bmatrix} q_1 \ \text{CAT} & N \end{bmatrix} \sqsubseteq \bar{q}' \begin{bmatrix} q_1' \ \text{CAT} & N \\ q_2' \ \text{GEN} & \mathit{mask} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} h(\bar{q}) &= \bar{q}' \\ h(q_1) &= q_1' \end{aligned}$$

# Unifikation I

## Unifikation ($\sqcup$) für Typen

- Die Unifikation zweier Typen kann als mengentheoretische Vereinigung verstanden werden.
- Das Ergebnis der Unifikation zweier Typen $A, B \in \mathbf{Type}$ ist ihre kleinste obere Schranke in **Type** bzgl. $\sqsubseteq$.
- $A \sqcup B = C \iff A \sqsubseteq C$ und $B \sqsubseteq C$ und
$$\forall D \in \mathbf{Type}.\ A \sqsubseteq D \wedge B \sqsubseteq D \implies C \sqsubseteq D$$

# Unifikation I

## Unifikation ($\sqcup$) für Typen

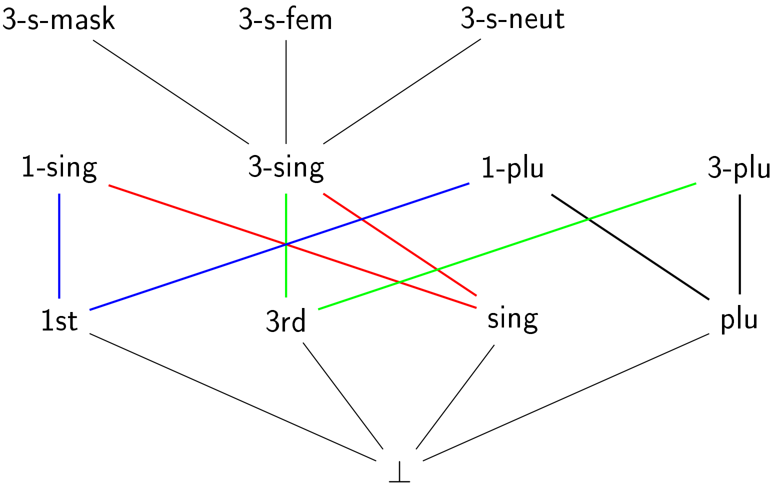
- Die Unifikation zweier Typen kann als mengentheoretische Vereinigung verstanden werden.
- Das Ergebnis der Unifikation zweier Typen $A, B \in \textbf{Type}$ ist ihre kleinste obere Schranke in **Type** bzgl. $\sqsubseteq$.
- $A \sqcup B = C \iff A \sqsubseteq C$ und $B \sqsubseteq C$ und $\forall D \in \textbf{Type}.\ A \sqsubseteq D \land B \sqsubseteq D \implies C \sqsubseteq D$

# Unifikation I

## Unifikation ($\sqcup$) für Typen

- Die Unifikation zweier Typen kann als mengentheoretische Vereinigung verstanden werden.
- Das Ergebnis der Unifikation zweier Typen $A, B \in \mathbf{Type}$ ist ihre kleinste obere Schranke in **Type** bzgl. $\sqsubseteq$.
- $A \sqcup B = C \iff A \sqsubseteq C$ und $B \sqsubseteq C$ und
  $$\forall D \in \mathbf{Type}.\ A \sqsubseteq D \wedge B \sqsubseteq D \implies C \sqsubseteq D$$

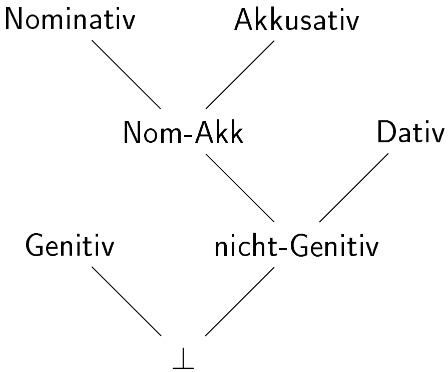
# Beispiel: Typunifikation




$1st \sqcup plu = 1\text{-}plu$

$sing \sqcup 3\text{-}s\text{-}mask = 3\text{-}s\text{-}mask$

# Noch ein Beispiel: Typunifikation




nicht-Genitiv $\sqcup$ Nominativ $=$ Nominativ

Nom-Akk $\sqcup$ Dativ $=$ *undefiniert*

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)\,, F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$, $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$, $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$, $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$, $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$, $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$, $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

# Unifikation II

## Unifikation ($\sqcup$) für Merkmalstrukturen

- Idee: Unifikation ebenfalls kleinste obere Schranke bzgl. der Subsumptionsrelation $\sqsubseteq$ auf Merkmalstrukturen
- Algorithmus in zwei Schritten:
  1. Identifiziere korrespondierende (äquivalente) Knoten
  2. Unifiziere deren Typen

## Formale Definition: Identifikation (Schritt 1)

Für Merkmalstrukturen $F = (Q, \bar{q}, \theta, \delta)$, $F' = (Q', \bar{q}', \theta', \delta')$ mit $Q \cap Q' = \emptyset$ sei die *Äquivalenzrelation* $\equiv$ wie folgt definiert:

- $\bar{q} \equiv \bar{q}'$
- $\delta(f, q) \equiv \delta'(f, q')$ wenn beide Seiten definiert und $q \equiv q'$

## Formale Definition: Typunifikation (Schritt 2)

Die Unifikation von $F$ und $F'$ ist dann wie folgt definiert:

$$F \sqcup F' = ((Q \cup Q')/_{\equiv}, [\bar{q}]_{\equiv}, \theta^{\equiv}, \delta^{\equiv})$$

mit

$$\theta^{\equiv}([q]_{\equiv}) = \bigsqcup \{(\theta \cup \theta')(q') \mid q' \equiv q\}$$

und

$$\delta^{\equiv}(f, [q]_{\equiv}) = \begin{cases} [(\delta \cup \delta')(f, q)]_{\equiv} & \text{falls } (\delta \cup \delta')(f, q) \text{ definiert} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

## Notation (für $\equiv$ Äquivalenzrelation über $X$)

- $[x]_{\equiv} = \{y \in X \mid y \equiv x\}$
- $X/_{\equiv} = \{[x]_{\equiv} \mid x \in X\}$

## Formale Definition: Typunifikation (Schritt 2)

Die Unifikation von $F$ und $F'$ ist dann wie folgt definiert:

$$F \sqcup F' = ((Q \cup Q')/_{\equiv}, [\bar{q}]_{\equiv}, \theta^{\equiv}, \delta^{\equiv})$$

mit

$$\theta^{\equiv}([q]_{\equiv}) = \bigsqcup \{(\theta \cup \theta')(q') \mid q' \equiv q\}$$

und

$$\delta^{\equiv}(f, [q]_{\equiv}) = \begin{cases} [(\delta \cup \delta')(f, q)]_{\equiv} & \text{falls } (\delta \cup \delta')(f, q) \text{ definiert} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

## Notation (für $\equiv$ Äquivalenzrelation über $X$)

- $[x]_{\equiv} = \{y \in X \mid y \equiv x\}$
- $X/_{\equiv} = \{[x]_{\equiv} \mid x \in X\}$

# Beispiel: (Formale) Unifikation

$$q_1 \begin{bmatrix} q_2 \text{ CAT} & N \\ q_3 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_4 \text{ NUM} & Sg \\ q_5 \text{ CAS} & \textit{nicht-Gen} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad q_6 \begin{bmatrix} q_7 \text{ ORTH} & \textit{Hund} \\ q_8 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_9 \text{ NUM} & Sg \\ q_{10} \text{ CAS} & \textit{Nom} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

1. Identifikation korrespondierender Knoten
   - $q_1 \equiv q_6$ (Initialisierung)
   - Nach 1 Schritt mit $\delta$:
     - $q_3 \equiv q_8$
   - Nach 2 Schritten mit $\delta$:
     - $q_4 \equiv q_9$
     - $q_5 \equiv q_{10}$

# Beispiel: (Formale) Unifikation

$$q_1 \begin{bmatrix} q_2 \ \text{CAT} & N \\ q_3 \ \text{AGR} & \begin{bmatrix} q_4 \ \text{NUM} & Sg \\ q_5 \ \text{CAS} & \textit{nicht-Gen} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad q_6 \begin{bmatrix} q_7 \ \text{ORTH} & \textit{Hund} \\ q_8 \ \text{AGR} & \begin{bmatrix} q_9 \ \text{NUM} & Sg \\ q_{10} \ \text{CAS} & \textit{Nom} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

1. Identifikation korrespondierender Knoten
   - $q_1 \equiv q_6$ (Initialisierung)
   - Nach 1 Schritt mit $\delta$:
     - $q_3 \equiv q_8$
   - Nach 2 Schritten mit $\delta$:
     - $q_4 \equiv q_9$
     - $q_5 \equiv q_{10}$

# Beispiel: (Formale) Unifikation

$$q_1 \begin{bmatrix} q_2 \text{ CAT} & N \\ q_3 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_4 \text{ NUM} & Sg \\ q_5 \text{ CAS} & \textit{nicht-Gen} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad q_6 \begin{bmatrix} q_7 \text{ ORTH} & \textit{Hund} \\ q_8 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_9 \text{ NUM} & Sg \\ q_{10} \text{ CAS} & \textit{Nom} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

1. Identifikation korrespondierender Knoten
   - $q_1 \equiv q_6$ (Initialisierung)
   - Nach 1 Schritt mit $\delta$:
     - $q_3 \equiv q_8$
   - Nach 2 Schritten mit $\delta$:
     - $q_4 \equiv q_9$
     - $q_5 \equiv q_{10}$

# Beispiel: (Formale) Unifikation

$$q_1 \begin{bmatrix} q_2 \ \text{CAT} & N \\ q_3 \ \text{AGR} & \begin{bmatrix} q_4 \ \text{NUM} & Sg \\ q_5 \ \text{CAS} & \textit{nicht-Gen} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad q_6 \begin{bmatrix} q_7 \ \text{ORTH} & \textit{Hund} \\ q_8 \ \text{AGR} & \begin{bmatrix} q_9 \ \text{NUM} & Sg \\ q_{10} \ \text{CAS} & \textit{Nom} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

2. Typunifikation
   - $Q_U = \{\{q_1, q_6\}, \{q_2\}, \{q_7\}, \{q_3, q_8\}, \{q_4, q_9\}, \{q_5, q_{10}\}\}$
   - $\bar{q}_U = \{q_1, q_6\}$
   - $\theta^{\equiv}(\{q_2\}) = N$, $\theta^{\equiv}(\{q_7\}) = \textit{Hund}$, $\theta^{\equiv}(\{q_3, q_8\}) = \textbf{fs}$, $\theta^{\equiv}(\{q_4, q_9\}) = Sg$, $\theta^{\equiv}(\{q_5, q_{10}\}) = \textit{Nom}$, $\theta^{\equiv}(\{q_1, q_6\}) = \textbf{fs}$
   - $\delta(\text{CAT}, \{q_1, q_6\}) = \{q_2\}$, $\delta(\text{ORTH}, \{q_1, q_6\}) = \{q_7\}$, ...

# Beispiel: (Formale) Unifikation

$$q_1 \begin{bmatrix} q_2 \text{ CAT} & N \\ q_3 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_4 \text{ NUM} & Sg \\ q_5 \text{ CAS} & \textit{nicht-Gen} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad q_6 \begin{bmatrix} q_7 \text{ ORTH} & Hund \\ q_8 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_9 \text{ NUM} & Sg \\ q_{10} \text{ CAS} & Nom \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

2. Typunifikation
   - $Q_U = \{\{q_1, q_6\}, \{q_2\}, \{q_7\}, \{q_3, q_8\}, \{q_4, q_9\}, \{q_5, q_{10}\}\}$
   - $\bar{q}_U = \{q_1, q_6\}$
   - $\theta^{\equiv}(\{q_2\}) = N$, $\theta^{\equiv}(\{q_7\}) = Hund$, $\theta^{\equiv}(\{q_3, q_8\}) = \textbf{fs}$, $\theta^{\equiv}(\{q_4, q_9\}) = Sg$, $\theta^{\equiv}(\{q_5, q_{10}\}) = Nom$, $\theta^{\equiv}(\{q_1, q_6\}) = \textbf{fs}$
   - $\delta(\text{CAT}, \{q_1, q_6\}) = \{q_2\}$, $\delta(\text{ORTH}, \{q_1, q_6\}) = \{q_7\}$, ...

# Beispiel: (Formale) Unifikation

$$q_1 \begin{bmatrix} q_2 \text{ CAT} & N \\ q_3 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_4 \text{ NUM} & \mathit{Sg} \\ q_5 \text{ CAS} & \mathit{nicht\text{-}Gen} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad q_6 \begin{bmatrix} q_7 \text{ ORTH} & \mathit{Hund} \\ q_8 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_9 \text{ NUM} & \mathit{Sg} \\ q_{10} \text{ CAS} & \mathit{Nom} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

2. Typunifikation
   - $Q_U = \{\{q_1, q_6\}, \{q_2\}, \{q_7\}, \{q_3, q_8\}, \{q_4, q_9\}, \{q_5, q_{10}\}\}$
   - $\bar{q}_U = \{q_1, q_6\}$
   - $\theta^{\equiv}(\{q_2\}) = N$, $\theta^{\equiv}(\{q_7\}) = \mathit{Hund}$, $\theta^{\equiv}(\{q_3, q_8\}) = \mathbf{fs}$, $\theta^{\equiv}(\{q_4, q_9\}) = \mathit{Sg}$, $\theta^{\equiv}(\{q_5, q_{10}\}) = \mathit{Nom}$, $\theta^{\equiv}(\{q_1, q_6\}) = \mathbf{fs}$
   - $\delta(\text{CAT}, \{q_1, q_6\}) = \{q_2\}$, $\delta(\text{ORTH}, \{q_1, q_6\}) = \{q_7\}$, …

# Beispiel: (Formale) Unifikation

$$q_1 \begin{bmatrix} q_2 \text{ CAT} & N \\ q_3 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_4 \text{ NUM} & Sg \\ q_5 \text{ CAS} & \textit{nicht-Gen} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad q_6 \begin{bmatrix} q_7 \text{ ORTH} & \textit{Hund} \\ q_8 \text{ AGR} & \begin{bmatrix} q_9 \text{ NUM} & Sg \\ q_{10} \text{ CAS} & \textit{Nom} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

2. Typunifikation
   - $Q_U = \{\{q_1, q_6\}, \{q_2\}, \{q_7\}, \{q_3, q_8\}, \{q_4, q_9\}, \{q_5, q_{10}\}\}$
   - $\bar{q}_U = \{q_1, q_6\}$
   - $\theta^{\equiv}(\{q_2\}) = N$, $\theta^{\equiv}(\{q_7\}) = \textit{Hund}$, $\theta^{\equiv}(\{q_3, q_8\}) = \textbf{fs}$, $\theta^{\equiv}(\{q_4, q_9\}) = Sg$, $\theta^{\equiv}(\{q_5, q_{10}\}) = \textit{Nom}$, $\theta^{\equiv}(\{q_1, q_6\}) = \textbf{fs}$
   - $\delta(\text{CAT}, \{q_1, q_6\}) = \{q_2\}$, $\delta(\text{ORTH}, \{q_1, q_6\}) = \{q_7\}$, ...

# Theoretische Resultate

**Lemma**

Wenn $F \sqcup F'$ definiert ist, dann ist $F \sqcup F' \in \mathcal{F}$ eine Merkmalstruktur.

**Theorem**

$F \sqcup F'$ ist die *kleinste obere Schranke* von $F$ und $F'$ in $(\mathcal{F}, \sqsubseteq)$, falls $F$ und $F'$ eine obere Schranke haben.

Für Beweise siehe Carpenter (1992).

# Bedingungen I

## Pfade

- Sequenzen von Merkmalen werden *Pfade* genannt.
- $\mathbf{Path} = \mathbf{Feat}^*$ sei die Menge aller Pfade.
- Für $p \in \mathbf{Path}, F \in \mathcal{F}$ sei $F@p$ der Knoten in $F$, den man am Ende von Pfad $p$ erhält.

## Beispiele

- AGR–NUM
- SYN–SBJ–AGR–NUM
- ORTH
- $\varepsilon$ (der leere Pfad)

# Bedingungen I

## Pfade

- Sequenzen von Merkmalen werden *Pfade* genannt.
- $\mathbf{Path} = \mathbf{Feat}^*$ sei die Menge aller Pfade.
- Für $p \in \mathbf{Path}$, $F \in \mathcal{F}$ sei $F@p$ der Knoten in $F$, den man am Ende von Pfad $p$ erhält.

## Beispiele

- AGR–NUM
- SYN–SBJ–AGR–NUM
- ORTH
- $\varepsilon$ (der leere Pfad)

# Bedingungen II

## Definition (Beschreibung **Desc**)

Die Menge der Beschreibungen über **Type** und **Feat** sei die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $A \in$ **Desc**, für alle $A \in$ **Type**
- $p : d \in$ **Desc**, für $p \in$ **Path**, $d \in$ **Desc**
- $x \in$ **Desc**, für alle $x \in$ **Var**
- $d \wedge e \in$ **Desc**, für $d, e \in$ **Desc**

## Beispiel

- AGR–NUM : *Sg*
- SYN–SBJ : $\boxed{1}$ $\wedge$ SEM–AGT : $\boxed{1}$

# Bedingungen II

## Definition (Beschreibung **Desc**)

Die Menge der Beschreibungen über **Type** und **Feat** sei die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $A \in$ **Desc**, für alle $A \in$ **Type**
- $p : d \in$ **Desc**, für $p \in$ **Path**, $d \in$ **Desc**
- $x \in$ **Desc**, für alle $x \in$ **Var**
- $d \wedge e \in$ **Desc**, für $d, e \in$ **Desc**

## Beispiel

- AGR–NUM : *Sg*
- SYN–SBJ : $\boxed{1}$ $\wedge$ SEM–AGT : $\boxed{1}$

# Bedingungen III

## Erfülltheit

Die Erfülltheitsrelation $\models^{\alpha}$ zwischen Merkmalstrukturen und Beschreibungen ist gegeben durch:

- Für $A \in$ **Type**, $F \models^{\alpha} A \iff A \sqsubseteq \theta(\bar{q})$
- $F \models^{\alpha} p : d \iff F@p \models^{\alpha} d$
- Für $x \in$ **Var**, $F \models^{\alpha} x \iff \alpha(x) = F$
- $F \models^{\alpha} d \wedge e \iff F \models^{\alpha} d$ und $F \models^{\alpha} e$

# Bedingungen III

## Erfülltheit

Die Erfülltheitsrelation $\models^{\alpha}$ zwischen Merkmalstrukturen und Beschreibungen ist gegeben durch:

- Für $A \in$ **Type**, $F \models^{\alpha} A \iff A \sqsubseteq \theta(\bar{q})$
- $F \models^{\alpha} p : d \iff F@p \models^{\alpha} d$
- Für $x \in$ **Var**, $F \models^{\alpha} x \iff \alpha(x) = F$
- $F \models^{\alpha} d \wedge e \iff F \models^{\alpha} d$ und $F \models^{\alpha} e$

# Bedingungen III

## Erfülltheit

Die Erfülltheitsrelation $\models^\alpha$ zwischen Merkmalstrukturen und Beschreibungen ist gegeben durch:

- Für $A \in$ **Type**, $F \models^\alpha A \iff A \sqsubseteq \theta(\bar{q})$
- $F \models^\alpha p : d \iff F@p \models^\alpha d$
- Für $x \in$ **Var**, $F \models^\alpha x \iff \alpha(x) = F$
- $F \models^\alpha d \wedge e \iff F \models^\alpha d$ und $F \models^\alpha e$

# Bedingungen III

## Erfülltheit

Die Erfülltheitsrelation $\models^\alpha$ zwischen Merkmalstrukturen und Beschreibungen ist gegeben durch:

- Für $A \in$ **Type**, $F \models^\alpha A \iff A \sqsubseteq \theta(\bar{q})$
- $F \models^\alpha p : d \iff F@p \models^\alpha d$
- Für $x \in$ **Var**, $F \models^\alpha x \iff \alpha(x) = F$
- $F \models^\alpha d \wedge e \iff F \models^\alpha d$ und $F \models^\alpha e$

# Bedingungen III

## Erfülltheit

Die Erfülltheitsrelation $\models^\alpha$ zwischen Merkmalstrukturen und Beschreibungen ist gegeben durch:

- Für $A \in \mathbf{Type}$, $F \models^\alpha A \iff A \sqsubseteq \theta(\bar{q})$
- $F \models^\alpha p : d \iff F@p \models^\alpha d$
- Für $x \in \mathbf{Var}$, $F \models^\alpha x \iff \alpha(x) = F$
- $F \models^\alpha d \wedge e \iff F \models^\alpha d$ und $F \models^\alpha e$

# Erfülltheit: Beispiel

## Sei $F$ eine Merkmalstruktur.

$$F = \begin{bmatrix} \mathrm{CAT} & \boxed{1} N \\ \mathrm{POS} & \boxed{2} \\ \mathrm{AGR} & \begin{bmatrix} \mathrm{NUM} & \mathit{Sg} \\ \mathrm{CAS} & \mathit{Nominativ} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \alpha(\boxed{1}) = \alpha(\boxed{2})$$

# Erfülltheit: Beispiel

## Sei $F$ eine Merkmalstruktur.

$$F = \begin{bmatrix} \text{CAT} & \boxed{1} N \\ \text{POS} & \boxed{2} \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{NUM} & \mathit{Sg} \\ \text{CAS} & \mathit{Nominativ} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \alpha(\boxed{1}) = \alpha(\boxed{2})$$

## Welche Beschreibungen aus **Desc** erfüllt $F$?

- $F \models^{\alpha} N$ ?
- $F \models^{\alpha} \text{CAT} : N$ ?
- $F \models^{\alpha} \text{AGR–CAS} : \mathit{nicht\text{-}Genitiv}$ ?
- $F \models^{\alpha} \text{POS} : N$ ?

# Erfülltheit: Beispiel

## Sei $F$ eine Merkmalstruktur.

$$F = \begin{bmatrix} \text{CAT} & \boxed{1} N \\ \text{POS} & \boxed{2} \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{NUM} & \mathit{Sg} \\ \text{CAS} & \mathit{Nominativ} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \alpha(\boxed{1}) = \alpha(\boxed{2})$$

## Welche Beschreibungen aus **Desc** erfüllt $F$?

- $F \models^{\alpha} N$ ? Nein!
- $F \models^{\alpha} \text{CAT} : N$ ?
- $F \models^{\alpha} \text{AGR–CAS} : \mathit{nicht\text{-}Genitiv}$ ?

- $F \models^{\alpha} \text{POS} : N$ ?

# Erfülltheit: Beispiel

## Sei $F$ eine Merkmalstruktur.

$$F = \begin{bmatrix} \text{CAT} & \boxed{1} N \\ \text{POS} & \boxed{2} \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{NUM} & Sg \\ \text{CAS} & Nominativ \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \alpha(\boxed{1}) = \alpha(\boxed{2})$$

## Welche Beschreibungen aus **Desc** erfüllt $F$?

- $F \models^{\alpha} N$ ? Nein!
- $F \models^{\alpha} \text{CAT} : N$ ? Ja!
- $F \models^{\alpha} \text{AGR–CAS} : \textit{nicht-Genitiv}$ ?
- $F \models^{\alpha} \text{POS} : N$ ?

# Erfülltheit: Beispiel

## Sei $F$ eine Merkmalstruktur.

$$F = \begin{bmatrix} \text{CAT} & \boxed{1} N \\ \text{POS} & \boxed{2} \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{NUM} & \mathit{Sg} \\ \text{CAS} & \mathit{Nominativ} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\alpha(\boxed{1}) = \alpha(\boxed{2})$$

## Welche Beschreibungen aus **Desc** erfüllt $F$?

- $F \models^\alpha N$ ? Nein!
- $F \models^\alpha \text{CAT} : N$ ? Ja!
- $F \models^\alpha \text{AGR–CAS} : \mathit{nicht\text{-}Genitiv}$ ? Ja!

  Denn: $\mathit{nicht\text{-}Genitiv} \sqsubseteq \mathit{Nominativ}$
- $F \models^\alpha \text{POS} : N$ ?

# Erfülltheit: Beispiel

## Sei $F$ eine Merkmalstruktur.

$$F = \begin{bmatrix} \text{CAT} & \boxed{1} N \\ \text{POS} & \boxed{2} \\ \text{AGR} & \begin{bmatrix} \text{NUM} & \mathit{Sg} \\ \text{CAS} & \mathit{Nominativ} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \qquad \alpha(\boxed{1}) = \alpha(\boxed{2})$$

## Welche Beschreibungen aus **Desc** erfüllt $F$?

- $F \models^{\alpha} N$ ? Nein!
- $F \models^{\alpha} \text{CAT} : N$ ? Ja!
- $F \models^{\alpha} \text{AGR–CAS} : \mathit{nicht\text{-}Genitiv}$ ? Ja!
  Denn: $\mathit{nicht\text{-}Genitiv} \sqsubseteq \mathit{Nominativ}$
- $F \models^{\alpha} \text{POS} : N$ ? Ja!

# Beschreibungen als Merkmalstrukturen

## *MGSat* (allgemeinster Erfüller)

Zu jeder *konsistenten* (widerspruchsfreien) Beschreibung $d \in \mathbf{Desc}$ gibt es eine Merkmalstruktur $MGSat(d) \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft

$$\forall F \in \mathcal{F}.\ F \models d \iff MGSat(d) \sqsubseteq F$$

## Konstruktion

- Für $A \in \mathbf{Type}$: $MGSat(A) = \begin{bmatrix} \mathrm{A} \end{bmatrix}$
- $MGSat(f_1 f_2 \ldots f_n : d) = \begin{bmatrix} f_1 & \begin{bmatrix} f_2 & \ldots & \begin{bmatrix} f_n & MGSat(d) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$
- Wenn $\mathbf{Var} = \mathbb{N}$, dann $MGSat(1) = \begin{bmatrix} \boxed{1} \end{bmatrix}$
- $MGSat(d \wedge e) = MGSat(d) \sqcup MGSat(e)$

# Beschreibungen als Merkmalstrukturen

## *MGSat* (allgemeinster Erfüller)

Zu jeder *konsistenten* (widerspruchsfreien) Beschreibung $d \in \mathbf{Desc}$ gibt es eine Merkmalstruktur $MGSat(d) \in \mathcal{F}$ mit der Eigenschaft

$$\forall F \in \mathcal{F}.\ F \models d \iff MGSat(d) \sqsubseteq F$$

## Konstruktion

- Für $A \in \mathbf{Type}$: $MGSat(A) = \begin{bmatrix} \mathrm{A} \end{bmatrix}$
- $MGSat(f_1 f_2 \dots f_n : d) = \begin{bmatrix} f_1 & \begin{bmatrix} f_2 & \dots & \begin{bmatrix} f_n & MGSat(d) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$
- Wenn $\mathbf{Var} = \mathbb{N}$, dann $MGSat(1) = \begin{bmatrix} \boxed{1} \end{bmatrix}$
- $MGSat(d \wedge e) = MGSat(d) \sqcup MGSat(e)$

# Bedingungsprüfung per Unifikation: Beispiel

## Grammatikregel mit Constraint

`NP[CAS=?y]` $\rightarrow$ `DET[GEN=?x,CAS=?y] N[GEN=?x]`

## Bedingungen als Beschreibungen

- $\text{type}: NP \wedge \text{CAS}: \boxed{2}$
- $\text{type}: DET \wedge \text{GEN}: \boxed{1} \wedge \text{CAS}: \boxed{2}$
- $\text{type}: N \wedge \text{GEN}: \boxed{1}$

## Bedingungen als Merkmalstrukturen

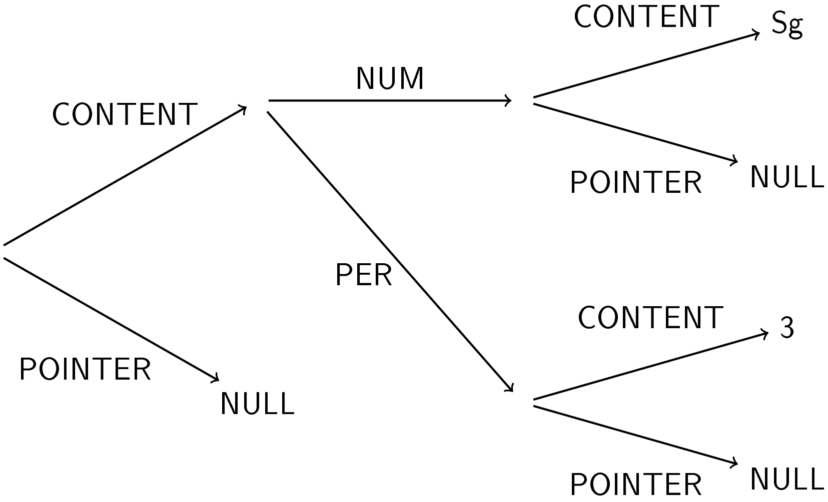
$$\begin{bmatrix} \text{type} & NP \\ \text{CAS} & \boxed{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{type} & DET \\ \text{GEN} & \boxed{1} \\ \text{CAS} & \boxed{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{type} & N \\ \text{GEN} & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

# Nächstes Thema

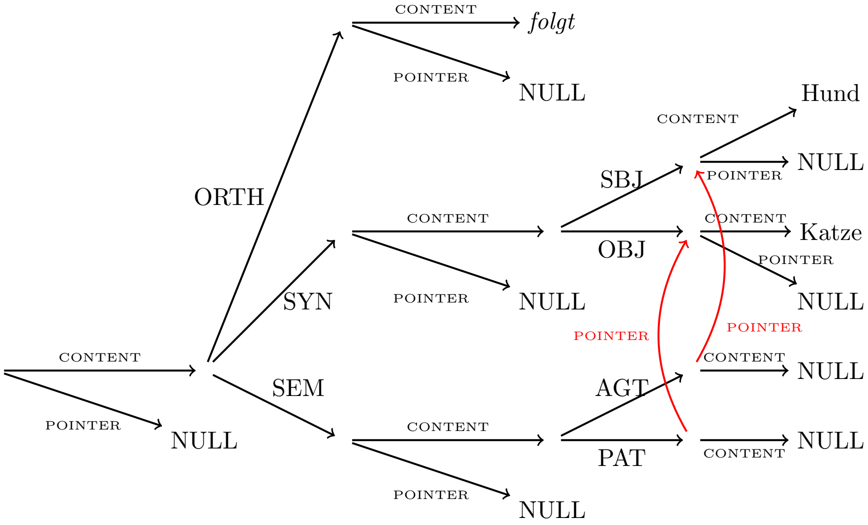
1. Formale Grundlagen
   - Merkmalstrukturen
   - Subsumption
   - Unifikation
   - Bedingungen

2. Implementierung
   - Merkmalstrukturen
   - Unifikation

# Merkmalstrukturen: Implementierung mit Zeigern

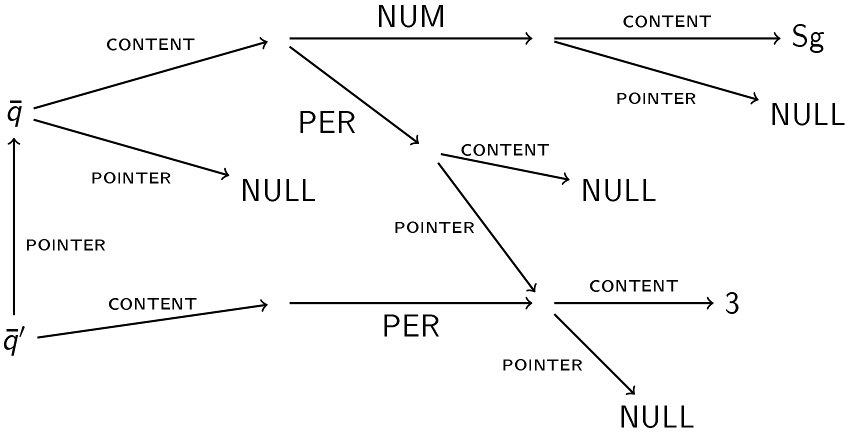


# Reentrance (Wiedereintritt)



# Unifikation: Implementierung mit Zeigern

$$\begin{bmatrix}\text{NUM} & Sg\end{bmatrix} \sqcup \begin{bmatrix}\text{PER} & 3\end{bmatrix}$$



# Unifikationsalgorithmus

```
function unify(f1-orig, f2-orig)
    f1 ← deref(f1-orig)                              ▷ Verfolgen von .pointer
    f2 ← deref(f2-orig)
    if f1, f2 ∈ Type then
        return unifyValues(f1, f2)                   ▷ z. B. per Typhierarchie
    if f1 ∈ ContPoint ∧ f1.content is NULL then
        f1.pointer ← f2
        return f2
    if f2 ∈ ContPoint ∧ f2.content is NULL then
        f2.pointer ← f1
        return f1
    if f1, f2 ∈ ContPoint then
        f2.pointer ← f1
        return unify(f1.content, f2.content)
    ...
```

# Unifikationsalgorithmus II

**function** unify(f1-orig, f2-orig)
    ...
    **if** f1, f2 $\in \mathcal{F}$ **then**
        **for all** *feat*2 $\in$ f2 **do**
            *feat*1 $\leftarrow$ erstelle oder finde entsprechendes Feature in f1
            **if** unify(*feat*1, *feat*2) = failure **then**
                **return** failure
        **return** f1
    **return** failure          $\triangleright$ Kein Fall vorher hat zugetroffen

# Rückblick: Heutige Themen

1. Formale Grundlagen
   - Merkmalstrukturen
   - Subsumption
   - Unifikation
   - Bedingungen

2. Implementierung
   - Merkmalstrukturen
   - Unifikation