التوابع العقدية التوافقية وصيغ كوشي

د. غياث النحاس

قسم العقدية:

تذكرة: (إيجاد المرافق التوافقي):

تعريف:

إذا كان لدينا التابع $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ وكان توافقياً في المستوي العقدي z عندئذ نسمي:

- $u(x,y)$ هو المرافق التوافقي للتابع $v(x,y)$
- $v(x,y)$ هو المرافق التوافقي للتابع $u(x,y)$

لإيجاد المرافق التوافقي نتبع ما يلي:

- بفرض طلب منا إيجاد المرافق التوافقي $v(x,y)$ للتابع $u(x,y)$:

نستخدم شرطي كوشي وريمان باعتبار أن كل تابع توافقي هو تابع تحليلي فكل تابع تحليلي يحقق شرطي كوشي وريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ونأخذ أحد الشرطين حصراً (حسب سهولة الحل في المكاملة) ومنه يكون لدينا حالتين:

1. إذا أخذنا أول شرط فإننا نكامل بالنسبة للمتحول y فينتج لدينا عبارة المرافق التوافقي v:

$$v(x,y) = \text{نتيجة التكامل} + \varphi(x)$$

حيث $\varphi(x)$ تابع ثابت بالنسبة لـx ولإيجاد قيمة نشتق جزئيا بالنسبة لـx ثم نطابق مع الشرط الثاني ونكامل بالنسبة لـx فينتج لدينا المرافق التوافقي.

2. إذا أخذنا الشرط الثاني فإننا نكامل بالنسبة للمتحول x فينتج لدينا عبارة المرافق التوافقي v:

$$v(x,y) = \text{نتيجة التكامل} + \varphi(y)$$

حيث $\varphi(y)$ تابع ثابت بالنسبة لـy ولإيجاد قيمته نشتق جزئيا بالنسبة لـy ثم نطابق مع الشرط الأول ونكامل بالنسبة لـy فينتج لدينا المرافق التوافقي.

- بنفس الطريقة إذا طلب منا إيجاد المرافق التوافقي لـ$v(x,y)$:

نقوم بإيجاد $u(x,y)$ حسب المذكور سابقا مع اختلاف الرموز أي بدلا من $v(x,y)$ نضع $u(x,y)$

((عندما نحسب نتيجة التكامل للمشتقات الجزئية أو عند إيجاد قيمة $\varphi(x)$ أو $\varphi(y)$ لا داعي لوضع ثابت التكامل إلا إذا كان $\varphi'(x)=0$ أو $\varphi'(y)=0$ فعندها يكون الناتج ثابت تكامل جديد لأن $\int 0 = c$))

احسب التكاملات الآتية:

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{it}.dt$$

الحل:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{it}.dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + i\sin t), dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t)dt + i\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin t)dt$$

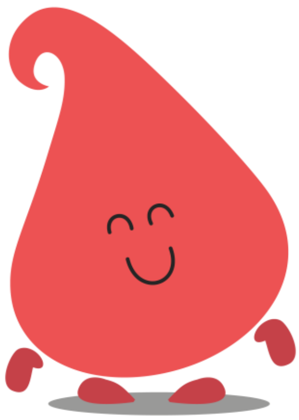
نحسب التكاملات:

$$= [sint]_0^{\frac{\pi}{3}} - i[cost]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(0)\right] - i\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0)\right]$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right] - i\left[\frac{1}{2} - 1\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{it}.dt = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$



2) $$\int_c \bar{z}dz$$

حيث c منحني معطى بالعلاقة:

$$z(t) = t^2 - it \quad , \quad 0 \le t \le 1$$

الحل:

(هنا لدينا المعطيات هي z والمطلوب هو تكامل $\bar{z}.dz$ فنعمل على إيجاد كل من $\bar{z}$ وdz)

$$z(t) = t^2 - it \rightarrow \bar{z} = t^2 + it$$

$$\frac{dz}{dt} = 2t - i \rightarrow dz = (2t - i)dt$$

نعوض:

$$\int_c \bar{z}dz = \int_0^1 (t^2 + it)(2t - i)dt$$

(ننشر القوسين):

$$= \int_0^1 (2t^3 - it^2 + 2it^2 + t)dt$$

$$= 2\int_0^1 t^2.dt + i\int_0^1 t^2.dt + \int_0^1 t.dt$$

$$= \frac{1}{2}[t^4]_0^1 + \frac{i}{3}[t^3]_0^1 + \frac{1}{2}[t^2]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}[1-0] + \frac{i}{3}[1-0] + \frac{1}{2}[1-0]$$

$$\Rightarrow \int_c \bar{z}dz = 1 + \frac{1}{3}i$$

صيغ كوشي التكاملية

صيغة كوشي التكاملية الأولى

إذا كان التابع $f(z)$ تابع تحليلي داخل وعلى محيط المنحني C وكانت z_0 نقطة شاذة ونوعها قطب بسيط (من الدرجة $n = 1$) عندئذ:

$$\int_{C^+} \underbrace{\frac{f(z)}{z - z_0}}_{(z-z_0)^1 \to n=1} . dz = 2\pi i f(z_0)$$

قطب بسيط (من الدرجة الأولى)

صيغة كوشي التكاملية الثانية

إذا كان التابع $f(z)$ تابع تحليلي داخل وعلى محيط المنحني C وكانت z_0 نقطة شاذة ونوعها قطب من الدرجة $(n > 1)$ عندئذ:

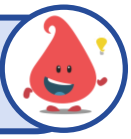
$$\int_{C^+} \underbrace{\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}}_{\text{درجة ثانية وما فوق}} . dz = \frac{2\pi i}{n!} . f^{(n)}(z_0)$$

مثال بسيط لإيجاد n:

$$(z - z_0)^3 \to n = 2$$

ملاحظات:

1. لتطبيق كلا النظريتين يجب أن تكون أمثال z تساوي الواحد
2. C^+ تشير للاتجاه الموجب للمنحني (أي عكس جهة دوران عقارب الساعة)
3. لا داعي لوضع ثابت التكامل c



لحل التكاملات العقدية الكسرية نتبع الخوارزميات الآتية:

أولاً: نبحث عن النقاط الشاذة (هي تلك النقاط التي تعدم المقام)

ثانياً: ندرس انتماء النقاط الشاذة للمنحني C المعطى (يمكننا رسم المنحني C) هنا نناقش الحالات الآتية:

- إذا كانت النقاط الشاذة قسم منها ينتمي للمنحني C والقسم الآخر لا ينتمي، عندئذ النقاط التي لا تنتمي للمنحني C تصبح مقاماً للبسط، أما النقاط التي تنتمي نطبق عليها صيغة كوشي التكاملية (الأولى أو الثانية)
- إذا كانت كل النقاط الشاذة تنتمي للمنحني C فإننا نفرق الكسر ثم نحسب الثوابت ثم نكامل بحسب صيغة كوشي (الأولى أو الثانية)
- إذا كانت كل النقاط الشاذة لا تنتمي للمنحني C فالتكامل يساوي الصفر بحسب نظرية كوشي.

Say to yourself:

I choose to be **happy**

⬋ **باستخدام صيغة كوشي الأولى أو الثانية احسب التكاملات التالية في الساحة العقدية C:**

1
$$\oint_{C^+} \frac{z^2-2z+3}{(z-1)(z+2)^3}.dz$$

حيث: $C:|z|=3$.

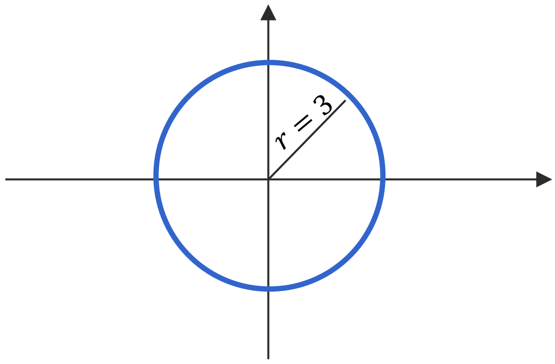
((من نص السؤال نرى أن $C:|z|=3$ هي معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 3))

الحل:

1. نبحث عن النقاط الشاذة (تلك النقاط التي تعدم المقام):

$$(z-1)(z+2)^3=0$$

إما: $z_1=1$ أو $z_2=z_3=z_4=-2$



2. $z_1=1 \in C$ و $z_2=z_3=z_4=-2$

(كل النقاط الشاذة $\in C$) نفرق الكسر:

$$\frac{z^2-2z+3}{(z-1)(z+2)^3}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}+\frac{E}{(z+2)^2}+\frac{D}{(z+2)^3}$$

نحسب الثوابت A ثم D ثم E ثم B:

(لحساب الثابت A نضرب طرفي العلاقة ب$(z-1)$ ثم نجعل $z\to 1$)

(لحساب الثابت B نضرب طرفي العلاقة ب$(z+2)$ ثم نجعل $z\to -2$)

(لحساب الثابت E نضرب طرفي العلاقة ب$(z+2)^2$ ثم نجعل $z\to -2$)

(لحساب الثابت D نضرب طرفي العلاقة ب$(z+2)^3$ ثم نجعل $z\to -2$)

حساب A:

نضرب طرفي العلاقة ب $(z-1)$ لتصبح:

$$A=\frac{z^2-2z+3}{(z+2)^3}$$

نجعل $z\to 1$ (نعوض $z=1$):

$$\boxed{A=\frac{2}{27}}$$

وبنفس الطريقة لحساب بقية الثوابت:

$$A=\frac{2}{27}, D=-\frac{11}{3}, B=-\frac{2}{27}, E=\frac{7}{9}$$

نعوض:

$$\oint_{C^+}\frac{z^2-2z+3}{(z-1)(z+2)^3}.dz=\frac{2}{27}\oint_{C^+}\frac{dz}{z-1}-\frac{2}{27}\oint_{C^+}\frac{dz}{z+2}+\frac{7}{9}\oint_{C^+}\frac{dz}{(z+2)^2}-\frac{11}{3}\oint_{C^+}\frac{dz}{(z+2)^3}$$

باستخدام صيغة كوشي الأولى بتكامل الحد الأول والثاني (لأنهم قطب بسيط)، وصيغة كوشي الثانية بتكامل الحدين الثالث والرابع (لأن $n>1$)

★

$$\frac{2}{27}2\pi i.f(1)-\frac{2}{27}2\pi i.f(-2)+\frac{7}{9}\frac{(2\pi i)}{1!}.f'(-2)-\frac{11}{3}\frac{(2\pi i)}{2!}.f''(-2)$$

⬋ **هذه الجملة هام جدا ذكرها ضمن الحل:**

((التابع $f(z)=z^3-2z+3$ تابع تحليلي داخل وعلى محيط المنحني C لذلك استطعنا تطبيق صيغة كوشي التكاملية الأولى والثانية.))

الآن نقوم بإيجاد كلا من $f(1), f(-2), f'(-2), f''(-2)$

$$f(1) = 2 \quad , \quad f(-2) = 11$$

$$f'(z) = 2z - 2 \rightarrow f'(-2) = -6$$

$$f''(z) = 2 \rightarrow f''(-2) = 2$$

نعوض في ★

$$\frac{8\pi i}{27} - \frac{44}{27}\pi i - \frac{84}{9}\pi i - \frac{22}{3}\pi i$$

(نوحد المقامات)

$$\int_{C^+} \frac{z^2 - 2z + 3}{(z-1)(z+2)^3}.dz = -18\pi i$$

---

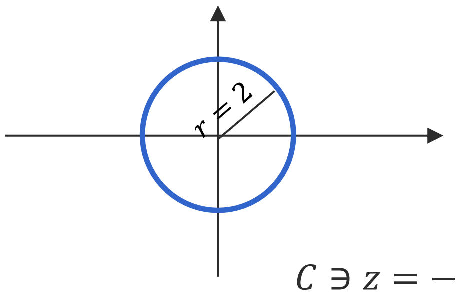
2 $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}.dz \quad ; \quad C: |z| = 2$

الحل:

نبحث عن النقاط الشاذة (تلك النقاط التي تعدم المقام)

$$(z+1)^4 = 0$$

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = -1$$



2. $C \ni z = -1$

التابع $f(z) = e^{2z}$ تابع تحليلي داخل وعلى محيط C

فحسب صيغة كوشي التكاملية الثانية نجد:

$$\int_{C^+} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}.dz = \frac{2\pi i}{3!}.f'''(-1)$$

$$f(z) = e^{2z} \rightarrow f'(z) = 2e^{2z}$$

$$f''(z) = 4e^{2z}$$

$$f'''(z) = 8e^{2z}$$

$$\rightarrow f'''(-1) = 8e^{-2} = \frac{8}{e^2}$$

نعوض:

$$\int_{C^+} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}.dz = \frac{2\pi i}{3!}.\frac{8}{e^2}$$

$$\int_{C^+} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}.dz = \frac{8}{3}.\frac{\pi i}{e^2}$$

---

3 $\displaystyle\int_{C^+} \frac{ch(iz)}{z^2 + 4z + 3}.dz$

$C_1: |z| = 2 \qquad C_2: |z| = 5$

الحل:

أولا: (C_1) معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ نصف قطرها (r=2)

1. نبحث عن النقاط الشاذة (تلك التي تعدم المقام):

$$z^2 + 4z + 3 = 0$$

$$(z+3)(z+1) = 0$$

إما $z_1 = -1$ أو $z_2 = -3$

2. $C_1 \ni z_1 = -1 \;, \quad C_1 \not\ni z_2 = -3$

(نجعل النقاط التي لا تنتمي ل C_1 مقاما للبسط)

يصبح التابع:

$$\int_{C_1} \frac{\frac{ch(iz)}{z+3}}{z+1}.dz$$

التابع $f(z) = \frac{ch(iz)}{z+3}$ تابع تحليلي داخل وعلى محيط C_1

فحسب صيغة كوشي الأولى التكاملية:

$$\boxed{\int_{C_1} \frac{\frac{ch(iz)}{z+3}}{z+1}.dz = 2\pi i.f(-1)}$$ ★

تذكر:

$$ch(-i) = ch(i)$$

$$ch(i) = \cos(1)$$

$$f(z)=\frac{ch(iz)}{z+3}\to f(-1)=\frac{ch(-i)}{2}=\frac{ch(i)}{2}=\frac{\cos(1)}{2}$$

نعوض في ★

$$\int_{C_1}\frac{\frac{ch(iz)}{z+3}}{z+1}.dz=\pi i\cos(1)$$

ثانيا: (C_2) معادلة دائرة مركزها $(0,0)$ نصف قطرها r=5)

1. بحثنا عن النقاط الشاذة سابقا.
2. $C_2 \ni z_1=-1,\ C_2\ni z_2=-3$

(جميع النقاط $\ni C_2$)

نفرق الكسر:

$$\frac{ch(iz)}{z^2+4z+3}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+3}$$

نحسب الثوابت A وB ونجد:

$$A=\frac{\cos(1)}{2},\qquad B=\frac{ch(-3i)}{-2}=\frac{ch(3i)}{-2}$$

التابع $f(z)=ch(iz)$ تابع تحليلي داخل على محيط C_2:

$$\int_{C_2}\frac{ch(iz)}{(z+1)(z+3)}.dz$$

$$=\frac{\cos(1)}{2}\int_{C_2}\frac{dz}{z+1}-\frac{ch(i3)}{2}\int_{C_2}\frac{dz}{z+3}$$

حسب صيغة كوشي الأولى:

$$=\frac{\cos(1)}{2}.2\pi i f(-1)-\frac{ch(i3)}{2}.2\pi i f(-3)$$

$$f(-1)=ch(i)=\cos(1)$$

$$f(-3)=ch(-3i)=ch(3i)$$

$$\Rightarrow\int_{C_2}\frac{ch(iz)}{(z+1)(z+3)}.dz$$

$$=\pi i\cos^2(1)-\pi i ch^2(3i)$$

4 $\displaystyle\int_{C^+}\frac{\sin^2 z}{(z+4)^5}.dz,\quad C:|z|=2$

((المنحني C عبارة عن دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 2))

الحل:

1. نبحث عن النقاط الشاذة (التي تعدم المقام)

$$z+4=0$$

$$z_1=z_2=z_3=z_4=z_5=-4$$

2. $C\not\ni z=-4$ والتابع $f(z)=\sin^2 z$ تابع تحليلي داخل وعلى محيط c فحسب كوشي:

$$\int_{C^+}\frac{\sin^2 z}{(z+4)^5}.dz=0$$

---

5 $\displaystyle\int_c\frac{\sin^3 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}.dz,\quad c:|z|=1$

الحل:

1. نبحث عن النقاط الشاذة (التي تعدم المقام):

$$\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3=0$$

$z_1=z_2=z_3=\frac{\pi}{6}\approx\frac{1}{2}$ حيث $\pi=3.14$

2. $C\ni z=\frac{\pi}{6}\approx\frac{1}{2}$ التابع $f(z)=\sin^3 z$ تابع تحليلي داخل وعلى محيط C حسب علاقة كوشي الثانية:

$$\int_c\frac{\sin^3 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}.dz=\frac{2\pi i}{2!}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$f(z)=\sin^3 z$$

$$f'(z)=3\sin^3 z.\cos z$$

$$f''(z)=3(2\sin z.\cos^2 z)+3(-\sin^3 z)$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-3\sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^2-3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{15}{8}$$

$$\int_c\frac{\sin^3 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}.dz=\frac{15}{8}\pi i$$

The End..