العمليات على اللغات المنتظمة + توطئة الضخ

م. سليمان الدروبي

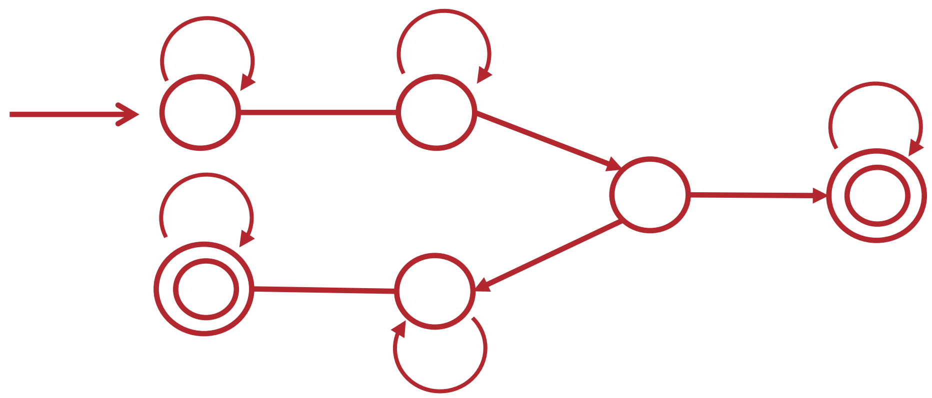
المتمم

الطريقة العامة لإيجاد متمم هي:

1. نحافظ على الحالة البدائية

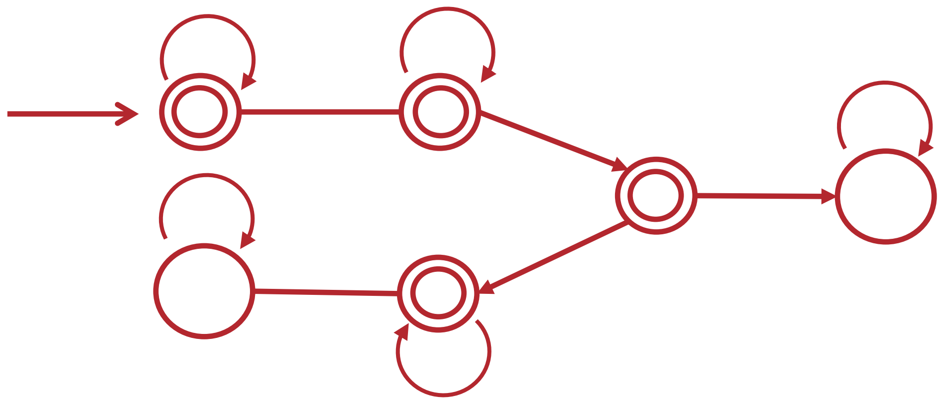
↙ نقلب كل حالة عادية (غير نهائية) لحالة نهائية وبالعكس مع الانتباه إلى ضرورة أن يكون الأوتومات المراد التحويل منه هو DFA حصراً وإذا لم يكن DFA نحوله إلى DFA

1. مثال: أوجد المتمم للأوتومات الكلي



- نحافظ على الحالة البدائية

ونقلب الحالات الغير نهائية (العادية) إلى نهائية وبالعكس مع المحافظة على الأسهم



إيجاد تقاطع لغتين (أوتوماتين)

إن عملية التقاطع بين لغتين L_1 , L_2 هو مجموعة السلاسل الموجودة في اللغتين معاً

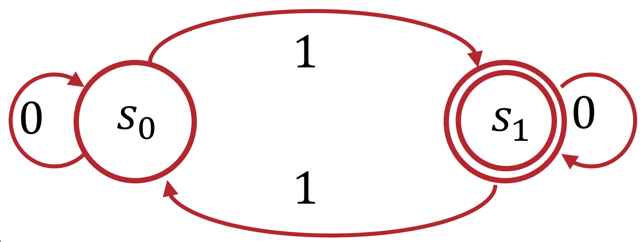
خوارزمية إيجاد التقاطع:

1. إيجاد حالات أوتومات التقاطع، فإذا كان عدد الحالات في M_1 هو N وفي M_2 هو M فإن عدد الحالات $M(L_1 \cap L_2)$ هو $N \times M$ ويتم إيجاد الحالات عن طريق الجداء الديكارتي لـ Q_1, Q_2 $(Q_1 \times Q_2)$ حيث Q_1 هي مجموعة حالات M_1 و Q_2 هي مجموعة حالات M_2
2. إيجاد الحالة الابتدائية: إذا كانت الحالة البدائية في M_1 هي S_0
وفي M_2 هي r_0 فإن الحالة الابتدائية! $M(L_1 \cap L_2)$ هي S_0 r_0 أي هي اجتماع الحالة البدائية من الأوتومات الأول مع الحالة البدائية من الأوتومات الثاني
3. إيجاد الحالات النهائية: إذا كانت مجموعة الحالات النهائية في M_1 هي F_1
ومجموعة الحالات النهائية في M_2 هي F_2 فإن مجموعة الحالات النهائية لـ $M(L_1 \cap L_2)$ هي $F_1 \times F_2$ الجداء الديكارتي للحالات النهائية في الأوتوماتين)

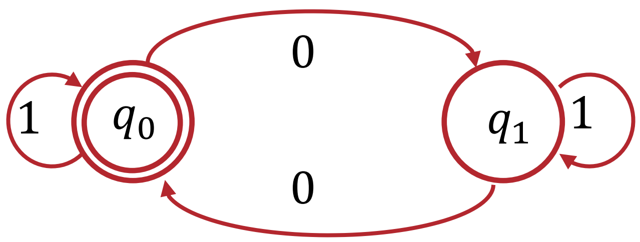
- إيجاد الانتقالات: ويكون بالشكل التالي:

- إذا كان لدينا M_1 الانتقال: $q_i \xrightarrow{a} q_j$
- وفي M_2 الانتقال: $s_k \xrightarrow{a} s_n$
- يكون الانتقال في الاوتومات النابج عن تقاطع اللغتين: $q_i\,s_k \xrightarrow{a} q_j s_n$

2. مثال: أوجد تقاطع الأوتوماتين التاليين:



أوتومات يقبل السلاسل ذات
العدد الفردي من الواحدات Q_2



أوتومات يقبل السلاسل ذات
العدد الزوجي من الأصفار Q_1

▪ تقاطع $L_1 \cap L_2$:

- لنطبق الخوارزمية السابقة: $Q_1 = \{q_0, q_1\}, Q_2 = \{s_0, s_1\}$

1. يتم إيجاد عدد الحالات عن طريق أخذ الجداء الديكارتي لـ Q_1, Q_2: $Q = 2 \times 2 = 4$

- وحالات التقاطع هي (الأوتومات الناتج): $Q = \{q_0s_0\ ,\ q_0s_1\ ,\ q_1s_0\ , q_1s_1\}$

2. الحالة البدائية في Q_1 هي q_0 والحالة البدائية في Q_2 هي s_0 إذاً الحالة البدائية الناتجة هي q_0s_0

- الحالة النهائية في Q_1 هي q_0 والحالة النهائية في Q_2 هي s_1 إذاً الحالة النهائية الناتجة هي q_0s_1 لوجود حالة نهائية وحيدة في كلا الأوتوماتين.

إيجاد الانتقالات:

	0	1
→ $q_0\ s_0$	$q_1\ s_0$	$q_0\ s_1$
* $q_0\ s_1$	$q_1\ s_1$	$q_0\ s_0$
$q_1\ s_0$	$q_0\ s_0$	$q_1\ s_1$
$q_1\ s_1$	$q_0\ s_1$	$q_1\ s_0$

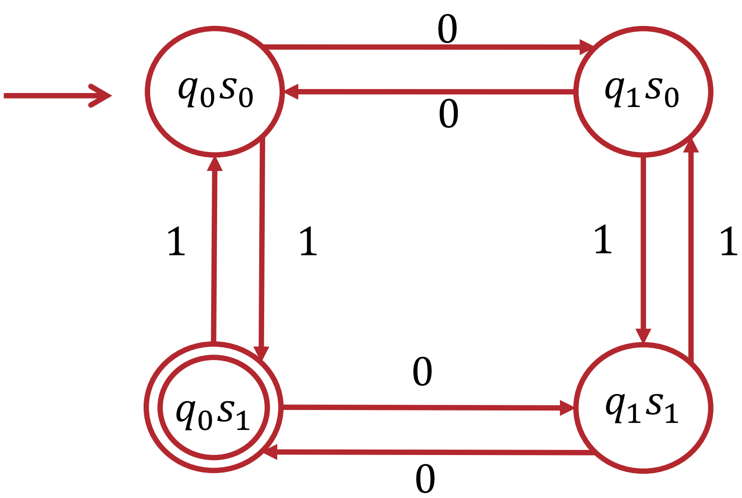
- q_0 في Q_1 عند الـ0 تنتقل إلى q_1
  s_0 في Q_2 عند الـ0 تنتقل إلى s_0 نفسها

إذن $q_0\ s_0$ عند الـ0 تنتقل إلى $q_1\ s_0$

- q_0 في Q_1 عند الـ1 تنتقل إلى q_0 نفسها
  s_0 في Q_2 عند الـ1 تنتقل إلى s_1

إذن $q_0\ s_0$ عند الـ1 تنتقل إلى $q_0\ s_1$

- وبنفس الطريقة السابقة نوجد الانتقالات لبقية حالات الأوتومات الجديد...
- لنرسم:



يمثل تقاطع سلاسل ذات عدد زوجي من الأصفار وعدد فردي من الواحدات بنفس الوقت.

توطئة الضخ

كما نعلم وذكرنا في المحاضرات النظرية تعتمد توطئة الضخ على مبدأ برج الحمام والذي ينص على:

- إذا كان لدينا m حمامة في n مكان حيث: $m \gg n$ (m عدد الحمامات في n عدد الأمكنة) وبالتالي إذا استطعنا وضع m كائن في n مكان فإنه في مكان أو أكثر هناك كائنين أو أكثر موجودين في نفس المكان.
- وبشكل مماثل لمبدأ برج الحمام إذا كان لدينا أوتومات يحتوي على عدد حالات n ويقبل سلسلة تحوي على m رمز حيث $m > n$ فهذا يعني أن السلسلة مرت على حالة معينة مرتين أو أكثر وبالتالي يوجد ضخ عند حالة ما.

تعريف: من أجل كل لغة منتظمة يوجد ثابت (ثابت التوطئة أو الضخ)

$N > 1$ حيث من أجل كل سلسلة $S \in L \ \ |s| \geq N$ طولها أكبر أو يساوي N فيمكن تقسيم الـS إلى ثلاث سلاسل

(أي إذا كان S عدد الحالات أكبر من عدد حالات الأوتومات $N \Leftarrow$ يوجد حلقة)

$$S = X\,Y\,Z$$

شرح: قسم بعد الحلقة (Z) — قسم ضمن الحلقة (Y) — قسم ما قبل الحلقة (الدوران) (X)

(S سلسلة كيفية أي نحن من يقوم باختيار X, Y, Z) بحيث تحقق:

$$\left\{\begin{array}{l} |XY| \leq N \\ |Y| > 0 \quad \text{أو} \quad |Y| \geq 1 \\ \forall i > 0 \Rightarrow S = XYZ \in L \end{array}\right.$$

شروط ثابتة دوماً نحافظ عليها

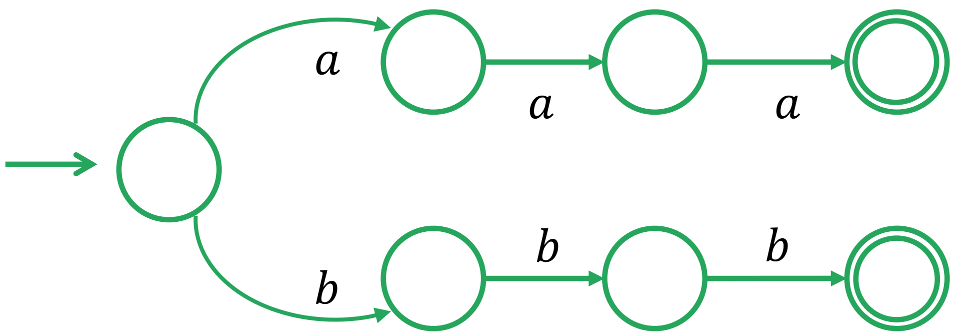
إذا اختل الشرط $S = XYZ \in L \Leftarrow L$ لغة غير منتظمة

طول Y لا يساوي 0 أي على الأقل تحوي رمز واحد غير ε وطول $|XY|$ أصغر أو يساوي ثابت الضخ.

> تستخدم توطئة الضخ لإثبات أن اللغة غير منتظمة عن طريق نقض الفرض (وهو أن اللغة منتظمة) لأنه في حال كان الأوتومات غير منتهي فلدي عدد لا نهائي من الحالات.
>
> وبدايةً نفرض أن N هو ثابت التوطئة وهو يتعلق بعدد الحالات.

- مثال توضيحي:

$$L = \{aaa, bbb\}$$



N عدد حالات الأوتومات $N = 7$

$i = 3$ أطول سلسلة في الأوتومات $< N \quad \Leftarrow$ اللغة منتظمة (لأننا استطعنا تمثيلها بأوتومات)

حتى تكون اللغة منتظمة مهما تكن قيمة i إذا تم ضخ S بعدد مرات N يجب استمرار انتمائها لـ L

▪ تمرين 1 : أثبت أن اللغة غير منتظمة. $L = \{a^i . b^j \; , \; i = j\}$

الحل: يمكن إثباتها عن طريق نقض الفرض

أي: نفرض أن (L) لغة منتظمة و N ثابت توطئة الضخ

نفرض S سلسلة من ... L ولتكن: $S = a^N . b^N$ يجب أن تحقق L وتكون بدلالة N

$|S| = 2N > N$ طويلة S تحسب كالتالي: a تكررت N مرة و b تكررت N مرة $N + N = 2N \Leftarrow$

نفرض: $Y = a^k \; ; k \geq 1$

حيث: $|Y| \geq 1$ و $|XY| < N$

$S = XYZ \in^{?} L \quad , \forall i \geq 0$

ملاحظة: يختلف ثابت التوطئة من تمرين إلى آخر.

$|XY|$ تسلسل حالات $a \ldots a^k$

$|Y|$ على الأقل a

بفرض $i = 2 \quad \Leftarrow \quad S = XY\,Y\,Z \leftarrow$ عند زيادة Y تزداد a وتبقى b ثابتة لأنها ليست ضمن XY

$\leftarrow$ الـZ تحوي على تكرارات b وقد تحوي a

عند ضخ $i \geq 1 \quad \leftarrow \quad$ تزداد $a \quad \leftarrow \quad$ تكرارات a أكبر من تكرارات b

$\Leftarrow S \notin L$ وبالتالي اللغة غير منتظمة.

▪ تمرين 2 : $L = \{a^P : P \; is \; prime\}$

الحل: نفرض أن اللغة L منتظمة وأن N ثابت توطئة الضخ

N هو عدد أولي أكبر أو يساوي الـ P لكي تتكون حلقة تتكرر فيها Y

$$S = a^N \quad ; \quad |S| = N > P$$

$$S = XYZ = a^N$$

$$|XY| < P \quad , \quad |Y| \geq 1$$

$$\forall i \geq 0 \;\Rightarrow\; S, X, Y^i, Z \in^{?} L$$

نفرض: $Y = a^K ; K \geq 1$

بفرض $i = 1 \Leftarrow S = XYZ = a^N$

$i = 2 \Leftarrow S = XYYZ = a^{N+K}$

$i = 3 \Leftarrow S = XYYYZ = a^{N+2K}$

قابل أن يكون أولي وغير أولي وهذا لا يكفي يجب أن تكون الحالة غير أولي حصراً

$i = N + 1 \Leftarrow S = XY^{N+1}Z = a^{N+NK} = a^{N(1+K)}$

K على الأقل $1 \Leftarrow N(1+K)$ ليس أولي لأنه يقبل القسمة على N و $K+1$ وعلى $N(1+K)$

(ضرب عدد أولي بعدد غير الـ1 يصبح غير أولي $\Leftarrow S \notin L \Leftarrow$ اللغة غير منتظة)

▪ تمرين 3 : $L = \{a^i : i = j^2 \ , \ j > 0\}$

الحل: نفرض L منتظمة و N ثابت التوطئة

- الـN عدد حالات الأوتومات بما أن L منتظمة فإن N تعبر عن ثابت التوطئة وهي عدد حالات الأوتومات المحتملة.
- إذا لم تكن L منتظمة لا يمكن تطبيق توطئة الضخ.

$$S = a^i : i = j^2 \rightarrow a^{N^2} \qquad |S| = N^2 > N$$

$$S = XYZ$$

$$|Y| \geq 1 \quad , \quad |XY| < N$$

نفرض: $K \geq 1 \,; Y = a^K$

$$, \ S = X\,Y^i\,Z \in^? L \forall i \geq 0$$

$$X\,Y\,Z = a^{N^2+iK}$$

نفرض: $i = 1 \quad \Leftarrow \quad S = XYZ = a^{N^2+K}$

نريد معرفة فيما اذا كان $N^2 + K$ هو مربع العدد أم لا

نعلم أن $N^2 < N^2 + K$ وبما أن $K < N$ فيمكن أن نكتب:

$$N^2 < N^2 + K < N^2 + N < N^2 + 2N + 1$$

$$N^2 < (N+1)^2$$

مربع عددين متتاليين لا يمكن أن يوجد بينهما عدد

أي $N^2 + K$ ليس مربع لعدد

$S \notin L \Leftarrow$ اللغة غير منتظمة

نلاحظ أن خطوات الحل في توطئة الضخ ثابتة والاختلاف يكون في ثابت التوطئة

انتهت المحاضرة