Mathematik für Ingenieure 1 und 2

Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

Prof. Dr. Lucy Weggler

31. März 2025

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mathematik 1

1.1 Mengen und Logik

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen . . .

- was eine Menge ist und wie man Mengen aufschreibt
- was Aussagen sind und wie man Aussagen aufschreibt
- Mengenoperationen und Aussagenlogik zu benutzen, um
  - mathematische Kurzschreibweise selbst zu benuzten
  - mathematische Kurzschreibweise inhaltlich zu erfassen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.1.1 Was ist eine Menge in der Mathematik?

Mit Hilfe von Mengen kann man fast alle mathematischen Objekte beschreiben. Ob die Zahl 7, ein Kreis in der Ebene, die Relation "$\leq$" oder die Sinus-Funktion: all diese Objekte kann man als mehr oder weniger komplizierte Menge angeben! In der Mathematik wird eine Menge durch geschwungene Klammern angezeigt: $\{\}$. Zwischen den Klammern notiert man die Elemente der Menge. Eine Menge [set] kann man sich vorstellen wie einen Beutel, in dem Elemente drin stecken und für die Elemente gelten folgende Eigenschaften:

Eigenschaften einer Menge — Regel 1

- Die Reihenfolge der Elemente einer Menge ist egal. Für eine Menge M, deren Elemente die drei Zahlen $1, 2$ und 3 sind, gilt also:

$$M = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 2, 1\}\,.$$

- In einer Menge ist kein Element doppelt vorhanden. Streng mathemtisch ist also $\{1, 2, 2, 3\}$ keine Menge. Jedes Objekt ist also entweder gar nicht oder exakt einmal in einer gegebenen Menge enthalten.

- Mengen verhalten sich also anders als Paare (Tupel) und Tripel, die man von Koordinaten kennt - da spielt nämlich die Reihenfolge eine wesentliche Rolle.
- Um auszuschließen, dass Elemente einer Menge doppelt vorkommen, müsste man immer explizit sagen, dass die Elemente unterschiedlich sind. Oft wird das implizit vorausgesetzt. Auf jeden Fall sollten Sie aufpassen, gilt zum Beispiel $x = y = z$, dann enthält die Menge $\{x, y, z\}$ nur ein Element und nicht drei.

Für "x ist Element von M" bzw. "x ist nicht Element von M" schreibt man:

(kein) Element einer Menge — Def. 1

$x \in M$ bzw. $x \notin M$.

Es gibt nur eine Menge ohne Elemente: die leere Menge. Sie wird auf zwei Weisen geschrieben:

Leere Menge — Def. 2

$\emptyset$ oder $\{\}$.

Für die Mächtigkeit, also die Anzahl der Elemente einer Menge M, schreibt man $|M|$, also:

Mächtigkeit — Bsp 1

$|\emptyset| = 0, \quad \left|\{-2, \frac{3}{2}, 0, *\}\right| = 4\,.$

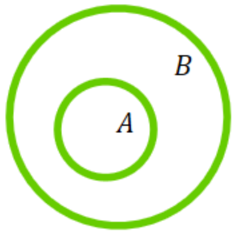
Im Falle einer unendlichen Menge, also einer Menge mit unendlich vielen Elementen, ergibt das keine endliche Zahl, sondern " unendlich"[1]. In dem Fall schreiben wir $|M| = \infty$.

[1] Es gibt verschiedene Arten von Unendlich, wie Georg Cantor schon 1877 herausgefunden hat.

1.1.2 Verknüpfungen von Mengen

Wenn jedes Element einer Menge A auch Element einer Menge B ist, dann ist A eine Teilmenge von B und B eine Obermenge von A. Man schreibt $A \subset B$. Am schnellsten lässt sich das erfassen mit einer Skizze:

Teilmenge und Obermenge — Bsp 2



- A ist eine Teilmenge von B: $A \subset B$
- B ist eine Obermenge von A: $A \subset B$
- A ist nicht gleich B: $A \neq B$
- A ist eine echte Teilmenge von B: $A \subsetneq B$

Zwei Mengen A und B sind gleich, $A = B$, wenn Sie nur gleiche Elemente besitzen, wenn also A Teilmenge von B ($A \subset B$) und gleichzeitig, B Teilmenge von A ($B \subset A$) ist.

Ist man sich unsicher ob A eine echte Teilmenge von B ist - ist also Gleichheit erlaubt, dann nennt man A eine " unechte Teilmenge von B" und schreibt $A \subseteq B$.

In der Mengenlehre gibt es vier grundlegende Mengenoperationen, nämlich: Vereinigung, Schnitt, Differenz und Komplement:

Mengenoperationen — Bsp 3

- Die Vereinigung [union] zweier Mengen wird mit dem Symbol $\cup$ angezeigt. Die Vereinigungsmenge enthält jedes Element der beiden Mengen genau einmal, beispielsweise
$$\{1,2,4\} \cup \{2,5,3,4\} = \{1,2,3,4,5\}\,.$$
- Der Schnitt [intersection] zweier Mengen wird mit dem Symbol $\cap$ angezeigt. Die Schnittmenge enthält jedes Element, das in beiden Mengen vorkommt, beispielsweise
$$\{1,2,4\} \cap \{2,5,3,4\} = \{2,4\}\,.$$
- Die Differenz [difference] zweier Mengen wird mit einem Backslash angezeigt. Die Differenzmenge enthält jedes Element, das in der ersten Menge vorkommt, aber nicht in der zweiten, beispielsweise
$$\{1,2,4\} \setminus \{2,5,3,4\} = \{1\}\,.$$
- Das Komplement [complement] einer Menge A wird mit einem waagerechten Strich über der Menge angezeigt, also $\overline{A}$. Ist eine Obermenge B von A fixiert, dann bedeutet das Komplement $\overline{A}$ die Differenz von Obermenge B und A. Aus der Schreibweise $\overline{A}$ geht die Obermenge nicht hervor - die Obermenge muss also implizit bekannt sein! Im folgenden Beispiel ist die Obermenge die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null, also $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$:
$$\overline{\{2,4,6,8\}} = \mathbb{N} \setminus \{2,4,6,8\} = \{1,3,5,7\} \cup \{9,10,11,12,\ldots\}\,.$$

Entsprechend zu " Punktrechnung vor Strichrechnung" wird der Schnitt vor der Vereinigung ausgeführt:

Rechenregel: Schnitt vor Vereinigung — Regel 2

$$A \cup B \cap C = A \cup (B \cap C)\,.$$

1.1.3 Was ist eine mathematische Aussage?

Eine mathematische Aussage [statement, proposition] ist eine Aussage, der man einen Wahrheitswert zuordnen kann. Entweder ist die Aussage wahr [true] oder falsch [false]. Eine mathematische Aussage kann aus diesem Grund keine freien Variablen enthalten. Wenn freie Variablen vorkommen, handelt es sich um ein Prädikat. Man liest auch anstatt Prädikat die Begriffe " Aussageform" oder einfach " mathematischer Ausdruck" :

Aussagen und Prädikate — Bsp 4

- "$2^2 = 5$" ist eine falsche Aussage.
- "$2^2 \neq 5$" ist eine wahre Aussage.
- "$x^2 \in \mathbb{N}$" ist ein Prädikat.

Ein Prädikat wird zu einer Aussage, wenn man die Variable bindet, das heißt, wenn man einen Wertebereich für die Variable angibt:

Aussagen — Bsp 5

- " Für eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$ gilt $x^2 \in \mathbb{N}$" ist eine wahre Aussage.
- " Für eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ gilt $x^2 \in \mathbb{N}$" ist eine falsche Aussage.

Die folgende Aussage ist wahr, nicht wahr?

" Eine Zahl, die durch zwei teilbar ist, ist eine gerade Zahl."

Man kann sie auch umformulieren, nämlich:

" Eine Zahl, die nicht gerade ist, ist nicht durch zwei teilbar."

Was ist da passiert? Die Aussage wurde negiert ohne den Wahrheitsgehalt zu ändern. Negieren einer Aussage ist eine sogenannte logische Operation. Neben dem Negieren gibt es noch drei weitere logische Operationen. Die Symbole der mathematischen Kurzschreibweise sind die folgenden:

Symbole logischer Operatoren — Def. 3

Es seien p und q mathematische Ausdrücke:

- Die Verneinung [negation] von p ist $\neg p$.
- Die Und-Verknüpfung [and] von p und q ist $p \wedge q$.
- Die Oder-Verknüpfung [or] von p und q ist $p \vee q$.
- Die Xor-Verknüpfung [XOR] von p und q ist $p \veebar q$.

Soweit zur Symbolik. Das mag alles sehr abstrakt klingen, aber man kann sagen, dass logische Operatoren wirklich oft vorkommen und das bedeutet für Sie: sie müssen sie lesen lernen! Mathematische Aufgabenstellungen und deren Lösungen werden mit Hilfe logischer Operatoren in mathematischer Kurzschreibweise formuliert und das ganz ohne Worte. Aufgabe

Funktionsweise logischer Operatoren — Def. 4

Es seien p und q mathematische Ausdrücke.

- $\neg p$ ist genau dann wahr, wenn p falsch wird. Ein Beispiel:
  $\neg\,(x \geq 0)$ ist wahr für alle $x < 0$, denn das sind genau die x, für die der Ausdruck $x \geq 0$ falsch ist.
- $p \wedge q$ ist genau dann wahr, wenn p und q getrennt voneinander wahr werden. Ein Beispiel:

  $x > 5 \wedge x \bmod 5 = 1$ ist wahr für $x > 6$, denn $x > 5$ und $x \bmod 5 = 1$ ist wahr für $x = 6$.

- $p \vee q$ ist genau dann falsch, wenn p und q getrennt voneinander falsch werden. Ein Beispiel:

  $x > 5 \vee x \bmod 5 = 0$ ist falsch für $x = 3$.

- $p \veebar q$ ist genau dann wahr, wenn entweder p oder q wahr und der jeweils andere falsch ist. Ein Beispiel:

  $x > 5 \veebar y < -5$ ist wahr wenn $x = 6$ und $y = 0$.

Entsprechend zu " Punktrechnung vor Strichrechnung" wird zuerst die Negation ausgeführt, dann das Und, dann das Oder:

Rechenregel: Negation vor Und vor Oder

$\neg x \geq 6 \vee x \geq 100 \wedge x \geq 2$ bedeutet $(\neg (x \geq 6)) \vee (x \geq 100 \wedge x \geq 2)$. Bsp 6

Liest man zwischen zwei Ausdrücken p und q das Symbol " $\Rightarrow$ ", dann ist das Konstrukt $p \Rightarrow q$ eine logische Schlussfolgerung oder Implikation[2] Ein Beispiel:

Schlussfolgerung (Implikation)

$x \geq 7 \Rightarrow x > 5$ Bsp 7

Mit Worten liest man die Implikation "$p \Rightarrow q$" wie folgt:[3]

- aus der Gültigkeit von p folgt die Gültigkeit von q [p implies q],
- wenn p wahr ist, dann ist q wahr [if p then q],
- die Gültigkeit von p reicht aus [4] [sufficient] für die Gültigkeit von q,
- die Gültigkeit von p setzt die Gültigkeit von q voraus [p requires q],
- die Gültigkeit von q ist notwendig [necessary] für die Gültigkeit von p.

Es ist wichtig zu bemerken, dass man die Reihenfolge der Ausdrücke p und q in einer Implikation nicht vertauchen darf:

Implikation ist keine kommutative Verknüpfung

Es regnet $\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}$ Der Himmel ist bewölkt. Bsp 8

Liest man zwischen zwei Ausdrücken das Symbol " $\Leftrightarrow$ ", dann handelt es sich um eine Äquivalenz. "$p \Leftrightarrow q$" bedeutet, dass p und q beide entweder gleichzeitig wahr oder aber gleichzeitig falsch sind[5]. Ein Beispiel:

Äquivalenz

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$ Bsp 9

Möchte man eine logische Äquivalenz beweisen, dann hat man zu zeigen, dass man von " rechts nach links" und von " links nach rechts" kommt. Im vorigen Beispiel also

$$\begin{array}{lll} "\Rightarrow: & x^2 = 4 \Rightarrow |x| = \sqrt{4} & \Rightarrow x = \pm 2 \\ "\Leftarrow: & x \in \{-2, 2\} \Rightarrow (-2)^2 = (2)^2 = 4 & \Rightarrow x^2 = 4 \end{array}$$

Mit Worten liest man die Äquivalenz $p \Leftrightarrow q$ wie folgt:

- p ist genau dann wahr, wenn q wahr ist,
- p gilt dann und nur dann, wenn q gilt [p if and only if q, kurz: p iff q],
- die Gültigkeit von p ist notwendig und ausreichend [necessary and sufficient] für die Gültigkeit von q.

1.1.4 Mengen und Aussagen

Der Gedanke, mit dem wir den Abschnitt eingeleitet haben, klang so, als wären Mengen von extremer Bedeutung in der Mathematik: "Mengen sind die Grundlage aller mathematischen Objekte."Die Mengen, die wir bislang notiert haben, hatten alle weniger als fünf Elemente und scheinen diese Bedeutung irgendwie nicht zu begründen. Mit den Begriffen der Logik haben wir jetzt das Werkzeug an der Hand, um noch einmal über Mengen nachzudenken und um zu verstehen, dass sie Grundlage der mathematischen Fachsprache sind.

Was ist eine Menge nochmal? Eine Menge ist eine Ansammlung von Objekten. Kennt man alle Objekte, dann kennt man die Menge - oder anders ausgedrückt: man kennt eine Menge, wenn man von einem Objekt sagen kann, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Zwei Varianten, die es zulassen zu entscheiden, ob ein Objekt dazugehört oder nicht sind die folgenden:

[2] Der Folgepfeil ist für die Logik, was die Vergleichszeichen $<, >$ in der Algebra sind.

[3] Das Wort " Gültigkeit" wird meist unterschlagen.

[4] öfter - aber irgendwie verwirrend - ist hinreichend

[5] Das Äquivalenzzeichen ist damit für die Logik, was das Gleichheitszeichen =" für die Algebra ist.

- Die Menge bzw. deren Elemente sind explizit gegeben. Eine Menge in extensionaler Schreibweise lautet beispielsweise so:
$$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
- Die Menge wird mit Worten beschrieben. Eine Menge in intensionaler Schreibweise lautet beispielsweise so:
$$M = \{\text{Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als zehn sind.}\}$$

Etwas umständlicher, aber gleichbedeutend ist

$$M = \{\text{Alle Zahlen } x\text{, für gilt: } x \text{ ist natürlich und } x \text{ ist kleiner als zehn. }\} \quad (*)$$

Wie Sie bereits ahnen, ist diese Beschreibung nicht das, was ein Mathematiker schreiben würde. In mathematischer Fachsprache läßt sich (∗) aber eins zu eins übersetzen und lautet:

$$M = \{x : x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 10\}.$$

- Das Fragment " Alle Zahlen" , mit dem die Beschreibung der Menge startet, wurde einfach weggelassen.
- Anstatt "x, für die gilt:" schreibt man "x :".[6]
- Und "x ist natürlich und x ist kleiner als zehn" übersetzt man in mathematische Kurzschreibweise, also "$x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 10$".

Bemerkungen:

- Wenn die Menge, die man betrachtet, eine Teilmenge einer bekannten Grundmenge[7] ist, beispielsweise eine Teilmenge der natürlichen Zahlen, dann schreibt man die Grundmenge auch oft vor die ¨ eigentliche¨ Bedingung, also
$$M = \{x \in \mathbb{N}_0 : x < 10\}.$$
- Die Elemente einer Menge erfüllen eine oder mehrere Bedingungen. Diese Erkenntnis ermöglicht es komplexe Mengen und Mengen mit unendlich vielen Elementen präzise anzugeben.
- " Bedingung erfüllen" bedeutet in der Aussagenlogik, dass eine Aussage wahr wird. Hinter der Bedingung verbergen sich all die Eigenschaften, die die Elemente der Menge haben sollen.

Mengen beschreibt man also im Allgemeinen mit Hilfe von logischen Ausdrücken. Hier ein paar Beispiele:

Mengen in mathematischer Kurzschreibweise — Bsp 10

- Die Menge aller reellen Zahlen zwischen 3 (einschließlich) und 5 (ausschließlich)
$$M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \wedge x < 5\} = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 5\},$$
- Die obere Hälfte der Kreisscheibe ohne Rand. Die Kreisscheibe besitze Radius $R = 1$ und Mittelpunkt $(0|0)$:
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}.$$
- Streng genommen muss man die Grundmenge angeben, aus der die Elemente zu nehmen sind:
$$\begin{aligned} \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2\right\} &= \emptyset, \\ \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\right\} &= \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}. \end{aligned}$$

Um komplexe Konstruktionen solcher Art mathematisch wasserdicht zu machen, muss man von der naiven Mengenlehre zur axiomatischen Mengenlehre übergehen. Dass ein axiomatischer Zugang nötig ist, sieht man Beispiel der Russellschen Antinomie . In der Praxis kommt man mit der naiven Mengenlehre zurecht.

Wenn man Schlussfolgerungen

- für alle Elemente einer Menge treffen möchte, dann benutzt man in der mathematischen Kurzschreibweise das Symbol "∀". ∀ ist ein sogenannter Quantor und man übersetzt ihn mit den Worten " für alle",
- für ein Element einer Menge treffen möchte, dann benutzt man in der mathematischen Kurzschreibweise das Symbol "∃". ∃ ist ein sogeannter Quantor und man übersetzt ihn mit den Worten " es existiert (mindestens) ein".

[6] manchmal auch "x |".
[7] $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$

Quantoren ∀ und ∃ — Bsp 11

- $A = \{2, 4, 6\} \;\Rightarrow\; \forall\, x \in A : \dfrac{x}{2} \in \mathbb{N}^+$.
- $B = \{-3, 2, 4, 6\} \;\Rightarrow\; \exists\, x \in B :\; x < 0$.

Für die Negation von quantorisierten Ausdrücken gilt: Aufgabe

Negation quantorisierter Ausdrücke — Regel 3

$$\neg\,(\forall\, x \in M : p) \quad\Leftrightarrow\quad \exists\, x \in M :\; \neg p$$
$$\neg\,(\exists\, x \in M : p) \quad\Leftrightarrow\quad \forall\, x \in M :\; \neg p$$

Lassn Sie uns die Quantoren und die logischen Verknüpfungen an einem Beispiel trainieren. Wie lauten die Definition " gleicher Mengen" oder die " Mengenoperationen" in mathematischer Kurzschreibweise?

Mathematische Kurzschreibweise — Bsp 12

- Zwei identische Mengen:
$$A = B :\Leftrightarrow\; A \subset B \wedge B \subset A \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x \in A :\; x \in B) \wedge (\forall\, x \in B :\; x \in A)\;.$$
- Die Vereinigungsmenge:
$$A \cup B = \{x :\; x \in A \vee x \in B\}\,.$$
- Die Schnittmenge:
$$A \cap B = \{x :\; x \in A \wedge x \in B\}\,.$$
- Die Differenzmenge:
$$A \setminus B = \{x :\; x \in A \wedge x \notin B\,.$$
- Die Komplementmenge (bei gegebener Menge B und bekannter Obermenge A mit $B \subset A$):
$$\overline{B} = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}\,.$$

1.1.5 Rechenregeln für Mengen und Aussagenlogik

Man kann sagen, dass es zu jedem Mengenoperator einen logischen Operator gibt, der ihm algebraisch entspricht. In der Elektronik muss man logische Operatoren realisieren und das macht man durch Reihen- und/oder Parallelschaltungen. Eine detaillierte Übersicht über Logikgatter findet man hier und die Kurzvariante ist

Mengen		Logik		Elektronik
$\cap$	$\widehat{=}$	$\wedge$	$\widehat{=}$	Serie-Schaltung
$\cup$	$\widehat{=}$	$\vee$	$\widehat{=}$	Parallel-Schaltung
$\overline{\{\}}$	$\widehat{=}$	$\neg$		...

Logik " unterliegt" strengen Gesetzmäßigkeiten und wenn man diese kennt, dann wird das " logische Argumentieren" einfacher:

Assoziativgesetze und die de Morgansche Gesetze — Regel 4

Name	Mengen	Logik	Bedeutung
Assoziativgesetze	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	Reihenfolge egal
De Morgansche Gesetze	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\neg\,(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg\,(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Logik der Negation

Um die Morganschen Gesetze zu beweisen, kann man eine Wahrheitstabelle aufstellen! Die Idee ist den logischen Ausdruck $\neg\,(p \wedge q)$ in Teilaussagen zu zerlegen und dann alle möglichen Fälle zu betrachen[8]:

[8] Die möglichen Fälle sind immer entweder " wahr" oder " falsch" , also überschaubar in Komplexität!

Wahrheitstabelle zum Beweis des 1. Morganschen Gesetzes

Bsp 13

Input p	Input q	Output $p \wedge q$	Output $\neg(p \wedge q)$	Output $\neg p$	Output $\neg p$	Output $\neg p \vee \neg q$
f	f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	r	w
w	f	f	w	f	w	w
w	w	w	f	f	f	f

Mit Hilfe einer Wahrheitstabelle wird auch der kleine Unterschied zwischen den logischen Operatoren $\vee$ und $\veebar$ deutlich:

Wahrheitstabelle zum Vergleich von $\vee$ und $\veebar$

Bsp 14

Input p	Input q	Output $p \vee q$	Output $p \veebar q$
f	f	f	f
f	w	w	w
w	f	w	w
w	w	w	f

Mengen und Aussagenlogik Aufgaben

Regeln und Beispiele, die für die Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.1 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Mengen — Aufg. 1

Geben Sie die Mengen explizit an:

(a) $A = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$

(b) $B = \{x : x \text{ ist ein Buchstabe aus dem Wort Leipzig}\}$

(c) $C = \{x : x^2 = 9 \wedge x^3 = 27\}$

(d) $D = \{x : x^2 = 9 \vee x - 3 = 6\}$

(e) $E = \{x : x^2 = 9 \wedge x - 3 = 6\}$

Mengenoperationen — Aufg. 2

Wie lässt sich anhand der beiden Mengen $\mathbb{M}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathbb{M}_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ zeigen, dass bei einer Differenzmenge $\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2$ die Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ im Allgemeinen nicht vertauscht werden können?

Aussagenlogik — Aufg. 3

Negieren Sie die folgenden Ausdrücke und vereinfachen Sie die Negation so weit wie möglich und entscheiden Sie, ob die negierte Aussage wahr oder falsch ist. Tipp: Wenden Sie dann die Regeln zur Negation quantorisierter Ausdrücke und die De Morganschen Gesetze an.

(a) Alle gut vorbereiteten Studierenden bestehen die Mathematikklausur.

(b) Es gibt eine reelle Zahl, die gerade und Teiler von 27 ist.

(c) Alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 3 teilbar.

Mengen und Aussagenlogik — Aufg. 4

Seien A und M Mengen. Unter welchen Bedingungen an die Elemente von A und M ist $A \not\subseteq M$ eine wahre Aussage? Hinweis: $A \not\subseteq M \Leftrightarrow \neg(A \subset M)$.

Aussagenlogik — Aufg. 5

Negieren Sie die folgenden Aussagen! Schreiben Sie dabei die Aussagen und ihre Negationen auch mit Quantoren und geben Sie an, ob die Aussage oder ihre Negation wahr ist!

(a) Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.

(b) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

(c) Es gibt keine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.

(d) Es gibt keine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.

(e) Jede nichtnegative reelle Zahl ist positiv.

(f) Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat eine reelle Lösung.

(g) Jedes Viereck, das zugleich Rechteck und Drachenviereck ist, ist ein Quadrat.

Brainteaser

Aufg. 6

An einer Weggabelung wohnen zwei Brüder, von denen einer die Angewohnheit hat, stets die Wahrheit zu sagen, während der andere immer lügt. Ein Wanderer, der vorbeikommt, möchte sich nach dem richtigen Weg erkundigen. Er hat von den eigentümlichen Geschwistern gehört, weiß aber nicht, welcher von beiden die Wahrheit sagt. Wie kann er mit nur einer Frage an einen der Männer herausfinden, welchen Weg er nehmen muss?

1.2 Zahlenmengen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen
Sie lernen ...
• die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ kennen • wie die Fakultät und der Binomialkoeffizient definiert sind • im Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu rechnen • wie das Summensymbol und das Produktsymbol aufzulösen sind • den Binomischen Satz kennen $(a+b)^n = \cdots$
Sie sollten bereits ...
• die Grundrechenarten beherrschen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.2.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Zum Zählen benötigt man die positiven natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$. Diese Menge von Zahlen nennt man die natürlichen Zahlen [natural numbers] und führt das Symbol $\mathbb{N}$ ein. Allerdings ist unklar, ob $\mathbb{N}$ die Null beinhaltet oder nicht[9] In diesem Skript versuchen wir die Unklarheit zu vermeiden und benutzen Indizes, die die Frage präzise klären: $\mathbb{N}_0$ enthält die Null und $\mathbb{N}^+$ nicht.[10]

Für den Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen [integer numbers] kommen die negativen ganzen Zahlen hinzu.

Kommen noch alle positiven und negativen Brüche hinzu, erhält man den Bereich der rationalen Zahlen [rational numbers]. Die Zahlenmenge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Natürliche, ganze und rationale Zahlen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Def. 1

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}, \\
\mathbb{N}^+ &= \{1, 2, 3, 4 \ldots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}_0 \cup \{-1, -2, -3, -4, \cdots\}, \\
\mathbb{Q} &= \left\{ q = \frac{m}{n}, \quad m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^+ \right\}.
\end{aligned}$$

Wenn eine Rechenoperation in der Mathematik immer wieder auftaucht, dann macht es Sinn ein Symbol für sie einzuführen. Solche zwei Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen sind die Fakultät und der Binomialkoeffizient. Aufgabe

Sie sind wie folgt definiert:

Fakultät und Binomialkoeffizient

Def. 2

Name	Symbol	Wertebereich	Besonderheit
Fakultät	$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 1$	$n \in \mathbb{N}_0$	$0! = 1! = 1$
Bionmialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$	$n, k \in \mathbb{N}_0 : \ k \leq n$	$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Bemerkungen:

- Die Anzahl an Möglichkeiten n verschiedene Objekte in einer Reihe anzuordnen ist n-Fakultät.
- Die Anzahl an Möglichkeiten aus einer n-elementigen Menge k Elemente auszuwählen ist n über k.

1.2.2 Reelle Zahlen

Um $x^2 = 2$ lösen zu können oder den Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1 als Zahl anzugeben, benötigt man einen größeren Zahlenbereich: den der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ [real numbers]. Die reellen Zahlen vervollständigen den Zahlenstrahl, so dass es keine Lücke gibt! Messwerte werden typischerweise als reelle Zahlen aufgefasst.

[9] In der Informatik zählt die Null meist dazu und in der Mathematik mal so mal so.

[10] Wie lauten die Bedinungen in mathematischer Kurzschrift? $0 \in \mathbb{N}_0$ und $\forall n \in \mathbb{N}^+ : n > 0$.

Reelle Zahlen

Bsp 1

$$\left\{ -\ln(77)\,,\ \sqrt{2}\,,\ \pi\,,\ \frac{4}{28}\,,\ 38624983 \right\} \subset \mathbb{R}\,.$$

Ein Klassiker ist, zu zeigen, dass schon $\sqrt{2}$ kein Bruch mehr sein kann, sondern erst in der Menge der reellen Zahlen existiert.[11]

Eine einfache Art, eine beliebige reelle Zahl, beispielsweise $\sqrt{2}$ zu konstruieren, ist, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{Q}$ zu betrachten. Aufgabe

Ein zusammenhängendes Stück der reellen Zahlen nennt man ein Intervall. Es gibt offene, halboffene oder abgeschlossene Intervalle - je nachdem ob beide, nur eines oder beide Intervallenden dazugehören oder nicht. Möchte man ein Intervall aufschreiben, das bis ins Unendliche geht, dann benutzen wir für plus Unendlich das Unendlichkeitsymbol ∞ und für minus Unendlich entsprechend $-\infty$.[12]

Intervalle

Bsp 2

- $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$,
- $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$,
- $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$,
- $(-\infty, 1) = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Eine abschließende Bemerkung: viele reelle Zahlen haben zwei Schreibweisen - schauen Sie sich das an:

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\bar{3} = 0,\bar{9}\,.$$

1.2.3 Rechenregeln

In den bisher genannten Zahlenbereichen gelten diese Regeln:

Addition und Multiplikation

Regel 1

- Die Addition ist assoziativ: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- Die Multiplikation ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Die Addition ist kommutativ: $a + b = b + a$.
- Die Multiplikation ist kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$
- Es gilt das Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Subtraktion und Division sind dagegen weder assoziativ noch kommutativ!

Häufige Fehler

Bsp 3

- Die Subtraktion ist nicht assoziativ: $3 - (4 + 6) = -7 \neq (3 - 4) + 6 = 5$.
- Die Subtraktion ist nicht kommutativ: $3 - 4 = -1 \neq 4 - 3 = 1$.
- Die Division ist nicht assoziativ: $25 : (5 + 25) = 25 : 30 = 5 : 6 \neq 25 : 5 + 25 : 25 = 6$.
- Die Division ist nicht kommutativ: $5 : 25 = 1 : 5 \neq 25 : 5 = 5$.

Die Zahlenbereiche $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind, im Unterschied zu $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$, sogenannte Körper. Was aber ist ein Körper? In der Mathematik ist ein Körper $\mathbb{K}$ wie folgt definiert: Aufgabe

[11] Angenommen $\sqrt{2}$ wäre ein Bruch, dann könnte man diesen Bruch weitest möglich kürzen. Man erhielte einen Zähler $p \in \mathbb{N}^+$ und einen Nenner $q \in \mathbb{N}^+$ mit $\sqrt{2} = p/q$. Durch Quadrieren fände man $2 = p^2/q^2$, also $2q^2 = p^2$. Dann müsste p^2 eine gerade Zahl sein und den Primfaktor 2 haben. Aber das wiederum heißt, dass auch p gerade sein muss und deshalb wäre p^2 in der Tat durch 2^2 teilbar, also müsste auch q den Primfaktor 2 haben (da $2 \cdot q \cdot q = p \cdot p$). Also wären sowohl p als auch q durch 2 teilbar und nicht weitest möglich gekürzt worden, im Widerspruch zur Annahme.

[12] Aufpassen: Unendlich ist keine reelle Zahl, sondern ein Symbol!

Körper — Def. 3

Eine Menge $\mathbb{K}$ mit Verknüpfungen $\cdot$ und $+$ heißt Körper $(\mathbb{K}, \cdot, +)$, wenn für beliebige $a, b, c \in \mathbb{K}$ folgende Axiome gelten:

- Additive Eigenschaften:
  1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
  2. $a + b = b + a$
  3. Es gibt ein neutrales Element der Addition: $a + 0 = a$
  4. Zu jedem $a \in \mathbb{K}$ existiert das additiv Inverse $-a$ mit $(-a) + a = 0$
- Multiplikative Eigenschaften:
  1. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  2. $a \cdot b = b \cdot a$
  3. Es gibt ein neutrales Element der Multiplikation: $a \cdot 1 = a$
  4. Zu jedem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert das multiplikativ Inverse a^{-1} mit $(a^{-1}) \cdot a = 1$
- Zusammenspiel von additiver und mulitplikativer Struktur:
  1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  2. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

Das Wichtigste steht " im Kleingedruckten: das multiplikativ inverse Element ist Teil derselben Zahlenmenge!

Die Liste an mathematischen Symbolen, die man aus Effizienzgründen einführt, erweitern wir noch um das Summen- und das Produktzeichen. Aufgabe

Es sei f_k ein mathematischer Ausdruck, der von der Variable k abhängt. Mit f_1 ist dann gemeint: setze in dem mathematischen Ausdruck $k = 1$, mit f_a ist entsprechend $k = a$ zu setzen.

Summen- und Produktzeichen — Def. 4

Name	Symbol	Wertebereich
Summenzeichen	$\sum_{k=a}^{b} f_k = f_a + f_{a+1} + \cdots + f_b$	$f_k \in \mathbb{R},\ a \leq b \in \mathbb{N}_0$
Produktzeichen	$\prod_{k=a}^{b} f_k = f_a \cdot f_{a+1} \cdot \cdots \cdot f_b$	$f_k \in \mathbb{R},\ a \leq b \in \mathbb{N}_0$

Summen- und Produktzeichen — Bsp 4

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{6} (1+k)^{k-1} &= (1+3)^{3-1} + (1+4)^{4-1} + (1+5)^{4-1} + (1+6)^{6-1} = 4^2 + 5^3 + 6^4 + 7^5\,,\\ \prod_{k=1}^{3} x^k &= x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^6\,.\end{aligned}$$

Ein "Binom" ist in der Mathematik ein Ausdruck der Form $(a + b)^n$. Der nun folgende Binomische Satz erklärt, warum der Binomialkoeffizient und die aus der Schule bekannten Binomischen Formeln nicht nur scheinbar zusammengehören. Aufgabe

Binomischer Satz — Regel 2

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0 : \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

Zahlenmengen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.2 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Körperaxiome — Aufg. 1

Welche Rechenregeln erfüllen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ nicht im Vergleich zu $\mathbb{R}$?

Summen- und Produktzeichen — Aufg. 2

Schreiben Sie die folgenden Summen aus und berechnen Sie ihren Wert:

$$\begin{array}{lllll} (a)\ \sum_{i=1}^{7} i & (b)\ \prod_{i=1}^{2} i & (c)\ \prod_{i=0}^{5} i & (d)\ \sum_{i=1}^{5} i^2 & (e)\ \sum_{i=-3}^{3} i^2 \\ (f)\ \prod_{i=-3}^{3} i^2 & (g)\ \sum_{i=0}^{7} 5 & (h)\ \prod_{i=0}^{7} 2 & (i)\ \sum_{i=3}^{9} (i-2) & (j)\ \prod_{i=-1}^{3} (i+2) \end{array} \tag{1.1}$$

Summenzeichen Indexverschiebung — Aufg. 3

Wie lautet das Argument für folgende Indexverschiebung? $\sum_{i=k}^{l} x_i = \sum_{i=k+a}^{l+a} ???$

Summen- und Produktzeichen — Aufg. 4

Ersetzen Sie in den folgenden Gleichungen die Fragezeichen:

$$(a)\ \ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} = \sum_{i=1}^{?} ? = \sum_{i=-2}^{?} ? \qquad (b)\ \ \sum_{i=0}^{n} x^{0 \cdot i} = ?$$

$$(c)\ \ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \frac{x^n}{n!} = ? \cdot \sum_{i=0}^{?} \frac{x^{i-1}}{i!} \qquad (d)\ \ \frac{\prod_{i=1}^{n} 4^i}{\prod_{i=2}^{n+1} 2^i} = ?$$

Binomialkoeffizient — Aufg. 5

Zeigen Sie

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \; k \geq 1\,.$$

Binomischer Satz — Aufg. 6

Bestimmen Sie mithilfe des Binomischen Satzes eine Formel für $(a-b)^n$.

Binomischer Satz — Aufg. 7

Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

1.3 Äquivalenzumformungen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen
Sie lernen ...
• wie man einfache algebraische Gleichungen und Ungleichungen systematisch löst

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.3.1 Äquivalenzumformungen und Lösungsmenge

Eine Gleichung oder eine Ungleichung zu vereinfachen, heißt, einen logisch äquivalenten, aber einfacheren Ausdruck anzugeben (wobei allerdings nicht immer klar ist, was "einfacher" wirklich heißt):

Lösen einer linearen Gleichung — Bsp 1

$$4 \cdot x + 7 = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 \cdot x = -7 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{7}{4}\,.$$

Die weitestmögliche Vereinfachung ist die Lösung, nämlich konkrete Zahlenwerte für die Variable, für die die Ausgangsgleichung oder -ungleichung wahr wird. Je nach Situation gibt es gar keine, mehrere oder sogar unendlich viele solcher Zahlenwerte. Um auf all diese Siuationen zu reagieren, gibt man typischerweise eine Lösungsmenge [solution set] an:

Lösungsmenge einer linearen Gleichung — Bsp 2

$$4 \cdot x + 7 = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : 4 \cdot x + 7 = 0\} = \left\{-\frac{7}{4}\right\}.$$

Bemerkungen:

- Achten Sie immer darauf, dass Sie Gleichungen äquivalent umformen, das bedeutet insbesondere, dass Sie eine Gleichung **niemals mit Null multiplizieren oder durch Null dividieren dürfen**. Die entsprechenden Problemstellen müssen explizit ausgeschlossen und separat betrachtet werden:

$$\frac{x-3}{2+x} = 10 \overset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} x - 3 = 10 \cdot (2 + x) \Leftrightarrow x = -\frac{23}{9}\,.$$

- Um eine allgemeine, nicht-lineare Gleichung, beispielsweise einer Gleichung der Form

$$(\sin(2\pi x))^2 = \sqrt{2}\,,$$

  zu lösen, fehlt uns derzeit das Handwerkszeug. In den Abschnitten 1.7-1.13 beschäftigen wir uns intensiv mit elementaren Funktionen und das Lösen von Gleichungen, die diese beinhalten, wird an entsprechender Stelle trainiert.

Auch das Lösen von Ungleichungen funktioniert, indem man eine Lösungsmenge ermittelt, die der Ungleichung äquivalent ist. Meist sind die Lösungsmengen dann Intervalle oder Vereinigungsmengen.

Lösen einer linearen Ungleichung — Bsp 3

$$2 \cdot x + 6 \leq 2 \;\Leftrightarrow\; x \leq -2 \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{L} = \{x : \; x \leq -2\} \quad \widehat{=} \quad 2 \cdot x + 6 \leq 2 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -2]\,.$$

Äquivalenzumformungen an Ungleichungen sind unproblematisch, wenn man berücksichtigt, dass das Ungleichheitszeichen sich umkehrt, wenn man beide Seiten mit einem **negativen Ausdruck** multipliziert oder dividiert:

Äquivalenzumformungen für Ungleichungen — Regel 1

1. Termumformung jeder einzelnen Seite

$$(T_1 < T_2) \wedge \left(T_1 = \tilde{T}_1 \wedge T_2 = \tilde{T}_2\right) \;\Leftrightarrow\; \tilde{T}_1 < \tilde{T}_2$$

2. Addition oder Subtraktion eines Terms T auf beiden Seiten

$$T_1 < T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 + T < T_2 + T$$
$$T_1 < T_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 - T < T_2 - T$$

3. Multiplikation oder Division mit $T \neq 0$ auf beiden Seiten

$$T_1 < T_2 \quad \wedge \quad T > 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \cdot T < T_2 \cdot T$$
$$T_1 < T_2 \quad \wedge \quad T < 0 \quad \Leftrightarrow \quad T_1 \cdot T > T_2 \cdot T$$
$$T_1 < T_2 \quad \wedge \quad T > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_1}{T} < \frac{T_2}{T}$$
$$T_1 < T_2 \quad \wedge \quad T < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_1}{T} > \frac{T_2}{T}$$

1.3.2 Strukturiertes Lösen von Ungleichungen

Den Umgang mit Äquivalenzumformungen und das saubere Aufschreiben von Lösungsmengen kann man schön an algebraischen Ungleichungen trainieren und das machen wir jetzt. Wir betrachten beispielhaft drei Typen von Ungleichungen: Aufgaben

1. quadratische Ungleichungen,
2. Bruchungleichungen,
3. Betragsungleichungen.

All diese Typen haben eines gemeinsam: durch sinnvolle **Fallunterscheidungen** kommt man zum Ziel! Anhand von Beispielen sehen wir, wie das aussieht.

Wenn links und rechts vom Ungleichungszeichen ein quadratischer Ausdruck derselben Variable steht, zum Beispiel

$$2 \cdot x^2 + x - 4 > x^2 + 6 \cdot x - 10,$$

geht man wie folgt vor:

Lösen einer quadratischen Ungleichung — Bsp 4

Die systematische Vorgehensweise zum Lösen einer quadratischen Ungleichung ist wie folgt:

1. Alles auf eine Seite bringen:

$$2 \cdot x^2 + x - 4 > x^2 + 6 \cdot x - 10 \Leftrightarrow x^2 - 5 \cdot x + 6 > 0$$

2. Quadratischen Term in Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 - 5 \cdot x + 6 = (x-3) \cdot (x-2)\,.$$

3. **Vorzeichen der Faktoren unterscheiden**:

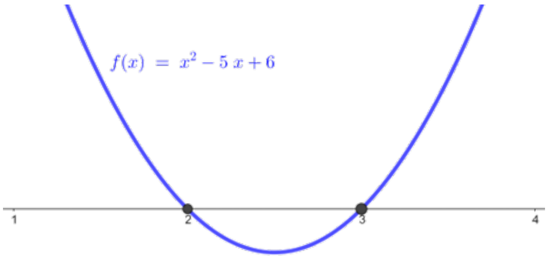
$$(x-3) \cdot (x-2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-3) > 0 \wedge (x-2) > 0 \\ (x-3) < 0 \wedge (x-2) < 0 \end{cases}$$

4. Ungleichungen lösen:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \wedge x > 2 \;\Rightarrow x > 2 \\ x < 3 \wedge x < 2 \;\Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

5. Lösungsmengen der zwei Fälle vereinigen:

$$(x-3) \cdot (x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)\,.$$



- Gezeigt ist der Graph der Funktion
$$f(x) = x^2 - 5 \cdot x + 6\,.$$
- Die x-Werte, für die positive Funktionswerte liefern, sind links neben der linken und rechts neben der rechten Nullstelle.

Bemerkungen:

- Sie können die Lösungsmenge der Ungleichung $2x^2 + x - 4 > x^2 + 6x - 10$ an der Skizze ablesen!
- Die Linearfaktorzerlegung eines quadratischen Ausdrucks bestimmen Sie mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel[13].
- Das prinzipielle Vorgehen bleibt beim Lösung von Ungleichungen mit polynomialen Termen höherer Ordnung gleich. Wie man die Linearfaktorzerlegung bestimmt ist Thema in Abschnitt 1.9.

Beim einfachsten Typ einer Bruchungleichung werden zwei lineare[14] Ausdrücke dividiert und mit Null verglichen. Wir müssen die **Vorzeichen von Zähler und Nenner unterscheiden**. Ein Beispiel:

Lösen einer Bruchungleichung mit rechter Seite Null

Bsp 5

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+4} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (2x-1) \geq 0 \wedge (x+4) > 0 \\ (2x-1) \leq 0 \wedge (x+4) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \wedge x > -4 \\ x \leq \frac{1}{2} \wedge x < -4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < -4 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -4) \cup [1/2, \infty)
\end{aligned}$$

Wenn rechts eine Konstante ungleich Null steht, wie im folgenden Beispiel, muss man

1. das **Vorzeichen des Nenners unterscheiden**[15],
2. mit dem Nenner multiplizieren,
3. die nunmehr linearen Ungleichungen lösen,
4. die Lösungsmengen der einzelnen Fälle vereinigen.

Lösen einer Bruchungleichung mit konstanter rechter Seite

Bsp 6

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{x+4} \geq 3 \quad &\overset{1.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (x+4) > 0 \wedge (2x-1) \geq 3(x+4) \\ (x+4) < 0 \wedge (2x-1) \leq 3(x+4) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4) > 0 \wedge -x-13 \geq 0 \\ (x+4) < 0 \wedge -x-13 \leq 0 \end{cases} \\
&\overset{2.}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x > -4 \wedge x \leq -13 \\ x < -4 \wedge x \geq -13 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{\} \\ x \in [-13, -4) \end{cases} \\
&\overset{3.}{\Leftrightarrow} \quad x \in [-13, -4)\,.
\end{aligned}$$

Bei Ungleichungen mit einem Betrag wie $|x-7| < 5$ muss man eine Fallunterscheidung bzgl des **Vorzeichens des Ausdrucks zwischen den Betragsstrichen** machen: Wann ist das Argument negativ und wann ist es positiv?

[13] $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

[14] Ein Ausdruck der Art $a \cdot x + b$ mit beliebigen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist linear in x.

[15] damit wir wissen, was passiert, wen wir mit ihm multiplizieren - denken Sie an die Äquivalenzumformungen einer Ungleichung!

Lösen einer Betragsungleichung Bsp 7

$$|x-7|<5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-7 \geq 0 \wedge x-7<5 \\ x-7<0 \wedge -(x-7)<5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \wedge x<12 \\ x<7 \wedge x>2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [7,12) \\ x \in (2,7) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in (2,12)\,.$$

Wenn mehrere der genannten Problemstellungen auf einmal auftauchen wie im folgenden Beispiel, sind entsprechend mehr Fallunterscheidungen nötig:

Lösen einer gemischten Ungleichung Bsp 8

$$\frac{|x^2-5\cdot x+6|}{x-1}<5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x^2-5\cdot x+6|<5\cdot(x-1) \wedge x-1>0 \\ |x^2-5\cdot x+6|>5\cdot(x-1) \wedge x-1<0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2-5\cdot x+6>0 \wedge x-1>0 \wedge x^2-5\cdot x+6<5\cdot(x-1) \\ x^2-5\cdot x+6<0 \wedge x-1>0 \wedge -(x^2-5\cdot x+6)<5\cdot(x-1) \\ x^2-5\cdot x+6>0 \wedge x-1<0 \wedge x^2-5\cdot x+6>5\cdot(x-1) \\ x^2-5\cdot x+6<0 \wedge x-1<0 \wedge -(x^2-5\cdot x+6)>5\cdot(x-1) \end{cases}$$

Äquivalenzumformungen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.3 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Allgemeine Lösungsformel — Regel 2

Zur Lösung von Gleichungen $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$ mit $a,b,c\in\mathbb{R}$ berechnet man die sogenannte Diskriminante $D=b^2-4\cdot a\cdot c$. Für $D\geq 0$ besitzt die Gleichung zwei reelle Lösungen. Sie lauten

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}\,.$$

Mit den Lösungen $x_{1,2}$ kann die Linearfaktorzerlegung des quadratischen Terms $a\cdot x^2+b\cdot x+c$ angegebenen werden:

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\,.$$

Gleichungen und Ungleichungen — Aufg. 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

$(a)\ \dfrac{x+52}{x+2}=11$ $\qquad (b)\ \dfrac{x^2+2\cdot x-3}{x+3}=1$

$(c)\ \dfrac{(n+2)!}{n!}=72, n\in\mathbb{N}_0$ $\qquad (d)\ |2\cdot x-6|=|4-5\cdot x|$

$(e)\ 3\cdot x-3<7-2\cdot x$ $\qquad (f)\ \dfrac{3\cdot x-5}{x-2}\leq 3$

$(g)\ |6\cdot x+1|<|2\cdot x-1|$ $\qquad (h)\ \left|\dfrac{3\cdot x+2}{x-2}\right|<1$

Gleichungssystem — Aufg. 2

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme

$$(a)\ \begin{cases}2\cdot y-4\cdot x&=-6\\5\cdot y-4\cdot x&=-21\end{cases}\qquad (b)\ \begin{cases}2\cdot x+y&=7\\2\cdot x+y&=7\end{cases}\qquad (c)\ \begin{cases}x^2+y^2&=10\\x+y&=4\end{cases}$$

Gleichungssystem mit Parameter — Aufg. 3

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem für $p\in\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcr}x_1&+&p\cdot x_2&=&1\\(p-1)\cdot x_1&+&x_2&=&-1\end{array}$$

Brainteaser — Aufg. 4

In einer Familie hat jeder Sohn gleich viele Schwestern und Brüder. Jede Tochter hat aber doppelt so viele Brüder wie Schwestern. Wie viele Söhne und Töchter hat die Familie?

Brainteaser — Aufg. 5

Zu einem Fest auf dem Land fahren mehrere Pferdewagen mit der jeweils gleichen Anzahl an Personen. Auf halbem Weg fallen zehn Wagen aus, sodass jeder der übrigen Wagen eine weitere Person aufnehmen muss. Vor Antritt des Rückwegs fallen weitere 15 Wagen aus, was zur Folge hat, dass in jedem Wagen drei Personen mehr sind als bei der Abfahrt am Morgen. Wie viele Personen nahmen an dem Fest teil?

1.4 Funktionen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen . . .

- was eine Funktion ist und wie man sich eine Funktion vorstellen kann
- was die Funktionsvorschrift, der Definitionsbereich und der Bildbereich einer Funktion sind
- wie man eine Funktion aufschreibt
- was eine Funktion von einer Relation unterscheidet

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.4.1 Was ist eine Funktion?

Eine Abbildung [mapping, map] namens f ordnet jedem Element x eines Definitionsbereichs [domain] D genau ein Element y einer Zielmenge [codomain, target set, ungenau:range] Z zu. In mathematischer Kurzschreibweise sieht das so aus:

$$f : D \to Z, x \mapsto y\,.$$

Diese Formel sagt aber noch nichts darüber, wie die Abbildung im Detail funktioniert. Was fehlt ist die Zuordnungsvorschrift oder Abbildungsvorschrift. Anstatt eine "Gleichung $y = f(x)$" wie in der Schule anzugeben, führen wir einen Abbildungspfeil ein:

$$x \mapsto f(x)\,.$$

Da der Definitionsbereich, die Zielmenge und die Abbildungsvorschrift zusammen eine Abbildung so definieren, dass man in der Lage ist die Abbildung zu untersuchen, fasst man diese Informationen typischerweise zusammen und gibt eine Abbildung in der folgenden Form an:

Abbildung von D nach Z mit Abbildungsvorschrift — Def. 1

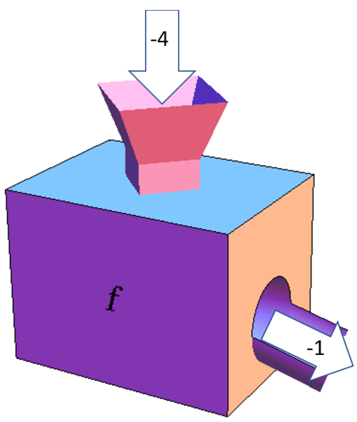
$f : D \to Z, x \mapsto f(x)\,.$

Bemerkungen:

- Statt $f(x)$ wird typischerweise eine Formel angegeben, beispielsweise $x \mapsto \sin(x)$ oder $x \mapsto 10 \cdot x^3 - 2 \cdot \sqrt{x}$.
- Wenn der Definitionsbereich und die Zielmenge fixierte Mengen von Zahlen, von geometrischen Objekten oder von Funktionen (!) . . . sind, nennt man eine Abbildung meist eine Funktion [function]. Mathematisch sind Abbildungen und Funktionen dasselbe.

Es gibt mehrere Vorstellungen von Abbildungen (Funktionen). Hier sind vier davon.

Funktion als Maschine — Bsp 1



Eine Abbildung f ist eine Maschine, in die man ein Teil aus einer Menge D als Rohmaterial hineinwerfen kann und aus der man dann ein Teil aus Z als Produkt zurückerhält:

- Alle Teile aus D müssen akzeptiert werden.
- Nur Teile aus Z dürfen produziert werden.
- Es wird immer genau ein Teil produziert (nicht null, nicht sieben).
- Wenn man dasselbe Teil aus D nochmal hinein wirft, muss wieder dasselbe Teil aus Z produziert werden wie beim ersten Mal.

Funktion als Tabelle Bsp 2

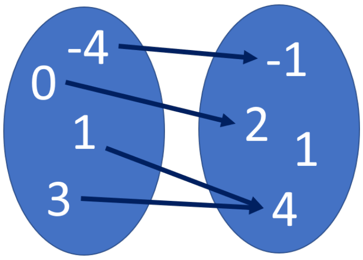
x	y
-4	-1
0	2
1	4
3	4

Tabelle

Eine Abbildung f ist eine Tabelle (ggf unendlich lang), aus der man für jedes $x \in D$ das zugehörige $f(x) \in Z$ ablesen kann:

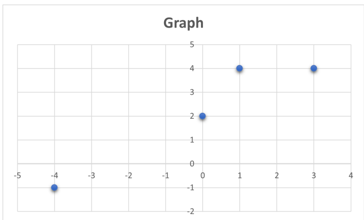
- In der x-Spalte der Tabelle muss jedes Element aus D genau einmal vorkommen (nicht null mal, nicht sieben mal).
- In der y-Spalte der Tabelle dürfen nur Elemente aus Z stehen.
- In dem Beispiel ist $Z = \mathbb{Z}$.
- Die Reihenfolge der Zeilen in der Tabelle ist egal.

Funktion als Pfeildiagramm Bsp 3



- Von jedem Element in D muss genau ein Pfeil starten und zu einem Element in Z führen.
- Es ist erlaubt, dass mehrere Pfeile auf einem Element von Z enden.
- Es ist auch erlaubt, dass Elemente von Z von keinem Pfeil erreicht werden.

Funktion als Graph Bsp 4



Hier ist von Funktionen die Rede, die man in einem Diagramm aufmalen kann.

- D und Z sind also Mengen von Zahlen.
- D ist ein Bereich auf der x-Achse, W ein Bereich auf der y-Achse.
- D und Z können sich natürlich auch jeweils über die gesamten Achsen erstrecken.
- Zu jedem $x \in D$ (und nur für solche x) ist genau ein $y \in Z$ markiert.

1.4.2 Definitions- und Bildbereich

Der Definitionsbereich ist die Menge von mathematischen Objekten, die in die Funktion hineingegeben werden darf. Denken Sie an die Pfeilvorstellung einer Funktion, dann ist der Definitionsbereich der Startpunkt des Pfeils. Die Pfeilspitze landet in der Zielmenge. Der Definitionsbereich D und die Zielmenge Z sind oft Teilmengen der reellen Zahlen - oder sogar ganz $\mathbb{R}$. Die Idee des Pfeildiagramms findet man in der Schreibweise einer Funktion wieder. Man schreibt

$$f : x \mapsto f(x)$$

und meint damit $x \in D$ (Pfeilanfang) wird abgebildet auf $f(x) \in Z$ (Pfeilspitze).

Im folgenden Beispiel muss der Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ eingeschränkt werden, weil die Funktion an der Stelle $x = 3$ nicht definiert ist: Aufgabe

Funktion mit $D \subsetneq \mathbb{R}$ Bsp 5

$$f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^2+7}{x-3} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3\}\,.$$

Hinter den meisten üblichen Operationen mit Zahlen stecken Funktionen - auch wenn sie oft nicht explizit als solche bezeichnet werden:

- Addition reeller Zahlen: $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y\,,$

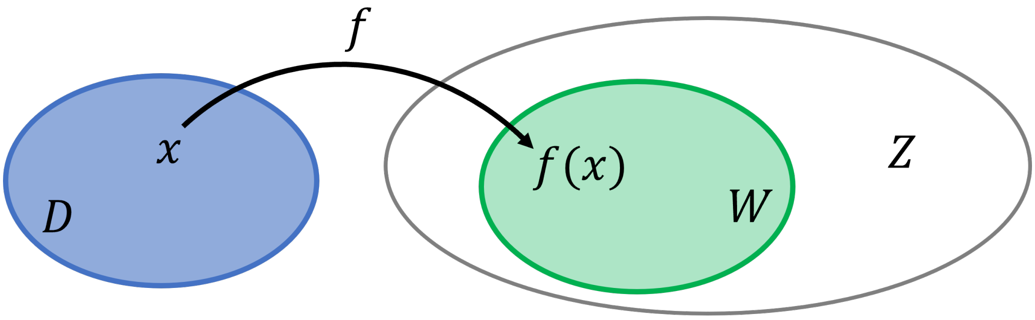
- Division reeller Zahlen: $/ : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{x}{y}$,
- Fakultät: $! : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_+,\ n \mapsto n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 =: n!$,
- Binomialkoeffizient: $\binom{\cdot}{\cdot} : \left\{(n,k) \in \mathbb{N}_0^2 : k \leq n\right\} \to \mathbb{N}_0,\ (n,k) \mapsto \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} := \dbinom{n}{k}$.

Die Menge der tatsächlich vorkommenden Elemente der Zielmenge Z heißt Bild [image, manchmal auch range], Bildbereich oder Bildmenge $f(D) \subset Z$. Die Menge S, die in einem der folgenden Beispiele auftaucht, bezeichne die Menge aller endlichen Zeichenketten.[16] Aufgabe

Unterschiedliche Bildmengen Bsp 6

- $f_1 : [3,4] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \ \Rightarrow\ f_1(D) = [9,16]$.
- $f_2 : S \to S,\ x \mapsto \begin{cases} \mathtt{a}, & x = \mathtt{b} \\ x, & x \neq \mathtt{b} \end{cases} \ \Rightarrow\ f_2(D) = S \setminus \{x \in S : \mathtt{b} \in S\}$.
- $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \ \Rightarrow\ f_3(D) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$.
- $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (e^t \cdot \cos(2\pi \cdot t), e^t \cdot \sin(2\pi \cdot t)) \ \Rightarrow\ f_4(D) = \{\text{logarithmische Spirale}\}$.

Die folgende Skizze veranschaulicht den Definitionsbereich D, die Zielmenge Z und die Bildmenge $f(D)$ einer Funktion f.



Bemerkungen:

- Streng mathematisch ist der Name der Funktion f, nicht $f(x)$. Letzteres ist ein Wert $y \in W$.
- Fiese (pathologische) Funktionen bilden keine anschaulichen Kurven, sondern können zum Beispiel zu Staub zerfallen. Die Dirichlet Funktion ist eine von ihnen:

$$f : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Eine Funktion braucht nicht unbedingt eine ausdrückliche Rechenvorschrift wie $x \mapsto \sin(x^2)$ zu haben, mit der man sie ausrechnen kann. Eine Abbildung kann auch in Worten beschrieben werden, beispielsweise

  "Nimm den dritten Buchstaben von x, falls vorhanden, ansonsten $*$."

  Oder sie ist nur indirekt gegeben, zum Beispiel als Stammfunktion:

  "F ist die Stammfunktion von $x \mapsto e^{-x}$ für $F(0) = 0$."

- Beim Programmieren in den üblichen Sprachen wie `C` kommen ebenfalls Funktionen vor. Diese sind aber allgemeiner als die mathematischen Funktionen. Zum Beispiel müssen Sie keine Eingabe haben!

[16] Testfrage: Was ist der Unterschied Z und $f(D)$?

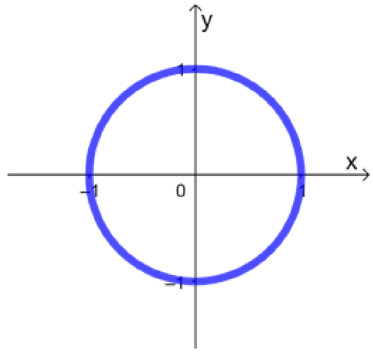
1.4.3 Geordnete Tupel

Wenn man ein Gefühl für den Funktionsverlauf einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ bekommen möchte, dann geht man oft wie folgt vor

1. man wählt eine paar Werte für $x \in \mathbb{R}$: das sind die Stützstellen x_i, $i = 1, 2, 3, \cdots$
2. man berechnet die zu den Stützstellen gehörigen Funktionswerte $y_i = f(x_i) \in \mathbb{R}$
3. man zeichnet in ein zwei-dimensionales Koordinatensystem die Punkte $P_i = (x_i|y_i)$
4. man verbindet die Punkte miteinander und behauptet, dass die Funktion so aussieht![17]

Die Punkte $P(x|y)$, die zu f gehören sind Tupel und das heißt, dass die Reihenfolge der Koordinaten fixiert ist und eine Rolle spielt: erst x dann y.

Funktionsgraph oder nicht? Bsp 7



- Ist die Kreislinie der Graph einer Funktion?
- Wie läßt sich die Kreislinie beschreiben?

Die Figur links, die Kreislinie, ist nicht der Graph einer Funktion, denn zu fast allen $x \in [-1, 1]$ gibt es **zwei** Bildwerte! Die Kreislinie ist eine sogenannte Relation. Eine Relation ist etwas allgemeineres als eine Funktion. Die mathematische Begriffe, die wir brauchen, um das zu formulieren, führen wir nun ein.

Für zwei Mengen A und B ist das kartesische Produkt [cartesian product] $A \times B$ definiert als die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, zum Beispiel:

Kartesisches Produkt Bsp 8

$$\{\circ, \diamond, M\} \times \{3, 7\} = \{(\circ, 3), (\circ, 7), (\diamond, 3), (\diamond, 7), (M, 3), (M, 7)\}\,.$$

Geordnetes Paar oder Tupel heißt, dass die Reihenfolge relevant ist, also

Georndetes Paar Bsp 9

$$(\circ, 3) \neq (3, \circ) \Rightarrow (3, \circ) \notin \{\circ, \diamond, M\} \times \{3, 7\}\,.$$

Zur Erinnerung: bei Mengen ist die Reihenfolge egal, also $\{3, 7\} = \{7, 3\}$.
Bei gegebenen Mengen A und B läßt sich die Mächtigkeit der Menge $A \times B$ wie folgt berechnen:

Mächtigkeit $A \times B$ Bsp 10

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|\,.$$

Man kann auch das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst bilden. Der klassische Fall davon ist

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^2$ Bsp 11

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Diese Menge wird üblicherweise $\mathbb{R}^2$ genannt. Man fasst $\mathbb{R}^2$ gewöhnlich auf als die Menge aller Punkte in der (euklidischen) Ebene.

Das Konzept des kartesischen Produkts kann man weiter treiben: Multipliziert man drei Mengen, soll das die Menge aller geordneten Tripel [ordered triples] bedeuten, zum Beispiel:

[17] Falls die Funktion stetig ist, ist das ein guter Ansatz!

$A \times B \times C$

Bsp 12

Es sei $A = \{\circ, \diamond, M\}$, $B = \{3,7\}$ und $C = \{\circ, \diamond, \bullet, \star\}$ Das kartesiche Produkt dieser Menge lautet:

$$\begin{aligned} & \{\circ, \diamond, M\} \times \{3,7\} \times \{\circ, \diamond, \bullet, \star\} \\ = \quad & \{(\circ,3,\circ),(\circ,3,\diamond),(\circ,3,\bullet),(\circ,3,\star),(\circ,7,\circ),(\circ,7,\diamond),(\circ,7,\bullet),(\circ,7,\star), \\ & (\diamond,3,\circ),(\diamond,3,\diamond),(\diamond,3,\bullet),(\diamond,3,\star),(\diamond,7,\circ),(\diamond,7,\diamond),(\diamond,7,\bullet),(\diamond,7,\star), \\ & (M,3,\circ),(M,3,\diamond),(M,3,\bullet),(M,3,\star),(M,7,\circ),(M,7,\diamond),(M,7,\bullet),(M,7,\star)\}\,. \end{aligned}$$

Der klassische Fall davon ist

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^3$

Bsp 13

$$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}\,.$$

Diese Menge wird üblicherweise $\mathbb{R}^3$ genannt. Man fasst $\mathbb{R}^3$ gewöhnlich auf als die Menge aller Punkte im (euklidischen) Raum.

1.4.4 Was ist eine Relation?

Eine beliebige Teilmenge eines kartesischen Produkts von n Mengen heißt n-stellige Relation. Dies hier sind zum Beispiel Relationen:

Relationen

Bsp 14

- $\{(1,2),(3,4),(1,5)\} \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$
- $\{(\mathrm{Anton},\mathrm{Weber},293)\,,(\mathrm{Bea},\mathrm{Knorr},298)\,,(\mathrm{Lisa},\mathrm{Kann},284)\} \subset \{S,S,\mathbb{N}_0\}$

Das zweite Beispiel lässt die wesentliche Bedeutung von Relationen in der Informatik ahnen: Sie dienen als Datenspeicher.

Es gibt mehrere übliche Vorstellungen von Relationen. Hier sind drei davon.

1. **Tabelle:** Fast alle aktuell üblichen Datenbanksysteme verwalten Tabellen. Mathematische Relationen sind nichts anderes als Tabellen mit ein paar Besonderheiten. Deshalb heißen diese Datenbanksysteme auch relational.

Vorname	Nachname	Matrikelnummer
Bea	Knorr	298
Lisa	Kann	284
Anton	Weber	293

   - In jeder Spalte der Tabelle dürfen nur Einträge aus der jeweiligen Menge des kartesischen Produkts stehen.
   - Die Reihenfolge der Zeilen ist egal.
   - Keine Zeile darf als Ganzes doppelt vorkommen; Teile der Zeile dürfen sich aber wiederholen.

   Bei Abbildungen bzw. Funktionen gibt es im Unterschied zur Relation nur zwei Spalten. Außerdem muss in der linken Spalte jedes Elemente der Definitionsmenge vorkommen - und das genau einmal.

2. **Liniendiagramm:**

   - Elemente der Mengen aus dem Produkt sind durch Linien verbunden.
   - Jede Linie geht durch genau ein Element aus jeder Menge des kartesischen Produkts.
   - Linien dürfen teilweise übereinander liegen.
   - Keine zwei beliebige Linien dürfen aber komplett übereinstimmen.

   Bei Abbildungen bzw. Funktionen man malt typischerweise Pfeile statt Linien. Außerdem sind nur zwei Mengen beteiligt und es muss von jedem Element in der Definitionsmenge genau ein Pfeil ausgehen.

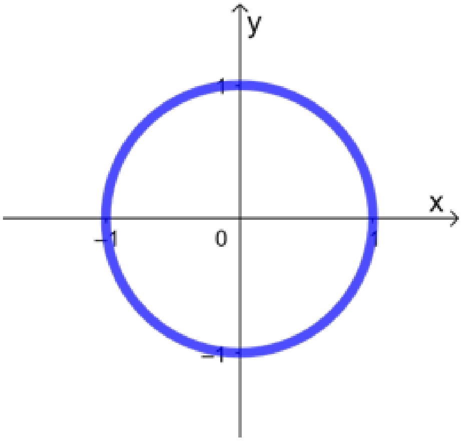
3. **Geometrische Objekte im $\mathbb{R}^n$:**

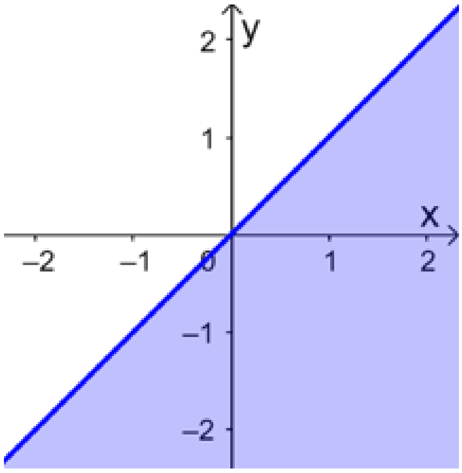
   Eine n-stellige Relation zwischen reellen Zahlen ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, also eine Menge von Punkten. Umgekehrt ist jedes auch noch so komische geometrische Objekt eine Relation!

Relationen

Bsp 15

- die Kreislinie: $P := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\right\}$.
- das " Kleiner-Gleich" Zeichen: $\leq := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\right\}$,





Bei einem Funktionsgraph muss jedem x aus der Definitionsmenge genau ein y (nicht null, nicht zwei oder mehr) aus der Bildmenge zugeordnet werden, diese Einschränkung gilt nicht für Relationen.

Funktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.4 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Funktionale Abhängigkeiten

Aufg. 1

Die Tabelle gibt den Verpackungsverbrauch pro Jahr von Privathaushalten und Kleinbetrieben in Millionen Tonnen an.

1. Veranschaulichen Sie die Werte der Tabelle durch einen Graphen.
2. Wann wurde vermutlich die neue Verpackungsverordnung (Grüner Punkt) eingeführt?
3. Wie hoch wäre der Verpackungsverbrauch 1993 wohl gewesen, wenn man die neue Verpackungsverordnung nicht eingeführt hätte? Wie viel Prozent an Verpackungsmaterial wurde dadurch etwa eingespart?

Jahr	Verbrauch in Mio. Tonnen
1988	5.7
1989	6.4
1990	7.1
1991	7.6
1992	7.2
1993	7.0
1994	6.9
1995	6.7

Mathematische Kurzschreibweise

Aufg. 2

Drücken Sie die Aussagen in mathematischer Kurzschreibweise aus.

1. Durch die Funktion f wird der Zahl 3 die Zahl 10 zugeordnet.
2. Die Funktion g nimmt an der Stelle 5 den Funktionswert 12 an.
3. Die Zahl 3 gehört nicht zur Definitionsmenge der Funktion f.
4. Die Funktion f ordnet der Zahl 4 einen größeren Funktionswert zu als der Zahl 5.
5. Die Funktionen f und g nehmen für $x = 2$ denselben Funktionswert an.
6. Alle Funktionswerte der Funktion g sind positiv.

Definitionsbereich

Aufg. 3

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der folgenden Abbildungen:

$(a)\ x \mapsto (x-1)^2$ $\quad (b)\ x \mapsto 3 - 5 \cdot x - x^2$ $\quad (c)\ x \mapsto \frac{1}{x}$

$(d)\ x \mapsto \frac{1}{3-x}$ $\quad (e)\ x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ $\quad (f)\ x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$

$(g)\ x \mapsto \sqrt{x-3}$ $\quad (h)\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ $\quad (i)\ x \mapsto \ln(x+3)$

Bildbereich

Aufg. 4

Bestimmen Sie den Bildbereich (die Bildmenge) der folgenden Abbildungen:

$(a)\ x \mapsto x^2$ $\quad (b)\ x \mapsto x^2 + 1$ $\quad (c)\ x \mapsto 2 - x^2$

$(d)\ x \mapsto -(x+2)^2 + 3$ $\quad (e)\ x \mapsto 3 \cdot x - 0.5$ $\quad (f)\ x \mapsto \sin(x)$

$(g)\ x \mapsto 3^x$ $\quad (h)\ x \mapsto 3$

1.5 Eigenschaften von Funktionen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- erste analytische Eigenschaften einer Funktion kennen, nämlich:
  - Nullstellen
  - Asymptotik
  - Monotonie
  - Symmetrie
  - Periodizität
  - Umkehrbarkeit
- wie man diese Eigenschaften systematisch prüft und damit arbeitet

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.5.1 Nullstellen, Asymptotik, Symmetrie und Periodizität

Ob Sie

- eine wirtschaftliche Machbarkeitsanalyse für Ihre Erfindung anstellen,
- die Effizienz eines Windkraftwerk feststellen möchten oder
- sich fragen, warum Ihnen Ihr Browser immer genau die Artikel anzeigt, die Sie interessieren,
- ...,

ist im Grunde egal: überall geht es um das Interpretieren von voneinander abhängigen Daten, im einfachsten Fall also von Funktionen. Ein übergeordnetes Ziel dieses Semesters ist es zu lernen, wie man funktionale Abhängigkeiten qualitativ und quantitativ erfasst. Let's go!

Eine Funktion $f : D \to f(D)$, $x \mapsto f(x)$ besitzt viele Eigenschaften, von denen einige ganz ohne viel Analysis festzustellen sind! Eigenschaften können globaler Natur sein, wie beispielsweise die Symmetrie eines Graphen, oder auch nur lokale Gültigkeit haben, beispielsweise die Extremstellen einer Funktion.

Eigenschaften — Def. 1

- **Nullstellen** sind diejenigen $x \in D$, deren zugeordneter y-Wert null ist.
- **Asymptotisches Verhalten** ist das Verhalten der y-Werte für betragsmäßig große Werte von x.
- **Punktsymmetrie** liegt vor, wenn der Graph von f am Koordinatenursprung $(0|0)$ gespiegelt erscheint.
- **Achsensymmetrie** liegt vor, wenn der Graph von f an der y-Achse gespiegelt erscheint.
- **Periodizität** liegt vor, wenn sich die y-Werte von f in einem festen Abstand wiederholen.
- **Monotonie** liegt vor, wenn die y-Werte fallen (bzw. wachsen), wenn die x-Werte fallen (bzw. wachsen).
- **Umkehrbarkeit** liegt vor, wenn man zu f eine Umkehrfunktion findet.

Auf Monotonie und Umkehrbarkeit wird in den folgenden Abschnitten detailliert eingegangen. Die ersten fünf Eigenschaften sollten Ihnen aus der Schule bekannt sein: Aufgaben

Eigenschaft	Bedingung / Fragestellung	Beispiel $f : x \mapsto x^2$
Nullstellen	$x \in D: \quad f(x) = 0 \Rightarrow x = ?$	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Asymptotik	$\lim\limits_{\lvert x\rvert \to \infty} f(x) = \ ?$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$
Punktsymmetrie	$\forall\, x \in D: \quad f(x) = -f(-x)\ ?$	$f(2) = 4 \neq -f(-2) = -4 \ \Rightarrow\ f$ nicht punktsymmetrisch
Achsensymmetrie	$\forall\, x \in D: \quad f(x) = f(-x)?$	$\forall\, x \in \mathbb{R}: \ x^2 = (-x)^2 \Rightarrow\ f$ achsensymmetrisch
Periodizität	$\exists\, T \in \mathbb{R} : \forall x \in D : f(x) = f(x + T)?$	nein! f nicht periodisch

Bemerkungen:

- Anstelle von "y-Wert" werden wir in Zukunft von Funktionswert sprechen. Das ist mathematisch präziser, da man unabhängig von einem Buchstaben ist :)
- Die Periodenlänge einer periodischen Funktion ist nicht eindeutig bestimmt. Man bezeichnet mit T oft die kürzest mögliche Periodenlänge.
- Die Übersicht über die Eigenschaften soll Ihnen als Checkliste dienen, um später Funktionsgraphen schnell skizzieren zu können. Sie ist die Grundlage einer Kurvendiskussion. 1.24
- Die Checkliste wird uns in dem ganzen Themenkomplex "Funktionen" begleiten, denn mit ihr werden wir die Standardfunktionen besser verstehen lernen.

1.5.2 Monotonie

Viele gängige Funktionen werden, wenn man größere Zahlen einsetzt, im Wert immer größer, nie kleiner und bleiben nie gleich. Für sogenannte streng monoton steigende Funktionen [strictly increasing, seltener: strictly monotonically increasing] gilt also

Strenge Monotonie ↑ Def. 2

$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)\,.$

Folgende Funktionen sind beispielsweise streng monoton steigend:

Streng monoton steigende Funktionen Bsp 1

- $x \mapsto 3 \cdot x + 5$ für $x \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto x^3$ für $x \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto e^x$ für $x \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto \ln(x)$ für $x > 0$,
- $x \mapsto \sqrt{x}$ für $x \geq 0$.

Es gibt aber auch Funktionen, die nicht streng monoton steigen, sondern nur monoton steigen [increasing, seltener: monotonically increasing]. Das heißt, dass der Funktionswert steigen oder auch gleich bleiben darf, wenn man größere Zahlen einsetzt:

Monotonie ↑ Def. 3

$a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)\,.$

Beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen gilt:

- Wenn man eine streng monotone Funktion auf beiden Seiten einer Ungleichung anwendet[18], dann ändert sich die Lösungsmenge nicht. Es ist eine Äquivalenzumformung. $x \mapsto x^3$ beispielsweise ist streng monoton wachsend, also
$$(4 \cdot x + 7)^2 \geq 39 \Leftrightarrow \left((4 \cdot x + 7)^2\right)^3 \geq (39)^3\,.$$
- Wenn man eine monoton steigende Funktion f auf beiden Seiten einer Ungleichung anwendet, hat man **keine Äquivalenzumformung**, also
$$f \text{ monoton steigend}: \quad a > b \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} f(a) \geq f(b)\,.$$

Neben den steigenden Funktionen gibt es auch fallende Funktionen: Wird der Funktionswert immer kleiner, wenn man größere Zahlen einsetzt, heißt die Funktion streng monoton fallend [strictly decreasing, seltener: strictly monotonically decreasing].[19]

[18] Eine Funktion $f(x)$ auf einen Ausdruck p anwenden bedeutet, dass man das x durch p ersetzt: $f(p)$!

[19] Wenn wir eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multiplizieren, dann drehen wir das Ungleichheitszeichen um. Genau hier handelt es sich um die Anwendung einer streng monoton fallenden Funktion auf die Ungleichung.

Strenge Monotonie ↓ Def. 4

$a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)\,.$

Folgende Funktionen sind beispielsweise streng monoton fallend:

Streng monoton fallende Funktionen Bsp 2

- $x \mapsto -3 \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto -x^3$ für $x \in \mathbb{R}$,
- $x \mapsto e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$,

Dem Verhalten steigender Funktionen entsprechend gilt:

- Wenn man eine streng fallende Funktion auf beiden Seiten einer Ungleichung anwendet, dann dreht sich das Ungleichheitszeichen um und das ändert die Lösungsmenge nicht. Es ist eine Äquivalenzumformung. $x \mapsto -x^3$ beispielsweise ist streng monoton fallend, also

$$(4 \cdot x + 7)^2 \geq 39 \Leftrightarrow -\left((4 \cdot x + 7)^2\right)^3 \leq -(39)^3\,.$$

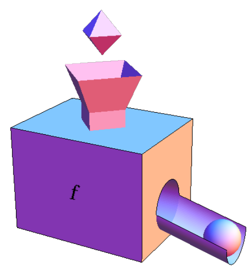
- Wenn man eine monoton fallende Funktion f auf beiden Seiten einer Ungleichung anwendet, dann sollten Sie aufpassen, denn das ist **keine Äquivalenztransformation**!

$$a > b \;\substack{\Rightarrow \\ \not\Leftarrow}\; f(a) \leq f(b)\,.$$

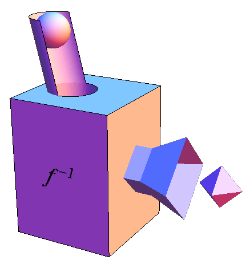
1.5.3 Umkehrbarkeit

Eine Funktion $f : D \to Z$ ist eine Maschine: ein Objekt aus D geht rein und ein Objekt aus Z wird produziert. Die Frage ist: ist der Prozess reversibel oder nicht?

Die Umkehrfunktion als Maschine Bsp 3



Die Maschine f produziert zu jedem $x \in D$ ein $y \in Z$. Den ”Produktionsprozess” umkehren bedeutet eine Maschine f^{-1} zu finden, die jedem von f produzierten y sein Urbild, also seinen zugehörigen x-Wert, zuordnet, also so:



Ist die Funktion als Graph gegeben, läßt sich die Frage nach der Existenz einer Umkehrfunktion leicht beantworten. Nehmen wir an, wir haben den Graph einer Funktion $f : D \to Z, x \mapsto f(x)$ gegeben, dann

- drehen wir den Graph um 90°, also so, dass die y-Achse waagerecht und die x-Achse senkrecht erscheint, und
- überprüfen, ob die gedrehte Figur eine Funktion ist.

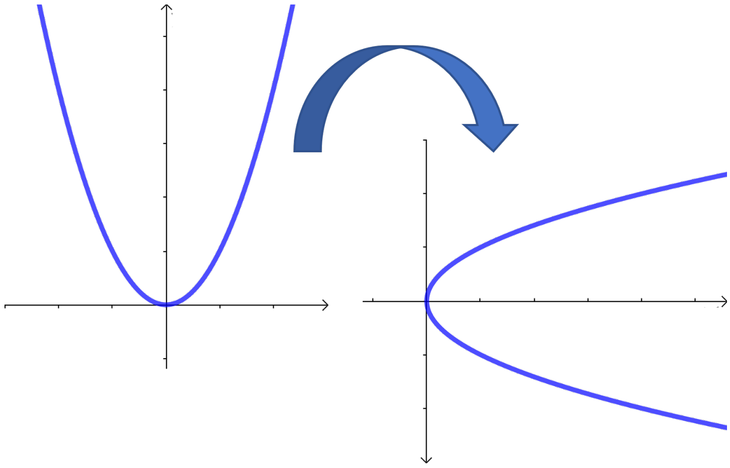
⇒ Falls ja, dann kann man f auf D umkehren!

⇒ Falls nein, dann gibt es keine Umkehrfunktion, zumindest nicht auf D!

Was sagen Sie zum nächsten Beispiel: besitzt die Funktion $f : x \mapsto x^2$ eine Umkehrfunktion?[20]

[20] Die Normalparabel ist nicht umkehrbar, weil es kein eindeutiges ”Zurück¨ gibt.

Graphische Lösung: dreh den Graph um! Bsp 4



Die mathematischen Bedingungen dafür, dass die gedrehte Figur der Graph einer Funktion ist, lauten :

- Ein Funktionswert y im Zielbereich Z von f wird genau einmal erreicht. (Injektivität von f)
- Jeder Funktionswert y im Bildbereich Z von f erreicht. (Surjektivität von f)

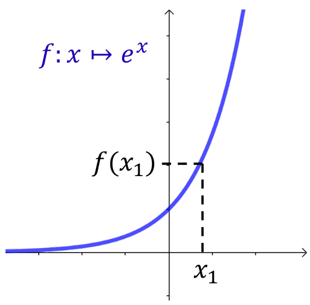
Gelten diese beiden Bedingung, dann nennt man f bijektiv. Für bijektive Funktionen läßt sich eine Umkehrfunktion bestimmen. In mathematischer Kurzschreibweise läßt sich die Bijektivität von f wie folgt definieren:

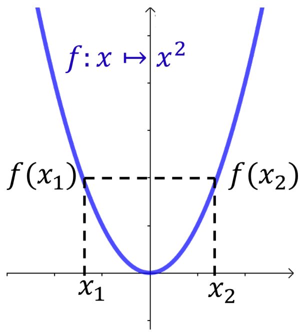
Existenz einer Umkehrfunktion Def. 5

f ist genau dann umkehrbar, wenn f bijektiv ist, wenn also gilt

- $x, y \in D: \ f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. (Injektivität)
- $\forall\, y \in Z\, \exists\, x \in D: \ f(x) = y$ oder kurz $f(D) = Z$. (Surjektivität)

Injektivität? links ja, rechts nein! Bsp 5





Soweit zur Theorie, die spannendere Frage ist: wie bestimmen wir die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion [inverse mapping /inverse function]?

Ist f eine diskrete, bijektive Funktion, gegeben als zwei-spaltige Tabelle, dann erhält man die Umkehrfunktion durch Vertauschen der beiden Spalten! Die Tabelle läßt sich nämlich einfach rückwärts lesen und man Aufgabe
erhält wieder eine Funktion: die Umkehrfunktion $f^{-1} : Z \to D$. Die Definitionsmenge und der Zielmenge sind gegenüber der Originalfunktion $f : D \to Z$ vertauscht.

Ist f eine bijektive Funktion, deren Funktionsabbildung gegeben ist, dann erhält man die Umkehrfunktion f^{-1}, indem man die Abbildungsvorschrift $y = f(x)$ nach x auflöst.

Bestimmung der Umkehrfunktion — Bsp 6

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{1}{2}\cdot x+1$ ist bijektiv, also

$$\begin{array}{rrcll} & y &=& \frac{1}{2}\cdot x+1 & \| -1 \\ \Leftrightarrow & y-1 &=& \frac{1}{2}\cdot x & \| \cdot 2 \\ \Leftrightarrow & 2\cdot y-2 &=& x & \Rightarrow\ f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto 2\cdot x-2 \end{array}$$

- $f:(3,\infty)\to(0,\infty),\ x\mapsto \frac{2}{x-3}$ ist bijektiv, also

$$\begin{array}{rrcll} & y &=& \frac{2}{x-3} & \| \cdot (x-3)\quad (x\neq 3!) \\ \overset{x\neq 3}{\Leftrightarrow} & (x-3)\cdot y &=& 2 & \| : y \quad (\neq 0!) \\ \overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} & x-3 &=& \frac{2}{y} & \| +3 \\ \Leftrightarrow & x &=& \frac{2}{y}+3 & \Rightarrow\ f^{-1}:(0,\infty)\to(3,\infty),\ x\mapsto \frac{2}{x}+3 \end{array}$$

Systematische Bestimmung der Umkehrfunktion — Regel 1

1. Bestimmung des Wertebereichs $W_f=f(D)\subset Z$ von f (Surjektivität).
2. Bestimmung der Teilmenge $X\subseteq D$, auf der f injektiv ist (Injektivität).
3. Lösen der Gleichung $y=f(x)$ führt auf $x=g(y)$.
4. Definition der Umkehrfunktion $f^{-1}:W_f\to X,\ x\mapsto g(x)\,.$

Bemerkungen:

- Achtung: Das -1 an dem Namen der Funktion hat nicht (direkt) etwas mit dem Kehrwert zu tun. Dies ist eine mathematische Notation. Später heißt f^{42}, die Funktion f 42-mal anzuwenden, also $f^{42}(x)=f(f(\cdots 42-\mathrm{mal}\cdots f(x)\cdots))$. Die Notation mit -1 setzt diesen Gedanken fort und f^0 wird eingeführt als (komplizierte) Bezeichnung für die identische Abbildung: $f^0: x\mapsto x\,.$
- Wenn man zuerst die Funktion f und dann auf das Resultat davon die dazugehörige Umkehrfunktion f^{-1} anwendet (oder andersherum), dann erhält man die identische Abbildung $\mathrm{id}: x\mapsto x$:

$\mathrm{id}=f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f$ — Regel 2

- $x\mapsto f^{-1}\big(f(x)\big)=x\,,$
- $x\mapsto f\left(f^{-1}(x)\right)=x\,.$

- In der praktischen Ingenieurmathematik kümmert man sich wenig um die Surjektivität. Denn ist eine Funktion injektiv, aber nicht surjektiv, kann man diesen Mangel leicht durch Anpassung der Zielmenge heilen. Zum Beispiel ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^x$ nicht surjektiv, aber $f:\mathbb{R}\to(0,\infty),\ x\mapsto e^x$ ist surjektiv.

Unter den folgenden Funktionen sind zwei, die umkehrbar sind. Wissen Sie welche?

- $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto$ kaufmännische Rundung von x auf eine Stelle nach dem Komma
- $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto x^2$
- $f_3:[0,8)\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto x^2$
- $f_4:[0,4)\to[0,16)$ mit $x\mapsto x^2$
- $f_5:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto \sin(x)$
- $f_6:[-\pi/2,\pi/2]\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto \sin(x)$
- $f_7:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ mit $x\mapsto \sin(x)$

Eigenschaften von Funktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.5 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Symmetrie — Aufg. 1

Welche der folgenden Funktionen ist gerade, welche ungerade?

$(a)\ x \mapsto -2 \cdot x^6 + 3 \cdot x^2$	$(b)\ x \mapsto 2 - 3 \cdot x^4$	$(c)\ x \mapsto 2 - 3 \cdot x^3$
$(d)\ x \mapsto 3 \cdot x^3 - x + 1$	$(e)\ x \mapsto x \cdot (2 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^4)$	$(f)\ x \mapsto (x-1) \cdot (x-2)$
$(g)\ x \mapsto (x-1)^3 + 3 \cdot x^2 + 1$	$(h)\ x \mapsto (1 - 3 \cdot x^2)^2$	$(i)\ x \mapsto (x - x^2)^2$

Umkehrfunktion — Aufg. 2

Gegeben sei die (diskrete) Funktion $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$ mit der Wertetabelle

x	1	2	3	4
$f(x)$	9	6	7	8

Bestimmen sie die Umkehrfunktion f^{-1}.

Umkehrfunktion — Aufg. 3

Auf welchen Intervallen ist f umkehrbar? Bestimmen Sie f^{-1} und geben Sie $D_{f^{-1}}$ an

$(a)\ f : x \mapsto 4 \cdot x - x^2$ $\qquad$ $(b)\ f : x \mapsto \dfrac{2 \cdot x}{x - 1}$ $\qquad$ $(c)\ f : x \mapsto x \cdot |x|$

Anwendung: Verpackungsreduktion — Aufg. 4

Umweltbewusste Studenten behaupten: Bei Dosen-Limo ist die Verpackung teurer als der Inhalt. Für die Überprüfung treffen die Studenten folgende Annahmen: Die Dose ist ein Zylinder, dessen Höhe doppelt so groß ist wie sein Durchmesser. Für den Hersteller kostet 1 Liter Limo 15 ct. Die Kosten für 1 dm^2 Blech betragen 3 ct

(a) Überprüfen Sie die Behauptung für den Dosenradius 3 cm.

(b) Ab welchem Dosenradius ist der Inhalt teurer als die Dose?

Anwendung: Kostenreduktion — Aufg. 5

Die Herstellungskosten eines Airbus-Seitenleitwerks aus Metall werden angenähert durch

$$k_1 : x \mapsto \frac{20 \cdot x + 5000}{x + 50},$$

wobei x die Anzahl der hergestellten Leitwerke und $k_1(x)$ eine willkürliche Geldeinheit beschreibt. Nachdem 300 Leitwerke hergestellt sind, wird erwogen, die Produktion auf Kunststoffleitwerke umzustellen. Die Stückkosten betragen dann näherungsweise

$$k_2 : x \mapsto \frac{15 \cdot x - 2500}{x - 250}, \quad x > 300.$$

1. Zeichnen Sie die beiden Graphen, zum Beispiel mit Hilfe von Geogebra o.ä..
2. Wie verhalten sich die Stückkosten bei sehr großen Produktionszahlen?
3. Ab welcher Stückzahl ist das Kunststoffleitwerk billiger?

1.6 Lineare Funktionen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- mit unterschiedlichen Darstellungen linearer Funktionen zu arbeiten:
  - Achsenabschnitt-Form
  - Zwei-Punkte-Form
  - Punkt-Steigungs-Form
- eine gegebene Messreihe linear zu interpolieren (linearer Spline)
- eine Ausgleichsgerade (lineare Regression) für eine gegebene Messreihe zu bestimmen

---

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.6.1 Lineare Funktionen

Funktionen der Art $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2x + 3$ heißen linear[21]. Der Graph einer solchen Funktion ist eine Gerade, allerdings nie eine genau vertikale Gerade. Warum?

Angenommen, es gibt sowohl einen x-Achsenabschnitt $(a, 0) \in D \times Z$ als auch einen y-Achsenabschnitt $(0, b) \in D \times Z$ und beide sind nicht null, dann kann man die Abbildungsvorschrift der lineare Funktion in Achsenabschnittsform angeben:

Gerade in Achsenabschnitt-Form — Regel 1

$$f(x) = -\frac{b}{a} \cdot x + b.$$

Dass diese Gleichung tatsächlich richtig ist, kann man so sehen: sie beschreibt eine Gerade und stimmt für die beiden Schnittpunkte mit den Achsen. Eine andere Gerade als die gesuchte würde aber nicht durch diese beiden Schnittpunkte verlaufen.

Für zwei voneinander verschiedene Punkte $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ auf einer Gerade ist das Verhältnis von $y_2 - y_1$ zu $x_2 - x_1$ immer gleich! Der Wert wird Steigung der Gerade genannt:

Steigung einer Gerade — Regel 2

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Kennt man die Steigung m der Gerade und einen Punkt $(x_1|y_1)$ auf der Gerade, dann ist die Gerade eindeutig bestimmt:

Gerade in Punkt-Steigungs-Form — Regel 3

$$f(x) = m \cdot (x - x_1) + y_1.$$

Kennt man anstatt der Steigung einen weiteren Punkt, gibt man die Gerade in Zwei-Punkte-Form an:

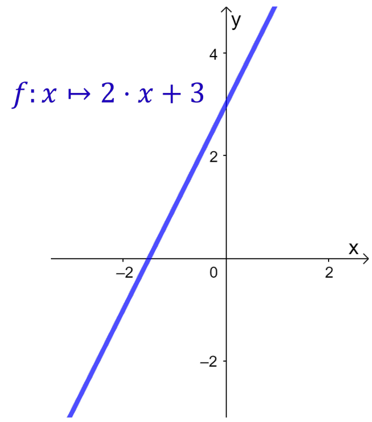
Gerade in Zwei-Punkte-Form — Regel 4

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1.$$

---

[21] Vorsicht: eine lineare Funktion ist im Allgemeinen keine lineare Abbildung, siehe Abschnitt !

Lineare Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot x + 3$ Bsp 1



Unterschiedliche Darstellungen für f:

- Achsenabschnitt-Form:
$$a = -\frac{3}{2} \wedge b = 3 : \quad f(x) = -\frac{3}{-\frac{3}{2}} \cdot x - (-3) = 2 \cdot x + 3$$
- Punkt-Steigungs-Form:
$$m = 2 \wedge P(1|5) : \quad f(x) = 2 \cdot (x - 1) + 5 = 2 \cdot x + 3$$
- Zwei-Punkte-Form:
$$P_1(0|3) \wedge P_2(1|5) : \quad f(x) = \frac{3-5}{0-1} \cdot (x - 1) + 5 = 2 \cdot x + 3 \,.$$

1.6.2 Lineare Interpolation

In einer der folgenden Anwendungen wird der Begriff "stückweise definierte Funktion" benutzt:

Stückweise definierte Funktion Def. 1

Von einer stückweise definierten Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist dann die Rede, wenn man den Definitionsbereich in N Intervalle
$$I_k = [x_k, x_{k+1}],\; x_k < x_{k+1},\; k = 1, \cdots, N-1,$$
aufteilen kann, also
$$D_f = \bigcup_{k=1}^{N-1} I_k = [x_1, x_N]\,,$$
und wenn sich auf jedem der Intervalle I_k eine geschlossene Abbildungsformel angeben läßt:
$$f : x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & x \in I_1, \\ f_2(x), & x \in I_2, \\ \vdots \\ f_{N-1}(x), & x \in I_{N-1}\,. \end{cases}$$

Der Prototyp einer stückweise definierten Funktion ist die Betragsfunktion: Aufgabe

Betragsfunktion Bsp 2

$$f : x \mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0\,, \\ -x, & x < 0\,. \end{cases}$$

Nehmen wir an, Sie führen eine Messreihe durch, in der eine physikalische Größe y in Abhängigkeit einer anderen Größe x beobachtet wird, zum Beispiel die Leitfähigkeit eines Metallblocks in Abhängigkeit von seiner Temperatur. Die Messdaten bestehen dann also aus einer Menge von N Messpunkten
$$\{(x_i|y_i)\,,\; x_i, y_i \in \mathbb{R},\; i = 1, \ldots, N\}$$
und zur Analyse der Daten suchen Sie eine Funktion, deren Graph die Messpunkte durchläuft. Solch eine Funktion nennt man Spline. Der lineare Spline interpoliert linear zwischen zwei Messwerten mit der Zwei-Punkte-Formel. Die Details fasst die folgende Regel zusammen. Aufgabe

Interpolation

Def. 2

Es seien N Messpunkte $\{(x_i|y_i),\ x_i, y_i \in \mathbb{R}\,,\ i = 1, \cdots, N\}$ gegeben. Der lineare Spline lautet:

$$f : [x_1, x_N] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1, & x \in I_1\,, \\ \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \cdot (x - x_2) + y_2, & x \in I_2\,, \\ \vdots \\ \dfrac{y_N - y_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} \cdot (x - x_{N-1}) + y_{N-1}, & x \in I_{N-1}\,. \end{cases}$$

1.6.3 Lineare Regression

Sie überlegen nochmal und stellen fest, dass Sie in Ihrem Experiment so viele Unwägbarkeiten drin haben, dass es Ihnen sinnvoller erscheint eine lineare Funktion

$$(*) \qquad x \mapsto m \cdot x + b$$

zu konstruieren, deren Graph Ihre gemessenen Punkte $(x_i|y_i)$, $i = 1, \ldots, N$, nicht exakt durchläuft, sondern möglichst gut annähert. Die Aufgabe lautet dann: bestimme die unbekannten Koeffizienten in $(*)$ so, dass gilt

$$\sum_{i=1}^{N} \left|y(x_i) - y_i\right|^2 \overset{!}{=} \min\,.$$

Das Verfahren zur Bestimmung von m und b nennt man das Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate. Es führt auf die folgenden Formeln für m und b: Aufgabe

Ausgleichsgerade (lineare Regression oder Bestapproximation)

Def. 3

Die Ausgleichsgerade

$$x \mapsto m \cdot x + b$$

für N gegebene Messwerte $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$ besitzt die Steigung

$$m = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle) \cdot (y_i - \langle y \rangle)}{\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

und den y-Achsenabschnitt

$$b = \langle y \rangle - m \cdot \langle x \rangle\,.$$

Die spitzen Klammern $\langle \cdot \rangle$ bezeichnen Mittelwerte, also

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i\,, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i\,.$$

Lineare Funktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.6 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Abbildungsvorschrift — Aufg. 1

Bestimmen Sie die Abbildungsvorschrift (Funktionsgleichung) in der Form

$$f(x) = m \cdot x + b$$

einer linearen Funktion durch die Punkte $(1,5|2)$ und $(-3|3)$.

Umkehrfunktion — Aufg. 2

Für welche reellen Werte von m und b ist die lineare Funktion $f : x \mapsto m \cdot x + b$ umkehrbar?

Abbildungsvorschrift — Aufg. 3

Die durch die Gleichung $x + 3y = 8$ beschriebene Gerade im $\mathbb{R}^2$ wird um zwei Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben geschoben. Geben Sie die Abbildungsvorschrift für die verschobene Gerade an.

Betragsfunktion — Aufg. 4

Skizzieren Sie die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1 + |x|\}$. Kennzeichnen Sie, ob die Ränder dazu gehören oder nicht.

Betragsfunktion — Aufg. 5

Stellen Sie die folgenden Funktionen ohne Betragszeichen dar. Zeichnen Sie den Graph:

$(a)\ f : x \mapsto 2 \cdot |x|$ $\quad (b)\ f : x \mapsto |2 - x|$ $\quad (c)\ f : x \mapsto |2 + x|$ $\quad (d)\ f : x \mapsto x - |x|$

Anwendung: Interpolation — Aufg. 6

Gegeben sind die Messpunkte $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, 3$, mit $(-1,5|2), (-0,25|3,5), (0,5|3,3), (1,2|2,8)$. Bestimmen Sie den linearen Spline und werten Sie ihn am Punkt $x = 0,2$ aus. Welchen Wert erhalten Sie?

Anwendung: Ausgleichsgerade — Aufg. 7

Gegeben sind die Messpunkte $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, 3$, mit $(-1,5|2), (-0,25|3,5), (0,5|3,3), (1,2|2,8)$. Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade und werten Sie ihn am Punkt $x = 0,2$ aus. Welchen Wert erhalten Sie?

Anwendung: Dimensionierung Solarzellen — Aufg. 8

Sonnenkollektoren wandeln Lichtenergie in Wäre um, die an den Warmwasserspeicher abgeführt wird. Die benötigte Kollektorfläche hängt linear vom Volumen des Speichers ab. Bei einer Speichertemperatur von 45°C wird für 200 Liter eine Kollektorfläche von 3m^2, für eine 500 Liter 7m^2 empfohlen. Pro Person wird mit einem Verbrauch von 50 Liter Warmwasser am Tag gerechnet. Das Speichervolumen sollte 50% über dem Verbrauch liegen.

1. Bestimmen Sie die Funktion, die der Personenanzahl die Kollektorfläche zuordnet.
2. Wie groß sollte die Kollektorfläche bei einem 4-Personen Haushalt sein?
3. Für wie viele Personen reicht eine Kollektorfläche von 8m^2?

1.7 Potenzfunktion und Wurzelfunktion

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

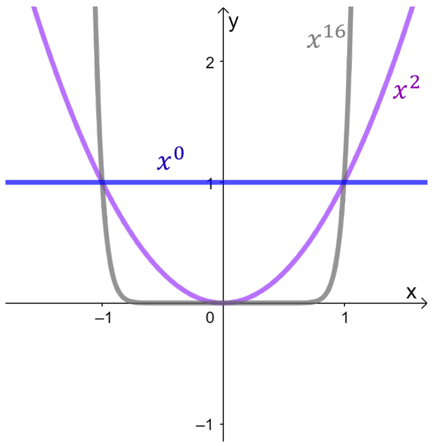
- die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}^+$ kennen
- die Wurzelfunktionen $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}^+$ kennen
- grundsätzliche Eigenschaften von Funktionen mit Potenz- und Wurzelfunktionen zu bestimmen
- Gleichungen mit Potenz- und Wurzelfunktionen zu lösen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.7.1 Potenzfunktionen

Eine Funktion der Art $x \mapsto x^5$ heißt Potenzfunktion [power function]. Um den Definitionsbereich gleich $\mathbb{R}$ 1.4
wählen zu können, betrachtet wir Exponenten aus $\mathbb{N}^+$.[22] Es läßt sich schnell feststellen, dass der Verlauf dieser Potenzfunktionen entscheidend davon abhängt, ob der Exponent gerade oder ungerade ist:

Monotonie und Symmetrie von Potenzfunktionen mit geradem Exponenten Regel 1



Potenzfunktionen

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^{2n}$$

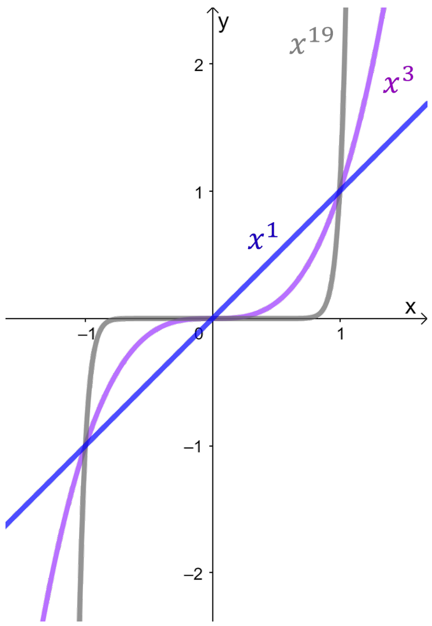
mit geradem Exponenten sind...

- achsensymmetrisch (gerade), also

$$f(x) = f(-x)\,,$$

- auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend,
- auf $(0, \infty)$ streng monoton steigend,
- auf $\mathbb{R}$ nicht bijektiv und damit nicht umkehrbar!

Monotonie und Symmetrie von Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten Regel 2



Potenzfunktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^{2n+1}$$

mit ungeradem Exponenten sind ...

- punktsymmetrisch (ungerade), also

$$f(-x) = -f(x)\,,$$

- auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend,
- auf $\mathbb{R}$ bijektiv und damit umkehrbar.

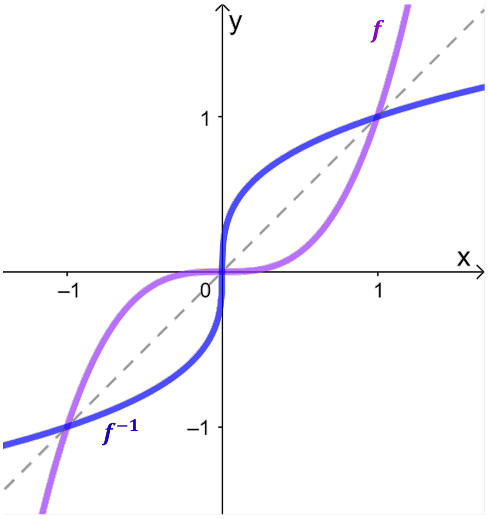
[22] Auch Funktionen $x \mapsto x^{-1/5}$ oder wie $x \mapsto x^{\pi}$ sind eigentlich Potenzfunktionen, aber die haben offensichtlich Probleme mit $x \leq 0$.

1.7.2 Wurzelfunktionen

Eine Funktion der Art $x \mapsto \sqrt[5]{x} = x^{1/5}$ heißt Wurzelfunktion[23] [root function].

Ungeradzahlige Wurzeln sind die Umkehrfunktionen der entsprechenden Potenzfunktionen. Ein Beispiel: 1.5

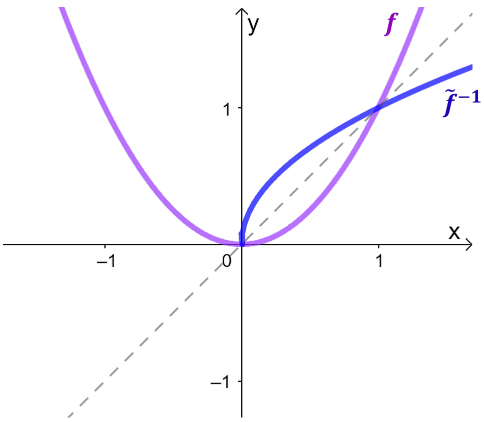
Ungeradzahlige Wurzeln Bsp 1



- $f : x \mapsto x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ ist eine Potenzfunktioin mit ungeradem Exponent.
- $f^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist die Umkehrfunktion.
- " Umkehrfunktion" und Funktion sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt.
- Ungeradzahlige Wurzeln liefern negative Ergebnisse und können aus negativen Zahlen gezogen werden.

Potenzfunktionen mit geradem Exponenten, beispielsweise $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$, sind nicht injektiv auf $\mathbb{R}$. Schränkt man g auf ein Intervall ein, indem g injektiv ist, kann man dort umkehren und genau das wird gemacht: geradzahlige Wurzeln sind die Umkehrfunktionen der auf $[0, \infty)$ eingeschränkten Potenzfunktionen mit geradem Exponenten:

Geradzahlige Wurzeln Bsp 2



- $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^4$ ist auf $\mathbb{R}$ ist eine Potenzfunktioin mit geradem Exponent.
- f ist auf $\mathbb{R}$ nicht invertierbar.
- $\tilde{f} : [0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^4$ ist bijektiv und damit invertierbar.
- $\tilde{f}^{-1} : x \mapsto \sqrt[4]{x}$ kehrt die Potenzfunktion auf $[0, \infty)$ um.
- " Umkehrfunktion" und Funktion sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt.
- Geradzahlige Wurzeln liefern nie negative Ergebnisse und können nur aus positiven Zahlen gezogen werden.

Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen tauchen oft in Gleichungen auf. Folgende Regeln sollten Sie dann beherrschen. Aufgaben

Gleichungen mit Potenzfunktionen Regel 3

Es sei $n \in \mathbb{N}^+$. Gesucht sind die reellen Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung

$$x^n = c\,.$$

Für n gerade, also $n = 2, 4, 6, \cdots$ besitzt die Gleichung

- für $c > 0$ die beiden Lösungen $x_1 = -\sqrt[n]{c}$, $x_2 = \sqrt[n]{c}$,
- für $c = 0$ die Lösung $x = 0$,

[23] Genau genommen sind Wurzelfunktionen nur spezielle Potenzfunktionen. Typischerweise betrachtet man nur die Wurzeln $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ usw., nicht etwa $\sqrt[-4{,}23]{\ }$.

- für $c < 0$ keine Lösung.

Für n ungerade, also $n = 1, 5, 7, \cdots$ besitzt die Gleichung

- für $c \geq 0$ die Lösung $x = \sqrt[n]{c}$,
- für $c < 0$ die Lösung $x = -\sqrt[n]{|c|}$.

1.7.3 Verallgemeinerung der Potenzrechenregeln

Für das Produkt positiver ganzzahliger Potenzen a^n und a^m derselben Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt offensichtlich:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}\,.$$

Damit diese Regel auch für den Exponenten 1, den Exponenten 0 und für negative ganzzahlige Exponenten gilt (wenn $a \neq 0$), muss man definieren:

$$a^0 := 1, \quad a^1 := a, \quad a^{-1} := \frac{1}{a}, \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}\,.$$

Für eine positive ganzzahlige Potenz $(a^n)^m$ einer positiven ganzzahligen Potenz a^n einer Zahl $a \in (0, \infty)$ gilt offensichtlich:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}\,.$$

Um diese Regel auf gebrochenzahlige Exponenten zu erweitern, muss man definieren:

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}\,.$$

Fassen wir die Rechenregeln zusammen: Aufgaben

Rechenregeln

Regel 4

Für alle Zahlen $a, b \in (0, \infty)$ und alle Exponenten $n, m \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n\,,\\
a^n \cdot a^m &= a^{n+m}\,,\\
(a^n)^m &= a^{n \cdot m}\,,\\
a^{-n} :&= \frac{1}{a^n}\,,\\
a^{\frac{m}{n}} :&= \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \; m \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Aber Vorsicht mit 0 und negativen Zahlen als Basis:

Vorsicht! Wo ist der Fehler?

Bsp 3

$$\left((-3)^2\right)^{\frac{1}{2}} \neq -3\,.$$

Potenz- und Wurzelfunktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.7 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

$f : x \mapsto 3\sqrt{4-x^2}$ Aufg. 1

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 3 \cdot \sqrt{4-x^2}$.

(a) Geben Sie die Funktionswerte an den Stellen -1 und $\sqrt{3}$ an.

(b) Berechnen Sie $f(0)$, $f(2)$, und $f(\frac{2}{3})$.

(c) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge von f.

(d) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $P(-\sqrt{2}|3\sqrt{2})$ auf dem Graphen von f liegt.

Symmetrie Aufg. 2

Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen in ihrem maximalen Definitionsbereich

$(a)\ f : x \mapsto 4 \cdot x^2 - 16$ $\quad (b)\ f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\quad (c)\ f : x \mapsto |x^2-4|$

$(d)\ f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{1+x^2}$ $\quad (e)\ f : x \mapsto \sqrt{x^2-25}$ $\quad (f)\ f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$

Monotonie Aufg. 3

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie. Hinweis: Benutzen Sie die bekannten Symmetrieeigenschaften der Potenz- und Wurzelfunktionen.

$(a)\ f : x \mapsto x^4$ $\quad (b)\ f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ $\quad (c)\ f : x \mapsto x^3 + 2 \cdot x$ $\quad (d)\ f : x \mapsto |x^2 - 2 \cdot x + 1|$

Umkehrfunktion Aufg. 4

(a) Welche der Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind umkehrbar?

(b) Wie lauten die Umkehrfunktionen von folgenden Funktionen?

$(a)\ f : x \mapsto \dfrac{1}{2 \cdot x}$ $\quad (b)\ g : x \mapsto \sqrt{3 \cdot x}$

Gleichungen Aufg. 5

Lösen Sie folgenden Gleichungen

$(a)\ \sqrt{-3+2 \cdot x} = 2$ $\quad (b)\ \sqrt{x^2+4} - x = -2$ $\quad (c)\ \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$ $\quad (d)\ \sqrt{2 \cdot x^2 - 1} + x = 0$

Gleichungen Aufg. 6

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$-2 \cdot x^2 + 6 = 4 \cdot x$$

(b) Für welchen Parameter p hat die folgende Gleichung genau eine Lösung?

$$x^2 + p \cdot x + 3 \cdot p = 0$$

(c) Für welche Werte von c hat die folgende Gleichung keine reelle Lösung?

$$x^2 + 2 \cdot c \cdot x + c = 0$$

1.8 Polynome

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen . . .

- was ein Polynom ist
- wie zwei Polynome dividiert werden
- was Nullstellen bzw. Linearfaktorzerlegung eines Polynoms sind
- wie Polynome sich asymptotisch verhalten
- wie sich eine Abbildungsvorschrift aus gegebenen Eigenschaften rekonstruieren läßt

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.8.1 Was ist ein Polynom?

Ein Ausdruck der Art $x^8 + 3 \cdot x^3 + 6$ wird Polynom [polynomial] oder manchmal auch ganzrationale Funktion [ohne englische Entsprechung] in x genannt. Eine Funktion $p : x \mapsto p(x)$ ist genau dann ein Polynom wenn

- die Variable x nur in ganzzahligen Potenzen ab 0 aufwärts erscheint,
- vor den Potenzen Faktoren stehen, die sogenannten Koeffizienten,
- die Produkte aus Koeffizient und Potenz addiert werden.

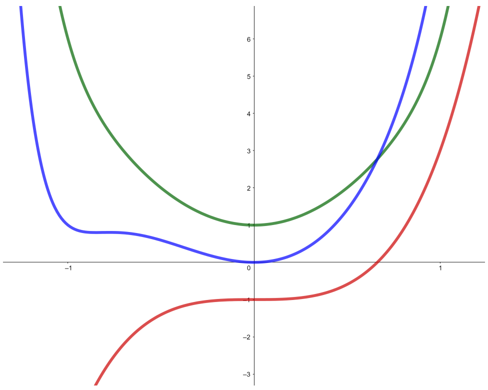
Wir führen ein bisschen Vokabular ein, um uns über Polynome unterhalten zu können:

- Die größte Potenz von x, die wirklich vorkommt (also einen Koeffizienten $\neq 0$ hat) heißt der Grad [order, degree] des Polynoms.
- Unter dem asymptotischen Verhalten eines Polynoms, versteht man den typischen Verlauf des Funktionsgraphen für betragsmäßig große x.
- Die Nullstellen eines Polynoms sind genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $p(x) = 0$.

Für ein Polynom $p : x \mapsto a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots a_0$ gilt:

- p ist für alle reelle Zahlen definiert: $D = \mathbb{R}$.
- p verhält sich asymptotisch wie der Summand der höchsten Potenz, also wie die Potenzfunktion $x \mapsto a_n \cdot x^n$!!!
- Ist p von ungeradem Grad, $n = 2 \cdot m + 1$, so besitzt p mindestens eine reelle Nullstelle! Warum?

Verhalten von Polynomen Bsp 1



Die Graphen links gehören zu folgenden Polynomen:

- $h : x \mapsto x^{10} + 4 \cdot x^2 + 1$
- $f : x \mapsto x^5 + 3 \cdot x^3 - 1$
- $g : x \mapsto x^{10} + x^5 + 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2$

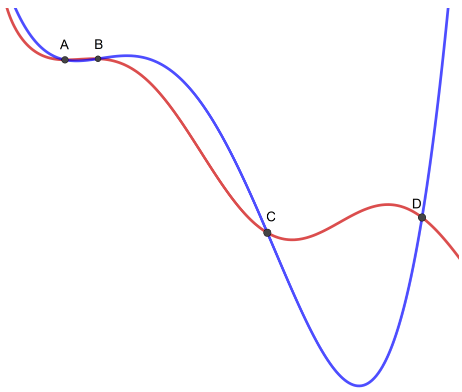
Bemerkungen:

- Mit Polynome lassen sich andere Funktion approximieren. Die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen können beispielsweise gut durch Polynome genähert werden: MA2-11

$$
\begin{aligned}
e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 \,, \\
\sin(x) &\approx x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 \,, \\
\cos(x) &\approx 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 \,.
\end{aligned}
$$

- Polynome sind außerdem beliebt als Hilfsmittel, um Messwerte zu interpolieren, beispielsweise mit einem linearen Spline oder auch mit Polynomen höheren Grades. Das ist hilfreich, wenn die anderen Funktionen zu unhandlich sind, und ist praktisch unausweichlich, wenn die anderen Funktionen unbekannt sind: 1.6

Polynomiale Interpolation Bsp 2



$$
\begin{cases}
f : D_f \to \mathbb{R}, & x \mapsto \sin^2(x) - \sqrt{3 \cdot x} \\
p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & x \mapsto \frac{3}{20} \cdot x^4 - \frac{13}{10} \cdot x^3 + \frac{33}{10} \cdot x^2 - \frac{319}{100} \cdot x
\end{cases}
$$

$\Rightarrow$ f hat den Definitionsbereich $D_f = [0, \infty)$.

$\Rightarrow$ p ist ein Polynom vierten Grades, also $D_p = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ p interpoliert f an fünf ausgewählten Punkten.

$\Rightarrow$ asymptotisch sind f und p komplett verschieden.

$\Rightarrow$ die Interpolation ist eine lokale Approximation.

- Daneben treten Polynome bei der Analyse von Differentialgleichungen, Filtern oder Regelsystemen auf. MA2-06
- Insbesondere Fourier- und Laplace-Transformation erlauben komplexe Systeme zum Beispiel auf Polynome zurückzuführen. MA2-14

1.8.2 Polynomdivision

Polynome kann man addieren, subtrahieren und multiplizieren und erhält wieder Polynome[24]:

Polynome addieren, subtrahieren und multiplizieren Bsp 3

$$
\begin{aligned}
\left(3 \cdot x^4 + \frac{4}{3} \cdot x + \sqrt{2}\right) - \left(3 \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x + \sqrt{2}\right) &= 3 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 + x \,, \\
(3 \cdot x + 1) \cdot \left(2 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x\right) &= 6 \cdot x^3 + x^2 - \frac{1}{3} \cdot x \,.
\end{aligned}
$$

Beim Addieren und Subtrahieren ist der Grad des Ergebnisses maximal so hoch wie der größte Grad der Polynome, die man addiert bzw. subtrahiert. Beim Multiplizieren ist der Grad des Ergebnisses genau die Summe der Grade der beiden multiplizierten Polynome. Polynome kann man zwar auch durcheinander teilen - allerdings ist das Ergebnis dann selten wieder ein Polynom:

Polynome dividieren Bsp 4

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{x - 2} \to \infty$ $\Rightarrow$ so etwas macht kein Polynom!

Insofern ähneln die Polynome den natürlichen Zahlen. Genauso wie man aus Brüchen von natürlichen Zahlen einen ganzzahligen Anteil und einen "Rest" berechnet

$$
\frac{37}{5} = 6 + \frac{2}{5} \qquad \Rightarrow 6 + \text{Rest } 2 \,,
$$

kann man aus Brüchen von Polynomen ein Polynom und einen (gebrochenrationalen) Rest bestimmen. Diese Polynomdivision wird praktisch genauso gerechnet wie die schriftliche Division. Allerdings gibt es keinen Übertrag von einer Stelle auf die andere, was die Sache sogar noch einfacher macht. Hier ein Beispiel:

[24] Diese Eigenschaft werden wir in Abschnitt 18 als Vektorraum-Eigenschaft kennenlernen.

Polynomdivision Bsp 5

$$\begin{array}{rrrrrrl}
(2x^3 & + & 4x^2 & - & 3x & + & 3) : (2x^2 - x + 1) = x + \frac{5}{2} + \dfrac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{2x^2 - x + 1} \\
-(2x^3 & - & x^2 & + & x) & & \\
\hline
 & & (1+4)x^2 & - & (1+3)x & + & 3\,) \\
 & - & (5x^2 & - & \frac{5}{2}x & + & \frac{5}{2}\,) \\
\hline
 & & & - & \frac{3}{2}x & + & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Die Polynomdivision liefert also

$$(2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 3) : (2 \cdot x^2 - x + 1) = x + \frac{5}{2} + \frac{-\frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{2}}{2 \cdot x^2 - x + 1} \quad \Rightarrow \; x + \frac{5}{2} + \text{ Rest } \left(-\frac{3}{2} \cdot x + \frac{1}{2}\right).$$

Bei der Polynomdivision entsteht ein Polynom, das den Grad vom Zähler minus den Grad vom Nenner hat. Der Rest ist ein Polynom, das höchstens den Grad des Nenners minus eins hat. Warum?

1.8.3 Linearfaktorzerlegung

Schon im Abschnitt über lineare Funktionen haben wir gelernt, dass ein und dieselbe Funktion unterschiedliche Darstellungen besitzen kann. Je nach gegebener Information bzw. je nach dem, was einem interessiert, ist eine Darstellung vorteilhafter als eine andere. Derselbe Gedanke treibt unsere Überlegungen in diesem Abschnitt an. Angenommen wir haben ein Polynom 1.6

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

und wir möchten es skizzieren, dann wäre es hilfreich die Nullstellen zu kennen, denn die sind leicht in ein Koordinatensystem einzutragen! Mit der Idee haben wir uns gleich ein paar Fragen eingehandelt und zwar: 1.5

1. Wie viele Nullstellen hat p?
2. Wie bestimmmt man die Nullstellen von p?
3. Gibt es eine Dartellung p, aus der man die Nullstellen sofort ablesen kann?

Auf die dritte Fragen gehen wir in diesem Abschnitt detailliert ein - hier die Kurzantworten:

1. Ein Polynom p vom Grad n kann höchstens n verschiedene Nullstellen haben. Und zur Erinerung nochmal die Überlegungen zu Beginn des Abschnitts:
   - Hat p geraden Grad muss es gar keine reellen Nullstellen geben, beispielsweise $p(x) = x^2 + 2 \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad p(x) > 0$!
   - Hat p ungeraden Grad, so gibt es mit Sicherheit zuminest eine Nullstelle!
2. Alle Tricks zur Nullstellenbestimmung werden im nächsten Abschnitt vorgestellt. 1.9
3. Ja! Es gibt eine Darstellung: ist p in seine Linearfaktoren zerlegt, so kann man alle reellen Nullstellen sofort ablesen!

Wie sieht die Linearfaktorzerlegung eines Polynoms aus? Angenommen wir kennen eine Nullstelle [zero] x_1 eines Polynoms p, also $p(x_1) = 0$, dann muss die Polynomdivision $p(x) : (x - x_1)$ ohne Rest aufgehen! Angenommen, es gäbe einen Rest. Dann darf der höchstens den Grad 0 haben, weil der Nenner den Grad 1 hat. Ein Polynom vom Grad 0 ist aber eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Also:

$$p(x) : (x - x_1) = q(x) + \frac{c}{x - x_1}\,,$$

wobei q ein Polynom ist, das einen Grad niedriger ist als p. Das Ausgangspolynom p lässt sich damit aufspalten:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - x_1) + c \quad \wedge \quad 0 \overset{!}{=} p(x_1) = q(x_1) \cdot \underbrace{(x_1 - x_1)}_{=0} + c \;\Rightarrow\; c = 0\,.$$

Wir haben also eine neue Darstellung von p gefunden, aus der die Nullstelle x_1 sofort abzulesen ist:

$$p(x_1) = 0 \;\Leftrightarrow\; p(x) = q(x) \cdot (x - x_1)\,.$$

Man nennt den Vorgang " Abspaltung des Linearfaktors $(x - x_1)$". Kennt man mehr Nullstellen des Polynoms p, dann sind das auch Nullstellen von q und so kann man weitere Linearfaktoren abspalten. Taucht eine Nullstelle mehrfach auf, dann taucht der entsprechende Linearfaktor genauso oft auf.

Zweifache Nullstelle Bsp 6

$$p : x \mapsto 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 12 \Rightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -2 \Rightarrow p(x) = (3 \cdot x + 6) \cdot (x + 2) = 3 \cdot (x + 2)^2$$

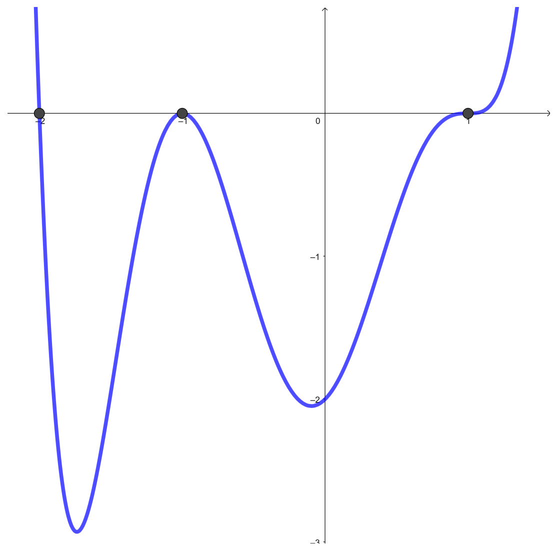
Sind also n Nullstellen, x_1 bis x_n, samt ihrer Vielfachheiten [multiplicity], k_1 bis k_n, bekannt, so gelingt es mit Hilfe von Polynomdivisionen die Linearfaktorzerlegung Stück für Stück zu bestimmen:

Abspalten von maximal vielen Linearfaktoren Regel 1

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x) \cdot (x - x_1) \\ &= \cdots \\ &= \underbrace{(x - x_n)^{k_n} \cdot (x - x_{n-1})^{k_{n-1}} \cdots (x - x_1)^{k_1}}_{\prod_{l=1}^{l=n} (x - x_l)^{k_l}} \cdot (\text{Polynom ohne reelle Nullstellen})\,. \end{aligned}$$

Die Vielfachheit [multiplicity] der Nullstellen bestimmt übrigens, wie der Funktionsgraph durch die y-Achse geht oder sie berührt. Das folgende Beispiel zeigt das typische Verhalten des Funktionsgraphen Nullstellen unterschiedlicher Vielfachheit:

Typischer Verlauf des Graphen eines Polynoms Bsp 7



Für $p : x \mapsto (x + 2) \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^3$ gilt:

- p ist in faktorisierter Form gegeben.
- p besitzt drei unterschiedliche Nullstellen: $N_p = \{-2, -1, 1\}$.
- $x = -2$ ist eine einfache Nullstelle $\Rightarrow$ Achse wird geschnitten.
- $x = -1$ ist eine doppelte Nullstelle $\Rightarrow$ Achse wird berührt.
- $x = 1$ ist eine dreifache Nullstelle $\Rightarrow$ Achse wird geschnitten.
- p verhält sich asymptotisch wie die Funktion $x \mapsto x^6$.

Es bleibt die Frage, wie man Nullstellen von Polynomen findet und das ist Thema des nächsten Abschnitts. 1.9

1.8.4 Parabeln

In diesem kurzen Abschnitt geht es um Polynome zweiten Grades. Polynome zweiten Grades nennt man auch Parabeln oder quadratische Funktionen.

Parabel in Koeffizientenform Def. 1

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Eine Funktion der Form

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

heißt quadratische Funktion oder Parabel.

Eine Parabel muss keine reellen Nullstellen haben - denken Sie an die Normalparabel, die man entlang der y-Achse um eins verschiebt. Aber für den Fall, dass es reelle Nullstellen gibt, haben wir entsprechend des vorangegangenen Abschnitts eine Linearfaktorzerlegung und die lautet:

Linearfaktorzerlegung einer Parabel — Def. 2

Eine Parabel mit den Nullstellen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ besitzt die Darstellung

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)\,.$$

Ausgehend von der Koeffizientenform gilt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}\,.$$

Und wir schließen den Abschnitt mit einer dritten Darstellungsvariante, der sogenannten Scheitelpunktform einer Parabel. Der Scheitelpunkt ist ein Scheitel in dem Sinne, dass der Graph der Parabel sich dort vertikal spiegelt. Am Scheitelpunkt wird der Graph entweder minimal oder maximal und diese Kenntnis ist nützlich zum Beispiel beim Lösen von Ungleichungen!

Scheitelpunktform einer Parabel — Def. 3

Eine Parabel mit Scheitelpunkt $S = (x_S | y_S)$ besitzt die Darstellung

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a \cdot (x - x_S)^2 + y_S\,.$$

Ausgehend von der Koeffizientenform gilt

$$x_S = \frac{-b}{2 \cdot a}\,, \quad y_S = -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c\,.$$

Je nach Vorzeichen von a ist der Scheitelpunkt ein Minimum oder ein Maximum:

- $a > 0 \;\Rightarrow\; S$ ist ein lokales Minimum,
- $a < 0 \;\Rightarrow\; S$ ist ein lokales Maximum.

Polynome Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.8 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Symmetrie — Aufg. 1

Zeigen Sie: Wenn der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion einen konstanten Summanden enthält, dann ist die Funktion nicht ungerade.

Umkehrfunktion — Aufg. 2

Die Funktion f mit $f(x) = ax^3+bx,\ a, b \in \mathbb{R}$, sei umkehrbar. Welche Bedingung erfüllen die Koeffizienten a und b?

Polynom? — Aufg. 3

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen Polynome sind:

$(a)\ x \mapsto 1 + \sqrt{2}x$ $\quad (b)\ x \mapsto 1 + 2\sqrt{x}$ $\quad (c)\ x \mapsto (x-1)^2(x-7)$

$(d)\ x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$ $\quad (e)\ x \mapsto x^2 - \frac{x}{3}$ $\quad (f)\ x \mapsto x^2 + \sin(x)$

Darstellungen von Parabeln — Aufg. 4

Bestimmen Sie von folgenden Parabeln die Linearfaktordarstellung und die Scheitelpunktform.

$(a)\ x \mapsto -2x^2 - 4x + 3$ $\quad (b)\ x \mapsto 5x^2 + 20x + 20$

$(c)\ x \mapsto 2x^2 + 10x$ $\quad (d)\ x \mapsto 4x^2 + 8x - 60$

Abbildungsvorschrift — Aufg. 5

(a) Wie müssen die Koeffizienten a, b, c lauten, wenn die Parabel $y(x) = ax^2 + bx + c$ an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$ verschwindet und der Funktionswert am Scheitelpunkt $y_S = 18$ beträgt?

(b) Bestimmen Sie ein Polynom p vierten Grades mit den folgenden Eigenschaften:

- p ist eine gerade Funktion.
- p besitzt die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$.
- $p(0) = -3$

Polynomdivision — Aufg. 6

Zeigen Sie, dass $x_0 = -5$ eine Nullstelle von $p(x) = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe der Polynomdivision das Polynom q, für das gilt $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$.

Polynomdivision — Aufg. 7

Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome mit Hilfe einer Polynomdivision und stellen Sie die Polynome in Linearfaktorzerlegung dar. Die Polynome besitzen mindestens eine ganzzahlige Nullstelle.

$(a)\ x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\quad (b)\ t \mapsto -2t^4 - 2t^3 - 4t + 8$

$(c)\ x \mapsto x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ $\quad (d)\ t \mapsto 2t^4 + 8t^3 - 12t^2 - 8t + 10$

1.9 Algebraische Gleichungen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen . . .

- was eine algebraische Gleichung der Ordnung n ist und
- wie man sie löst:
  - allgemeine Lösungsformel für $n = 2$
  - Polynomdivision mit bekannter Nullstelle $n \geq 3$
  - Substitution falls die Exponenten Potenzen gleicher Basis sind
  - Satz von Vieta, falls die n Nullstellen reellwertig sind
  - Newton-Verfahren als Allzweckwaffe

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.9.1 Was ist eine algebraische Gleichung?

Betrachten wir eine Gleichung, in der nur eine Unbekannte x, konstante Zahlen und die Grundrechenarten vorkommen:

$$\frac{x^2+7}{x-\pi} = \frac{\sqrt{5}}{x^2-9} + 3 \quad \text{mit } x \notin \{-3, \pi, 3\}\,.$$

Die Unbekannte und die übrigen Zahlen sind typischerweise reell, manchmal aber auch komplex. Indem man mit den Nennern multipliziert, lassen sich alle Brüche beseitigen: 1.14

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \pi, 3\} : \quad \frac{x^2+7}{x-\pi} = \frac{\sqrt{5}}{x^2-9} + 3 \;\Leftrightarrow\; (x^2+7)\cdot(x^2-9) = \Big(\sqrt{5} + 3\cdot(x^2-9)\Big)\cdot(x-\pi)\,.$$

Berücksichtigt man den Definitionsbereich, dann ist die ursprüngliche Gleichung also äquivalent zu einer Gleichung, die man mit Plus, Minus und Mal hinschreiben kann: einer sogenannten algebraischen Gleichung [algebraic equation]. Der höchste tatsächlich vorkommende Exponent von x heißt Grad der Gleichung. Typischerweise analysiert man die Normalform der algebraischen Gleichung, das heißt: man bringt alle Terme auf eine Seite, fasst die verschiedenen Potenzen von x jeweils zusammen und dividiert durch den Koeffizienten vor der höchsten Potenz: 1.8

Eine algebraische Gleichung in Normalform Bsp 1

$$x^4 + \frac{3}{7}\cdot x^3 + \frac{(2+3\pi)}{7}\cdot x^2 - \sqrt{5}\cdot x + 9 = 0\,.$$

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades zu lösen bedeutet also die Nullstellen [roots] eines Polynoms n-ten Grades zu finden. Insbesondere gibt es **höchstens** n verschiedene Lösungen und wenn n ungerade ist, dann gibt es immer **mindestens eine** Lösung.[25] 1.8

1.9.2 Der Satz von Vieta

Bleiben wir bei der algebraischen Gleichung des Beispiels:

$$x^4 + \frac{3}{7}\cdot x^3 + \frac{2+3\pi}{7}\cdot x^2 - \sqrt{5}\cdot x + 9 = 0\,.$$

Angenommen (angenommen!), das Polynom

$$p : x \mapsto x^4 + \frac{3}{7}\cdot x^3 + \frac{2+3\pi}{7}\cdot x^2 - \sqrt{5}\cdot x + 9$$

lässt sich komplett in Linearfaktoren zerlegen, dann gibt es vier reelle Nullstellen x_1, x_2, x_3 und x_4 mit

$$p(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4) \overset{!}{=} x^4 + \frac{3}{7}\cdot x^3 + \frac{2+3\pi}{7}\cdot x^2 - \sqrt{5}\cdot x + 9\,. \quad (*)$$

Wir haben in $(*)$ o.B.d.A.[26] die Linearfaktorzerlegung zur Darstellung von p angesetzt.[27]

Die algebraische Gleichung haben wir gelöst, wenn wir konkrete Zahlenwerte für die $x_1, \cdots, x_4$ bestimmen können und dies gelingt durch Ausmultiplizieren und **Koeffizientenvergleich**: Aufgaben

Bestimmung von Nullstellen: Ansatz ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich Bsp 2

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{3}{7}x^3 + \frac{2+3\pi}{7}x^2 - \sqrt{5}x + 9 &\stackrel{!}{=} (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4) \\ = \quad & x^4 - x^3(x_1+x_2+x_3+x_4) + x^2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) \\ & -x(x_1x_3x_4+x_2x_3x_4+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4) + (x_1x_2x_3x_4) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = \frac{3}{7} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 & = \frac{2+3\pi}{7} \\ -x_1x_3x_4 - x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 & = -\sqrt{5} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 & = 9 \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Unter den Voraussetzungen, dass nur reelle Nullstellen vorliegen, geht das natürlich auch für Polynome beliebigen Grades.
- Das geschilderte Vorgehen zur Nullstellenbestimmung durch Koeffizientenvergleich heißt " Satz von Vieta".
- Der Satz von Vieta führt zu einem System nicht-linearer Gleichungen, das im Allgemeinen schwer analytisch zu lösen ist. Eine Ausnahme sind quadratische Gleichungen. Aufgabe

1.9.3 Gleichungen der Ordnung $n \geq 2$

Betrachten wir die allgemeinste Form einer algebraischen Gleichung zweiten Grades (quadratische Gleichung):

allgemeine Form einer quadratischen Gleichung Def. 1

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0\,.$

Wenn man diese Gleichung zu Fuß löst, addiert und subtrahiert man eine quadratische Ergänzung, mit der man die Terme mit x^2 und x zu einem Quadrat zusammenfassen kann: Aufgaben

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0\,.$$

Also ist die ursprüngliche Gleichung äquivalent zu:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\,.$$

Es gibt damit drei Fälle:

Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$ Regel 1

$$\begin{cases} -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (*)\,, \\ -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b}{2a}\,, \\ -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 < 0 \Rightarrow \text{keine reellen Lösungen}\,. \end{cases}$$

Bemerkungen:

[25]Für komplexe Zahlen werden es später genau n Lösungen werden, wenn man die Vielfachheiten mitzählt.
[26]o.B.d.A. bedeutet " ohne Beschränkung der Allgemeinheit"
[27]Erinnern Sie sich: dieser Ansatz ist immer dann optimal wenn es um die Nullstellen von p geht!

- (∗) nennt man die allgemeine Lösungsformel.
- Die allgemeine Lösungsformel wendet man in der Praxis auf jede quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten an und passt auf, was unter der Wurzel passiert.
- Ist die Diskriminante negativ, dann besitzt die quadratische Gleichung keine reellen Lösungen.
- Auch für algebraische Gleichungen dritten Grades in Normalform kann man eine Lösungsformel herleiten. Diese Lösungsformel wird nicht von Ihnen verlangt.

Wenn Sie einer Gleichung höherer Ordnung begegnen, die Sie analytisch lösen sollen, dann gelingt das mit einer der folgenden Methoden

Aufgaben

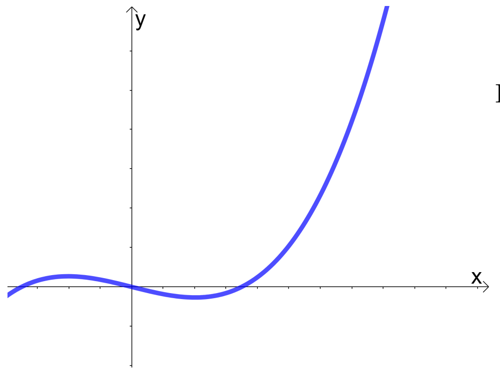
- Reduktion des Grades durch Polynomdivision bei gegebener Nullstelle. 1.8
- Reduktion des Grades durch Substitution der Art $z = x^2$.[28]

1.9.4 Das Newton-Verfahren

Schon bei Gleichungen dritten Grades und insbesondere aber bei Gleichungen vom Grad fünf oder höher greift man statt zu einer fertigen Lösungsformel zur sogenannten " Nullstellensuche", also einem schrittweise genauer werdenden (= iterativen) Lösungsverfahren. Beliebt, weil einfach und sehr schnell ist das Newton-Verfahren, auch Newton-Raphson-Verfahren genannt. Es lässt sich verwenden, um die Nullstellen von Polynomen, zu finden.

Newton-Verfahren: die Aufgabenstellung

Def. 2



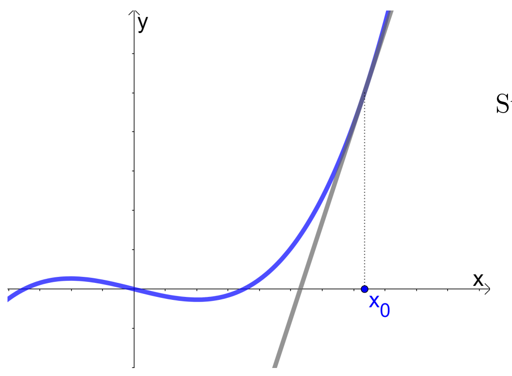
Die Aufgabe, die wir lösen möchten, lautet:

- Es sei eine stetig differenzierbare Funktion gegeben:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$
- Finde $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$!

Solch eine Aufgabenstellung kommt in der Praxis extrem oft vor! Man kann die Funktionsweise des Lösungsalgorithmus anhand der nun folgenden Bilderserie verstehen:

Newton-Verfahren: die Iteration

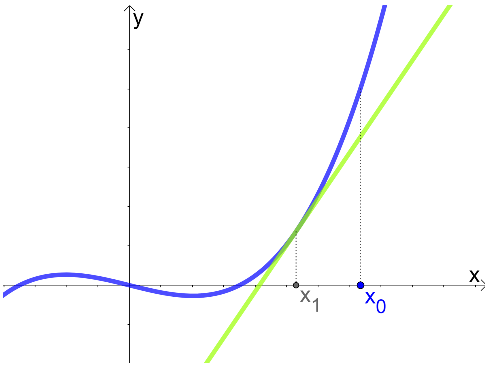
Bsp 3



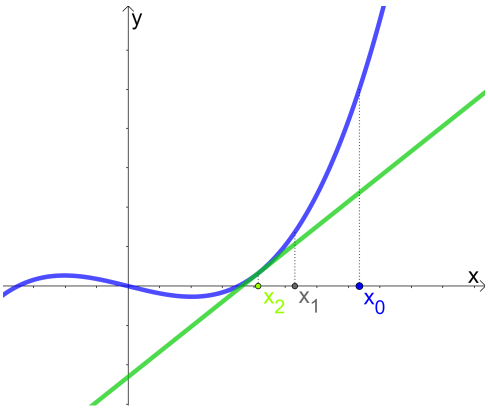
Start:

- Wähle einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Konstruiere die Tangente an f in x_0:
$$t_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

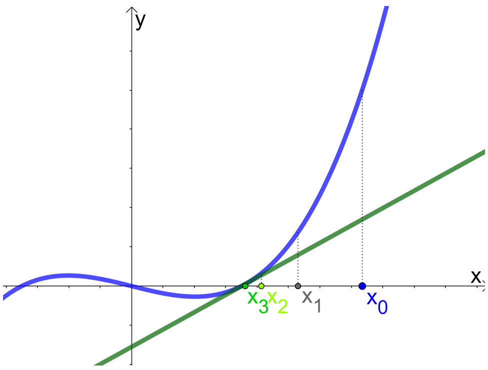
[28]Man löst zunächst nach z und darf dann nicht die Rücksubstitution $x_{1,2} = \pm\sqrt{z}$ für alle $z \geq 0$ vergessen!



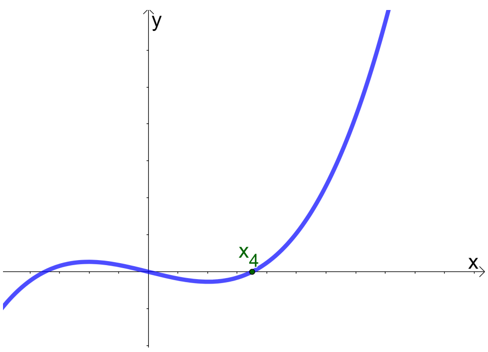
1. Iteration:
   - Bestimme den Schnittpunkt von t_1 mit der x-Achse:
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
   - Konstruiere die Tangente t_2 an f in x_1:
$$t_2(x) = f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$



2. Iteration:
   - Bestimme den Schnittpunkt von t_2 mit der x-Achse:
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
   - Konstruiere die Tangente t_3 an f in x_2:
$$t_3(x) = f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x - x_2)$$



3. Iteration:
   - Bestimme den Schnittpunkt von t_3 mit der x-Achse:
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$
   - Konstruiere die Tangente an f in x_3:
$$t_4(x) = f(x_3) + f'(x_3) \cdot (x - x_3)$$



4. Iteration:
   - Bestimme den Schnittpunkt von t_4 mit der x-Achse.
$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$
   - x_4 ist mit dem bloßen Auge nicht mehr von der gesuchten Nullstelle zu unterscheiden!
   - Stopp!

Diese Idee lässt sich in Formeln übersetzen: ... Aufgaben

Newton-Verfahren — Regel 2

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \\ \cdots &= \cdots \\ x_k &= x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

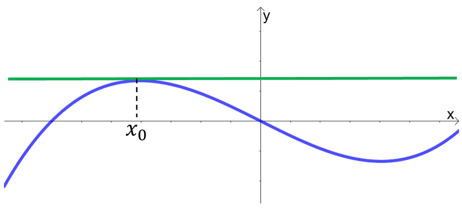
- Wenn der Startwert x_0 gut gewählt wurde und dicht an der Nullstelle liegt und es auf dem Weg dahin keine zu flachen Stellen gibt, dann führt das Newton-Verfahren zum Erfolg.
- Kennt man die exakte Lösung, die man sucht, dann kann man den Fehler beobachten. Beispielsweise lautet die Iteration zur Lösung der kubischen Gleichung $x^3 = 7$:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^3 - 7}{3x_{k-1}^2} = \frac{2}{3}x_{k-1} + \frac{7}{3x_{k-1}^2}.$$

  Nach kurzer Einlaufzeit verdoppelt sich die Zahl der gültigen Dezimalstellen bei jeder weiteren Iteration. Mit anderen Worten: Der Fehler $|x_k - \sqrt[3]{7}|$ wird bei jedem Schritt etwa quadriert, also ein Fehler der Größenordnung $0,001$ ist im nächsten Schritt nur noch in der Größenordnung $0,00001$. Man spricht von quadratischer Konvergenz. Probieren Sie es aus! Excel

- Das Newton-Verfahren wird nicht nur zur Nullstellensuche von Polynomen eingesetzt, sondern klappt für beliebige nicht-lineare Funktionen, deren Ableitungen stetig sind. Das bebilderte Beispiel zeigt die ersten 1.22+1.23 vier Newton-Iterationen für die Funktion $f : x \mapsto x^3 - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ und Startwert $x_0 = 1,48$.
- Natürlich kennt man in der Praxis die exakte Lösung nicht und man muss ein anderes Kriterium finden, um die Iteration irgendwann zu stoppen: sinnvoll ist den Abstand $|x_k - x_{k+1}|$ zu beobachten und zu stoppen, wenn er hinreichend klein ist!
- Wenn der Startwert schlecht gewählt ist, dann liefert das Newton-Verfahren keine Lösung:

Schlechter Startwert — Bsp 4



  - die Tangente in x_0 ist eine horizontale Gerade
  - das Newton-Verfahren liefert keine Lösung für die Nullstelle

- Das Newton-Verfahren für eine stetig differenzierbare Funktion f konstuiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und die Folge konvergiert gegen eine Nullstelle von f, wenn der Startwert passend gewählt worden ist.[29]

[29] Was mit Konvergenz einer Folge bzw. eines numerischen Verfahrens gemeint ist, können Sie jetzt noch nicht wissen - wer sich allerdings für das Thema interessiert, der bekommt hier eine leise Ahnung dafür, um welche Themen sich die Angewandte Mathematik kümmert...

Algebraische Gleichungen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.9 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Gleichungen — Aufg. 1

(a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ die x-Achse nur im Punkt $S(-2|0)$ schneidet.

(b) Die Gerade g geht durch S und hat die Steigung 2. Berechnen Sie alle Schnittpunkte von g mit dem Graphen von f.

Gleichungen — Aufg. 2

Bestimmen Sie durch Probieren eine Nullstelle und berechnen Sie danach die weiteren Nullstellen.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

(b) $f(x) = 4x^3 - 20x^2 - x + 110$

Gleichungen — Aufg. 3

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an:

$(a)\ x^2 - 2x - 7 = 0$	$(b)\ x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$
$(c)\ 2x^3 - 5x^2 - 10x = 0$	$(d)\ x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Anwendung: Newton-Verfahren — Aufg. 4

(a) Betrachten Sie die Funktion
$$f : x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}\,.$$
Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f für den Startwert $x_0 = \frac{1}{10}$. Führen Sie drei Iterationen durch. Hinweis: $f' : x \mapsto \cos(x) - \frac{1}{2}$.

(b) Bestimmen Sie eine Folge, die sich für große n an $\sqrt{5}$ annähert. Hinweis: Betrachten Sie $f : x \mapsto x^2 - 5$ mit $f' : x \mapsto 2x$.

(c) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Newton-Verfahrens zur Funktion
$$f : x \mapsto x^3 - 2y + 2$$
mit Startwert $x_0 = 0$. Konvergiert das Newton-Verfahren? Interpretieren Sie das Ergebnis.

1.10 Exponentialfunktion und Logarithmus

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen . . .

- was Exponentialfunktionen sind und welche Eigenschaften sie besitzen
- was Logarithmusfunktionen sind und welche Eigenschaften sie besitzen
- Gleichungen mit Exponential- und Logarithmusfunktionen zu lösen (Rechenregeln)
- die "logarithmische Darstellung" kennen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.10.1 Exponentialfunktionen

Eine Funktion der Art $x \mapsto 7{\cdot}3^x$ heißt Exponentialfunktion [exponential function]. Die Zahl, die potenziert wird, in diesem Beispiel die Zahl 3, nennt man Basis [base]. Um Probleme mit dem Definitionsbereich zu vermeiden, betrachtet man keine negativen Basen[30]. Warum?

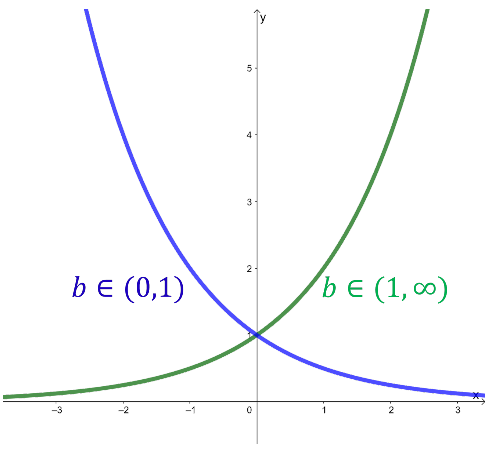
Die Exponentialfunktionen mit Basis 0 bzw. Basis 1 führen auf triviale Funktionen, da

Exponentialfunktionen mit $b \in \{0, 1\}$ Regel 1

$$\forall\, x > 0 : \quad 0^x = 0,\ 1^x = 1\,.$$

Interessante Exponentialfunktionen erhält man für Basen $b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Exponentialfunktionen mit $b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ Regel 2



1. Gilt $b \in (1, \infty)$, so ist die resultierende Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$
   - definiert für alle reellen x, also $D = \mathbb{R}$.
   - surjektiv mit $W = (0, \infty)$.
   - streng monoton steigend.
2. Gilt $b \in (0, 1)$, so ist die resultierende Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$
   - definiert für alle reellen x, also $D = \mathbb{R}$.
   - surjektiv mit $W = (0, \infty)$.
   - streng monoton fallend.

Im vorigen Bild sieht man die Graphen der Funktionen

$$f : x \mapsto 2^x\,,$$
$$g : x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x\,.$$

Die Graphen der Funktionen spiegeln sich an der y-Achse und das ist nicht überraschend, denn

$$g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x} = f(-x)\,.$$

Zum Lösen von Gleichungen oder Ungleichungen, in denen Exponentialfunktionen vorkommen, müssen wir die Potenzregeln im Kopf haben: Aufgaben

[30]Für $x = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^+$ entspricht der Funktionswert einer Exponentialfunktion einer geradzahligen Wurzel und die ist nur für positive Argumente definiert!

Rechenregeln Exponentialfunktionen — Regel 3

Es sei $b \in (0,1) \cup (1,\infty)$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Betrachte die Funktion $x \mapsto b^x$. Es gilt:

$$\begin{aligned} b^0 &= 1 \\ b^{x+y} &= b^x \cdot b^y \\ b^{-x} &= \frac{1}{b^x} \\ (b^x)^y &= b^{x \cdot y} \end{aligned}$$

1.10.2 Die Exponentialfunktion $\exp : x \to e^x$

Unter allen Exponentialfunktionen gibt es eine von besonderer Wichtigkeit. Es ist " die Exponentialfunktion" mit der Basis e. e ist die Eulersche Zahl [Euler's number]. Welche Zahl ist e? Die Eulersche Zahl ist eine echt irrationale Zahl und das heißt, dass wir Sie nie exakt als Dezimalzahl angeben können. Aber wir können sie approxmieren und hierfür dient das folgende Experiment. Berechnen wir den Ausdruck

$$(*) \quad a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

für ein paar $n \in \mathbb{N}$ aus, beispielsweise für $n = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$:

n	1	10	100	1000	10000	100000
a_n	2	2,594	2,705	2,717	2,718	2,718

Wir könnten das Experiment unendlich fortsetzen und werden feststellen, dass sich der Wert der durch $(*)$ definierten Zahlenfolge[31] für immer größere Werte von n der folgenden Zahl annähert: 1.19

Die Eulersche Zahl $e \in \mathbb{R}$ — Def. 1

$e := 2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076 6\ldots$

Das Verhalten, das wir hier beobachtet haben, werden wir in Abschnitt 1.19 unter dem Begriff Folgenkonvergenz definieren. Interessanterweise erhalten wir eine Darstellung für jedes Folgenglied a_n in $(*)$ mit Hilfe des Binomischen Satzes: 1.2

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot (1)^{n-k} .$$

Dies liefert eine alternative Approximation für die Eulersche Zahl, zum Beispiel für $n = 1000$:

$$\begin{aligned} e = e^{\frac{1000}{1000}} &= \left(e^{\frac{1}{1000}}\right)^{1000} = (1,0010005\cdots)^{1000} \\ &\approx \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} \cdot \frac{1}{1000^k} \\ &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{999}{1000} + \frac{1}{3!}\frac{999 \cdot 998}{1000 \cdot 1000} + \frac{1}{4!}\frac{999 \cdot 998 \cdot 997}{1000 \cdot 1000 \cdot 1000} + \cdots \\ &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots . \end{aligned}$$

Mit demselben Trick kann man die Exponentialfunktion $\exp : x \mapsto e^x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ beliebig genau berechnen, ohne jemals krumme Potenzen zu bilden:

$$\begin{aligned} e^x &\approx \left(1 + \frac{x}{1000}\right)^{1000} = \sum_{k=0}^{1000} \binom{1000}{k} \cdot \frac{x}{1000^k} \\ &\approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}\frac{999}{1000} + \frac{x^3}{3!}\frac{999 \cdot 998}{1000 \cdot 1000} + \frac{x^4}{4!}\frac{999 \cdot 998 \cdot 997}{1000 \cdot 1000 \cdot 1000} + \cdots \\ &\approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots . \end{aligned}$$

[31] Die Präzise Definition einer Zahlenfolge und deren Eigenschaften wenden wir uns noch zu!

Man kann zeigen, dass die obigen Approximationen für $n \to \infty$ tatsächlich die Eulersche Zahl bzw. die Exponentialfunktion darstellen:[32]

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,, \\ e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,. \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktionen dienen dazu Wachstums- oder Zerfallsprozesse zu beschreiben.

- Die Zinsen werden hier einem Kapital K über einen gewissen Zeitraum zugeschlagen und mit verzinst. Dies führt zu exponentiellem Wachstum des Kapitals. Die Zinseszinsformel lautet:

Zinseszinsformel — Bsp 1

$$K(t) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t\,,$$

wobei p die Zinszahl und $K(0)$ das Anfangskapital darstellt. Bei einem Sparbuch mit 5% Zinsen pro Jahr hat sich Anfangskapital nach ca. 14 Jahren verdoppelt:

$$K(14) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{14} \approx 1,98 \cdot K(0)\,.$$

- Das Zerfallsgesetz ist die in der Physik übliche Bezeichnung der Gleichung, die eine exponentielle zeitliche Abnahme von Größen beschreibt. In der Kernphysik gibt das Zerfallsgesetz die Anzahl N der zu einem Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atomkerne einer radioaktiven Substanzprobe an. Diese Anzahl beträgt

Radioaktiver Zervall — Bsp 2

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}\,,$$

wobei $N(0)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandenen Atomkerne und λ die Zerfallsrate des betreffenden Nuklids ist.

- In der Thermodynamik betrachtet man häufig Verteilungen von Teilchen auf Niveaus verschiedener Energie E. Sind quantenmechanische Effekte egal und ist die Zahl der Teilchen fest und ist die Gesamtenergie fest und ist die Unordnung (Entropie) maximal, ist das Energieniveau E proportional zu $e^{-E/kT}$ besetzt. Dazu kommen noch weitere Faktoren, zum Beispiel, um die Zustandsdichten zu berücksichtigen. Dabei ist k die Boltzmann-Konstante,

$$k = 1,380649\dot{1}0^{-23}\,\mathrm{J/K}\,.$$

Diese Verteilung schlägt sich an vielen Stellen nieder. Die Arrhenius-Gleichung modelliert, wie eine Reaktionsgeschwindigkeit v_{reac} von der Temperatur abhängt:

Arrhenius-Gleichung — Bsp 3

$$v_{\text{reac}} \approx e^{-\frac{E}{RT}}\,,$$

wobei $R = N \cdot k$ die universelle Gaskonstante bezeichnet.

1.10.3 Logarithmusfunktionen

Die Exponentialfunktionen $x \mapsto b^x$ mit Basis $b \in (0,1)$ sind streng monoton fallend, die mit $b \in (1,\infty)$ sind streng monoton steigend. Also kann man in allen diesen Fällen jeweils die Umkehrfunktion bilden: den Logarithmus [logarithm] zur Basis b: 1.5

Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktionen — Def. 2

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b(y)\,.$$

Ein Logarithmus beantwortet die Frage: Womit muss man die Basis b potenzieren, damit y herauskommt? Eine Exponentialfunktion bildet nur auf positive Zahlen ab, also können Logarithmusfunktionen nur positive Zahlen verarbeiten.

[32] Um das zu beweisen fehlt uns im Moment das Handwerkszeug.

Einige Logarithmusfunktionen sind besonders wichtig und haben deshalb spezielle Bezeichnungen:

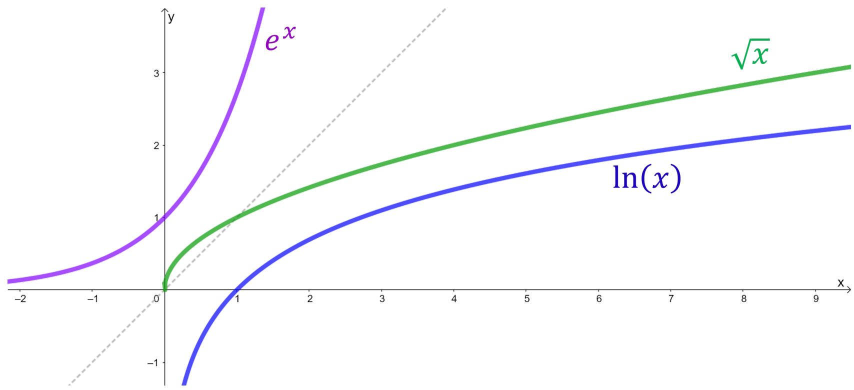
Bezeichnungen wichtiger Logarithmusfunktionen Def. 3

1. Den Logarithmus zur Basis e schreibt man $\ln := \log_e$ und nennt ihn den natürlichen Logarithmus,
2. Den Logarithmus zur Basis 10 schreibt man $\lg := \log_{10}$,
3. Den Logarithmus zur Basis 2 schreibt man $\mathrm{lb} := \log_2$.

Vorsicht: In Programmiersprachen und in der fortgeschrittenen Mathematik heißt der natürliche Logarithmus oft log.

Exponentialfunktionen explodieren, Logarithmusfunktionen kriechen, erreichen aber dennoch jedes noch so großes Ergebnis:

Monotonie des Logarithmus - es kriecht Bsp 4



- Exponentialfunktion
- Quadratwurzel
- Logarithmusfunktion

Weil die Logarithmusfunktionen die jeweiligen Exponentialfunktionen umkehren, kann man aus den Potenzrechengesetzen die Rechenregeln für Logarithmusfunktionen folgern: Aufgaben

Rechenregeln Logarithmusfunktionen Regel 4

Für alle $x, y > 0$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\log_b(x \cdot y) &= \log_b(x) + \log_b(y) \\
\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y) \\
\log_b\left(x^z\right) &= z \log_b(x) \\
\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) &= \frac{1}{n}\log_b(x), \quad n \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Oft sind am Rechner nur lg und ln verfügbar, keine Logarithmusfunktion zubeliebigen Basen b. Dann kann man sich so behelfen: $x = \log_3(7)$, also $7 = 3^x$, also:

$x = \log_3(7)$ Bsp 5

$$\left.\begin{aligned} 7 &= 10^{\lg(7)} \\ 3^x &= \left(10^{\lg(3)}\right)^x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lg(7) = x \cdot \lg(3) \Rightarrow x = \frac{\lg(7)}{\lg(3)}\,.$$

Auch die Logarithmusfunktionen kommen auf natürliche Weise vor:

- Logarithmusfunktionen tauchen oft auf, wenn die menschliche Wahrnehmung modelliert wird - so beim Schalldruckpegel:
$$20 \cdot \lg\left(\frac{p}{20\mu\mathrm{Pa}}\right)\ \mathrm{dB_{SPL}}\,,,$$
hier bezeichnet p der Druck. Das Gehör nimmt also die Lautstärke logarithmisch wahr.
- Bei der Tonhöhe passiert etwas ähnliches bzw. bei musikalischen Intervallen zwischen Frequenzen f_1, f_2: (Verdopplung der Frequenz ist also eine Oktave weiter)
$$\mathrm{lb}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)\,.$$

- Außerdem verhält sich der Informationsgehalt logarithmisch:

$$\mathrm{lb}\,(\text{Anzahl der Zustände})\ \text{Bits}\,.$$

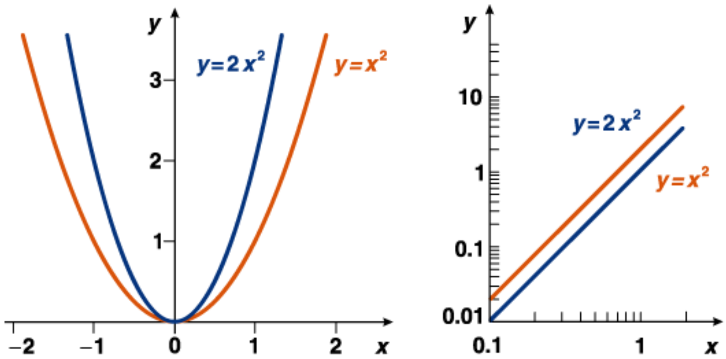
Zum Beispiel kann man die Zahlen von 0 bis 256 in 8 Bits (Ja-Nein Informationen) speichern.

1.10.4 Logarithmische Darstellung

Um Zusammenhänge zu plotten, die ungefähr exponentiell oder logarithmisch sind, empfiehlt sich eine logarithmische Einteilung der y-Achse beziehungsweise der x-Achse. Aufgaben

Für Zusammenhänge zweier Größen, die sich ungefähr wie eine Potenzfunktionen darstellen, empfiehlt sich, sowohl die x-Achse als auch die y-Achse logarithmisch einzuteilen: 1.7

Doppelt logarithmische Skala Bsp 6



Bemerkung:

- Bei der Untersuchung des Newton-Verfahrens kann man aus der logarithmischen Darstellung die quadratische Konvergenz des Verfahrens ablesen! 1.9 1.21

Exponential- und Logarithmusfunktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.10 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Interpolation — Aufg. 1

Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktion

$$f : x \mapsto a \cdot e^{-bx}$$

so, dass die Punkt $(0|8)$ und $(5|3)$ auf der Kurve liegen. Runden Sie die Parameter auf drei Nachkommastellen.

$f : x \mapsto 2^x$ — Aufg. 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f : x \mapsto 2^x$

(a) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich D und die Bildmenge $f(D)$

(b) Berechnen Sie $f(-\frac{1}{4})$ auf 2 Dezimalen genau.

(c) Für welches $x \in D$ ist $f(x) = 8$?

(d) Für welche $x \in D$ ist $f(x) \leq 16$?

(e) Zeigen Sie $f(x) \cdot f(-x) = 1$ für alle $x \in D$

(f) Zeigen Sie $f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$ für alle $x \in D$

Rechenregeln — Aufg. 3

(a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke ohne Taschenrechner:

$$\lg(4) + 2\lg(5),\ e^{5\ln(2)},\ \lg(3000) - \lg(3)\,.$$

(b) In folgender Umformung ist ein Fehler - finden Sie ihn?

$$e^{0.5(\ln x)^2} = \left(e^{(\ln x)^2}\right)^{0.5} = e^{(\ln x)^{2\cdot 0.5}} = e^{(\ln x)} = x\,.$$

Gleichungen — Aufg. 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (a)\ e^{x^2-2x} = 1 & (b)\ e^x + 2 \cdot e^{-x} = 3 \\ (c)\ \ln\left(\sqrt{x}\right) + 1,5 \cdot \ln(x) = \ln(2x) & (d)\ \left(\lg(x)\right)^2 - \lg(x) = 2 \end{array}$$

Anwendung: Radioaktiver Zerfall — Aufg. 5

Eine radioaktive Substanz zerfällt nach dem Gesetz

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}\,.$$

mit $n_0, \lambda \in \mathbb{R}^+$. Die halbwertszeit τ ist definiert durch $n(\tau) = n(0)/2$.

(a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion mit Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift.

(b) Geben Sie eine allgemeine Formel für τ an.

(c) Berechnen Sie die Halbwertszeitfür Radon mit $\lambda = 2,0974 \cdot 10^{-6} s^{-1}$.

1.11 Rationale Funktionen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- was gebrochenrationale Funktionen sind
- Definitonslücken, Nullstellen und Polstellen zu bestimmen
- das asymptotische Verhalten zu bestimmen
- wie sich eine Abbildungsvorschrift aus gegebenen Eigenschaften rekonstruieren läßt

Sie sollten bereits wissen ...

- wie man die Nullstellen von Polynomen bestimmt (algebraische Gleichung lösen)

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.11.1 Was ist eine rationale Funktion?

Eine Funktion, bei der zwei Polynome derselben Variable dividiert werden, heißt rationale Funktion [rational function] - ähnlich wie Brüche "rationale Zahlen" heißen. Der maximale Definitionsbereich einer rationalen Funktion umfasst alle reellen Zahlen, für die der Nenner nicht null ist: 1.8 1.4

Definitionsbereich einer rationale Funktion

Bsp 1

$$f : D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \sqrt[3]{5} \right\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{3x^2 - x + 2}{x^3 - 5}\,.$$

Bemerkungen

- Jede Rechenvorschrift, die man mit x, mit konstanten Zahlen und mit den vier Grundrechenarten hinschreiben kann, definiert eine rationale Funktion.
- Polynome sind besonders einfache rationale Funktionen. Bei ihnen ist das Nennerpolynom eine Konstante ($\neq 0$), so dass nur die ersten drei Grundrechenarten vorkommen, keine Division. Man nennt sie auch die ganzrationalen Funktionen.
- Wenn eine vollständig gekürzte rationale Funktion vorliegt, bei der das Nennerpolynom nicht konstant ist, dann sprechen wir von einer gebrochenrationalen Funktion. Aufgabe

Bei gebrochenrationalen Funktionen kommt also eine neue Eigenschaft hinzu: die Problematik der Definitionslücken. Die Definitionslücken sind die Nullstellen des Nennerpolynoms. Um sie zu finden ist eine algebraische Gleichung zu lösen. Aufgabe 1.9

Die Definitionslücken einer vollständig gekürzten gebrochenrationalen Funktion führen zu Polstellen. Der Begriff kommt daher, dass die Funktionswerte explodieren, sobald die Variable sich der Definitionslücke nähert. Genauso wie bei Nullstellen ordnet man auch einer Polstelle eine Vielfachheit zu. Abhängig von der Vielfachheit explodieren die Funktionswerte beidseitig gegen plus, beidseitig gegen minus Unendlich oder es findet ein Vorzeichenwechsel (VZW) statt. Es gilt Aufgaben

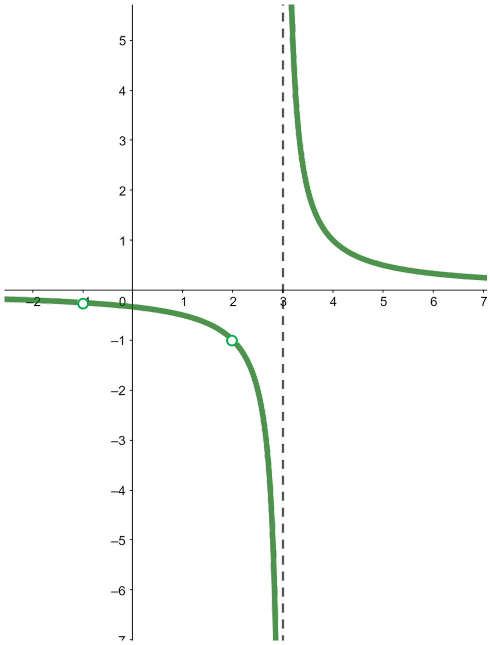
- bei Polstelle mit ungerader Vielfachheit findet ein Vorzeichenwechsel statt.
- bei Polstelle mit gerader Vielfachheit findet kein Vorzeichenwechsel statt.

Es kann vorkommen, dass Nullstellen der Zählerfunktion auch gleichzeitig Nullstellen der Nennerfunktion sind, zum Beispiel hier:

$$f : x \mapsto \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x–2)\cdot(x–3)\cdot(x+1)}\,.$$

Können wir so eine Funktion kürzen? Ja, aber nur unter Beibehaltung des Definitionsbereichs:

Definitionslücken und Polstellen gebrochenrationaler Funktionen Bsp 2



Das Bild zeigt den Graph der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x–2)\cdot(x–3)\cdot(x+1)}\,.$$

Den Funktionsverlauf von f analysieren wir wie folgt:

- Nullstellen des Zählers: $N_p = \{-1, 2\}$.
- Nullstellen des Nenners: $N_q = \{-1, 2, 3\}$.
- Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\}$
- Nullstellen von f: $N_f = \{\} \neq N_p$!
- Polstellen von f: $P_f = \{3\} \neq N_q$!
- Asymptote von f für $|x| \to \infty$: die x-Achse

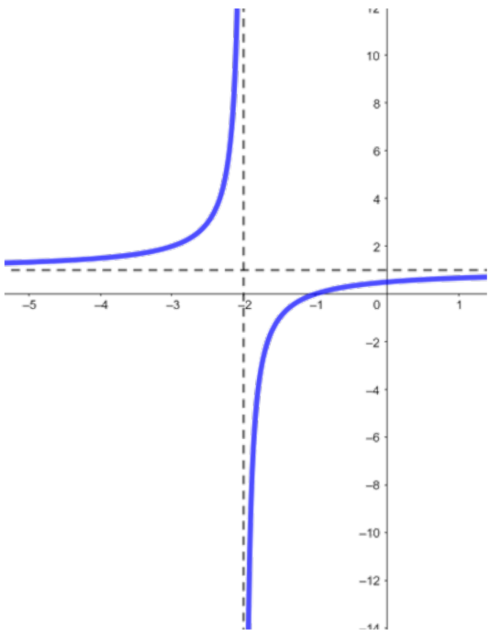
Die gebrochenrationale Funktion f besitzt drei Definitionslücken, von denen eine eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel ist. Der Bruch ist nicht vollständig gekürzt - die Funktionsabbildung kann noch vereinfacht werden:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\} \to \mathbb{R}\,, \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{(x–2)\cdot(x–3)\cdot(x+1)} \;\Leftrightarrow\; f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \frac{1}{x-3}\,.$$

Da die Definitionslücken, die man in der gekürzten Variante nicht mehr erkennen kann, erzeugen keine Polstellen, sondern "Löcher" im Graphen. In einer Zeichnung markiert man diese Löcher normalerweise mit einem kleinen, unausgefüllten Kringel auf dem Funktionsgraphen.

Ist die Definitionslücke bei x_0 mehrmals vorhanden, d.h. auch nach vollständigem Kürzen der Funktion ist ein Linearfaktor $(x - x_0)$ im Nenner enthalten, so findet man bei x_0 natürlich nach wie vor eine Polstelle und kein "Loch" im Graphen. Ein Beispiel: 1.8 Aufgaben

Definitionslücken und Polstellen gebrochenrationaler Funktionen Bsp 3



Das Bild zeigt den Graph der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x+1)\cdot(x+2)}{(x+2)^2}\,.$$

Den Funktionsverlauf von f analysieren wir wie folgt:

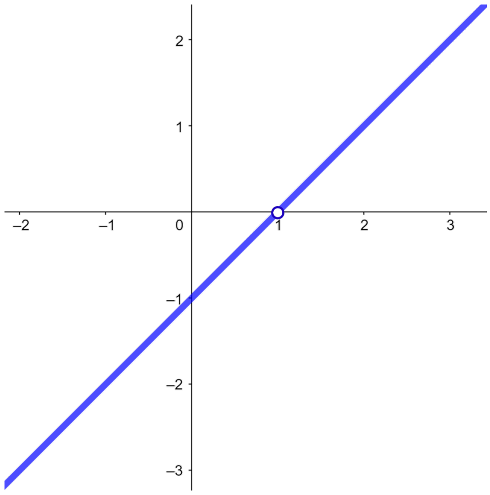
- Nullstellen des Zählers: $N_p = \{-1, -2\}$.
- Nullstellen des Nenners: $N_q = \{-2\}$.
- Definitionsbereich von f: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- Nullstellen von f: $N_f = \{-1\} \neq N_p$!
- Polstellen von f: $P_f = \{-2\} \neq N_q$!
- Asymptote von f für $|x| \to \infty$: $x \mapsto 1$

Die gebrochenrationale Funktione f besitzt zwei Definitionslücken, von denen eine eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel ist. Der Bruch ist nicht vollständig gekürzt - die Funktionsabbildung kann noch vereinfacht werden:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}\,, x \to \frac{(x+1)\cdot(x+2)}{(x+2)^2} \;\Leftrightarrow\; f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \frac{x+1}{x+2}\,.$$

Und noch ein Beispiel

Definitionslücken und Polstellen gebrochenrationaler Funktionen — Bsp 4



Das Bild zeigt den Graph der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} \,.$$

Den Funktionsverlauf von f analysieren wir wie folgt:

- Nullstellen des Zählers: $N_p = \{1\}$.
- Nullstellen des Nenners: $N_q = \{1\}$.
- Definitionsbereich von f: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Nullstellen von f: $N_f = \{\}$!
- Polstellen von f: $P_f = \{\}$
- Asymptote von f für $|x| \to \infty$: $x \to x - 1$

Die gebrochenrationale Funktion f besitzt eine Definitionslücke, keinen Pol und keine Nullstelle. Der Bruch ist nicht vollständig gekürzt - die Funktionsabbildung kann noch vereinfacht werden:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}\,, \frac{(x-1)^2}{(x-1)} \;\Leftrightarrow\; f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto x - 1\,.$$

Auf keinen Fall darf man den Definitionsbereich der Funktion nach dem Kürzen ändern!

1.11.2 Asymptoten für $|x| \to \infty$

Das Verhalten einer rationalen Funktion für $x \to \pm\infty$ folgt grob aus den Graden des Zähler- und des Nennerpolynoms:

Asymptoten für $x \to \pm\infty$ — Regel 1

- Zählergrad $<$ Nennergrad: Asymptote $y = 0$,
- Zählergrad $=$ Nennergrad: Asymptote $y = \text{const}$,
- Zählergrad $>$ Nennergrad: Asymptote finden durch Polynomdivision.

Im letzteren Fall kann man sogar noch genauer feststellen, wie die rationale Funktion gegen Unendlich geht: Sie schmiegt sich an die sogenannte Asymptote an, das ist der ganzrationale Anteil der Polynomdivision. 1.8

Asymptote für $x \to \pm\infty$ — Bsp 5

$$\frac{x^3 + 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2}{2 \cdot x - 1} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{9}{4} \cdot x - \frac{3}{8}}_{\text{Asymptote}} + \underbrace{\frac{\frac{13}{8}}{2 \cdot x - 1}}_{\to 0} \,.$$

Bemerkungen: Aufgaben

- Wenn das Zählerpolynom und das Nennerpolynom denselben Grad haben, dann schmiegt sich die Funktion an eine horizontale Gerade an. Man spricht auch von horizontaler Asymptote.
- Wenn der Grad des Zählerpolynoms um eins größer ist als der des Nennerpolynoms, ergibt sich also eine schräge Asymptotengerade. Ist der Grad des Zählerpolynoms um zwei größer als der des Nennerpolynoms, ergibt sich eine quadratische Parabel wie in dem gezeigten Beispiel. . .
- Hat eine gebrochenrationale Funktion eine Polstelle, so spricht man von einer vertikalen Asymptotengeraden.

Rationale Funktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.11 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Abbildungsvorschrift Aufg. 1

Geben Sie eine gebrochenrationale Funktion an mit

(a) Nullstelle 1

(b) Polstelle 3 mit Vorzeichenwechsel

(c) Polstelle 3 ohne Vorzeichenwechsel

(d) Nullstelle 1 und Polstelle 3 ohne Vorzeichenwechsel

(e) Nullstellen 2 und 3, Polstelle 4 mit Vorzeichenwechsel

(f) Nullstelle -1, Polstelle -3 mit Vorzeichenwechsel, Polstelle 4 ohne Vorzeichenwechsel

Asymptoten für $|x| \to \infty$ Aufg. 2

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der Asymptoten an.

$$(a)\ f(x) = \frac{7}{x} \qquad (b)\ f(x) = \frac{-3x^3 + 4x + 16}{4x^2} \qquad (c)\ f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$$

$$(d)\ f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{x} \qquad (e)\ f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \qquad (f)\ f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-2}}$$

Vertikale Asymptoten Aufg. 3

Untersuchen Sie das Verhalten von f bei Annäherung an die Definitionslücke. Geben Sie die Geichung der senkrechten Asymptote an.

$$(a)\ f(x) = \frac{2}{x} \qquad (b)\ f(x) = -\frac{2}{x^2} \qquad (c)\ f(x) = \frac{1}{x-4}$$

$$(d)\ f(x) = \frac{2}{4-x} \qquad (e)\ f(x) = 1 - \frac{1}{x} \qquad (f)\ f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

Asymptoten Aufg. 4

Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an

$$(a)\ f(x) = \frac{4}{3x^2} \qquad (b)\ f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x} \qquad (c)\ f(x) = \frac{x^4 - x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

Qualitativer Graph Aufg. 5

Ermitteln Sie von den folgenden Funktionen die

- die Definitionsmenge,
- die Achsenabschnitte,
- die Nullstellen,
- die Polstellen inklusive der Analyse des Verhaltens von f an jeder Polstelle und
- fertigen Sie mit diesen Informationen eine qualitative Skizze des jeweiligen Funktionsgraphen an.

$$(a)\ f(x) = \tfrac{3x-1}{x-1} \qquad (b)\ f(x) = \tfrac{x^2+x}{x+1} \qquad (c)\ f(x) = \tfrac{x^2-9}{(x-3)^2}$$

1.12 Komposition von Funktionen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

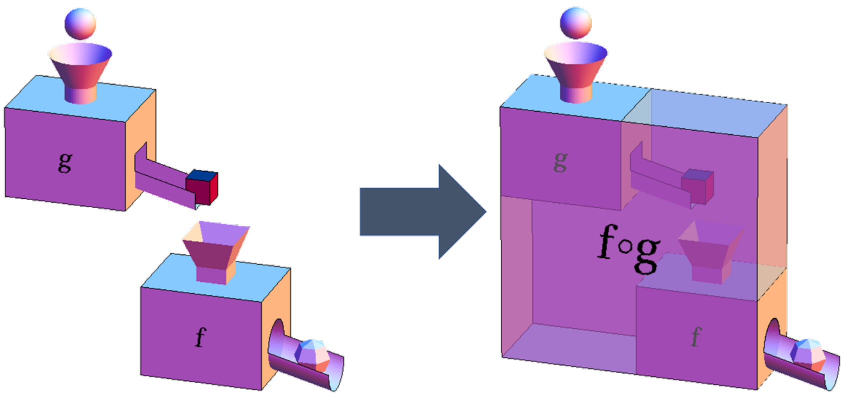
- was eine Komposition $f \circ g$ zweier Funktionen f und g ist
- wie man das Abbildungsverhalten und die Abbildungsvorschrift von Kompositionen bestimmt
- dass eine Verschiebung und Stauchung eines Funktionsgraphen Komposition sind
- Manipulationen an Funktionsgraphen zu bestimmen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.12.1 Was ist eine Komposition?

Die Komposition oder Verkettung oder auch Hintereinanderausführung [composition] von Funktionen f und g bedeutet, erst die Funktion g anzuwenden und dann auf deren Ergebnis eine Funktion f anzuwenden. Das ergibt wieder eine Funktion und diese wird $f \circ g$ genannt (f nach g).

Verkettung zweier Funktionen f und g als Maschine Bsp 1



Zuerst wird die linke Funktion g auf x angewendet und auf das Ergebnis $g(x)$ dann die rechte Funktioin f. Und die Reihenfolge ist wichtig, denn die Verkettung zweier Funktionen ist keine kommutative Operation schauen Sie selbst:

Zwei völlig unterschiedliche Funktionen - warum? Bsp 2

$$\begin{aligned} \sin \circ \exp: &\quad \mathbb{R} \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin\left(e^x\right), \\ \exp \circ \sin: &\quad \mathbb{R} \to \left[e^{-1}, e\right], \quad x \mapsto e^{\sin(x)}. \end{aligned}$$

Streng genommen muss man sich über Definitionsbereiche Gedanken machen: Aus der inneren Funktion darf nichts herauskommen, was die äußere nicht verarbeiten kann. Zur Verkettung der Wurzelfunktion mit dem Logarithmus muss man beispielsweise den Logarithmus auf das Intervall $[1, \infty)$ einschränken: 1.4

Einschränkung Definitionsbereich Bsp 3

$$\sqrt{} \circ \log : [1, \infty) \to [0, \infty), \; x \mapsto \sqrt{\log(x)}\,.$$

Man darf also nicht gedankenlos alles Mögliche in die innere Funktion hineingeben! Aufgabe

Verkettete Funktionen treten ständig auf[33], man muss nur genau hinsieht: Wie kann man

$$x \mapsto \frac{1}{(\sin(x))^2 + 1}$$

als Verkettung dreier Funktionen f, g und h schreiben? Aufgabe

[33] Die Kettenregel, die man aus der Differentialrechnung kennt, sagt wie eine verkettete Funktion abzuleiten ist.

$f \circ g \circ h$ Bsp 4

$$x \mapsto \frac{1}{(\sin(x))^2+1} = f(g(h(x))) \quad \text{mit } f : x \mapsto \frac{1}{x},\ g : x \mapsto x^2+1 \text{ und } h : x \mapsto \sin(x)\,.$$

Die n-malige Verkettung einer Funktion f mit sich selbst wird formal oft als Potenz geschrieben, also f^n, wobei $n \in \mathbb{N}$.

$f : x \mapsto \sqrt[3]{x} \Rightarrow f^4 = ?$ Bsp 5

$$f : x \mapsto \sqrt[3]{x} \ \Rightarrow\ f^4 : x \mapsto (f \circ f \circ f \circ f)(x) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}}}} = \left(\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[3^4]{x}\,.$$

Bemerkungen:

- Die Notation darf nicht mit der Notation $f'''' = f^{(4)}$ für die vierte Ableitung verwechselt werden. 1.23
- Die Umkehrfunktion - wenn sie existiert - wirkt in diesem Sinne wie die Potenz -1 und wird deshalb als f^{-1} geschrieben. Es gilt $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, wobei $\mathrm{id} : x \mapsto x$ die identische Abbildung ist. 1.5

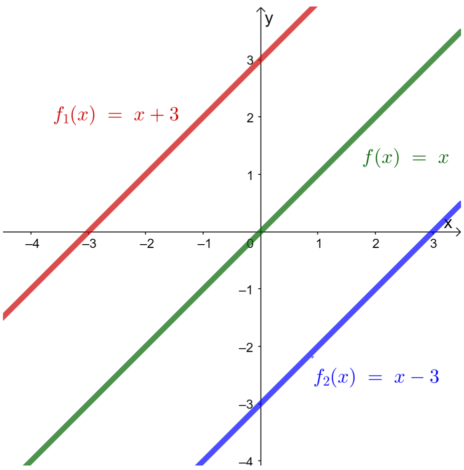
Eine ganze Klasse von Verkettungen sind einfache Manipulationen an Funktionsgraphen - das schauen wir uns nun an!

1.12.2 Vertikale Manipulationen von Funktionsgraphen

Addiert man zu jedem Funktionswert $f(x)$ eine Konstante $b \neq 0$, dann wird der Funktionsgraph vertikal verschoben:

- ist b positiv, dann erfolgt die Verschiebung nach oben,
- ist b negativ, dann erfolgt die Verschiebung nach unten.

Vertikale Translation Bsp 6



Vertikale Verschiebung:

- Originalfunktion

  $f : x \mapsto x$

- Verschiebung um 3 Einheiten nach oben:

  $f_1 : x \mapsto x+3$

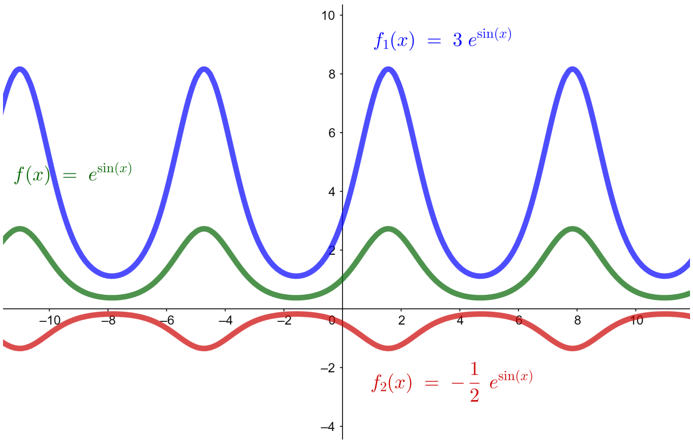
- Verschiebung um 3 Einheiten nach unten:

  $f_2 : x \mapsto x-3$

Multipliziert man den Funktionswert $f(x)$ mit einer Konstante $m \in \mathbb{R}$, wird der Funktionsgraph

- von der x-Achse weg gestreckt, falls $|m| \in (1,\infty)$,
- zu der x-Achse hin gestaucht, falls $|m| \in (0,1)$,
- und zusätzlich an der x-Achse gespiegelt falls $m < 0$.

Vertikale Dehnung und Stauchung Bsp 7



Vertikale Dehnung oder Stauchung:

- Originalfunktion

$$f : x \mapsto e^{\sin(x)}$$

- Dehnung in y-Richtung

$$f_1 : x \mapsto 3 \cdot e^{\sin(x)}$$

- Stauchung in y-Richtung und Spiegelung an x-Achse

$$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot e^{\sin(x)}$$

Jede einzelne Operation ist recht schnell begreifbar, aber können Sie die Manipulationen auch noch zuordnen, wenn sie alle auf einmal passieren? " Alles auf einmal" heißt, dass eine beliebge Funktion $g : y \mapsto my + b$ mit der Funktion f verkettet wird, denn dies bedeutet Aufgabe

Beliebige Manipulationen in vertikale Richtung Regel 1

$$g \circ f : x \mapsto m \cdot f(x) + b\,, \quad \text{mit } m, b \in \mathbb{R}\,.$$

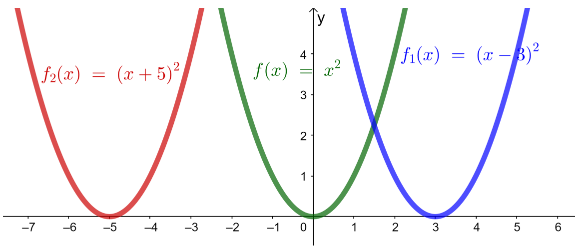
In dieser Schreibweise wird durch den Faktor m erst vertikal gestreckt oder gestaucht und vielleicht gespiegelt und danach entsprechend der additiven Konstante b vertikal verschoben.

1.12.3 Horizontale Manipulation von Funktionsgraphen

Addiert man zu x innerhalb von $f(x)$ eine Konstante a, wird der Funktionsgraph horizontal verschoben:

- ist a positiv, dann erfolgt die Verschiebung nach links (!),
- ist a negativ entsprechend nach rechts.

Horizontale Translation Bsp 8



Horizontale Verschiebung:

- Originalfunktion:

$$f : x \mapsto x^2$$

- Verschiebung in x-Richtung um 3 Einheiten nach rechts

$$f_1 : x \mapsto (x-3)^2$$

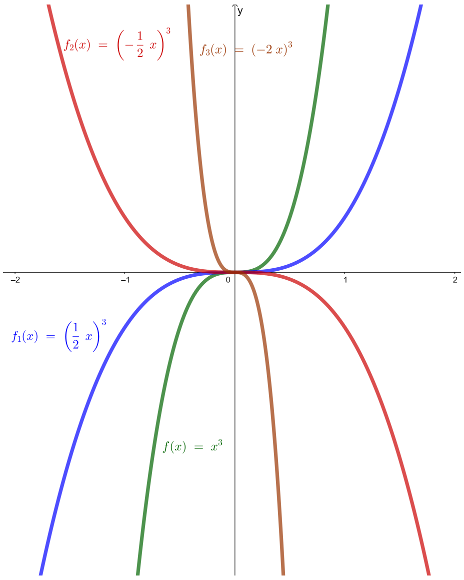
- Verschiebung in x-Richtung um 5 Einheiten nach links

Multipliziert man x in $f(x)$ mit einer Konstante k, wird der Funktionsgraph

- zur y-Achse hin gestaucht, falls $|k| \in (1, \infty)$,
- von der y-Achse weg gestreckt, falls $|k| \in (0, 1)$,
- und obendrein an der y-Achse gespiegelt, falls $k < 0$.

Horizontale Dehnung und Stauchung

Bsp 9



Horizontale Dehnung oder Stauchung:

- Originalfunktion:
$$f : x \mapsto x^3$$
- Dehnung in x-Richtung:
$$f_1 : x \mapsto \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)^3$$
- Dehnung in x-Richtung und Spiegelung an y-Achse:
$$f_2 : x \mapsto \left(-\frac{1}{2} \cdot x\right)^3$$
- Stauchung und Spiegelung
$$f_3 : x \mapsto (-2 \cdot x)^3$$

Vorsicht: Verschiebung und Streckung funktionieren also horizontal genau anders herum als vertikal.
Alles auf einmal erhält man, wenn man f mit einer Funktion $g : x \mapsto k \cdot (x + a)$ verkettet, also Aufgabe

Veränderung in horizontale Richtung

Regel 2

$$f \circ g : x \mapsto f\left(k \cdot (x + a)\right) \quad \text{mit } a, k \in \mathbb{R}, k \neq 0\,.$$

In dieser Schreibweise wird der Graph geometrisch erst entsprechend k horizontal gestreckt bzw gestaucht und vielleicht gespiegelt und dann durch die additive Konstante a horizontal verschoben.

Komposition von Funktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.12 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Verkettungen

Aufg. 1

Bestimmen Sie Funktionen u_1, u_2 so, dass $f = u_1 \circ v_1 = u_2 \circ v_2$ ist:

(a) $f(x) = (2x+6)^3, \quad v_1(x) = 2x+6, \quad v_2(x) = x+3$

(b) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}, \quad v_1(x) = x-1, \quad v_2(x) = (x-1)^2$

Definitionsbereich

Aufg. 2

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $u \circ v$ an

$(a)\ u(x) = \sqrt{x}, \quad v(x) = 3-x \qquad (b)\ u(x) = \dfrac{1}{x}, \quad v(x) = 4-x^2 \qquad (c)\ u(x) = \sqrt{1-x}, \quad v(x) = x^2$

Definitionsbereich

Aufg. 3

Gegeben sind die Funktionen $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$ und $u : [0, 2\pi] \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$. Betrachten Sie die Funktion $f : v \circ u$. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.

$g : x \mapsto 0,7 \cdot (x+2)^{-2} + 4$

Aufg. 4

Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto x^{-2}$ und $g : x \mapsto 0,7 \cdot (x+2)^{-2} + 4$.

(a) Geben Sie den Definitions- und den Bildbereich der Funktionen f und g an.

(b) Beschreiben Sie, wie die Funktion g aus der Funktion f hervorgeht.

(c) Bestimmen Sie die Asymptoten der Funktionen f und g.

Manipulationen eines Graphen

Aufg. 5

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$. Geben Sie eine Abbildungsvorschrift an, um den Graphen von f ...

(a) um den Faktor 5 horizontal zu stauchen,

(b) um den Faktor π vertikal zu strecken,

(c) um 2 Längeneinheiten horizontal nach links zu verschieben,

(d) um $3\sqrt{7}$ Längeneinheiten vertikal nach oben zu verschieben.

(e) um den Graphen an der x-Achse zu spiegeln.

Anwendung: Temperaturskalen

Aufg. 6

Temperaturangaben der Kelvin Skala rechnet man in solche der Celsius Skala nach der Vorschrift $x \mapsto x - 273$ um, solche der Celsius Skala in die Fahrenheit Skala durch $x \mapsto 1,8x + 32$. Wie lautet die Vorschrift, um von der Kelvin Skala direkt in die Fahrenheit Skala umzurechnen?

1.13 Trigonometrische Funktionen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- die Geometrie der ebenen Dreiecke kennen
- wie das Gradmaß und das Bogenmaß zusammenhängen
- wie die trigonometrischen Funktionen und die Arkusfunktionen definiert sind
- die Eigenschaften dieser Funktionen kennen und können sie anwenden

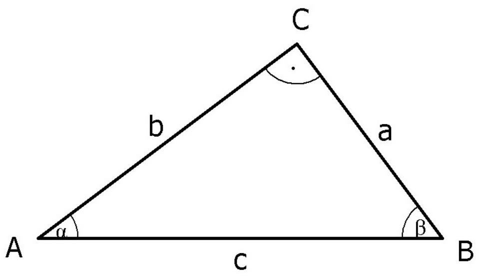
---

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.13.1 Geometrie des ebenen Dreiecks

Bevor man sich an Rechnungen mit allgemeinen (aber ebenen) Dreiecken wagt, beschränkt man sich auf rechtwinklige Dreiecke [right triangles]. Per Konvention werden die Seiten, Eckpunkte und Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks wie folgt bezeichnet:

Übliche Bezeichnungen im Rechtwinkligen Dreieck Bsp 1



- c ist die Hypothenuse: sie liegt dem rechten Winkel gegenüber.
- α ist der Winkel, der Gegenkathete a gegenüber liegt.
- a ist die Gegenkathete bzgl. α,
- b ist die Ankathete bzgl. α.

Der Satz des Pythagoras setzt die Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck in Beziehung zueinander. Er lautet:

Satz des Pythagoras Regel 1

Das Quadrat der Hypothenuse ist die Summe aus den Quadraten der Katheten, also

$$c^2 = a^2 + b^2 \,.$$

Der Vorteil ist, dass man im rechtwinkligen Dreieck nur einen weiteren Winkel wissen muss, um die Seitenverhältnisse zu kennen. Die Verhältnisse der Katheten zur Hypothenuse heißen Sinus [sine] und Kosinus [cosine]:

Geometrische Bedeutung von sin und cos Regel 2

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypthenuse}} = \frac{a}{c}\,, \\ \cos(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}\,. \end{aligned}$$

Wegen des Satzes des Pythagoras gilt:

Trigonometrischer Pythagoras - Kreisgleichung Regel 3

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1\,.$

Das Verhältnis der Katheten zueinander heißt Tangens [tangent] bzw. Cotangens [cotangent]. Das kann man auch mit Sinus und Kosinus ausdrücken:

geometrische Bedeutung von tan und cot — Regel 4

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}\,,\\ \cot(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}\,.\end{aligned}$$

Für die Winkel 0°, 30°, 45°, 60°, 90° lassen sich diese vier Funktionen geometrisch leicht ausrechnen:

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
0°	0	1	0	–
30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
90°	1	0	–	0

Betrachtet man allgemeine, ebene Dreiecke, so lassen gilt der sogenannte Sinussatz: die Höhe in einem allgemeinen, ebenen Dreieck läßt sich auf zwei Arten berechnen:

$$h = b\sin(\alpha) = a\sin(\beta) \quad \Rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}\,.$$

Im Falle eines stumpfen Winkels liegt die Höhe außerhalb des Dreiecks - diesen Fall betrachten wir hier nicht weiter, sondern konzentrieren uns auf spitzwinklige Dreiecke.

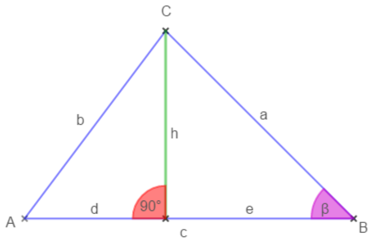
Weil im allgemeinen Dreieck keine der drei Seiten eine Sonderrolle hat, muss insgesamt gelten:

Sinussatz — Regel 5

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \Leftrightarrow \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}\,.$$

Der Sinussatz dient dazu eine unbekannte Größe eines allgemeinen Dreiecks zu bestimmen.

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras auf allgemeine, ebene Dreiecke ist der sogenannte Kosinussatz. Er beschreibt, wie die Quadrate der Seiten eines allgemeinen Dreiecks zueinander in Beziehung stehen. Wir beschränken uns hier wieder auf spitzwinklige Dreiecke:



$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + d^2 = (a\cdot\sin(\beta))^2 + (c - a\cdot\cos(\beta))^2\\ &= c^2 - 2ac\cos(\beta) + a^2\underbrace{\left(\sin^2(\beta)+\cos^2(\beta)\right)}_{=1}\\ &\Rightarrow b^2 = c^2 - 2ac\cos(\beta) + a^2\end{aligned}$$

Das muss für alle Seiten gleichermaßen gelten. Man kann den Kosinussatz als Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras auf allgemeine Dreiecke auffassen. In diesen Situationen kann man damit eine unbekannte Größe eines allgemeinen Dreiecks bestimmen:

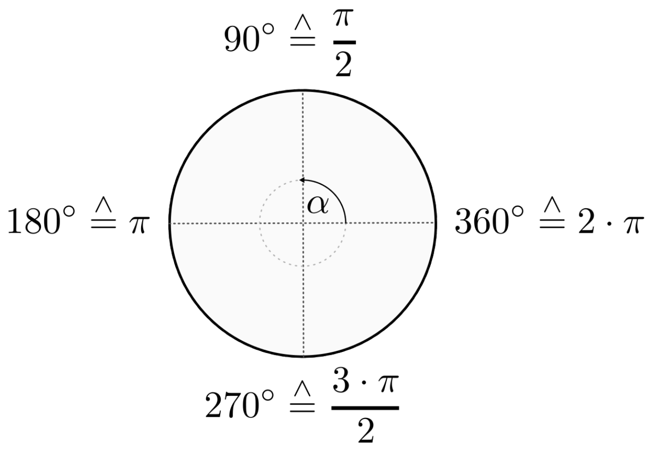
Kosinussatz — Regel 6

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,,\\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha\,,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.\end{aligned}$$

1.13.2 Was ist das Bogenmaß?

Dass eine Umdrehung als 360° bezeichnet wird, ist ein Erbstück von den Babyloniern mit ihrem 60er-Zahlensystem (Einstellung Deg auf dem Taschenrechner). Man könnte zum Beispiel auch 400gon für eine Umdrehung nehmen, so dass ein rechter Winkel 100gon oder Neugrad hat (Einstellung Grad auf dem Taschenrechner). Die natürliche Art, Winkel anzugeben, ist das Bogenmaß [radian] (Einstellung Rad auf dem Taschenrechner). Das Bogenmaß gibt an, welchen Bogen der Winkel aus dem Einheitskreis abschneidet: Aufgaben

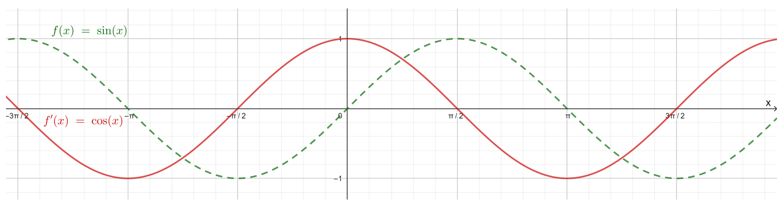
Bogenmaß — Bsp 2



Gradmaß	Bogenmaß	
360°	$\widehat{=}$	2π
180°	$\widehat{=}$	π
90°	$\widehat{=}$	$\pi/2$
60°	$\widehat{=}$	$\pi/3$
45°	$\widehat{=}$	$\pi/4$

Bemerkungen:

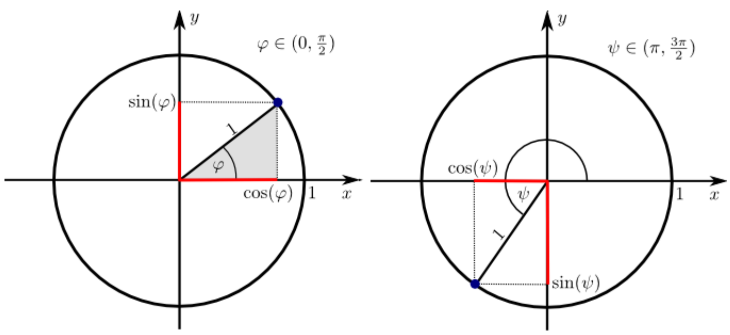
- Mit Hilfe des Dreisatzes kann man leicht jeden Winkel in Bogenmaß umrechnen.
- Bis auf wenige Ausnahmen gibt man beim Programmieren und in mathematischer Software Winkel im Bogenmaß an. Viele Formeln vereinfachen sich drastisch im Bogenmaß und insbesondere gilt $\sin' = \cos$ nur im Bogenmaß.



1.13.3 Trigonometrische Funktionen

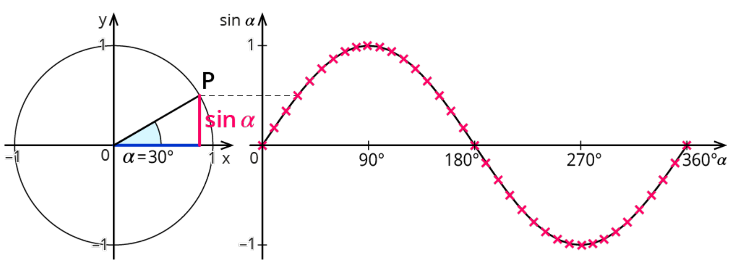
Mit Hilfe des Einheitskreises kann man die Winkelfunktionen für alle Winkel $\psi \in \mathbb{R}$ definieren, nicht nur für Winkel zwischen 0 und $\pi/2 \widehat{=} 90°$. Auf der x-Achse liegt der Kosinus, auf der y-Achse der Sinus:

Winkelfunktionen für $\psi \in \mathbb{R}$ — Def. 1



Und so werden trigonometrische Funktionen zu periodischen Funktionen:

Periodische Funktion — Def. 2



In der folgenden Box sind Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen zusammengefasst:

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen — Regel 7

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

	Definitionsbereich	Bildbereich	Symmetrie	Periode	Nullstellen	Pole
sin	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	ungerade	2π	$k \cdot \pi$	–
cos	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	gerade	2π	$\pi/2 + k \cdot \pi$	–
tan	$\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k \cdot \pi\}$	$\mathbb{R}$	ungerade	π	$k \cdot \pi$	$\pi/2 + k \cdot \pi$
cot	$\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$	$\mathbb{R}$	ungerade	π	$\pi/2 + k \cdot \pi$	$k \cdot \pi$

Den Sinus und den Kosinus braucht man in den Naturwissenschaften zur Beschreibung von harmonischen Schwingungen und deren Überlagerungen. Eine Schwingung ist eine sich zeitlich wiederholende Veränderung einer Zustandsgröße.

Harmonische Schwingung — Def. 3

Eine harmonische Schwingung wird durch

$$s(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \quad \text{bzw.} \quad c(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

beschrieben, wobei

- A die Amplitude,
- φ_0 die Nullphase und
- ω die Kreisfrequenz der Schwingung ist.

Das zeitabhängige Argument einer harmonischen Schwingung, $\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0$, bezeichnet man als Phase. Die Schwingungsdauer oder Periode T und die Frequenz f betragen

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

1.13.4 Arkusfunktionen

Um von Seitenverhältnissen oder mit dem Sinus- oder dem Kosinussatz auf Winkel zu schließen, muss man die Winkelfunktion umkehren. Allerdings sind trigonometrische Funktionen periodisch, also nicht umkehrbar. Die 1.5
Idee besteht darin, einen sinnvollen Winkel zurückzuliefern, auch wenn das nicht der einzig mögliche ist. Dies ist die Aufgabe der Arkusfunktionen[34]. Der Winkel lässt sich wieder in Grad oder im Bogenmaß angeben[35], am Computer wird fast immer das Bogenmaß benutzt.

Die trigonometrischen "Umkehrfunktionen" — Def. 4

$$\begin{array}{rlllll}
\sin \circ \arcsin = \mathrm{id} & \text{mit} & \arcsin : [-1,1] & \to & [-\pi/2, \pi/2], & x \mapsto \arcsin(x) \\
\cos \circ \arccos = \mathrm{id} & \text{mit} & \arccos : [-1,1] & \to & [0, \pi], & x \mapsto \arccos(x) \\
\tan \circ \arctan = \mathrm{id} & \text{mit} & \arctan : (-\infty, \infty) & \to & (-\pi/2, \pi/2), & x \mapsto \arctan(x) \\
\cot \circ \operatorname{arccot} = \mathrm{id} & \text{mit} & \operatorname{arccot} : (-\infty, \infty) & \to & (0, \pi), & x \mapsto \operatorname{arccot}(x)
\end{array}$$

Bemerkung: es gilt $\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Bemerkungen:

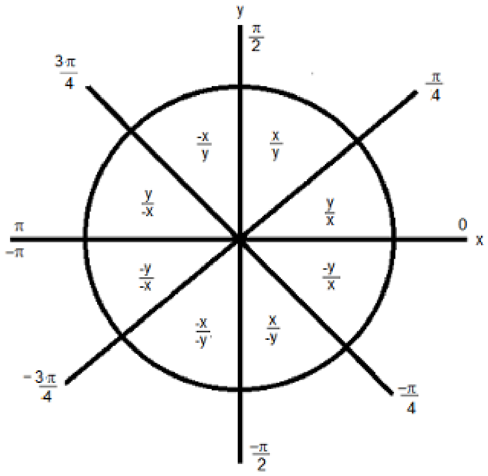
- Ähnlich wie bei geradzahligen Potenzfunktionen ist die Idee eine trigonometrische Funktion auf ein maxi- 1.7
males Intervall einzuschränken, auf dem sie injektiv ist. Das Intervall ist zunächst willkürlich. Der Sinus ist auf dem Intervall $I = [-\pi/2, \pi/2]$ beispielsweise injektiv und durchläuft genau eine Periode. Schränkt man den Definitionsbereich auf I ein, so erhält man eine umkehrbare Funktion. Die Umkehrfunktion, die den Sinus auf I umkehrt, ist genau der Arkussinus.

[34] Arkus = Bogen, also Winkel
[35] Vorsicht mit dem Taschenrechner!

- Dass der Arkussinus keine Winkel über 90° liefert, ist dann gefährlich, wenn man mit dem Sinussatz arbeitet: Hat man zwei Seiten und den Winkel gegenüber der längeren dieser beiden Seiten gegeben, gibt es für das Dreieck zwei Möglichkeiten - und der Arkussinus beschreibt im Zweifelsfall die falsche davon.
- Der Arkustangens liefert also nur Werte von $-90°\widehat{=}-\pi/2$ bis $90°\widehat{=}\pi/2$ und keine gesamte Umdrehung von $-180° = -\pi$ bis $180° = \pi$. Das Problem ist, dass der Tangens nicht unterscheiden kann, ob ein Punkt $(x|y)$ im ersten oder dritten bzw. im zweiten oder vierten Quadranten liegt, denn die Vorzeicheninformation geht bei der Division verloren:
$$\tan(\varphi) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \tan(\varphi + \pi), \quad \text{mit } y_2 = -y_1, \quad x_2 = -x_1\,.$$

Das zuletzt genannte Problem kann behoben werden, wenn man die Vorzeicheninformation der Koordinaten x und y weiß und genau das wird in der Praxis auch getan: in fast allen Programmiersprachen gibt es eine Funktion namens `atan2`. Diese Funktion liefert Werte aus $(-\pi, \pi]$ zurück, also eine komplette Umdrehung. Die Vorzeicheninformation, die beim klassischen arctan verlorengeht, bleibt bei Verwendung des `atan2` erhalten, weil man `atan2` nicht mit dem Seitenverhältnis $\frac{y}{x}$ füttert, sondern mit y und x getrennt: [36]

Die Funktion atan2 : $(y, x) \in \mathbb{R}^2 \to (-\pi, \pi]$ Bsp 3



Der herkömmliche Arkustangens kann Punkte im ersten und dritten Quadranten nicht unterscheiden:

$$(3|3) \Rightarrow \begin{cases} \texttt{atan2}(3,3) &= \frac{1}{4}\pi\,, \\ \arctan(1) &= \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$
$$(-3|-3) \Rightarrow \begin{cases} \texttt{atan2}(-3,-3) &= -\frac{3}{4}\pi\,, \\ \arctan(1) &= \frac{1}{4}\pi \end{cases}$$

Der herkömmliche Arkustangens kann Punkte im zweiten und vierten Quadranten nicht unterscheiden:

$$(-3|3) \Rightarrow \begin{cases} \texttt{atan2}(3,-3) &= \frac{3}{4}\pi\,, \\ \arctan(-1) &= \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$
$$(3|-3) \Rightarrow \begin{cases} \texttt{atan2}(-3,3) &= -\frac{1}{4}\pi\,, \\ \arctan(-1) &= \frac{3}{4}\pi \end{cases}$$

Der Arkustangens kommt dann zum Einsatz, wenn man von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten umrechnen möchte.

Polarkoordinaten mit Hilfe von atan2 Def. 5

Jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ kann in der Form
$$x = r \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$$
mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ dargestellt werden. Es gilt
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \texttt{atan2}(y, x) := \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0,\ y > 0 \\ \pi/2, & x = 0,\ y > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & x < 0,\ y > 0 \\ \pi, & y = 0 \\ \arctan(y/x), & x > 0,\ y < 0 \\ -\pi/2, & x = 0,\ y < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, & x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$
Die Werte (r, φ) heißen Polarkoordinaten von (x, y).

[36] Normalerweise ist die Reihenfolge y dann x, entsprechend "$\frac{y}{x}$", aber man muss aufpassen, denn manchmal ist die Reihenfolge auch "x, y".

Trigonometrische Funktionen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.13 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Harmonische Schwingungen — Aufg. 1

Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Nullphase der folgenden harmonischen Schwingungen und skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

$(a)\ t \mapsto 2 \cdot \sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad (b)\ t \mapsto 10 \cdot \sin(\pi t - 3\pi)$

Interpolation — Aufg. 2

Eine Funktion der Form

$$f : x \mapsto \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$$

soll durch die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ mit

$$(0|1), (\pi/6| - 1), (\pi/2| - 3)$$

gelegt werden. Bestimmen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, a_1, b_1 und lösen Sie es.

Gleichungen — Aufg. 3

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$(a)\ \sin(2x + 5) = 0,4 \qquad (b)\ \tan(2(x + 1)) = 1$

$(c)\ \sqrt{\cos(x - 1)} = 2^{-1/4} \qquad (d)\ \sin(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

Kreisgleichung — Aufg. 4

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der angegebenen Geraden g mit dem Kreis $k := \{(x, y) :\ x^2 + y^2 = 4\}$:

$(a)\ g_1 : x \mapsto x - 2 \qquad (b)\ g_2 : x \mapsto x - 4 \qquad (c)\ g_3 : x \mapsto 2$

Kreisgleichung — Aufg. 5

Welche der Gleichungen beschreiben einen Kreis? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Mittelpunkte und die Radien.

$(a)\ (x + 2)^2 + y^2 = 64 \qquad (b)\ (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0 \qquad (c)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

$(d)\ x^2 + y^2 - 2x + 2y + 14 = 0 \qquad (e)\ x^2 + y^2 + y = 0$

Qualitativer Graph — Aufg. 6

(a) Zeichnen Sie die Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2}) - 2$ auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$ und lesen Sie aus dem Graphen den Bildbereich, die Nullstellen und die Extremstellen von f ab.

(b) Zeichnen Sie die Funktion $f : x \mapsto -\sin(x - \pi)$ auf dem Intervall $[0, \frac{5\pi}{2}]$ und lesen Sie aus dem Graphen den Bildbereich, die Nullstellen und die Extremstellen von f ab.

1.14 Komplexen Zahlen I

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ kennen
- die Darstellung einer komplexen Zahl kartesischen Koordinaten
- die Darstellung einer komplexen Zahl Polarkoordinaten
- die Darstellungen ineinander umzurechnen
- die Grundrechenarten geometrisch zu interpretieren

Sie sollten bereits ...

- den Satz des Pythagoras und
- die Umrechnung von karteschischen zu Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ beherrschen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.14.1 Was ist eine komplexe Zahl?

Um die Gleichung

$$x^2 = -1$$

zu lösen, definiert man die imaginäre Einheit i. In der Elektrotechnik schreibt man anstatt i ein j, weil i die Stromstärke bezeichnet. Betrachtet man nun nochmal die Gleichung $x^2 = -1$, dann hat man neben i noch eine zweite Lösung:

imaginäre Einheit — Def. 1

$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x = \pm i\,.$$

Addiert man zu einer beliebigen reellen Zahl ein reelles Vielfaches der imaginären Einheit, dann gelangt man zu den komplexen Zahlen:

komplexen Zahlen — Bsp 1

$$\left\{1 + 3i,\ \sqrt{7} - 91\,i,\ 3\pi\,i,\ 0,\ \pi + \frac{71}{13}\,i,\right\} \subset \mathbb{C}\,.$$

Mit Hilfe der komplexen Zahlen, lässt sich nun eine quadratische Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ **immer** lösen. Ein Beispiel: 1.9

quadratische Gleichung — Bsp 2

$$x^2 - 4\,x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 - 4\,x + 4) - 4 + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 = -1 \;\overset{i^2=-1}{\Leftrightarrow}\; x_{1,2} = 2 \pm i\,.$$

Bemerkungen:

- Die quadratische Ergänzung im vorigen Beispiel wird man in der Praxis eher selten durchführen. Vielmehr ermittelt man die Lösungen mit der allgemeinen Lösungsformel und identifiziert zwei komplexe Lösungen, falls die Diskriminante negativ wird:

$$x^2 - 4\,x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{|-4|}\,i}{2} = 2 \pm i\,.$$

- Oft wechselt man die Bezeichnung der Variable, wenn man komplexwertige Lösungen zuläßt: und zwar benutzt man z anstatt x.

Wir benötigen Begriffe, um effizient mit komplexen Zahlen arbeiten zu können. Alles, was wir für den Moment brauchen, führen wir an einem Beispiel ein:

Beschreibung einer komplexen Zahl — Def. 2

- Der Realteil [real part] von $z = 3 + 4\,i$ ist: $\mathrm{Re}(z) = 3$.
- Der Imaginärteil [imaginary part] von $z = 3 + 4\,i$: $\mathrm{Im}(z) = 4$.
- Das komplex Konjugierte [complex conjugate] von $z = 3 + 4\,i$ ist: $\overline{z} = 3 - 4\,i$.
- Der Betrag [magnitude] von $z = 3 + 4\,i$ ist: $|z| = \sqrt{((\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2)} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Wichtige Beobachtungen:

- Der Betrag einer komplexen Zahl ist immer reell und größer gleich null: $|z| \geq 0$! Insbesondere gilt $|z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$
- Für eine komplexe Zahl, deren Imaginärteil null ist, liefert der Betrag den herkömmlichen Absolutbetrag!
- Mit Hilfe des komplex Konjugierten kann man das Quadrat des Betrags wie folgt schreiben:

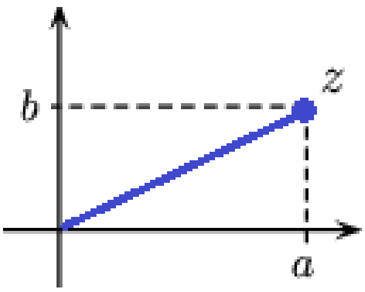
$$z = a + i\,b \;\Rightarrow |z| = \sqrt{z\overline{z}}\,.$$

- Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung der komplexen Zahl an der x-Achse.

1.14.2 Die Gaußschen Zahlenebene

Die meisten Operationen mit komplexen Zahlen kann man geometrisch verstehen. Das gilt insbesondere für die Grundrechenarten, wie die folgenden Abschnitte zeigen. Die Grundlage für ein geometrisches Verständnis ist die Tatsache, dass man $\mathbb{C}$ mit einem kartesischen Koordinatensystem identifizieren kann. Im Kontext von komplexen Zahlen nennt man das Koordinatensystem dann "Gaußsche Zahlenebene". Auf der x-Achse der Gaußschen Zahlenebene wird der Realteil, und auf der y-Achse der Imaginärteil der komplexen Zahl abgetragen.

Kartesische Koordinaten $z = a + i\,b \;\widehat{=}\; (a\,|\,b)$ — Regel 1

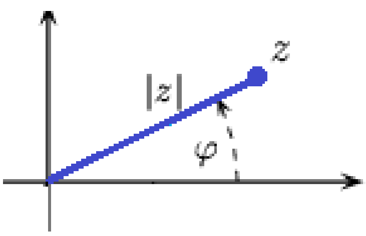


Eine komplexe Zahl malt man gerne als Pfeil in der Ebene

- Pfeilstart ist der Ursprung und die Pfeilspize ist der Punkt $(a\,|\,b)$
- $a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$
- $b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$
- $\Rightarrow z = a + i\,b \;\widehat{=}\; (a\,|\,b)$

Interessanterweise kann man anstatt der kartesischen Koordinaten auch Polarkoordinaten verwenden, um eine komplexe Zahl z in der Gaußschen Zahlenebene eindeutig zu beschreiben:

Polarkoordinaten $z = a + i\,b \;\widehat{=}\; (r\,|\,\varphi)$ — Regel 2



Eine komplexe Zahl entspricht einem Pfeil in der Ebene:

- die Pfeillänge r ist der Betrag $|z|$ von z und φ der Winkel, der mit der positiven x-Achse eingeschlossen wird
- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.
- $\varphi = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$.
- $\Rightarrow z = a + i\,b \;\widehat{=}\; (r\,|\,\varphi)$

Sind die Polarkoordinaten einer komplexen Zahl gegeben, so gelingt mit dem Satz des Pythagoras die Umrechnung auf die kartesischen Koordinaten der komplexen Zahl: 1.13

Polarkoordinaten $\mapsto$ Kartesischen Koordinaten — Regel 3

Sind die Polarkoordinaten $(r\,|\,\varphi)$ einer komplexen Zahl gegeben, so lauten die entsprechenden kartesischen

Koordinaten $(a\,|\,b)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} a &= r\cdot\cos(\varphi)\,, \\ b &= r\cdot\sin(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Und damit

$$z = r\cdot\cos(\varphi) + i\,r\cdot\sin(\varphi)\,.$$

Problematischer, aber nicht neu, ist die Berechnung der Polarkoordinaten aus der kartesischen Form. Diese Umrechnung klappt genauso wie im vorangegangenen Kapitel beschrieben, mit Hilfe der Funktion atan2. 1.13

Kartesische Koordinaten ↦ Polarkoordinaten

Regel 4

Jede komplexe Zahl $z = a + i\,b$ läßt sich mit einem Punkt in $(a\,|\,b) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren und dessen Polarkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2+b^2}\,, \\ \varphi &= \mathtt{atan2}(b,a) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & a>0\wedge b>0\,, \\ \frac{\pi}{2}, & a=0\wedge b>0\,, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi, & a<0\wedge b>0\,, \\ \pi, & b=0\,, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & a>0\wedge b<0\,, \\ -\frac{\pi}{2}, & a=0\wedge b<0\,, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)-\pi, & a<0\wedge b<0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion `atan2` liefert zu jeder komplexen Zahl also ein eindeutiges Argument (Winkel) im Intervall $(-\pi,\,\pi]$. Leider sind Winkel nur bis auf ein Vielfaches von $2\,\pi$ eindeutig und damit beschreiben alle komplexen Zahlen mit Polarkoordinaten $(r\,|\,\varphi_k)$,

$$\varphi_k = \mathtt{atan2}(b,a) + 2\pi\,k,\ k\in\mathbb{Z}\,,$$

geometrisch dieselbe komplexe Zahl.

1.14.3 Rechnen in $\mathbb{C}$

Was das Rechnen mit komplexen Zahlen betrifft, gilt: Aufgabe

Rechnen in $\mathbb{C}$

Regel 5

Man kann mit komplexen Zahlen rechnen wie mit reellen Zahlen:

- berücksichtigen Sie $i^2 = -1$ und
- behandeln Sie die imaginäre Einheit wie eine Variable.

Hier sind ein paar Beispiele:

Rechnen in $\mathbb{C}$

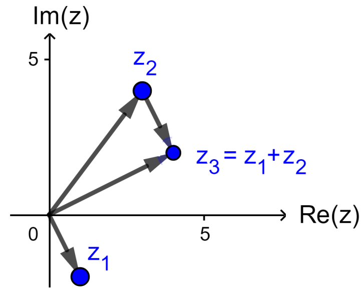
Bsp 3

- Bei der Addition behandelt man die imaginäre Einheit wie eine Variable:
$$z_1 + z_2 = (2+3\,i) + (4+i) = 2+3\,i+4+i = 6+4\,i\,.$$
- Bei der Subtraktion behandelt man die imaginäre Einheit wie eine Variable:
$$z_1 - z_2 = (2+3\,i) - (4+i) = 2+3\,i-4-i = -2+2\,i = 2\cdot(i-1)\,.$$
- Rechnerisch bestimmt man das Produkt unter Berücksichtigung $i^2=-1$:
$$z_1\cdot z_2 = (2+3\,i)\cdot(4+i) = 2\cdot 4 + 2\,i + 3\cdot 4\,i + i\cdot 3\,i = 8 + (2+12)\,i + 3i^2 = 8+14\,i-3 = 5+14\,i\,.$$

- Rechnerisch bestimmt man den Quotienten indem man mit dem Konjugierten des Nenners erweitert:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{4-i} = \frac{2+3\,i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i} = \frac{5+14\,i}{4^2+1^2} = \frac{5+14\,i}{17} = \frac{5}{17}+\frac{14}{17}\,i\,.$$

Wir wollen uns mit diesen Regeln allein noch nicht zufrieden geben, sondern uns einprägen, welche geometrischen Operationen hinter diesen Grundrechenarten stecken! Dieses Wissen wird uns im nächsten Kapitel einen Zugang zu schwierigeren Aufgabenstellungen ermöglichen. Los geht's.

Addition $z_1 + z_2$ und Subtraktion $z_1 - z_2$ Bsp 4



$$z_1 + z_2 = (1-2\,i)+(3+4\,i) = (1+3)+(-2\,i+4\,i) = 4+2\,i\,.$$

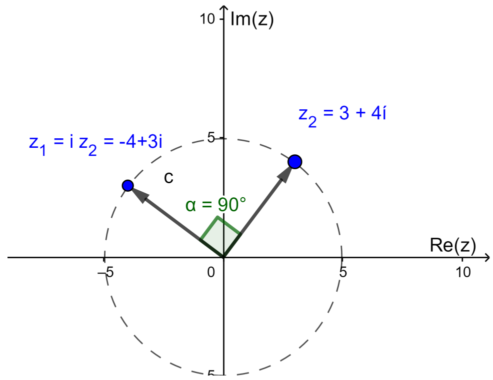
$\Rightarrow$ die Pfeile werden addiert.

$$z_1 - z_2 = (1-2\,i)-(3+4\,i) = (1-3)+(-2\,i-4\,i) = -2-6\,i\,.$$

$\Rightarrow$ die Pfeile werden subtrahiert.

Wie wir eine Multiplikation durchzuführen haben, wissen wir schon. Aber was bedeutet das Produkt zweier komplexer Zahlen $z_1\cdot z_2$ im Verhältnis zu z_1 und z_2? Um den neuen Aspekt (im Unterschied zur Addition) zu verstehen, schauen wir uns zunächst das Produkt $i\cdot z$ an: Aufgabe

Multiplikation mit der imaginären Einheit: $i\cdot z$ Bsp 5



Auf $z \,\widehat{=}\, (r\,|\,\varphi)$ wirkt eine Multiplikation mit i wie folgt:

- $|i\,z| = \underbrace{|i|}_{=1}\cdot|z| = r \Rightarrow$ die Länge bleibt gleich!
- $\arg(i\,z) = \varphi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ zum Winkel wird $\dfrac{\pi}{2}$ addiert!

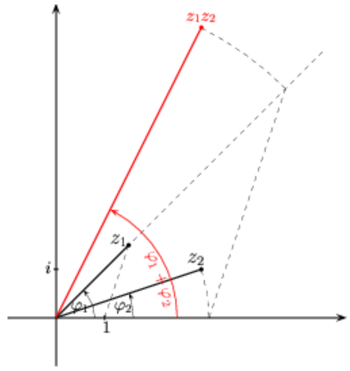
$\Rightarrow\ i\,z \,\widehat{=}\, \left(r\,|\,\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$ der Pfeil z wird um $\dfrac{\pi}{2}$ gegen Uhrzeigersinn gedreht!

Bei einer Multiplikation mit einer beliebigen komplexen Zahl wird also skaliert und gedreht und addiert:

$$z_3 = z_1\cdot z_2 = (a_1+b_1\,i)\cdot z_2 = \underbrace{\underbrace{a_1\cdot z_2}_{\text{Skalierung}} + \underbrace{i\cdot\underbrace{b_1\cdot z_2}_{\text{Skalierung}}}_{\text{Drehung}}}_{\text{Addition}}$$

Was geometrisch genau passiert läßt sich am besten in Polarkoordinaten charakterisieren:

Geometrische Interpretation der Multiplikation Regel 6



Für $z_1 \mathrel{\widehat{=}} (r_1 \,|\, \varphi_1)$, $z_2 \mathrel{\widehat{=}} (r_2 \,|\, \varphi_2)$ besitzt das Produkt

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 \mathrel{\widehat{=}} (r_3 \,|\, \varphi_3)$$

die folgenden Polarkoordinaten:

- $r_3 = r_1 \cdot r_2 \Rightarrow$ die Längen werden multipliziert!
- $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 \Rightarrow$ die Winkel werden addiert!$^{(*)}$

Möchte man sich die Division zweier komplexer Zahlen geometrisch veranschaulichen, dann geht man am besten zur Multiplikation zurück: man sucht eine komplexe Zahl z_3 mit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$. Das ist äquivalent dazu eine Zahl z_3 so zu bestimmen, dass das Produkt $z_3 \cdot z_2$ die Zahl z_1 liefert:

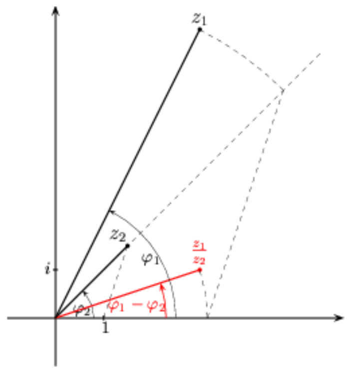
$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \;\Leftrightarrow\; z_2 \cdot z_3 = z_1 \,.$$

Wie diese Multiplikation geometrisch funktioniert, wissen wir aber:

- $r_1 = r_2 \cdot r_3$,
- $\varphi_1 = \varphi_3 + \varphi_2 \, (+2\pi \, k, \quad k \in \mathbb{Z})$.

Das heißt aber für die Division zweier komplexer Zahlen folgendes:

Geometrische Interpretation der Division Regel 7



Für $z_1 \mathrel{\widehat{=}} (r_1 \,|\, \varphi_1)$, $z_2 \mathrel{\widehat{=}} (r_2 \,|\, \varphi_2)$ besitzt der Quotient

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} \mathrel{\widehat{=}} (r_3 \,|\, \varphi_3)$$

die folgenden Polarkoordinaten:

- $r_3 = \dfrac{r_1}{r_2}$ Die Längen werden dividiert!
- $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2 \Rightarrow$ Die Winkel werden subtrahiert$^{(*)}$

Bemerkung zu $(*)$**:**

- Der Winkel ist nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt!
- Eine naive Addition bzw. Subtraktion der Winkel führt unter Umständen zu einem Winkel, der nicht im Intervall $(-\pi, \pi]$ liegt.
- Durch Addition oder Subtraktion von 2π kann man den Winkel immer auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ abbilden.

Komplexe Zahlen I Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.14 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Rechenregeln — Aufg. 1

Gegeben sinde die komplexen Zahlen $z_1 := -2+4i$ und $z_2 := 1-3i$.

(a) Berechnen Sie $\quad i \cdot z_1 - 2 \cdot z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{2z_1 z_2}{z_1^2 + z_2^2}.$

(b) Bestimmen Sie $\quad |z_1|, \quad |z_2|, \quad |z_1 \cdot z_2|.$

(c) Bestimmen Sie $\quad \overline{z_1}, \quad \overline{z_2}, \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$

(d) Stellen Sie die folgenden Zahlen in der kartesischen Form dar $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$\frac{3-21i}{4-3i} + 3(i-8), \quad (2-4i)^2 + \frac{|1-\sqrt{3}i|}{i}, \quad \left|\frac{a+bi}{a-bi} + \frac{a-bi}{a+bi}\right|$$

Ungleichungen — Aufg. 2

Bestimmen Sie die Punkte der Gaußschen Zahlenebene, die folgende Eigenschaften besitzen:

(a) $0 < |z+i| < 2$

(b) $|z - z_1| = |z - z_2|$

(c) $|z^2 - \overline{z}^2| \geq 4$

Die imaginäre Einheit — Aufg. 3

Berechnen Sie i^{172} und i^{175}.

Kartesische und Polarkoordinaten — Aufg. 4

(a) Bestimmen Sie von folgenden komplexen Zahlen die Polarkoordinaten:

$$z_1 = i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = x - \sqrt{3}x\, i \ (x > 0)$$

(b) Bestimmen Sie von folgenden komplexen Zahlen die kartesische Form:

$$z_1 \mathrel{\widehat{=}} 1 \cdot e^{-i4\pi/3}, \quad z_2 \mathrel{\widehat{=}} \sqrt{2}a \cdot e^{-i\pi/4}$$

Kartesische und Polarkoordinaten — Aufg. 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten die kartesische Form der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{60}.$$

Gleichungssystem — Aufg. 6

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} (3-4i) \cdot z_1 & + & (2-i) \cdot z_2 & = & 4-7i \\ (1-2i) \cdot z_1 & + & 4i \cdot z_2 & = & -11-15i \end{array}$$

1.15 Komplexe Zahlen II

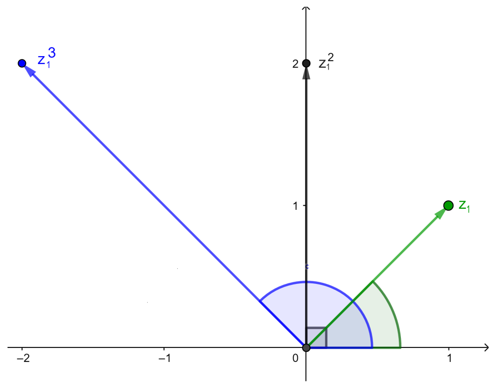
Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen
Sie lernen ...
• Wurzeln aus komplexen Zahlen zu ziehen • dass Polynome in $\mathbb{C}$ vollständig faktorisiert werden können • die Polardarstellung komplexer Zahlen zu bestimmen und mit ihr zu rechnen • die Eulersche Identität und deren Relation zu den Winkelfunktionen kennen
Sie können bereits ...
• Polarkoordinaten komplexer Zahlen berechnen • Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten multiplizieren und dividieren • Wurzeln aus reellen Zahlen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.15.1 Wurzelziehen in $\mathbb{C}$ - das Radizieren

Beim Multiplizieren in $\mathbb{C}$ werden die Längen multipliziert und die Winkel addiert. Damit kann man sofort sagen, was beim Potenzieren passiert: 1.14

Positive Potenzen Bsp 1



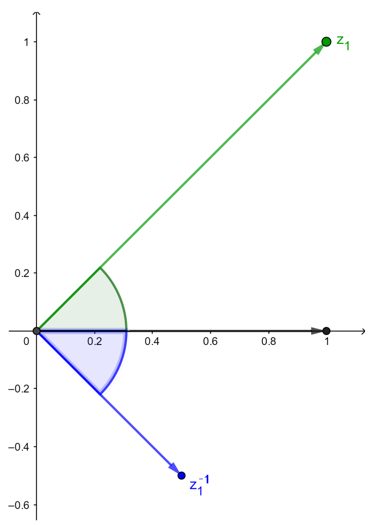
Die Polarkoordinaten (r, φ) der Zahl z^n lauten

- $r = |z|^n \Rightarrow$ die Länge mit n potenziert und
- $\varphi = n \cdot \arg(z) \Rightarrow$ der Winkel mit n multipliziert.

$$\begin{aligned} z_1 &\mathrel{\widehat{=}} \left(\sqrt{2}\,|\,\frac{\pi}{4}\right) \\ z_1^2 &\mathrel{\widehat{=}} \left(2\,|\,\frac{\pi}{2}\right) \\ z_1^3 &\mathrel{\widehat{=}} \left(2\sqrt{2}\,|\,\frac{3}{4}\,\pi\right) \end{aligned}$$

Wegen $z^n z^{-n} = 1$ passiert bei negativen Exponenten das Umgekehrte:

Negative Potenzen Bsp 2



Die Polarkoordinaten (r, φ) der Zahl z^{-n} lauten

- $r = |z|^{-n} \Rightarrow$ die Länge mit $-n$ potenziert und
- $\varphi = -n \cdot \arg(z) \Rightarrow$ der Winkel wird mit $-n$ mulitpliziert.

$$\begin{aligned} z_1 &\mathrel{\widehat{=}} \left(\sqrt{2}\,|\,\frac{\pi}{4}\right) \\ z_1^0 &\mathrel{\widehat{=}} \left(1\,|\,0\right) \\ z_1^{-1} &\mathrel{\widehat{=}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Nun stellen wir die Frage anderesrum: wie lautet die Lösung der Gleichung

$$z^3 = 8\,i\,?$$

Wäre die rechte Seite eine reelle Zahl, dann wäre die Antwort glasklar: wir würden die dritte Wurzel ziehen. Aber das können wir hier nicht tun: die Wurzelfunktion ist gar nicht definiert für komplexe Zahlen! Mit unseren 1.7 Vorüberlegungen bzgl. des Potenzierens komplexer Zahlen können wir auch schon radizieren - vorausgesetzt wir wechseln in Polarkoordinaten: 1.14

$$\begin{cases} z & \widehat{=} (r\,|\,\varphi)\,, \\ 8\,i & \widehat{=} \left(8\,|\,\frac{\pi}{2}\right)\,. \end{cases}$$

Also

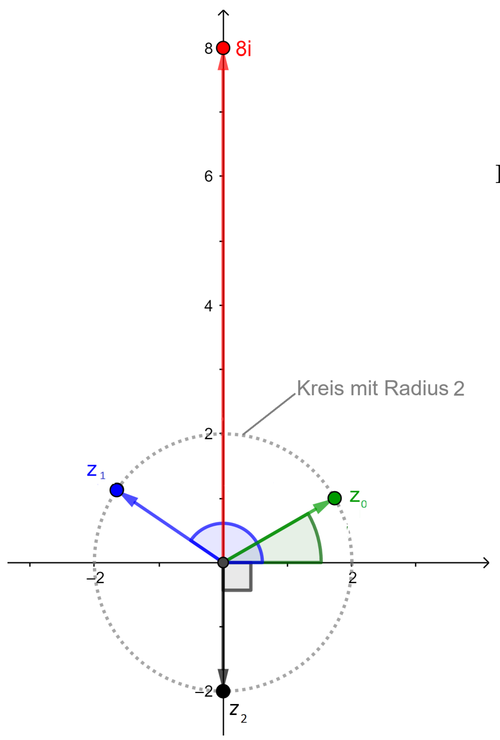
$$z^3 \stackrel{!}{=} 8i \Leftrightarrow \left(r^3\,|\,3\cdot\varphi\right) \stackrel{!}{=} \left(8\,|\,\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} r & = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \varphi & = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow z \,\widehat{=}\, \left(2\,|\,\frac{\pi}{6}\right)\,.$$

Aber Vorsicht! Es gibt neben dieser offensichtlichen Lösung noch beliebig viele weitere, denn

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}: \quad \frac{\pi}{2} \,\widehat{=}\, \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k \;\Rightarrow\; \varphi_k = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k\right)\,.$$

Von diesen undendlich vielen Winkeln φ_k sind allerdings nur drei signifikant, nämlich diejenigen, die im Intervall $(-\pi,\pi]$ liegen:

Komplexe Wurzeln Bsp 3



Die Gleichung $z^3 = 8\cdot i$ besitzt drei Lösungen:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 0\right) = \frac{\pi}{6} \in (-\pi,\pi] \\ \Rightarrow\; z_0 &\,\widehat{=}\, \left(2, \frac{1}{6}\pi\right) \\ \varphi_1 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 1\right) = \frac{5\pi}{6} \in (-\pi,\pi] \\ \Rightarrow\; z_1 &\,\widehat{=}\, \left(2, \frac{5}{6}\pi\right) \\ \varphi_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot 2\right) = \frac{3\pi}{2} \notin (-\pi,\pi] \\ \Rightarrow\; z_2 &\,\widehat{=}\, \left(2, -\frac{1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

Entsprechend besitzt die Gleichung $z^n = c$ mit $c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ n signifikant unterschiedliche Wurzeln. Die Schritte, um sie systematisch zu bestimmen, sind folgende: Aufgaben

Wurzeln ziehen in 6 Schritten Regel 1

Die Gleichung

$$z^n = c, \quad c = x + iy \in \mathbb{C}\,,$$

hat in $\mathbb{C}$ n verschiedene Lösungen z_k, $k = 0,\cdots,n-1$. Um die z_k zu ermitteln, kann man beispielsweise wie folgt vorgehen:

1. Polarkoordinaten von c bestimmen:

$$c \,\widehat{=}\, (|c|\,|\,\psi) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} |c| & = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \psi_k & = \operatorname{atan2}(y,x) + 2\pi\,k\,, \quad k = 0,\cdots,n-1\,. \end{cases}$$

2. Ansatz für die linke Seite machen:

$$z_k \mathrel{\widehat{=}} (r, \varphi_k) \Rightarrow z^n \mathrel{\widehat{=}} (r^n \,|\, n \cdot \varphi_k)$$

3. Wurzeln in Polarkoordinaten bestimmen:

$$(r^n, n \cdot \varphi_k) \stackrel{!}{=} (|c|, \psi_k) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^n & = |c| \, , \\ n \cdot \varphi_k & = \psi_k \, , \quad k = 0, \cdots, n-1 \, . \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r & = \sqrt[n]{|c|} \, , \\ \varphi_k & = \dfrac{\psi_k}{n} \, , \quad k = 0, \cdots, n-1 \, . \end{cases}$$

4. Auswählen der n signifikanten Winkel, d.h. $k = 0, \cdots, n-1$

$$\begin{cases} r & = \sqrt[n]{|c|} \\ \varphi_k & = \dfrac{\psi_k}{n}, \quad k = 0, \cdots, n-1 \, . \end{cases}$$

5. Winkel ins Intervall $(-\pi, \pi]$ mappen[a]

$$\tilde{\varphi}_k := \begin{cases} \varphi_k \, , & \text{falls } \varphi_k \leq \pi \, , \\ \varphi_k - 2\pi \, , & \text{falls } \varphi_k > \pi \, . \end{cases}$$

6. Zusammenfassen des Ergebnis:

$$z_k \mathrel{\widehat{=}} (r \,|\, \tilde{\varphi}_k) \quad \Rightarrow \; z_k = r \cdot (\cos(\tilde{\varphi}_k) + i \, \sin(\tilde{\varphi}_k)) \; , \; k = 0, \cdots, n-1 \, .$$

[a] Das entspricht dem Bildbereich des atan2!

Bemerkungen:

- Die komplexe Wurzel, die am dichtesten an der positiven reellen Achse liegt, heißt Hauptwert [principal value].
- Alle komplexen Wurzeln haben den gleichen Betrag - sie liegen also alle auf einer Kreislinie!
- Die komplexen Wurzeln unterteilen die Kreislinie äquidistant, sind also alle gleich weit voneinander entfernt.
- Die Wurzeln im Komplexen sind nicht eindeutig und aus diesem Grund muss man beim Umformen von Gleichungen sehr vorsichtig sein.[37] Das Problem läßt sich schon mit der imaginären Einheit i demonstrieren: Man darf im Prinzip $i = \sqrt{-1}$ mit der Wurzel schreiben, aber …

$$\begin{aligned} z = -i \; \Rightarrow \; z^2 = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{-1} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \pm i \, . \end{aligned}$$

- Das "Wurzelziehen" in $\mathbb{C}$ wird "Radizieren" genannt.

1.15.2 Polardarstellung

Dass bei der Multiplikation komplexer Zahlen die Winkel addiert werden, erinnert sehr an die Logarithmengesetze: 1.10

$$\begin{aligned} \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2) \\ \log(x_1 \cdot x_2) &= \log(x_1) + \log(x_2) \end{aligned}$$

Es gibt in der Tat einen Grund für diese Analogie: es ist die sogenannte Eulersche Identität.

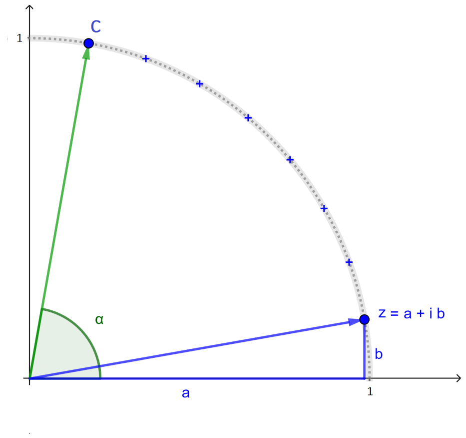
[37] Am besten verwendet man im Komplexen nie das Wurzelsymbol oder den gebrochenrationalen Exponenten, sondern drückt alles mit ganzzahligen Potenzen aus: schreiben Sie $z^{13} = \tilde{z}$ und nie $z = \sqrt[13]{\tilde{z}}$!

Betrachten wir eine komplexe Zahl c mit Länge $c = 1$ und Argument α. Gemäß dessen, was wir über das Potenzieren komplexer Zahlen gelernt haben, gilt

$$c = z^n, \text{ mit } z \mathrel{\widehat{=}} \left(1, \frac{\alpha}{n}\right) .$$

Interessanterweise kann man den Real- und Imaginärteil näherungsweise in Termen von α angeben. Für $n = 8$ sieht das so aus: 1.14

$z^8 = c \;\Rightarrow\; z \approx ?$ Bsp 4



c liegt auf dem Einheitskreis und besitzt das Argument α, dann gilt für z mit

$$z^8 = c$$

folgende Näherung für die kartesischen Koordinaten von z:

$$\begin{aligned} b &\approx \frac{\alpha}{8}\,, \\ a &\approx 1\,, \\ \Rightarrow\; z = a + i\,b &\approx 1 + i\,\frac{\alpha}{8} \end{aligned}$$

Und das geht selbstverständlich für beliebige $n \in \mathbb{N}^+$:

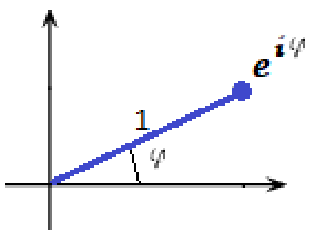
$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \quad z^n = c \wedge\; c \mathrel{\widehat{=}} (1\,|\,\alpha) \;\Rightarrow z \approx 1 + i\,\frac{\alpha}{n} .$$

Interessant ist die Schlussfolgerung, die wir daraus bezüglich c ziehen können, also einer beliebigen Zahl auf dem Einheitskreis: für eine solche gilt offensichtlich

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad c \approx \left(1 + \frac{i\,\alpha}{n}\right)^n \qquad (*)$$

Diesen letzten Ausdruck kennen wir schon: für $n \to \infty$ ist es der Wert der Exponentialfunktion, vorausgesetzt wir erlauben als Argument die komplexe Zahl $x = i\,\alpha$. Diese Beobachtung legt die folgende Definition nah: 1.10

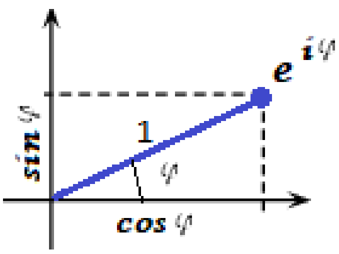
Darstellung von $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ Def. 1



$$\forall \varphi \in \mathbb{R} : \quad e^{i\,\varphi} := c\,.$$

Aus der vorigen Definition folgt eine der wichtigsten Relationen der Mathematik, die sogenannte Eulersche Identität:

Eulersche Identität Regel 2



$$\forall\, \varphi \in \mathbb{R} : \quad e^{i\,\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) \quad (**)$$

Bemerkungen:

- Die Zahl e resultiert hier nicht aus einer Bestimmungsgleichung, sondern wird identifiziert aus der uns bekannten Darstellung e^x für reelle Zahlen x.
- $(**)$ nennt man die **Eulersche Identität**.

Eine beliebige komplexe Zahl liegt natürlich nicht auf dem Einheitskreis, sondern auf einem Kreis mit Radius $r > 0$. Wir können sie erzeugen durch eine Skalierung von $c = e^{i\,\varphi}$ und gelangen so zu der allgemeingültigen Polardarstellung für komplexe Zahlen: Aufgaben

Polardarstellung komplexer Zahlen — Regel 3

Eine beliebige komplexe Zahl z besitzt die Polardarstellung

$$z = r \cdot e^{i\,\varphi}\,,$$

wobei

1. der Winkel φ nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt und
2. im Fall $z = 0$ beliebig ist.

Bemerkungen:

- In Polardarstellung fällt das Multiplizieren und Dividieren komplexer Zahlen besonders leicht, denn es gilt

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= \left(r_1 \cdot e^{i\,\alpha_1}\right) \cdot \left(r_2 \cdot e^{i\,\alpha_2}\right) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\,(\alpha_1+\alpha_2)}\,,\\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \cdot e^{i\,\alpha_1}}{r_2 \cdot e^{i\,\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\,(\alpha_1-\alpha_2)}\,, \quad z_2 \neq 0\,,\\
z^n &= \left(r \cdot e^{i\,\alpha}\right)^n = r^n \cdot e^{i\,n\alpha}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,\\
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r \cdot e^{i\,\alpha}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\frac{\alpha + k\,2\pi}{n}}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,\ n \in \mathbb{N}^+\,.
\end{aligned}$$

- Anstatt mit Sinus und Kosinus zu rechnen, rechnet man mit der komplexen Exponentialfunktion: 1.13

$$r \cdot e^{i\,x} = r \cdot (\cos(x) + i\,\sin(x)) \Rightarrow \begin{cases} \cos(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{i\,x} + e^{-i\,x}\right)\\ \sin(x) &= \frac{1}{2\,i}\left(e^{i\,x} - e^{-i\,x}\right)\end{cases}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts untersuchen wir was passiert, wenn wir eine beliebige komplexe Zahl $z = a + i\,b$ als Argument in die Exponentialfunktion hineingeben:

$$e^z = e^{a+i\,b} = e^a \cdot e^{i\,b} = e^a\,(\cos(b) + i\,\sin(b))\,,$$

die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verhält sich grundlegend anders als die reelle Exponentialfunktion! Warum?

Komplexe Exponentialfunktion e^z — Bsp 5

$$z = e^{12{,}34+56{,}78\,i} = e^{12{,}34} \cdot e^{56{,}78\,i} = e^{12{,}34} \cdot (\cos(56{,}78) + i\,\sin(56{,}78))\,.$$

1.15.3 Linearfaktorzerlegung

Wo die klassische Lösungsformel für quadratische Gleichungen versagt, weil etwas Negatives unter der Wurzel steht, kann man mit komplexen Zahlen weiterrechnen: 1.9

quadratische Gleichung — Bsp 6

$$z^2 + 6\,z + 13 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -3 \pm 2\,i\,.$$

Im Regelfall hat eine quadratische Gleichung also nun zwei Lösungen. In Ausnahmefällen sind diese beiden Lösungen gleich[38]. Das geht entsprechend mit Gleichungen höheren Grades: $z^4 + z^3 - 4\,z^2 + 5z - 2 = 0$ hat vier verschiedene komplexe Zahlen z als Lösung, es sei denn, davon stimmen zufällig welche überein. Das Verhalten ist also viel einfacher als mit reellen Zahlen. Warum?

In komplexen Zahlen hat jedes Polynom mindestens eine Nullstelle. Man kann also immer weiter Linearfaktoren abspalten, so dass sich jedes Polynom in komplexen Zahlen komplett in Linearfaktoren zerlegen lässt. Dies ist der Fundamentalsatz der Algebra. 1.8 Aufgaben

[38] wenn die Diskriminante verschwindet

1.15.4 Harmonische Schwingungen

Wie elegant die Eulersche Identität ist, sieht man bei den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus. Setzen wir die Summe $\alpha + \beta$ zweier beliebiger Winkel ein:

$$e^{i\,(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\,\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + i\,\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + i\,\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\,.$$

Durch Sortieren nach reellen und imaginären Anteilen, erhält man hieraus:

Additionstheoreme — Regel 4

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\,,\\ \sin(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)\,. \end{aligned}$$

Lernen Sie keine Additionstheoreme auswendig, denn sie lassen sich alle durch Potenzrechengesetze und die komplexe Exponentialfunktion einfach herleiten. Aufgabe

Um die Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz zu berechnen bedient man sich der komplexen Darstellung. Das heißt man nutzt aus, dass gilt Aufgabe

$$A\cdot\sin(\omega\,t+\alpha) = \mathrm{Im}\left(A\cdot e^{i\,(\omega t+\alpha)}\right) = \mathrm{Im}\left(A\cdot\cdot e^{i\,\alpha}\cdot e^{i\,\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(\underline{A}\cdot\cdot e^{i\,\omega t}\right)\,,$$

wobei $\underline{A}$ die komplexe Amplitude

$$\underline{A} := A\cdot e^{i\,\alpha}\in\mathbb{C}$$

bezeichnet. Der Übergang zur komplexen Formulierung von harmonischen Schwingungen ist besonders hilfreich, wenn man die Überlagerung mehrerer Schwingungen berechnen möchte:

Überlagerung harmonischer Schwingungen — Regel 5

Für die Überlagerung der komplexen harmonischen Schwingungen

$$\begin{aligned} \underline{s}_1(t) &= \underline{A}_1\cdot e^{i\,\omega t} \quad \text{mit } \underline{A}_1 = A_1\cdot e^{i\,\alpha_1}\in\mathbb{C}\\ \underline{s}_2(t) &= \underline{A}_2\cdot e^{i\,\omega t} \quad \text{mit } \underline{A}_2 = A_2\cdot e^{i\,\alpha_2}\in\mathbb{C} \end{aligned}$$

gilt

$$\underline{s}(t) = \underline{s}_1(t) + \underline{s}_2(t) = \underline{A}\cdot e^{i\,\omega t} \quad \text{mit } \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2\,.$$

Insbesondere gilt damit für die zugeordneten reellen harmonischen Schwingungen

$$\mathrm{Im}(\underline{s}(t)) = A\cdot\sin(\omega t+\alpha) \quad \text{mit } A = |\underline{A}_1 + \underline{A}_2|, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\,.$$

Komplexe Zahlen II Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.15 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Radizieren — Aufg. 1

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen

$$(a)\ z^3 = -8 \qquad (b)\ z^2 = i \qquad (c)\ z^4 = -16$$

Eulersche Identität — Aufg. 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Darstellungen für sin und cos gelten

$$(a)\ \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad (b)\ \cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Fundamentalsatz — Aufg. 3

Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$$

mit reellen Koeffizenten $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.

(a) Zeigen Sie: wenn $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p.

(b) Wenden Sie obigen Satz an, um alle Nullstellen des Polynoma

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 10z + 25$$

zu bestimmen. Zeigen Sie zu erst, dass $z_1 = 2 + j$ eine Nullstelle ist.

Fundamentalsatz — Aufg. 4

(a) Lösen Sie die Gleichung: $4z^2 + (8 + 12i)z - 5 + 11i = 0$.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen des komplexen Polynoms $p : z \mapsto z^2 + \left(2\sqrt{2}i\right) \cdot z - 2\sqrt{3}i$.

Anwendungen: Additionstheoreme — Aufg. 5

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a)\ \sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y), \qquad (b)\ \cos(3x) = 4(\cos(x))^3 - 3\cos(x)$$

Anwendungen: Harmonische Schwingungen — Aufg. 6

Gegeben seien die harmonischen Schwingungen

$$s_1(t) = \sqrt{2} \cdot \sin(10t + \pi/4), \quad s_2(t) = 2\cos(10t + \pi/6)\,.$$

(a) Berechnen Sie die Überlagerung von s_1 und s_2.
Hinweis: $s_1(t) = \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}e^{i\,(10t+\pi/4)}\right)$, $s_2(t) = 2\sin(\omega t - \pi/6 + \pi/2) = 2\sin(\omega t + \pi/3) = \operatorname{Im}\left(2e^{i\,(10t+\pi/6)}\right)$.

(b) Wie muss eine harmonische Schwingung

$$s_3(t) = A_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3)$$

gewählt werden, dass die Überlagerung von s_1 und s_3 eine Amplitude von 1 und eine Nullphase von $\pi/2$ besitzt?

1.16 Vektoren

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen . . .

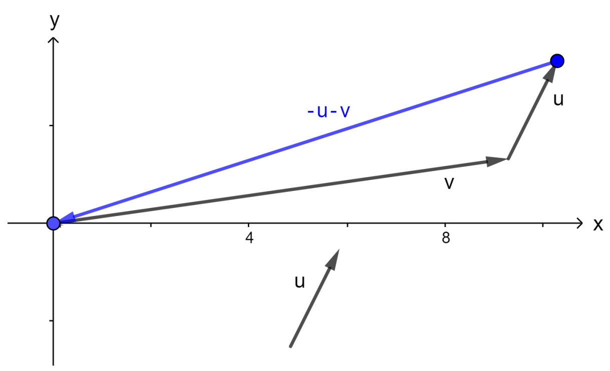
- wie man mit Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ rechnet
- was ein Skalarprodukt zwischen Vektoren ist und wie Orthogonalität definiert ist
- die geometrische Bedeutung des Skalarprodukt zu benutzen z.B. für eine orthogonale Zerlegung
- wie das Kreuzprodukt für Vektoren in $\mathbb{R}^3$ definiert ist
- die geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts zu benutzen z.B. zum Testen von Parallelität

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.16.1 Was ist ein Vektor?

Pfeile kann man addieren und subtrahieren und man kann die Länge von Pfeilen durch Multiplikation mit Zahlen verändern:

Pfeile Bsp 1



Pfeilarithmetik kann man in $\mathbb{R}^2$ gut skizzieren:

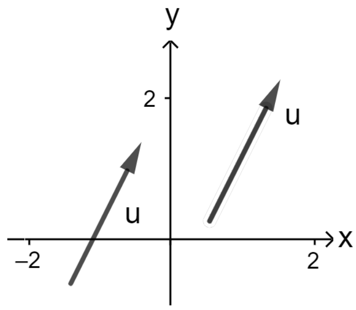
$$-(\vec{v}+\vec{u}) = -\vec{v}-\vec{u}$$

Das klappt in zwei Dimensionen (Ebene) ebenso wie in drei Dimensionen (Raum). Ein Pfeil wird vollständig durch seine Länge und seine Richtung beschrieben. Um die Operation " Addition" komplett zu haben, benötigt man ein neutrales Element. Das neutrale Element der Addition ist ein Pfeil mit Länge Null und unbestimmter 1.2
Richtung, der sogenannte Nullpfeil $\vec{0}$. Es gilt:

$$\forall \vec{a}: \quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\,.$$

Zwei Pfeile werden mathematisch als gleich betrachtet, wenn sie in Länge und Richtung übereinstimmen: mathematisch unterscheiden sich also zwei parallel gegeneinander verschobene Pfeile nicht. Es handelt sich in der Mathematik um einen (ungebundenen) Vektor:

Vektoren Bsp 2



Ein Vektor in der Mathematik ist durch die Angabe

- seiner Länge und
- seiner Richtung

eindeutig bestimmt. Man darf den Vektor in der Ebene beliebig verschieben.

Das Wort Vektor stammt vom lateinischen Wort für Träger. Zwei- und dreidimensionale Vektorgrößen werden handschriftlich meist mit Pfeilen oder unterstrichen dargestellt, also $\vec{a}$ oder $\underline{a}$, oder mit Fettbuchstab $\boldsymbol{a}$. Je abstrakter die Vektoren werden, um so eher benutzt man normale Buchstaben wie a.

Die Vokabeln ¨ Vektor¨ und ¨ Skalar¨ werden nicht nur in mathematischen Zusammenhängen, sondern auch in der Physik ständig auftauchen. Es ist sinnvoll die Unterschiede zu erklären:

Vektoren und Skalare in der Mathematik

- Vektoren [vector] in der Mathematik sind ungebundene bzw. freie Vektoren. Das Adjektiv " frei" betont, dass zwei parallele gleichlange Vektoren dieselben mathematischen Objekte sind.
- Vektoren mit fixiertem Start- oder Aufhängepunkt P nennt man in der Mathemamtik gebundene Vektoren:
- Skalare [scalar] in der Mathematik sind die Zahlen, mit denen man Vektoren multiplizieren kann: also reelle oder komplexe Zahlen. Multipliziert man einen Vektor mit einer Zahl, so verändert man seine Länge, aber nicht seine Richtung - man spricht auch von Skalierung.

Vektoren und Skalare in der Physik

- Vektoren in der Physik sind vektorielle Größen wie beispielsweise der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, der Impulsvektor $\vec{p}$, das elektrostatische Feld $\vec{E}$ oder die Newtonsche Kraft $\vec{F}$...
- Vektoren in der Physik, die an einem fixierten Punkt P starten, nennt man Ortsvektoren $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{v}$.
- Skalare in der Physik sind ungerichtete Größen, beispielsweise die Masse m eines Körpers, die Anzahl N von Teilchen, die Ladung q eines Atoms, die Energie E eines Systems oder die Raumtemperatur T...
- Physikalische Größen können nicht nur gerichtet (vektoriell) oder ungerichtet (skalar), sondern auch komplizierter sein. Zur Beschreibung der Drehung eines massebehafteten Objektes um eine bestimmte Achse braucht man den sogenannten Trägheitstensor $\boldsymbol{I}$ (nicht Vektor, nicht Skalar). Ein Trägheitstensor ist mathematisch gesehen eine Matrix. 1.18
- Jede physikalische Größe, ob skalar, vektoriell oder tensorwertig, besteht aus einem Zahlenwert und einer Maßeinheit. Wenn man physikalische Gesetze aufschreibt und mit physikalischen Größen rechnet, dann kann man immer nur Größen gleicher Einheit miteinander verrechnen. Deshalb ist es immer hilfreich einen Vergleich der Einheiten zu machen - so findet man schnell heraus, ob eine Formulierung sinnvoll oder unmöglich ist:
  - eine Masse von $m = 2.3\,[\mathrm{kg}]$ kann nicht mit einem Zeitintervall der Länge $\delta t = 2.3\,[\mathrm{s}]$ gleichgesetzt werden,
  - ein Beschleunigungsvektor $\vec{a} = (4.2, 0, 0)^\intercal\,[\frac{m}{s^2}]$ kann nicht dem sklaren Druck $p = 4.2\,[\mathrm{Pa}]$ entsprechen,
  - ein Kraftvektor $\vec{F}\,[\mathrm{N}] = [\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$, kann nicht gleich einem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}\,[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$ sein.

Um mit Vektoren sinnvoll rechnen zu können, drückt man sie in Zahlen aus. Der Vektor, der eine Einheit nach links und drei nach oben zeigt lautet beispielsweise

Komponenten eines Vektors Def. 1

Ein Vektor, der eine Einheit nach links und drei nach oben zeigt lautet

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen -1 und 3 nennt man Komponenten oder Koeffizienten oder auch Einträge des Vektors. Entsprechend haben Vektoren im Raum drei Komponenten, beispielsweise

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Komponenten eines Vektors schreibt man für gewöhnlich senkrecht untereinander. Anstatt sogenannte Spaltenvektoren zu notieren, kann man die Komponenten auch in eine Zeile schreiben und mit dem Symbol $^\intercal$ anzeigen, dass man der Vektor als Spaltenvektor aufzufassen ist:

$$(-1, 3)^\intercal = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (2, 3, -4)^\intercal = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Das kleine Symbol $^\intercal$ zeigt immer an, dass der Vektor gedreht werden soll und der Drehvorgang wird Transponieren genannt.

Rechnen mit Vektoren in der Ebene — Bsp 3

- Man skaliert einen Vektor, indem man jede Komponente des Vektors mit dem Skalar multipliziert:

$$2 \cdot \boldsymbol{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Man addiert zwei Vektoren, indem man die Komponenten der Vektoren zeilenweise addiert:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen:

- Die Bedeutung der Komponenten hängt von der Wahl des Ursprungs und der Achsen ab!
- Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist der Vektor, bei dem alle Komponenten gleich null sind.

Die Menge aller Vektoren mit zwei reellen Komponenten wird mit $\mathbb{R}^2$ und die Menge aller Vektoren mit drei reellen Komponenten wird mit $\mathbb{R}^3$. Entsprechend werden die Vektoren mit 56 Komponenten mit dem $\mathbb{R}^{56}$ identifiziert.

Das Wort " identifizieren" resultiert aus der Tatsache, dass die Mengen $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^+$, ein Doppelleben führen: man kann jedes Element des $\mathbb{R}^2$ entweder als Punkt $(x \,|\, y)$ in der Ebene oder als Vektor $(x, y)^\intercal$ auffassen.

$\mathbb{R}^2$ als Menge von Vektoren — Def. 2

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Aus dem Zusammenhang wird klar, welchen Standpunkt man einnimmt. Die einfachste Übersetzung zwischen Punkten und Vektoren ergibt sich wie folgt

Vektor vs. Punkt — Bsp 4

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \,|\, 3) - (0 \,|\, 0),$$

wobei nun links explizit ein gebundener Vektor mit Aufhängepunkt im Ursprung steht.

Kommen wir nochmal zurück auf die Definition eines Vektors: ein freier Vektor ist durch seine Länge und seine Richtung eindeutig bestimmt. Das bedeutet, dass die Angabe dieser Informationen genügt, um den Vektor zu kennen!

$$\text{Vektor} \quad \Leftrightarrow \quad (\,\text{Länge, Richtung}\,)$$

Für die Länge $\|\boldsymbol{a}\|$ oder $|\boldsymbol{a}|$ eines Vektors $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ gilt: Warum?

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}\,.$$

Zur Angabe der Richtungsinformation von $\boldsymbol{a}$ bietet sich ein Vektor an, der in Richtung von $\boldsymbol{a}$ zeigt und dessen Länge zu eins normiert ist, der also keine spezifische Längeninformation über $\boldsymbol{a}$ besitzt! Zu einem gegebenen Vektor $\boldsymbol{a}$ führen wir die Notation $\hat{\boldsymbol{a}}$ für seinen Einheitsvektor ein. Es gilt:

Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{a}}$ zu $\boldsymbol{a}$ — Def. 3

$$\forall\, \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}: \quad \hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}\,.$$

Das Konzept der Vektoren in der Ebene ist sehr zugänglich, weil wir uns die Vektoren vorstellen können. Allerdings hindert uns nichts daran das Konzept zu erweitern, beispielsweise auf $\mathbb{R}^n$.

Vektoren in $\mathbb{R}^n$ — Def. 4

Ein n-Tupel reeller Zahlen a_k, $k = 1, \dots, n$ definiert einen Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit n Komponenten:

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^\intercal\,.$$

Ein nicht-trivialer Vektor, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, ist durch seine Länge und seine Richtung eindeutig festgelegt:

$$\boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad (\|\boldsymbol{a}\|, \hat{\boldsymbol{a}}) \ , \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{a}\| & = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \geq 0 \in \mathbb{R} \,, \\ \hat{\boldsymbol{a}} & = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} \,, \end{cases}$$

und es gilt

$$\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \hat{\boldsymbol{a}} \,.$$

1.16.2 Skalarprodukt

In der Mechanik gilt " Arbeit ist Kraft mal Weg". Es werden also zwei Vektoren mit der gleichen Anzahl an Komponenten multipliziert und das Ergebnis ist eine Zahl. Diese Art, zwei Vektoren miteinander zu multiplizieren und dabei eine Zahl - also einen Skalar - zu erhalten, nennt sich Skalarprodukt oder auch inneres Produkt [dot product].

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ — Def. 5

$$\forall \, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n : \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k \in \mathbb{R} \,.$$

Bemerkungen:

- Man multipliziert also die Komponenten der Vektoren zeilenweise und addiert die Produkte, beispielsweise:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = -1 \in \mathbb{R} \,.$$

- Anstatt der spitzen Klammern, sieht man auch oft einen dicken Punkt zur Bezeichnung des Skalarprodukts: $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ oder .

Das Skalarprodukt besitzt zwei wichtige Eigenschaften: es ist symmetrisch (1) und bilinear (2), (3) [39]: Aufgaben

Eigenschaften des Skalarprodukts — Regel 1

$$\begin{array}{llcl} (1) & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle & = & \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \,, \\ (2) & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \rangle & = & \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \,, \\ (3) \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{R} : & \langle \lambda \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle & = & \langle \boldsymbol{a}, \lambda \boldsymbol{b} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \,. \end{array}$$

Das Skalarprodukt ist interessant und nützlich, weil es in $\mathbb{R}^2$ eine klare geometrische Bedeutung hat. Bevor wir diese herleiten, kommen noch zwei wichtige Beobachtungen:

Relation zwischen Länge und Skalarprodukt — Regel 2

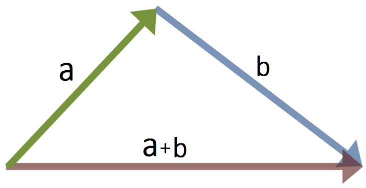
Das Skalarprodukt eines Vektors $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ mit sich selbst liefert seine Länge zum Quadrat:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} \,.$$

Skalarprodukt zweier orthogonalen Vektoren in $\mathbb{R}^2$ — Regel 3

Das Skalarprodukt zweier zueinander senkrecht stehender Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ verschwindet:

[39] Besitzt eine Abbildung in einem abstrakten Vektorraum diese Eigenschaften, so handelt es sich um ein Skalarprodukts.



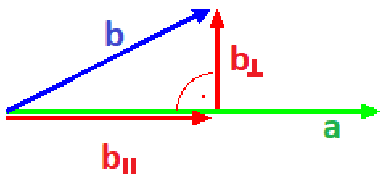
$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 &\overset{!}{=} \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= \langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\rangle + 2\,\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle + \langle \boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\,\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \quad \Rightarrow \ \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle \overset{!}{=} 0\,. \end{aligned}$$

Die letzte Eigenschaft benutzt man, um Orthogonalität zweier Vektoren zu definieren:

Orthogonalität zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ Def. 6

- Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ sind per Definition orthogonal zueinander [perpendicular], wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist, also
$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} :\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = 0\,.$$
- Der Nullvektor besitzt keine Richtung, man sagt er ist senkrecht zu allen Vektoren.

Mit diesen Kenntnissen kann man sich überlegen, was das Skalarprodukt geometrisch bedeutet. Die Idee ist einen gegebenen Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich eines anderen gegebenen Vektors $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ wie folgt zu zerlegen:



$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{\|} + \boldsymbol{b}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \langle \boldsymbol{b}_{\perp}, \boldsymbol{a}\rangle = 0\,.$$

Es sei α der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$. Ist α ein spitzer Winkel [acute angle], dann gilt

$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}: \quad \boldsymbol{b}_{\|} = \|\boldsymbol{b}_{\|}\| \cdot (+\hat{\boldsymbol{a}}) = \|\boldsymbol{b}\|\cos(\alpha)\,\frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}\cos(\alpha)\,\boldsymbol{a}\,.$$

Ist α ein stumpfer Winkel [obtuse angle], dann gilt

$$\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi: \quad \boldsymbol{b}_{\|} = \|\boldsymbol{b}_{\|}\| \cdot (-\hat{\boldsymbol{a}}) = -\|\boldsymbol{b}\|\underbrace{\cos(\pi-\alpha)}_{=-\cos(\alpha)} \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}\cos(\alpha)\,\boldsymbol{a}\,.$$

Damit ergibt sich geometrisch in beiden Fällen also dieselbe Beziehung, nämlich

$$\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{\|} + \boldsymbol{b}_{\perp}\rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{\|}\rangle = \left\langle \boldsymbol{a}, \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}\cos(\alpha)\,\boldsymbol{a}\right\rangle = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cdot \cos(\alpha)\,.$$

Geometrische Bedeutung des Skalarprodukts Regel 4

Das Skalarprodukt definiert den Winkel bzw. dessen Kosinus zwischen zwischen $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{a}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}{\|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|}\,.$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts läßt sich also ein Vektor auf einen anderen projizieren! Bei gegebenem Skalarprodukt lautet die orthogonale Zerlegung explizit wie folgt: Aufgabe

Orthogonale Zerlegung eines Vektors $\boldsymbol{b}$ bzgl. eines Vektors $\boldsymbol{a}$ Regel 5

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man einen Vektor bzgl. einem anderen Vektor orthogonal zerlegen.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{\|} + \boldsymbol{b}_{\perp} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \boldsymbol{b}_{\|} &= \langle \boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{a}}\rangle\,\hat{\boldsymbol{a}}\,, \\ \boldsymbol{b}_{\perp} &= \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_{\|}\,. \end{cases}$$

Man kann auch Vektoren mit komplexen Komponenten betrachten. Bei der Übertragung der Regeln, muss man aber aufpassen, wenn es um die Berechnung der Länge eines Vektors mit komplexen Einträgen geht bzw. das Skalarprodukt:

Vektoren $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ Def. 7

- Ein Vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ ist eindeutig definiert durch seine Länge und seine Richtung:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)^\intercal \in \mathbb{C}^n \Leftrightarrow (\|\boldsymbol{u}\|, \hat{\boldsymbol{u}}) \; .$$

- Die Länge von $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ lautet: $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} \cdot u_k}\;.$
- Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ lautet: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n : \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} \cdot v_k\;.$
- Es gilt entsprechend $\cos(\alpha) = \dfrac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$ und damit $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle}$.

In manchen Lehrbüchern ist das Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ anders definiert und zwar werden die Komponenten des rechten Vektors konjugiert. Dies führt auf das konjugiert komplexe Ergebnis, da die Norm eine reelle Zahl ist, bleibt sie gleich.

Im nächsten Abschnitt werden wir verstehen, dass der $\mathbb{R}^n$ und der $\mathbb{C}^n$ Beispiele einer abstrakten mathematischen Struktur sind. Diese Struktur nennt sich Vektorraum. Kann man in einem Vektorraum ein Skalarprodukt 1.17
definieren, dann hat das enorme Vorteile, denn ein Skalarprodukt definiert auf natürliche Weise:

- die Länge (Norm) jedes Vektors,
- Orthogonalität zwischen Vektoren,
- einen Winkel zwischen Vektoren.

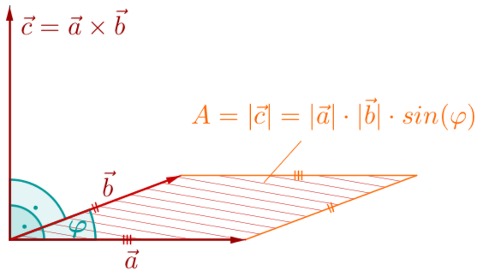
1.16.3 Kreuzprodukt

Ein weiteres wichtiges Produkt von Vektoren gibt es nur im Dreidimensinalen. Es liefert keine Zahl, sondern einen neuen Vektor[40] als Ergebnis. Man wählt als Symbol für das Kreuzprodukt [vector product] die Schreibweise $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. In der Physik kommt das Kreuzprodukt zum Beispiel bei der Drehbewegung vor. Geometrisch legen drei Eigenschaften das Kreuzprodukt eindeutig fest:

Eigenschaften des Kreuzprodukts Regel 6

Für das Kreuzprodukt $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

1. es steht senkrecht auf $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$: $\langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \;\wedge\; \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = 0\,.$



2. es ist so gerichtet, dass die Vektoren $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\}$ dieselbe Orientierung wie $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ haben.
3. seine Länge ist gleich der Fläche des von $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|\,|\sin(\varphi)|\,.$$

Die letzte Eigenschaft ist erstaunlich, da eine Länge gleich einer Fläche ist - eine Überprüfung der Einheiten zeigt, dass die Aussage sinnvoll ist.

Allgemein gilt für zwei Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$:

[40] Streng genommen einen Pseudovektor

Berechnung des Kreuzprodukt

Regel 7

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,.$$

Hat man zwei Vektoren $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ gegeben, dann kann kommt das Kreuzprodukt typischer Weise bei folgenden Fragestellungen zum Einsatz:

1. Wie lautet ein dritter Vektor $\boldsymbol{c}$ mit $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$? Eine Antwort ist $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.
2. Sind die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel zueinander? Die Antwort ist $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

In Zahlen läßt sich das Kreuzprodukt zweier Vektoren wie folgt berechnen:

Kreuzprodukt

Bsp 5

1. Berechnung des Kreuzprodukts:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 & - & 5 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 2 & - & 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-3) & - & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,.$$

2. Geometrische Bedeutung des Kreuzprodukts:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix} \right\rangle &= 3 \cdot 19 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot (-17) = 57 + 28 - 85 = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ -17 \end{pmatrix} \right\rangle &= 2 \cdot 19 + (-3) \cdot 7 + 1 \cdot (-17) = 38 - 21 - 17 = 0 \,. \end{aligned}$$

Vektoren Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.16 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Rechenregeln

Aufg. 1

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke: $-\boldsymbol{a}+3\cdot\boldsymbol{b}$, $(2\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+3\cdot\boldsymbol{c}$, $(3\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})+2\cdot\boldsymbol{a}$

(b) Berechnen Sie die folgenden Beträge (Längen, Normen): $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$, $|-\boldsymbol{a}+3\cdot\boldsymbol{b}|$

(c) Bestimmen Sie einen Vektor der Länge 10, der in die gleiche Richtung wie der Gegenvektor von $\boldsymbol{a}$ zeigt.

(d) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke: $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot}(4\cdot\boldsymbol{c})$, $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{c})$, $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{b})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{c}$

(e) Bestimmen Sie die Winkel im Bogenmaß zwischen folgenden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$.

(f) Bestimmen Sie alle orthogonalen Vektoren zu $\boldsymbol{a}$.

(g) Bestimmen Sie einen Vektor der Form $\boldsymbol{b}+\lambda\cdot\boldsymbol{c}$ mit $\lambda\in\mathbb{R}$, der senkrecht zu $\boldsymbol{a}$ ist.

(h) Bestimmen Sie die orthogonale Zerlegung von $\boldsymbol{b}$ bzgl. $\boldsymbol{a}$, das heißt die Vektoren $\boldsymbol{b}_{\|}$ und $\boldsymbol{b}_{\perp}$.

Rechenregeln

Aufg. 2

Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $-3\cdot(-2\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Beträge (Längen, Normen): $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, |-3\cdot(-2\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}|$.

(c) Berechnen Sie den Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{a}$.

(d) Berechnen Sie $\boldsymbol{a}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{b}$ und $(-3\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{b}$.

(e) Berechenn Sie den Winkel φ im Bogenmaß zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ (Skalarprodukt!).

(f) Berechnen Sie $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(g) Berechnen Sie die Fläche des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Rechenregeln

Aufg. 3

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1+2i\\-i\\0\\3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3-i\\2i\\0\\-i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-2+i\\1+2i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}-i\\-1-3i\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $-i\boldsymbol{a}+(2-i)\boldsymbol{b}$.

(b) Berechnen Sie $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

(c) Berechnen Sie $|\boldsymbol{a}|$.

(d) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke: $|\boldsymbol{c}|$, $\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\rangle$, $\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}\rangle$

(e) Bestimmen Sie eine Zerlegung von $\boldsymbol{d}$ der folgenden Art $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_\perp + \boldsymbol{d}_\parallel, \quad \boldsymbol{d}_\perp \perp \boldsymbol{c}$.

1.17 Vektorraum

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- was ein Vektorraum ist
- was die Dimension eines Vektorraum ist
- was eine Vektorraumbasis ist
- wie lineare Unabhängigkeit und lineare Abhängigkeit definiert sind

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.17.1 Was ist ein Vektorraum?

Wir fassen die Erkenntnisse des vorangegangenen Abschnitts kurz zusammen: wir haben Spalten von reellen (oder komplexen) Zahlen Vektoren genannt und festgestellt, dass man Vektoren gleichen Typs (etwa aus dem $\mathbb{R}^{13}$ oder dem $\mathbb{C}^{17}$) addieren und mit reellen (oder komplexen) Zahlen multiplizieren kann. Dabei gelten die üblichen Rechengesetze: Die Addition ist assoziativ und kommutativ, es gibt ein neutrales Element der Addition, nämlich den Nullvektor, und zu jedem Vektor gibt es einen additiv inversen Vektor oder Gegenvektor (einfach die Vorzeichen der Komponenten umdrehen).

Rechnen mit Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ — Bsp 1

$$\begin{aligned} i\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+i \\ \pi-\sqrt{2}i \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} i \\ (\sqrt{2}-\pi)i-\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2\,, \\ (3-4)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} &= 3\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

Gilt dieses Regelwerk für die Elemente einer Menge, dann nennt man die Elemente der Menge **immer** Vektoren! Die Menge selbst nennt man einen Vektorraum $\mathbb{V}$[41].

Vektorraum — Def. 1

Eine Menge $\mathbb{V}$ heißt Vektorraum [linear space] über einem Körper $\mathbb{K}$, falls gilt:

1. Addition in $\mathbb{V}$: $\quad + : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}, (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\mapsto \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$,
2. Neutrales Element der Addition in $\mathbb{V}$: $\quad \exists\, \mathbf{0}\in\mathbb{V},\ \forall\, \boldsymbol{v}\in\mathbb{V}: \quad \mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$,
3. Multiplikation mit Skalaren in $\mathbb{K}$: $\quad \cdot : \mathbb{K}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}, (\lambda,\boldsymbol{v})\mapsto \lambda\cdot\boldsymbol{v}\,.$

Bemerkungen:

- In der Physik und der Geometrie braucht man hauptsächlich den $\mathbb{R}^3$.
- $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ kommen beim Umgang mit linearen Näherungen komplexer Systeme vor.
- Abstraktere Vektorräume benötigt man beim Lösen von Differentialgleichungen und bei der Arbeit mit der Fourier-Transformation. MA2 MA2

Auch Funktionen lassen sich addieren und mit Zahlen multiplizieren und es ist insofern nicht verwunderlich, dass abstraktere Vektorräume Räume von Funktionen sind. Aufgaben

Funktionen als Vektoren — Bsp 2

- Vektor mal Skalar: $3\exp : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ x\mapsto 3e^x$.
- Vektor plus Vektor: $\sin+\cos : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ x\mapsto \sin(x)+\cos(x)$.
- Nullvektor: $\forall x\in\mathbb{R}:\ x\mapsto 0$.

[41] Zur Erinnerung: wir hatten eine Menge von Zahlen Köper $\mathbb{K}$ genannt, wenn $\mathbb{K}$ mit einer Addition und einem neutralen Element der Addition, einer Multiplikation mit einem neutralen Element der Multiplikation ausgestattet ist. Für uns spielen nur zwei Köper eine Rolle: entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

1.17.2 Basis und Dimension

Die Vektoren der Vektorräume $\mathbb{R}^3$ lassen sich entsprechend ihrer x, y und z-Komponenten zerlegen:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

wobei die Vektoren auf der rechten Seite zwei außerordentliche Eigenschaften: sie sind orthonormal und das heißt

- sie stehen gegenseitig senkrecht aufeinander und
- sie sind alle von der Länge eins.

Jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ lässt sich aus diesen Einheitsvektoren zusammensetzen und die Zerlegung ist eindeutig. Man nennt die drei Einheitsvektoren die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und weil die Standardbasis so oft vorkommt, benutzt man abkürzende Schreibweisen. Die folgenden sind die gängigsten:

Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ [canonical basis] — Def. 2

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \mathrel{\widehat{=}} \{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\} \mathrel{\widehat{=}} \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}.$$

Entsprechende Standardbasen mit orthonormalen Vektoren gibt es in allen Räumen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$.

Aber was genau ist eine Basis eigentlich? Um diese Frage präzise zu beantworten, brauchen wir weitere Vokabeln: lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit von Vektoren:

Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit — Def. 3

Es seien n Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{V}$ gegeben.

- Man nennt die Vektoren linear unabhängig, wenn sich der Nullvektor nur auf triviale Weise darstellen läßt, also

$$\lambda_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\,.$$

- Man nennt die Vektoren linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Nun läßt sich sagen, wie eine Vektorraumbasis definiert ist:

Vektorraumbasis — Def. 4

Eine Menge von Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ ist eine Basis des Vektorraums $\mathbb{V}$

- wenn sie linear unabhängig sind und
- wenn sich jeder beliebige Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ als Linearkombination aus ihnen darstellen läßt:

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots \lambda_n \cdot \boldsymbol{v}_n \quad \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{R}\,.$$

Bemerkungen: Aufgaben

- Hat man eine Basis fixiert, so ist die Darstellung jedes Vektors in dieser Basis eindeutig.[42]
- Eine Basis eines Vektorraums ist nicht eindeutig und manchmal ist es sogar sinnvoll, in schiefen Koordinatensystem zu rechnen anstatt mit einer Orthonormalbasis.
- Jede Menge von maximal vielen linear unabhängigen Vektoren in einem Vektorraum ist eine Basis.
- Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums nennt man Dimension [dimension] des Vektorraums.

Die Vektorraumdimension kann auch ∞ sein und das ist sogar der Normalfall für Funktionenräume.

[42] In anderen Worten: Eine Menge von Vektoren, mit deren Hilfe man alle anderen Vektoren darstellen kann, nennt man ein Erzeugendensystem. Ist das Erzeugendensystem minimal, so nennt man die Menge der Vektoren Basis.

Dimension von Vektorräumen Bsp 3

- Der Raum $\mathbb{R}^{17}$ hat die Dimension 17: $\dim\left(\mathbb{R}^{17}\right) = 17$,
- Der Raum der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ hat die Dimension unendlich: $\dim\left(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\right) = \infty$.

Kennt man eine Basis des Vektorraums, dann kennt man quasi alles andere - die Basisvektoren stehen stellvertretend für alle Vektoren des Vektorraums. Damit wird klar: die Analyse eines Vektorraums ist eng verknüpft mit der Analyse linearer Unabhängigkeit von Vektoren. Und das wirft Fragen auf, beispielsweise die folgenden

- Wie wird überprüft, ob eine gegebene Menge von Vektoren linear unabhängig ist?
- Wie wird überprüft, welche Dimension ein gegebener Vektorraum hat?
- Wie wird eine Basis konstruiert bzw. vervollständigt?
- Gibt es eine systematische Art eine Orthonormalbasis aus linear unabhängigen Vektoren zu konstruieren?

Diese Fragen lassen sich am einfachsten beantworten, wenn wir Werkzeuge aus der linearen Algebra nutzen, nämlich

- Bestimmung des Rangs und des Defekts einer Matrix
- Bestimmung des Bilds einer Matrix
- Bestimmung der Determinante einer Matrix

Die Abschnitte 1.18-1.20 führen diese Werkzeuge ein.

Wir schließen diesen kurzen Abschnitt mit einer wichtigen Überlegung ab: in dem vorangegangenen Abschnitt haben wir zwei Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt verknüpft und das ermöglicht die geometrische 1.16
Relation zwischen den Vektoren präzise zu beschreiben. In diesem Abschnitt haben wir eine leise Idee davon bekommen, dass auch Mengen von Funktionen Vektorraumeigenschaften besitzen. Auch in solchen Vektorräumen $\mathbb{V}$ kann es ein Skalarprodukt geben

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K},\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle .$$

Ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt ausgestattet, so hat das viele Vorteile. Man nennt beispielsweise zwei Vektoren, deren Skalarprodukt verschwindet, orthogonal! Diese Orthogonalität ist abstrakt und hat nichts mehr mit einem rechtwinkligen Dreieck zu tun. MA2

Vektorräume Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.17 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Körperaxiome — Aufg. 1

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

" Das Skalarprodukt ist eine Multiplikation von Vektoren."

Vektorraum — Aufg. 2

Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind oder nicht und geben Sie ggf die Dimension und eine Basis an.

(a) $M = \{(a,\ 0,\ b)^\intercal\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

(b) $M = \{(x,\ y,)^\intercal\ :\ 2x - 3y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$

(c) $M = \{\left(a,\ a^2\right)^\intercal\ ,\ a \in \mathbb{R}\}$

Vektorraum — Aufg. 3

Es seien $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{n}$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$.

(a) Welches geometrische Objekt stellt die Lösungsmenge E der folgenden Gleichung(en) dar?

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 :\ \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\,, \boldsymbol{n} \rangle = 0$$

(b) Ist E ein reeller Vektorraum? Falls ja, geben Sie die Dimension und eine Basis an.

Basis — Aufg. 4

Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{a}^\intercal = \left(\sqrt{3}, 1\right)^\intercal$. Bestimmen Sie zwei Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$, die eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ sind, wobei $\boldsymbol{v}$ parallel zu $\boldsymbol{a}$ sein soll, also $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{a}$.

Dimension — Aufg. 5

Welche Dimension haben die folgenden reellen Vektorräume?

(a) $\mathbb{V}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}\}$

(b) $\mathbb{V}_2 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}\right\}$

Anwendung: Krummlinige Koordinaten — Aufg. 6

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ mit } r \in [0, \infty),\ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ sind.

(c) Skizzieren Sie für $r = 1$ und $\varphi = \pi/4$ die Orthonormalbasen $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ und $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

1.18 Matrizen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- was Matrizen sind und wie man mit ihnen rechnet
- dass Matrizen lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen endlicher Dimension darstellen
- wie man das Gaußsche Verfahren einsetzt, um beispielsweise
  - das Bild und den Rang oder
  - den Kern und den Defekt einer Matrix zu bestimmen oder
  - lineare Ab- und Unabhängigkeit von Vektoren zu überprüfen

Sie sollten bereits ...

- die Definitionen eines Vektorraums kennen
- wissen was eine lineare Kombination und wie lineare Ab- und Unabhängigkeit definiert ist

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.18.1 Was ist eine Matrix?

Ein rechteckige Anordnung von mathematischen Objekten (typischerweise Zahlen) heißt Matrix und die Mehrzahl heißt Matrizen[43] [matrix, matrices]. In Europa schreibt man runde Klammern und in den USA eckige Klammern:

Matrix A — Bsp 1

$$\begin{aligned}
\text{Europäische Schreibweise:} \quad A &= \begin{pmatrix} 32 & -1 & \pi \\ 5 & -\sqrt{17} & 78 \end{pmatrix}, \\
\text{Amerikanische Schreibweise:} \quad A &= \begin{bmatrix} 32 & -1 & \pi \\ 5 & -\sqrt{17} & 78 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Matrix im Beispiel ist eine Matrix mit zwei Zeilen [rows] und drei Spalten [columns], also eine 2×3-Matrix.

Bemerkungen:

- Ein Spaltenvektor mit m Komponenten ist auch eine Matrix, nämlich eine $m \times 1$-Matrix.
- Ein Zeilenvektor mit n Komponenten ist auch eine Matrix, nämlich eine $1 \times n$-Matrix.
- Eine quadratische Matrix [square matrix] hat genau so viele Spalten wie Zeilen.

Matrizen werden meist mit großen Buchstaben bezeichnet und ihre Einträge [entry, entries] mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben mit Indizes [index, indices] für Spalte und Zeile:

Einträge der Matrix A — Bsp 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -1 & \pi \\ 5 & -\sqrt{17} & 78 \end{pmatrix} \Rightarrow (A)_{23} = a_{23} = 78\,.$$

1.18.2 Matrixoperationen

Um uns mit Matrizen näher zu befassen, müssen wir lernen, wie man mit ihnen rechnet:

Genauso wie Vektoren, kann man Matrixen gleicher Größe addieren, subrahieren, mit Zahlen multiplizieren und es gibt auch ein neutrales Element der Addition:

[43] Das Wort stammt vom latenischen Wort für Mutter (mater) ab.

Matrizen addieren und mit einem Skalar multiplizieren — Bsp 3

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & -10 \end{pmatrix}, \\
3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 15 \\ 9 & 12 & -18 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Menge aller Matrizen aus m Zeilen und n Spalten reeller Zahlen bildet einen Vektorraum über dem 1.17
Körper der reellen Zahlen: man schreibt $(\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{R})$ oder einfach nur $\mathbb{R}^{m\times n}$. Dieser Vektorraum hat die Dimension 1.4
$\dim(\mathbb{R}^{m\times n}) = m \cdot n$. Für $m = n = 2$ haben wir folgende Standardbasis:

Standardbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ — Bsp 4

$$\mathbb{R}^{2\times 2} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Matrizen kann man transponieren: genauso wie bei Vektoren, wird die Matrix gedreht, beispielsweise

Transponieren $A \mapsto A^\intercal$ — Bsp 5

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 & -5 \\ \sqrt{2} & 100 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\intercal = \begin{pmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ 3 & 100 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Matrix, für die gilt $A = A^\intercal$ nennt man symmetrisch und das kommt nicht von ungefähr: die Einträge spiegeln sich an der Diagonale: $\quad \forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}: \quad a_{ij} = a_{ji}$.

Symmetrische Matrizen $A = A^\intercal$ — Bsp 6

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 3 & -5 \\ 3 & 100 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = A^\intercal.$$

Matrizen kann man miteinander multiplizieren und erhält wieder eine Matrix. Allerdings müssen die Dimensionen der Matrizen stimmen, damit die Multiplikation klappt:[44] eine $m \times n$-Matrix kann man von rechts mit einer $n \times p$-Matrix multiplizieren. Das Produkt ist eine $m \times p$-Matrix.

Matrix-Matrix-Multiplikation — Def. 1

$$\begin{aligned}
\left(A \in \mathbb{R}^{m\times n},\; B \in \mathbb{R}^{n\times p}\right) \quad \mapsto \quad & AB \in \mathbb{R}^{m\times p}, \\
& (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad i = 1, \cdots, m,\; j = 1, \cdots, p.
\end{aligned}$$

Am Beispiel wird klarer, wie die Multiplikation funktioniert:

Matrix-Matrix-Multiplikation $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p} \mapsto AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$ — Bsp 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 & 0 & 1 \\ 16 & 39 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; (AB)_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$$

Die Multiplikation von Matrizen mit Matrizen ist - wenn die Matrizen überhaupt multiplizierbar sind - assoziativ und distributiv, aber im Allgemeinen nicht kommutativ:

$$A(BC) = (AB)C, \quad A(B + C) = AB + AC, \quad AB \neq BA.$$

[44] Der Bildbereich der linken muss mit dem Definitionsbereich der rechten übereinstimmen.

$AB \neq BA$ Bsp 8

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gibt auch ein neutrales Element der Matrix-Matrix-Multiplikation und zwar die sogenannte Einheitsmatrix [identity matrix] $\mathbf{1}$ oder $\boldsymbol{E}$ in der passenden Größe:

Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ Bsp 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Eine quadratische Matrix A kann man auch mit sich selbst multiplizieren. Damit kann man quadratische Matrizen in positive ganze Potenzen setzen[45]:

$$A^4 := AAAA\,.$$

Ein Spezialfall der Matrix-Matrix-Multiplikation ist die Matrix-Vektor-Multiplikation. Eine $m \times n$-Matrix kann von rechts mit einem Spaltenvektor mit n Komponenten multipliziert werden. Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor mit m Komponenten. Dieselbe $m \times n$-Matrix kann von links mit einem Zeilenvektor mit m Komponenten multipliziert werden. Das Ergebnis ist ein Zeilenvektor mit n Komponenten.

Matrix-Vektor- und Vektor-Matrix-Multiplikation Bsp 10

$$\begin{pmatrix} \pi & 3 & -5 \\ 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi\cdot 2 & + & 3\cdot 1 & - & 5\cdot 0 \\ 0\cdot 2 & + & 100\cdot 1 & + & 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2\pi \\ 100 \end{pmatrix},$$

$$(2\,1)\begin{pmatrix} \pi & 3 & -5 \\ 0 & 100 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\pi & + & 1\cdot 0 \\ 2\cdot 3 & + & 100\cdot 1 \\ 2\cdot(-5) & + & 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 106 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix-Vektor-Multiplikation führt auf eine grundlegende Erkenntnis: alle linearen Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen endlicher Dimension werden von Matrizen beschrieben.

Lineare Abbildungen und darstellende Matrix Regel 1

Eine Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ heißt linear, wenn gilt

- $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n : \ \mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})\,.$
- $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K} : \ \mathcal{A}(\lambda\cdot\boldsymbol{x}) = \lambda\cdot\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\,.$

$\mathcal{A}$ läßt sich mit Hilfe einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ darstellen:

$$\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \text{ linear } \Leftrightarrow \exists\, A \in \mathbb{K}^{m\times n} : \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m\,.$$

Bemerkungen:

- Der Definitionsbereich einer linearen Abblidung $\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist $\mathbb{K}^n$!
- Der Bildbereich einer linearen Abblidung $\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{K}^m$!

Die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ bildet beispielsweise einen beliebigen dreidimensionalen Spaltenvektor, also ein Element des Vektorraums $\mathbb{R}^3$, auf einen zweidimensionalen Spaltenvektor, also auf ein Element des Vektorraums $\mathbb{R}^2$, ab.

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}\,.$$

Die Abbildung $\mathcal{A}$ funktioniert so: einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{x}$ wird das Produkt $A\boldsymbol{x}$ zugeordnet:

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2) \\ e^5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & \sqrt{2} & \pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2) \\ e^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+5\cdot e^5 \\ \sqrt{2}\cdot\cos(2)+e^5\cdot\pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,.$$

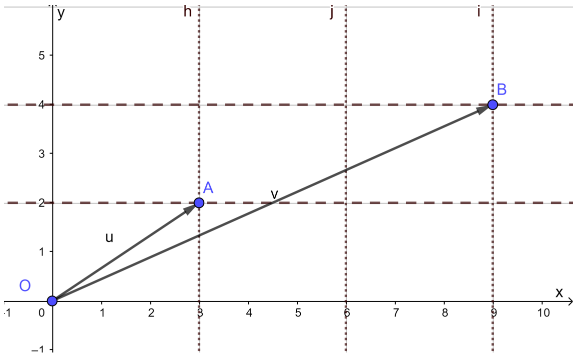
[45] Später befassen wir uns mit A^{-1}, der inversen Matrix von A. Sinnvollerweise wird damit gelten: $A^{-1}A = \mathbf{1} = AA^{-1}$.

Alle geometrischen Figuren in der Ebene sind Punktmengen, wobei jeder Punkt als Spaltenvektor aufgefasst werden kann. Und da stellt sich die grundlegende Frage: Was sind denn eigentlich lineare Abbildungen - kann man sie geometrisch verstehen? Die Antwort ist " ja, kann man" : Eine lineare Abbildung wirkt auf jeden Punkt einer geometrischen Figur und ist entweder

- eine Skalierung der Figur in beliebiege Raumrichtung:[46]

Skalierung

Bsp 11

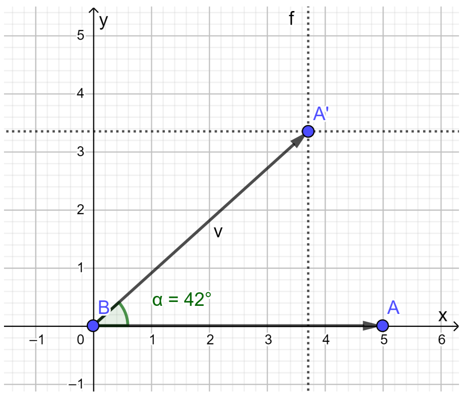


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 2y \end{pmatrix},$$

- und/oder eine Drehung der Figur um einen beliebigen Winkel und eine beliebige Achse:

Drehung

Bsp 12



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1.18.3 Bild und Rang

Die Menge aller Vektoren, die aus einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ herauskommen, nennt man das Bild [image oder range] der Matrix. Die zugehörige mathematischen Definitionen und Symbole lauten:

Bild und Rang einer Matrix

Def. 2

Das Bild einer $m \times n$-Matrix ist der Bildbereich der zugehörigen linearen Abbildung $\mathcal{A}$, also

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathrm{im}A \subset \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}\,.$$

Das Bild einer $m \times n$-Matrix ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{im}\,(A) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m\,.$$

Die Dimension des Bilds einer Matrix ist der Rang der Matrix:

$$\mathrm{rk}(A) := \dim\left(\mathrm{im}(A)\right)\,.$$

Das Bild einer $m \times n$-Matrix ist also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Aber wie sieht diese Teilmenge aus?

Um diese Frage zu beantworten, gehen wir zurück zu der Frage: was passiert eigentlich bei einer Matrix-Vektor-Multiplikation $A\boldsymbol{x}$? Das scheint der Schlüssel zum Verständnis von im(A) zu sein, denn im(A) besteht ja nur aus Vektoren, die aus der Multiplikation $A\boldsymbol{x}$ hervorgehen!

[46] Vorsicht: Verschiebungen sind keine linearen Abbidungen!

Betrachten wir zunächst eine quadratische Matrix, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann gilt für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \in \operatorname{im}(A)\,. \end{aligned}$$

Beobachtungen:

- Jeder Vektor im Bild von A ist eine lineare Kombination der Spaltenvektoren von A!
- Sind die Spaltenvektoren von A linear unabhängig, dann bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und da $\boldsymbol{x}$ beliebig ist, kann von A **jeder** Vektor in $\mathbb{R}^n$ produziert werden: 1.17

$$\text{Spaltenvektoren linear unabhängig} \;\Rightarrow\; \operatorname{im}(A) = \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rk}(A) = n\,.$$

- Sind nur $k < n$ Spaltenvektoren von A linear unabhängig, dann spannen nur k Vektoren das Bild $\operatorname{im}(A) \subset \mathbb{R}^n$ auf und es gilt

$$k < n \text{ Spaltenvektoren linear unabhängig} \;\Rightarrow\; \operatorname{im}(A) \subsetneq \mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rk}(A) = k\,.$$

Betrachten wir beispielsweise die 2×2-Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen auf einen Blick, dass die Spaltenvektoren der Matrix B linear abhängig sind und $k = 1$ gilt. Das Bild von B ist also ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$ mit Dimension $k = 1$. Eine präzise Charakterisierung von $\operatorname{im}(B)$ erhalten wir, wenn wir einen beliebigen Vektor im Bild von B anschauen: 1.17

$$B\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3 + 6y \end{pmatrix} = \underbrace{(x + 2y)}_{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Das Bild von B umfasst also nur skalare Vielfache des Vektors $(1\ 3)^\intercal$.

Bild und Rang einer Matrix Bsp 13

Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\operatorname{im}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \right\} \;\Rightarrow\; \operatorname{rk}(B) = 1\,.$$

Die Matrix im vorangegangen Beispiels war so klein, dass die Analyse des Bilds ohne große Systematik machbar war. Um das Bild und und insbesondere den Rang einer rechteckigen Matrix beliebiger Größe zu bestimmen, braucht man ein klares Vorgehen. Es wird in der nun folgenden Regel beschrieben:

Rang und Bild einer Matrix bestimmen Regel 2

Das Bild und den Rang einer Matrix bestimmt man, indem man die transponierte Matrix $A^\intercal$ betrachtet,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{k2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{mk} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{kn} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

und auf Trapezform bringt:

$$\tilde{A}^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} & \cdots & a_{m1} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{k2} & \cdots & \tilde{a}_{m2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{kk} & \cdots & \tilde{a}_{mk} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Die nicht-trivialen Zeilenvektoren von $\tilde{A}^{\intercal}$ sind eine Basis von $\mathrm{im}(A)$.

$$\tilde{A}^{\intercal} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k1} & \cdots & a_{m1} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{k2} & \cdots & \tilde{a}_{m2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{kk} & \cdots & \tilde{a}_{mk} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \ \mathrm{im}(A) = \mathrm{LH}\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{a}_{22} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{k2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{a}_{kk} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{mk} \end{pmatrix} \right\}$$

- Die Anzahl der Basisvektoren von $\mathrm{im}(A)$ ist ihr Rang: $\mathrm{rk}(A) = k$.
- Ist man nur am Rang der Matrix interessiert und nicht an einer Basis ihres Bildes, so bringt man die Matrix A auf Trapezform und liest die Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren (oder die Anzahl nichttrivialen Zeilen) ab, das ist ihr Rang

Der Schlüssel zu Bild und Rang ist also die Trapezform! Eine Matrix auf Trapezform zu bringen ist nicht schwer, aber es erfordert Konzentration. Durch elementare Zeilenumformungen werden spaltenweise Nullen unterhalb der Diagonalen erzeugt. Man beginnt bei der zweiten Zeile und spätestens wenn man mit der letzen Zeile fertig ist, dann hat die Matrix Trapezform.

Trapezform Bsp 14

Empfehlung zur Fehlervermeidung:

- Multiplizieren Sie die Zeilen immer nur mit ganzen Zahlen (keine Brüche!)
- Addieren Sie die Zeilen nur (keine Subtraktionen!)

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\begin{cases} (-1)\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \\ (-3)\cdot \mathrm{I} + \mathrm{II} \end{cases}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \overset{(-3)\cdot \mathrm{II} + \mathrm{III}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

- Das beschriebene Verfahren zur Bestimmung des Rangs einer Matrix nennt man das Gaußsche Eliminationsverfahren oder kurz Gaußsches Verfahren.
- Das Gaußsche Verfahren kann eingesetzt werden, um zu prüfen, ob und wieviele lineare Abhängigkeiten in einer gegebenen Menge von Vektoren stecken. Hierzu stellt man die Matrix aus den gegebenen Spaltenvektoren auf und bringt die Matrix auf Trapezform. Warum?
- Möchte man aus k linear unabhängigen Vektoren eine Orthonormalbasis konstruieren, dann benutzt man das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren. MA2-04

1.18.4 Kern und Defekt

Die Menge aller Vektoren, die von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zum Nullvektor gemacht werden, heißt Nullraum [null space] oder Kern [kernel] von A.

Kern und Defekt — Def. 3

Der Kern einer $m \times n$-Matrix sind die Vektoren, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden, also

$$\ker(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \subset \mathbb{R}^n \,.$$

Die Dimension des Kerns einer Matrix ist der Defekt [nullity] der Matrix:

$$\operatorname{def}(A) := \dim(\ker(A)) \,.$$

Der Defekt der Matrix B aus dem vorigen Beispiel ist eins. Zur Bestimmung des Kerns werden die Vektoren $\boldsymbol{x}$ gesucht, die von B auf den Nullvektor abgebildet werden. Die Aufgabe lautet also

$$\text{bestimme alle } \boldsymbol{x} \text{ so, dass} \quad B\boldsymbol{x} \overset{!}{=} \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Und damit folgt

Kern und Defekt einer Matrix — Bsp 15

Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\ker(B) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda \in \mathbb{R} \right\} \;\Rightarrow\; \operatorname{def}(B) = 1 \,.$$

Und für Matrizen beliebiger Größe gilt:

Defekt einer Matrix bestimmen — Regel 3

Den Defekt einer Matrix bestimmt man, indem man die Matrix auf Trapezform bringt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2k} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{kk} & \cdots & \tilde{a}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Anzahl der linear abhängigen Spaltenvektoren der Matrix $\tilde{A}$ ist der Defekt von A:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2k} & \cdots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{kk} & \cdots & \tilde{a}_{kn} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) \quad \Rightarrow \operatorname{def}(A) = n - k$$

Es bleibt die Frage offen, wie der Kern der Matrix $\ker(A)$ bestimmt wird. Hierzu ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen und das ist Thema des nächsten Abschnitts.

Eine wichtige Beobachtung zum Abschluss:

Rangsatz — Regel 4

Der Rang und der Defekt einer Matrix addieren sich immer zur Anzahl der Spalten der Matrix:

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \quad \operatorname{rk}(A) + \operatorname{def}(A) = n$$

Matrizen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.18 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Rechenregeln — Aufg. 1

Berechnen Sie $(A^\intercal C - 2 \cdot B)(-3 \cdot C^\intercal)$ für die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rang und Bild — Aufg. 2

Es sei $A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\intercal,\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Wie ist der Rang der Matrix A? Wie sieht das Bild der Matrix aus?

Basis — Aufg. 3

(a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ bilden die vier Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

$$\boldsymbol{x}_1 = (3,1,4,0)^\intercal,\ \boldsymbol{x}_2 = (1,1,0,6)^\intercal,\ \boldsymbol{x}_3 = (-4,0,5,a)^\intercal,\ \boldsymbol{x}_4 = (0,0,1,2)^\intercal.$$

(b) Überpfrüfen Sie, ob die Polynome $1, 1+x, 1-x, x^2$ eine Basis des $\mathcal{P}_2$ bilden.

Lineare Abbildungen — Aufg. 4

Gegeben sind die linearen Abbildungen

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen A und B der linearen Abbildungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(b) Gegeben ist eine Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Bestimmen Sie die von C induzierte lineare Abbildung $\mathcal{C}$.

(c) Wie lautet die darstellende Matrix der linearen Abbildung $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$?

Lineare Abbildungen — Aufg. 5

Gegeben sei der reelle Vektorraum $\mathcal{P}_3 := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynome vom Grad } 3\}$ und die Abbildung $f : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \begin{pmatrix} p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist und berechnen Sie f für die Monome $p_i : x \mapsto x^i,\ i = 0, 1, 2, 3$.

(b) Berechnen Sie $f(p)$ für ein allgemeines Polynom $p \in \mathcal{P}_4$.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \mapsto f(a_3 \cdot p_3 + a_2 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_1 + a_0 \cdot p_0)$$

linear ist und berechnen Sie die darstellende Matrix von g.

1.19 Lineare Gleichungssysteme

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen
Sie lernen ... • was ein lineares Gleichungssystem ist • die Lösbarkeitsbedingungen für lineare Gleichungssysteme kennen • wie man lineare Gleichungssysteme systematisch lößt und wie die Lösungen zu interpretieren sind
Sie sollten bereits ... • mit Matrizen sicher umgehen können und das Gaußsche Verfahren beherrschen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.19.1 Was ist ein lineares Gleichungssystem?

In der lineare Algebra lernen wir insbesondere, wie lineare Gleichungssysteme der Form

$$(*)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrr} 23x & + & 45y & - & 3z & + & 4w & = & & 7 \\ & & 2y & - & z & + & 6w & = & - & 3 \\ -15x & + & 5y & & & - & 3w & = & & 5 \end{array}\right. ,$$

systematisch zu analysieren und zu lösen sind. Mit dem Begriff "lineares Gleichungssystem" ist gemeint, dass mehrere Gleichungen für mehrere Unbekannte gleichzeitig gelöst werden sollen. Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ in $(*)$ ist also eine Teilmenge des $\mathbb{R}^4$. Die Lösungsmenge kann auch die leere Menge sein, nämlich dann, wenn es keine Lösungen gibt. Die Gleichungen sollen außerdem linear sein. Das heißt, dass nur konstante Vielfache der Unbekannten addiert werden. Ausdrücke wie $\sin(x)$ oder y^2 oder xz sind in linearen Gleichungen verboten, wenn x, y und z die Unbekannten sind.

Die Darstellung $(*)$ nennt man auch Gleichungsform des linearen Gleichungssystems. Die Gleichungsform läßt sich offenbar auch mit Vektoren schreiben, wobei die Koeffizienten vor einer Unbekannte immer zu einem Vektor zusammengefasst werden:

$$(*) \;\Leftrightarrow\; x\begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 45 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

In dieser Schreibweise wird deutlich, dass die Lösung von $(*)$ eine bestimmte lineare Kombination der Vektoren links ist und zwar eine solche, die den Vektor auf der rechten Seite ergibt.

$(*)$ läßt aber noch eine andere Schreibweise zu. Man gelangt zur sogenannte Matrix-Schreibweise durch die Beobachtung, dass das Gleichungssystem als Matrix-Vektor Multiplikation geschrieben werden können:

Lineares Gleichungssystem in Matrixform Bsp 1

$$(*) \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\begin{pmatrix} 23 & 45 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ -15 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme resultieren aus Untersuchungen elektrischer oder mechanischer Netzwerke. Große lineare Gleichungssysteme treten bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen oder bei Linearisierung komplexer Systeme auf. MA2

Bevor ein Mathematiker sich daran macht ein mathematisches Problem wirklich zu lösen, klärt er

1. ob es überhaupt Lösungen gibt (Frage nach der Existenz einer Lösung) und
2. ob eine Lösung, falls es eine gibt, eindeutig ist (Frage nach der Eindeutigkeit einer Lösung).

Diese beiden Themen werden wir im nächsten Abschnitt adressieren.

1.19.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Bevor wir konkrete Zahlenbeispiele anschauen, lohnt es sich die Eigenschaften über Bild und Kern einer Matrix zusammenzutragen. Es sei also A eine $(n \times m)$-Matrix. Die Frage nach der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems 1.18

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

mit Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und Inhomogenität $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ läßt sich nun einfach beantworten: wenn der Vektor auf der rechten Seite von der Matrix produziert wird, dann ist die Lösungsmenge nicht leer, anderfalls ist die Lösungsmenge leer.

Bedingung für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems — Regel 1

$$\boldsymbol{b} \in \mathrm{im}(A)\,.$$

Nach der Existenz interessiert uns die Eindeutigkeit der Lösung. Angenommen, man hätte zwei Lösungen gefunden:

$$\exists\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 : A\boldsymbol{x}_1 = A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}\,.$$

Indem man die Gleichungen voneinander abzieht, findet man:

$$A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}\,. \quad (**)$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die Differenz der Lösungen - allerdings steht auf der rechten Seite der Nullvektor. Solch ein Gleichungssystem nennt man homogen (Gegenteil von inhomogen, eben ohne Inhomogenität).

$(**)$ läßt sich so interpretieren: eine Lösung des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist genau dann eindeutig, wenn das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung $\mathbf{0}$ besitzt, wenn also gilt

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\,.$$

Denn dann gilt offenbar $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ und die zwei Lösungen müssen identisch sein.

- Wenn es nichttriviale Lösungen der homogenen Gleichung gibt, dann gibt es also Vektoren, die von der Matrix zu Null abgebildet werden und das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar.
- Wenn es mehr Unbekannte als Gleichungen gibt, ist eine Lösung - wenn es denn überhaupt eine gibt - keinesfalls eindeutig bestimmt.

Das Gleichungssystem hat also, wenn überhaupt, genau eine Lösung, wenn

Bedingung für die Eindeutigkeit einer Lösung — Regel 2

$$\ker(A) = \{\mathbf{0}\}\,.$$

1.19.3 Lösungsverfahren

Betrachten wir ein Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

mit Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, unbekannten Koeffizientenvektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und rechter Seite $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Das Gleichungssystem nennt man

- unterbestimmt falls es mehr Unbekannte als Gleichungen gibt, also wenn $n > m$,
- quadratisch, falls es genau so viele Unbekannte wie Gleichungen gibt, also wenn $n = m$,
- überbestimmt, falls es mehr Gleichungen als Unbekannte gibt, also wenn $m > n$.

In der Praxis verwendet man nicht viel Zeit auf theoretische Betrachtungen, sondern versucht das Gleichungssystem zu lösen - beispielsweise mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren [Gaussian elimination]. 1.18

Anders als wenn es allein um Informationen über die Matrix geht, muss die rechte Seite auch den Elementartransformation unterzogen werden. Aus diesem Grund ist es sinnvoll die erweiterte Matrix $A_{\boldsymbol{b}}$ zu betrachten:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \;\Rightarrow\; A_{\boldsymbol{b}} := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Zum Lösen geht man in zwei Schritten vor:

1. Zuerst wird $A_{\boldsymbol{b}}$ auf Trapezform [row echelon from] gebracht.
2. Danach werden die Gleichungen von unten nach oben gelöst.

Ob das Lösen der Gleichungen reibungslos funktioniert, hängt davon ab, welchen Charakter das Gleichungssystem hat - ob es unterbestimmt, überbestimmt oder quadratisch ist und welchen Rang die Matrix und die erweiterte Matrix hat. 1.18

Grundsätzliche Überlegungen Regel 3

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann gilt:

- $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) \Rightarrow$ Gleichungssystem nicht lösbar,
- $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) < n \Rightarrow$ Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen,
- $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = n \Rightarrow$ Gleichungssystem eindeutig lösbar,

Betrachten wir ein paar Beispiele.

Beispiel 1: $\text{rk}(A) \neq \text{rk}(A_{\boldsymbol{b}})$ Bsp 2

Es ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $A_{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

Durch äquivalende Zeilenumformungen erhalten wir die Trapezform von $A_{\boldsymbol{b}}$ zu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Das heißt das Gleichungssystem ist nicht lösbar, denn

$$\text{rk}(A) = 1 \neq \text{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = 2\,.$$

Die Lösungsmenge ist die leere Menge $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel 2: $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) < n$ Bsp 3

Es ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ bzw. $A_{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ mit

$$A_{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Durch äquivalende Zeilenumformungen erhalten wir die Trapezform von $A_{\boldsymbol{b}}$ zu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \end{array}\right).$$

Das heißt das Gleichungssystem ist lösbar und die Lösung ist nicht eindeutig, denn

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = 3 \;\wedge\; \text{def}(A) = 1\,.$$

Die Lösung berechnen wir, indem die Gleichungen von unten nach oben aufgelöst werden.

$$\begin{cases} x_4 &= \alpha \in \mathbb{R}\,, \\ x_3 &= -4 + 2x_4 \Rightarrow x_3 = -4 + 2\alpha\,, \\ x_2 &= 1 - x_4 \Rightarrow x_2 = 1 - \alpha\,, \\ x_1 &= -x_4 \Rightarrow x_1 = \alpha\,, \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} & -\alpha \\ -4 & +2\alpha \\ 1 & -\alpha \\ & \alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}_s} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}_h}.$$

- $\boldsymbol{x}_s$ ist die spezielle Lösung mit $A\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}$.
- $\boldsymbol{x}_h$ ist die homogene Lösung mit $A\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{0}\,$.
- $\boldsymbol{x}_h$ ist der Kern der Matrix.

Erkenntnis:

- Liegt ein lösbares, aber unterbestimmtes Gleichungssystem $m < n$ vor, dann ist das Gleichungssysteme nicht eindeutig lösbar.
- Die Lösungsstruktur lautet $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{x}_h$.

Beispiel 3: $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) < n$ Bsp 4

Es ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $A_{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ mit

$$A_{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & 4 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das heißt das Gleichungssystem ist lösbar und die Lösung ist nicht eindeutig, denn

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = 3 \ \wedge\ \mathrm{def}(A) = 1\,.$$

Die Lösung berechnen wir, indem die Gleichungen von unten nach oben aufgelöst werden.

$$\begin{cases} x_4 &= 2\,, \\ x_3 &= \alpha \in \mathbb{R}\,, \\ x_2 &= 1 - 2x_3 \Rightarrow x_2 = 1 - 2\alpha\,, \\ x_1 &= 1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \Rightarrow x_1 = -3 + 5\alpha\,, \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 & +5\alpha \\ 1 & -2\alpha \\ & \alpha \\ 2 & \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}_s} + \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}_h}.$$

- $\boldsymbol{x}_s$ ist die spezielle Lösung mit $A\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}$.
- $\boldsymbol{x}_h$ ist die homogene Lösung mit $A\boldsymbol{x}_h = \boldsymbol{0}\,$.

Erkenntnis:

- Ist der Kern der Matrix nicht-trivial, dann ist ein lösbares Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.
- Die Lösungsstruktur lautet $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s + \boldsymbol{x}_h$.

Beispiel 4: $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = n$ Bsp 5

Es ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $A_{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ mit:

$$A_{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 10 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 16 \end{array}\right).$$

Das heißt das Gleichungssystem ist lösbar und die Lösung ist eindeutig, denn

$$\mathrm{def}(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = n = 4\,.$$

Die Lösung berechnen wir, indem die Gleichungen von unten nach oben aufgelöst werden:

$$\begin{cases} 8x_4 & = 16 \Rightarrow x_4 = 2\,, \\ -x_3 & = 3 - x_4 = 3 - 2 \Rightarrow x_3 = -1\,, \\ -2x_2 & = -12 + 2x_3 + 4x_4 = -12 - 2 + 8 \Rightarrow x_2 = 3\,, \\ 2x_1 & = 8 - 4x_2 - 4x_4 = 8 - 12 - 8 \Rightarrow x_1 = -6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Erkenntnis:

- Liegt ein lösbares Gleichungssystem mit $\mathrm{def}(A) = 0$ vor, so läßt sich $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jede rechte Seite $\boldsymbol{b}$ eindeutig lösen.
- Die Lösunbsstruktur ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s$.

Beispiel 5: $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) > m$ Bsp 6

Es ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ bzw. $A_{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit:

$$A_{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \end{array}\right).$$

Das heißt das Gleichungssystem ist für die gegebene rechte Seite nicht lösbar, denn

$$\mathrm{rk}(A) = 3 \neq \mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = 4\,.$$

Erkenntnis:

- Liegt ein überbestimmtes Gleichungssystem mit $m > n$ vor, dann hängt die Lösbarkeit immer von der rechten Seite $\boldsymbol{b}$ ab - unter Umständen ist die Lösungsmenge leer.

Bemerkungen:

- Überbestimmte Gleichungssysteme werden mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate behandelt: gesucht wird nicht *die* Lösung des Gleichungssystems, sonderen ein Vektor, der in gewissem Sinne alle Gleichungen gleichzeitig best möglich erfüllt (Denken Sie an eine lineare Regression...).
- Die Frage, die am Ende des vorigen Abschnitts offen geblieben war, können wir jetzt beantworten: der Kern ist die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
- Das Gaußsche Eliminationsverfahren ist ein direktes Lösungsverfahren und das heißt, dass die Lösung nach einer fixierten Anzahl von Berechnungsschritten berechnet ist.
- Sehr große Gleichungssysteme (zum Beispiel 100.000×100.000) werden iterativ gelöst. "Iterativ" heißt ein Verfahren, wenn man einen bestimmten Rechenschritt wiederholt und sich Schritt für Schritt dem richtigen Ergebnis annähert ohne es jemals exakt zu erreichen.
- Das Jacobi-Verfahren [Jacobi method] ist das einfachste Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen. Die Aufgabe der Numerik ist es klare Voraussetzungen an die Matrix zu formulieren, die die Konvergenz des Verfahrens sichern. Das Jacobi-Verfahren funktioniert theoretisch für diagonaldominante, quadratische Matrizen.

Lineare Gleichungssysteme Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.19 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Rechenregeln — Aufg. 1

Wie muss $\boldsymbol{b}$ gewählt werden, dass gilt $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = (-1, 2, -2, 3, 5)^\intercal .$$

Lösbarkeitsanalyse — Aufg. 2

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ \beta \end{pmatrix}$$

mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie den Rang der erweiterten Matrix $(A|b)$ in Abhängigkeit von α und β.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit der beiden Parameter, wann das lineare Gleichugnssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist und wann es genau eine Lösung gibt.

Gleichungssysteme — Aufg. 3

Analysieren Sie die Lösbarkeit der folgenden Gleichungssysteme und bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_5 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + px_3 &= 3 \\ x_1 + px_2 + 3x_3 &= 2 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_3 + x_4 &= 1 \\ 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} (2+i) \cdot z_1 + i \cdot z_3 &= -4 + 3i \\ (1+3i) \cdot z_1 + (-1-i) \cdot z_2 - z_3 &= -6 - 2i \\ (4+2i) \cdot z_2 + (3+3i) \cdot z_3 &= -2 + 4i \end{cases}$$

Gleichungssysteme — Aufg. 4

Gesucht ist eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass

$$AX + XA^\intercal = C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $x_{ij},\ i, j = 1, 2$ der Matrix X und lösen Sie es.

1.20 Determinante und Inverse

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- was die Inverse einer quadratischen Matrix ist und wie man sie berechnet
- wie die Determinante einer quadratischen Matrix definiert ist und was sie geometrisch bedeutet
- wie die Determinante mit der Inversen zusammenhängt (Lösbarkeitsbedingungen)
- wozu die Cramersche Regel eingesetzt werden kann

Sie sollten bereits ...

- das asymptotische Verhalten von Standardfunktionen kennen

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.20.1 Was ist die Determinante?

Die Determinante [determinant] ordnet jeder quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Zahl zu

Determinante — Def. 1

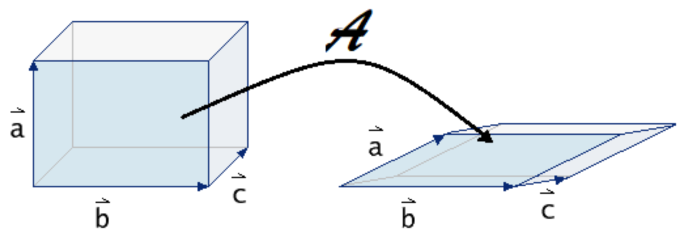
$$\det: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante sagt etwas über die "Größe" der Matrix A aus und sie liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz der inversen Matrix A^{-1}. Diese Eigenschaft vereinfacht die Frage nach der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit quadratischer Koeffizientenmatrix A. Aufgaben

Auch wenn die Schreibweise mit den Strichen an einen Betrag erinnert, ist die Determinante etwas Anderes. Sie gibt Aufschluss über zwei geometrische Eigenschaften, die eine lineare Abbildung auf eine Figur hat:

Determinante — Def. 2

- Der Betrag der Determinante, also ihr Wert ohne Vorzeichen, sagt aus, um welchen Faktor die lineare Abbildung $\mathcal{A}$ die Fläche ($n = 2$), bzw. das Volumen ($n = 3$) verändert.
- Das Vorzeichen der Determinante sagt aus, ob die lineare Abbildung $\mathcal{A}$ die Orientierung verändert. Für $n = 2$ entspricht die Veränderung der Orientierung eine Spiegelung, für $n = 3$ ist die "rechte-Hand-Regel"gemeint.



Für einfache geometrische Transformation $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ läßt sich $\det(A)$ ohne Rechnung angeben:

Determinanten für einfache geometrische Transformationen — Bsp 1

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} &= 0\,, && \text{Nullmatrix}\,,\\
\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1\,, && \text{Identische Abbildung}\,,\\
\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} &= 4\,, && \text{Skalierung in zwei Richtungen}\,,\\
\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} &= 2\,, && \text{Skalierung in eine Richtung}\,,\\
\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} &= 1\,, && \text{Drehung}\,,\\
\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} &= -1\,, && \text{Spigelung, i.e. Vertauschung zweier Spalten}\,,\\
\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1\,, && \text{Scherung in eine Achsenrichtung}\,.
\end{aligned}
$$

Die Determinante zweier Matrizen A und B, die man hintereinander anwendet ist

Determinante vom Produkt — Regel 1

$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)\,.$

Hieraus folgen Rechenregeln, die für die Determinante bei Spalten- oder Zeilenumformungen gelten müssen:

Rechenregeln — Bsp 2

1. Multiplikation einer Spalte (Zeile) einer Matrix mit einer Zahl:

$$
\begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.
$$

2. Vertauschen zweier Spalten (Zeilen) einer Matrix:

$$
\begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 0 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix}.
$$

3. Zwei identische Spalten (Zeilen):

$$
\alpha = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{2.}{=} - \begin{vmatrix} 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\alpha \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0\,.
$$

4. Eine Spalte (Zeile) einer Matrix als Summer zweier Vektoren:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+0 & 2 \\ 1+2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.
$$

Bemerkungen:

- Es gilt $\det(A) = \det(A^\intercal)$ und deshalb gelten die Regeln genauso für die entsprechenden Zeilenumformungen.
- Besitzt eine Abbildung genau diese Eigenschaften dann nennt man sie "antisymmetrischen Multilinearform". Die Determinante ist also eine antisymmetrische Multilinearform.

Mit den Rechenregeln kann man nun die Determinante jeder Matrix berechnen. Wir beginnen mit der

Determinante einer 2×2-Matrix:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &\overset{4.}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2+0 \\ 0 & 0+4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2+0 \\ 3 & 0+4 \end{vmatrix} \\
&\overset{1.}{=} 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0\ (3.)} + 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} + 2 \cdot 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{=-1\ (1.)} + 3 \cdot 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0\ (3.)} \\
&= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2\,.
\end{aligned}
$$

Diese Umformungen sind immer möglich und deshalb gilt allgemein für eine 2×2-Determinante:

Determinante einer 2×2 Matrix — Def. 3

$$
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c\,.
$$

Um die Determinante einer 3×3-Matrix zu berechnen, zerlegen wir sie in drei 2×2-” Unterdeterminanten:

Entwicklung nach der ersten Spalte — Bsp 3

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}}_{= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}} + 4 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}}_{= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}} + 7 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 1 \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\
&= (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 8 \cdot 3) + 7 \cdot (3 \cdot 6 - 5 \cdot 3) \\
&= (45 - 48) - 4 \cdot (18 - 24) + 7 \cdot (18 - 15) = -3 + 24 - 21 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Diese Vorgehensweise heißt ” Entwicklung nach der ersten Spalte”. Entsprechend kann man nach jeder anderen Spalten entwickeln, man muss beim Entwickeln nach anderen Spalten unter Umständen Zeilen vertauschen und das führt zu Vorzeichenwechseln. Merken Sie sich die Vorzeichen einfach im Schachbrettmuster:

Vorzeichen im Schachbrettmuster — Regel 2

$$
\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}\,.
$$

Mit entsprechenden Umformungen kann man Determinanten beliebiger Größe berechnen. Für eine 3×3-Determinante findet man die leicht zu merkende Regel von Sarrus.

$$
\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2\,.
$$

Vorsicht, diese Regel gilt nicht für 4×4-oder noch größere Determinanten!

Wenn man eine $n \times n$-Determinante naiv durch Entwickeln aufdröselt, muss man die Summe von $n!$ Produkten mit je n Faktoren berechnen. Der Rechenaufwand und die Rundungsfehler explodieren mit größeren n, selbst wenn man geschickt rechnet. Man schreibt deshalb die Determinanten größerer Matrizen allenfalls als Zwischenschritt hin, um Formeln zu vereinfachen, vermeidet aber strikt, solche Determinanten tatsächlich auszurechnen.

Mit der Determinante haben wir alle Hilfsmittel zur Hand, um ein letztes Produkten von Vektoren einzuführen: das sogenannte Spatprodukt [triple product] ist eine Sonderausstattung des $\mathbb{R}^3$ und bildet drei Vektoren auf eine Zahl ab. Es sei $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ und $\boldsymbol{x}_3$, dann lautet das Spatprodukt:

Spatprodukt — Def. 4

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \mapsto |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3|\,,$$

oder, beispielhaft, mit gegebenen Vektoren:

Spatprodukt — Bsp 4

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix} = -3\cdot(2\cdot 1 + 3\cdot 2) - 2\cdot(-2\cdot 1 - 2\cdot 4) = -4\,.$$

Das Spatprodukt liefert das Volumen des Spats, der von den drei Vektoren aufgespannt wird, mit Vorzeichen für die Orientierung.

1.20.2 Inverse Matrix

Betrachten wir ein lineares Gleichungsystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit n Gleichungen und n (also genau so vielen!) Unbekannten. Dann ist die Koeffizientenmatrix A quadratisch und man kann ihre Determinante $\det(A)$ bilden. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems kann mit Hilfe der Determinante analysiert werden:

Lösbarkeit von Gleichungssystemen mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — Regel 3

Einer der beiden Fälle tritt ein:

- Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist null. Dann besitzt das Gleichungssystem nicht für alle rechte Seiten eine Lösung. Wenn das Gleichungssystem für eine bestimmte rechte Seite lösbar ist, dann ist die Lösung nicht eindeutig wie im Beispiel 3 des vorigen Kapitels.

$$\begin{aligned}\det(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{mindestens eine Dimension fehlt im Ergebnis}\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{rk}(A) < n\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{def}(A) \geq 1\end{aligned}$$

- Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist nicht null. Dann gibt es für das entsprechende Gleichungssystem für jede rechte Seite eine eindeutige Lösung wie im Beispiel 4 des vorigen Kapitels.

$$\begin{aligned}\det(A) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{Gleichungssystem eindeutig lösbar}\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{rk}(A) = n\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{def}(A) = 0\,.\end{aligned}$$

Im Fall $\det(A) \neq 0$ ist die Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ also bijektiv: man kann von einem $\boldsymbol{x}$ immer auf $\boldsymbol{b}$ und zurück schließen! Die lineare Abbildung muss also umkehrbar sein un die Umkehrabbildung $\mathcal{A}^{-1}$ muss wieder 1.5
linear sein. Die Matrix, die $\mathcal{A}^{-1}$ zugeordnet ist, ist die zu A inverse Matrix A^{-1}.

Existenz der inversen Matrix — Regel 4

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(A) \neq 0 \Rightarrow\ \exists!\ A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \mapsto \boldsymbol{x}\,.$$

Bemerkungen:

- Nur quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind invertierbar und das nur, wenn $\det(A) \neq 0$.
- Existiert die inverse Matrix, dann kann man das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für beliebige rechte Seiten $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösen und es gilt $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.
- Die Schreibweise A^{-1} ist wie der Kehrwert und wie die Potenz -1 bei Zahlen gemeint: Analog zu $3^{-1}\cdot 3 = 3\cdot 3^{-1} = 1$, gilt
$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{1}\,. \qquad (*)$$
Bei Zahlen kann man von der Null keinen Kehrwert bilden und entsprechend kann man von nicht quadratischen Matrizen und von Matrizen mit Determinante null keine inverse Matrix bilden.

Die Berechnung der inversen Matrix gelingt wieder durch die Anwendung des Gaußschen Verfahrens. Be- 1.18

trachten wir eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann erhält man durch die Lösung des Gleichungssystems

$$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i\,, \qquad (**)$$

gerade die i-te Spalte der inversen Matrix A^{-1} - denken Sie an $(*)$. Das heißt aber, dass man die Gleichungen $(**)$ für $i = 1,\cdots,n$ simulatan gelöst hat, wenn man die Matrix A in der erweiterten Matrix $(A\,|\,\mathbf{1})$ mittels äquivalenter Zeilenumformungen (ÄZU) in die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ transformiert hat. Die rechte Seite des erweiterten Systems ist dann gerade die inverse Matrix A^{-1}:

$$(A\,|\,\mathbf{1}) \overset{\text{ÄZU}}{\Rightarrow} (\mathbf{1}\,|\,B) \;\Rightarrow B = A^{-1}\,.$$

Anders als beim Lösen eines Gleichungssystems, hören wir nicht bei der Dreiecksgestalt der Matrix A auf, sondern fahren mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren fort und eliminieren auch die Elemente oberhalb der Diagonale. Das entspricht dem Schritt des Rückwärts-Lösens im Gaußschen Verfahren. Zuletzt werden die Diagonalelemente auf eins normiert.

Berechnung der inversen Matrix $(A\,|\,\mathbf{1}) \to \big(\mathbf{1}\,|\,A^{-1}\big)$ Bsp 5

Betrachten wir beispielsweise die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = 6 \neq 0\,.$$

Die Determinante von A verschwindet nicht und wir können die Inverse berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 9 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

1.20.3 Cramersche Regel

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit genauso vielen Gleichungen wie Unbekannten beispielsweise $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 82 & 45 & 9 & 1 \\ 27 & 16 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

oder in Vektoren geschrieben:

$$x_1 \begin{pmatrix} 82 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 45 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Ein mathematisches Experiment: In der Determinante der Koeffizientenmatrix wird die erste Spalte durch die Inhomogenität ersetzt. Was passiert?

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 45 & 9 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} &\overset{(*)}{=} \det \left(x_1 \begin{pmatrix} 82 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 45 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 45 & 9 \\ 16 & 3 \\ 5 & 1 \end{matrix} \right) \\ &= x_1 \cdot \det \begin{pmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \det(A)\,. \end{aligned}$$

Wenn also die Koeffizientendeterminante nicht null ist $\det(A) \neq 0$, hat man damit x_1 eindeutig bestimmt! Wir wissen schon von der inversen Matrix, dass man auch nur in diesem Fall sicher eine eindeutige Lösung hat. Analog findet man für x_2 und x_3:

Cramersche Regel zum Lösen eines Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ Bsp 6

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 1 & 45 & 9 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1\,, \\
x_2 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 82 & 1 & 9 \\ 27 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\,, \\
x_3 &= \frac{1}{\det(A)} \det \begin{pmatrix} 82 & 45 & 1 \\ 27 & 16 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -14\,.
\end{aligned}
$$

Diese Cramersche Regel [Cramer's rule] gilt offensichtlich auch für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten oder 78 Gleichungen mit 78 Unbekannten. Allerdings sollten Sie folgendes beachten:

- Die Cramersche Regel ist dann anzuwenden, wenn man nur an einer Lösungskomponente des Gleichungssystems interessiert ist.
- Die Cramersche Regel funktioniert nur, wenn es genauso viele Gleichungen wie Unbekannte gibt (quadratische Gleichungssysteme).
- Die Cramersche Regel funktioniert nur, wenn das Gleichungssystem genau eine Lösung hat, also wenn die Koeffizientenmatrix eine inverse Matrix besitzt, also wenn die Koeffizientendeterminante nicht null ist.
- Wenn die Zahl von Unbekannten und Gleichungen groß ist, explodieren durch die Berechnung der Determinanten der Rechenaufwand und die Rundungsfehler (numerische Instabilität).

Determinante, inverse Matrix Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.20 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Determinante — Aufg. 1

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinante — Aufg. 2

Betrachten Sie die Schar der Matrizen

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A_a.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A_a regulär?

(c) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die inversen Matrizen A_a^{-1} für alle regulären Matrizen A_a.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die erste Spalte der inversen Matrizen A_a^{-1} für alle regulären Matrizen A_a. Hinweis: Lösen Sie $A_a \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^\intercal$.

Basis — Aufg. 3

Überprüfen Sie mit Hilfe der Determinante, ob die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = (2,-1,0)^\intercal, \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,1,2)^\intercal, \quad \boldsymbol{v}_3 = (-5,1,-2)^\intercal$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind.

Gleichungssysteme — Aufg. 4

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & = & x \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & y \\ 3x_1 & + & 13x_2 & + & 4x_3 & = & z \end{array}$$

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für $x = 3, y = 8, z = 0$

Anwendungen: Eigenwerte — Aufg. 5

Berechnen Sie alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die die Matrix $A - \lambda I_2$ nicht regulär ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

.

1.21 Grenzwerte von Folgen und Funktionen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen ...

- was eine konvergente und was eine divergente Zahlenfolge ist
- die Grenzwerte der wichtigsten, konvergenten Zahlenfolgen kennen
- wie man mit konvergenten Zahlenfolgen rechnen kann (Grenzwertsätze)

Sie sollten bereits ...

- das asymptotische Verhalten rationaler Funktionen kennen 1.8

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.21.1 Was ist eine Folge?

Eine Folge [sequence] ist eine Auflistung mathematischer Objekte beispielsweise von Zahlen, von Vektoren oder Funktionen ... Typischerweise bezeichnet man mit dem Begriff " Folge" eine unendliche Folge, das heißt, eine Folge, bei der jedem Index aus $\mathbb{N}^+$ oder $\mathbb{N}_0$ ein Folgenglied zugeordnet wird. Eine Folge ist also nichts anderes als eine Abbildung mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}^+$ oder $\mathbb{N}_0$. Ist der Bildbereich der Abbildung $\mathbb{R}$, so nennt man die Folge auch Zahlenfolge.

Folgen von Zahlen — Bsp 1

n	1	2	3	4	...
a_n	5	7	9	11	...
b_n	1/1	1/2	1/3	1/4	...
c_n	3	3,1	3,14	3,141	...

Hier eine Folge von Funktionen:

Folge von Funktionen — Bsp 2

n	1	2	3	...
d_n	$x \mapsto x$	$x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$	$x \mapsto x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$	...

Hieran sieht man die wesentliche Anwendung für Folgen: Folgen ermöglichen die Annäherung im Unendlichen mathematisch auszudrücken. Weil man nicht unendlich viele Folgenglieder angeben kann, nennt man typischerweise nur ein Bildungsgesetz, zum Beispiel eine Rechenvorschrift. Das Bildungsgesetz kann explizit sein, d. h. der Wert des n-ten Folgenglieds ist direkt zu berechnen:

Folgen mit Bildungsgesetz — Bsp 3

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + 2n \\ b_n &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz kann aber auch implizit sein. Das heißt, auf beiden Seiten der Gleichung kommen Folgenglieder vor; außerdem ist dann typischerweise der Anfang der Folge gegeben. Dann kann man die Folgenglieder typischerweise per Rekursion bestimmen:

Rekursiv definierte Folgen — Bsp 4

$$\begin{aligned} a_1 &= 5\,, \\ a_{n+1} &= a_n + 2\,. \end{aligned}$$

Viele Näherungsverfahren erzeugen rekursiv definierte Folgen, beispielsweise das Newton-Verfahren, das zur Nullstellensuche eingesetzt wird. 1.6

Newton-Verfahren — Bsp 5

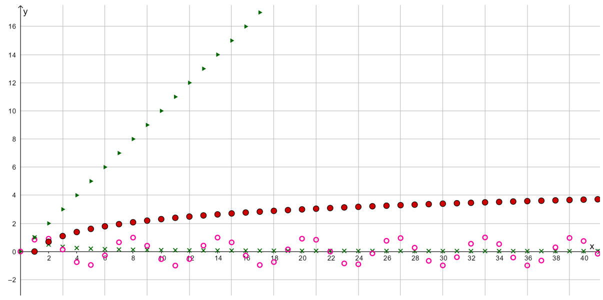
Gesucht seien die Nullstellen einer stetig differenzierbaren Funktion f. Zur numerischen Approximation der Nullstellen, also Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$, wird das Newton-Verfahren eingesetzt. Ausgehend von einem gewählten Startwert x_0 konstruiert man die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mittels

$$\forall\, n \geq 1: \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,.$$

1.21.2 Grenzwerte von Zahlenfolgen

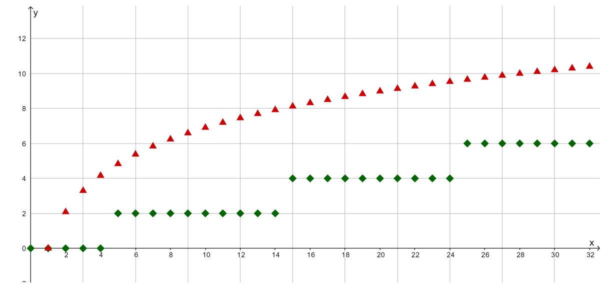
Folgen kann man dieselben Eigenschaften zuordnen wie Funktionen - insbesondere Monotonie und Beschränktheit. Ein paar Beispiele zum Nachdenken:

Eigenschaften von Zahlenfolgen — Bsp 6



Welche der links abgebildeten Zahlenfolgen ist ...

- beschränkt oder unbeschränkt?
- wachsend oder fallend?
- periodisch?
- symmetrisch?
- konstant?
- ...



Welche der links abgebildeten Zahlenfolgen ist ...

- monoton wachsend: $a_{n+1} \geq a_n$?
- streng monoton wachsend: $a_{n+1} > a_n$?

Folgen werden oft benutzt, um im Unendlichen eine Zahl, einen Vektor, eine Funktion oder Ähnliches anzunähern. Eine solche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ heißt dann konvergent (Gegenteil: divergent) und ihr Ziel im Unendlichen heißt Grenzwert oder Limes [limit]. Man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

Was genau bedeutet " Konvergenz einer Zahlenfolge" $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in \mathbb{K}$[47]?

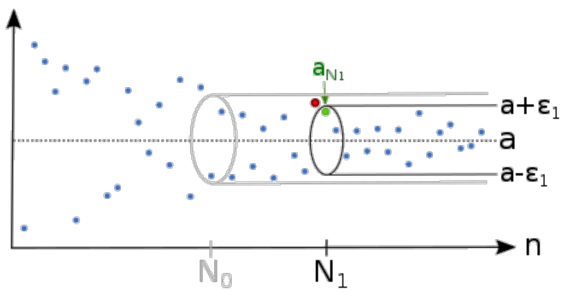
Konvergenz einer Zahlenfolge — Def. 1

Eine Zahlenfolge $(a_n)_n,\ a_n \in \mathbb{K}$ heißt konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, wenn alle ihre Folgenglieder ab einem gewissen Index immer in einem Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ liegen, egal wie klein man $\epsilon > 0$ wählt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a : \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N \in \mathbb{N}^+\,, \text{ so dass } a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \text{ für alle } n \geq N\,,$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}^+\; \forall\, n \geq N \;\Rightarrow\; |a_n - a| \leq \varepsilon\,.$$

[47] Entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$



$a_n \to a\,, \text{für } n \to \infty :\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Bemerkungen:

- Eine Folge ist genau dann divergent, wenn sie nicht konvergent ist. Die Divergenz ist also die Negation der Konvergenz.
- Um Konvergenz einer Zahlenfolge zu beweisen, wählt man sich ein beliebig kleines $\epsilon > 0$ und findet explizit den dazu passenden Index N, ab dem man mit Gewissheit sagen kann, dass alle Folgenglieder mit $n > N$ näher als ϵ am Grenzwert a liegen. Aufgabe
- Um ein Gespühr für den Grenzwert einer Zahlenfolge zu bekommen, setzt man für n ein paar große Zahlen ein und schaut, ob sie sich auf einen Wert "zubewegen". Excel

Eine Folge mit $a = 1/3$ Bsp 7

n	1	2	3	4	...	
$(n^2+2)/(3n^2)$	3/3	6/13	11/27	18/48	...	$\to 1/3$

- Von besonderer Wichtigkeit sind Zahlenfolgen, die gegen Null konvergieren - es sind die sogenannten Nullfolgen.

Eine Nullfolge: $a = 0$ Bsp 8

n	1	2	3	4	...	
$3/n$	3	3/2	1	3/4	...	$\to 0$

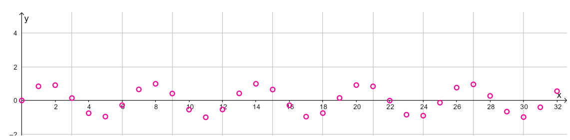
- Eine Zahlenfolge, die über alle Grenzen wächst (ohne ausflugsweise zurückzukehren!), der bleibt nichts anderes übrig als gegen Unendlich zu streben. Diese Folgen sind irgendwie nicht divergent, aber auch nicht konvergent (da Unendlich keine Zahl ist). Man nennt sie bestimmt divergent nach plus Unendlich und schreibt $a_n \to \infty$. Entsprechend definiert man bestimmte Divergenz nach minus Unendlich und schreibt $a_n \to -\infty$.

Bestimmt divergente Folgen Bsp 9

$$\begin{aligned} n^2 &\to \infty \\ e^n &\to \infty \\ \sqrt{n} &\to \infty \end{aligned}$$

- Jede konvergente Folge muss beschränkt sein, allerdings ist nicht jede beschränkte Folge konvergent. Mit dem Vokabular der mathematischen Logik läßt sich das auch formulieren: Beschränktheit ist eine notwendige, aber keine ausreichende Bedingung für Konvergenz. 1.2

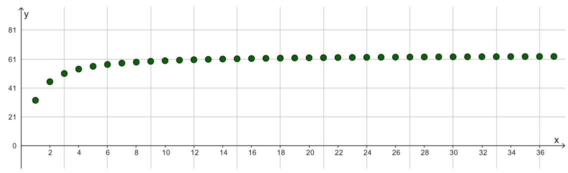
Notwendig aber nicht ausreichend! Bsp 10



Beschränktheit reicht nicht aus!

- Eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge muss konvergent sein. Auf Mathematisch läßt sich das auch formulieren: Beschränktheit und Monotonie sind ausreichende Bedingung für Konvergenz.

Notwendig und ausreichend! Bsp 11



Beschränktheit und Monotonie reicht aus!

In der Praxis prüft man ziemlich selten die Konvergenz mit Hilfe der Definition. Vielmehr benutzt man Grenzwertsätze, um sofort das Ergebnis abzulesen.

Grenzwertsätze Regel 1

Es seien $(a_n)_n, a_n \in \mathbb{K}$[a] und $(b_n)_n, b_n \in \mathbb{K}$ zwei konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a \in \mathbb{K}$ und $b_n \to b \in \mathbb{K}$. Es gilt:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & a_n + b_n & \to & a+b \\ 2. & a_n - b_n & \to & a-b \\ 3. & a_n \cdot b_n & \to & a \cdot b \\ 4. & a_n / b_n & \to & a/b, \quad b_n \neq 0 \wedge b \neq 0\,. \end{array}$$

Es sei $(c_n)_n$ eine beschränkte Zahlenfolge und $(d_n)_n$ eine bestimmt divergente Zahlenfolge. Es gilt:

$$5. \quad \frac{c_n}{d_n} \to 0\,.$$

[a] $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Bei Untersuchung eines gebrochenrationalen Ausdrucks, in dem Potenzen von n vorkommen, klammert man die höchste Potenz von n aus und wendet dann Grenzwertsätze an. Ein Beispiel:

Anwendung der Grenzwertsätze bei gebrochenrationalen Ausdrücken Bsp 12

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+\sin(n)}{2n^2+e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \left(1+\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(2+\dfrac{e^{-n}}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{\sin(n)}{n^2}}{2+\dfrac{e^{-n}}{n^2}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\,,$$

wobei in $(*)$ der 4. Grenzwertsatz der in Regel 1 genannten Grenzwertsätze benutzt wurde:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Zähler:} & 1+\dfrac{\sin(n)}{n^2} & \to & 1, \text{ da } \left|\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right| \to 0\,, \\ \text{Nenner:} & 2+\dfrac{e^{-n}}{n^2} & \to & 2, \text{ da } \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-n}}{n^2} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n}\right) \overset{3.}{=} 0 \cdot 0 = 0. \end{array}$$

Es gibt eine Reihe von Grenzwerten, die man wissen sollte. Bis auf den ersten resultieren alle Grenzwerte aus dem asymptotischen Verhalten von Potenz- und Exponentialfunktionen. 1.7 1.10

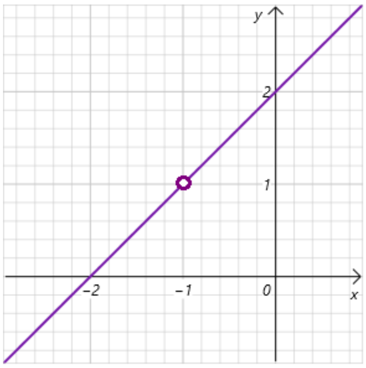
Wichtige Grenzwerte Regel 2

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e\,,$
- Für $a > 0:$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = \infty\,,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0,$
- Für $|q| < 1,\ a \in \mathbb{R}:$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0\,, \lim\limits_{n\to\infty} (n^a \cdot q^n) = 0,$
- Für $q > 1,\ a \in \mathbb{R}:$ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty\,,\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n^a} = \infty.$

1.21.3 Grenzwerte von Funktionen

Was sollte der Wert einer Funktion f an einer Stelle x_0 sein, an der kein Funktionswert nicht definiert ist oder man ihn nicht kennt?

Grenzwert? Bsp 13



Wie definiert man f an der Stelle $x_0 = -1$?

- Egal wie man sich auf der x-Achse der Stelle x_0 nähert, die Funktionswerte nähern sich immer dem Wert 1 an!

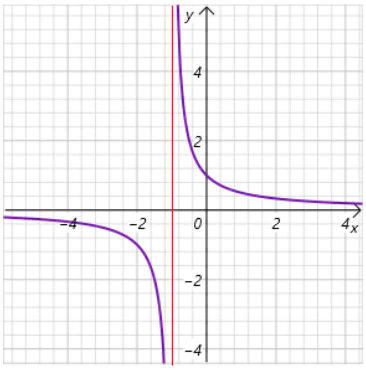
$\Rightarrow$ f besitzt einen Grenzwert für $x \to x_0$.

$\Rightarrow$ Die Lücke läßt sich vernünftig schließen, wenn man f an der Stelle x_0 den Wert 1 zuordnet!

Die Antwort auf die eingangs gestellte Frage lautet: Der sinnvolle Wert ist der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0.

Der Funktion f an einer Stelle x_0 einen vernünftigen Funktionswert zuzuordnen heißt also, zu untersuchen, ob die Funktion an der Stelle x_0 einen Grenzwert besitzt. Und das muss nicht der Fall sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Grenzwert? Bsp 14



Wie definiert man f an der Stelle $x_0 = -1$?

- Wenn man sich auf der x-Achse von links der Stelle x_0 nähert, dann wachsen die Funktionswerte gegen minus Unendlich.
- Wenn man sich auf der x-Achse von rechts der Stelle x_0 nähert, dann fallen die Funktionswerte gegen plus Unendlich.

$\Rightarrow$ f besitzt keinen Grenzwert für $x \to x_0$.

Das letzte Beispiel führt zu einer wichtigen Feststellung über eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{K}$, die mit Sicherheit keinen Grenzwert an der Stelle $x_0 \in D_f$ besitzt[48] . Für eine solche Funktion lassen sich (mindestens zwei) Folgen finden, die beide gegen x_0 konvergieren, also

$$\begin{array}{lll} (x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \quad & x_n^1 \in D_f \setminus \{x_0^1\} \quad \text{mit} & \lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = x_0\,, \\ (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \quad & x_n^2 \in D_f \setminus \{x_0^2\} \quad \text{mit} & \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = x_0\,, \end{array}$$

die Folgen der Funktionswerte aber gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren, also

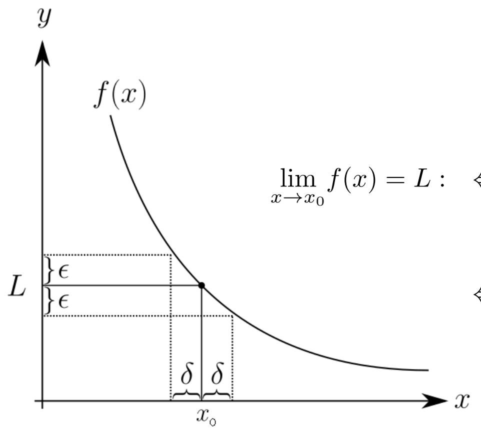
$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^1\right) = f_1, \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n^2\right) = f_2 \quad \wedge \ f_1 \neq f_2\,.$$

Die mathematisch präzise Definition eines Grenzwerts einer Funktion lautet:[49]

[48]Negieren wir die Aussage, dann erhalten wir eine Charakterisierung für die Existenz eines Grenzwerts: Eine Funktion f besitzt einen Grenzwert an der Stelle x_0, wenn man von jeder beliebigen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, also $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ mit $x_n \neq x_0$, zeigen kann: die Folge der Funktionswerte $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren alle gegen denselben Grenzwert!

[49]Hier und im folgenden beschränken wir uns auf Funktionen mit reellem Definitionsbereich, also $D \subset \mathbb{R}$. Die Funktion darf durchaus in die komplexen Zahlen abbilden, es gilt also $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

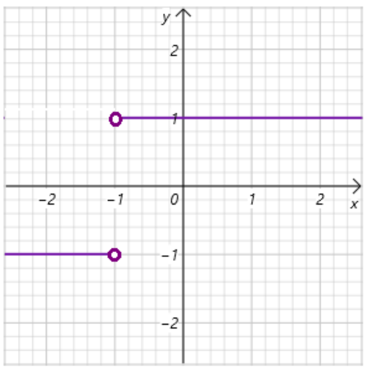
Grenzwert einer Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ — Regel 3



$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L : \quad \Leftrightarrow \quad \text{Für jedes } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0\,,$$
$$\text{so dass } |f(x) - L| \le \varepsilon \text{ für alle } |x - x_0| \le \delta\,,$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in D_f : \; |x - x_0| \le \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| \le \varepsilon\,.$$

Für Funktionen mit $D \subset \mathbb{R}$, kann man den Begriff des Grenzwerts einer Funktion auf einseitige Grenzwerte einschränken. $x \downarrow x_0$ oder $x \to x_0^+$ für den rechtesseitigen Grenzwert und $x \uparrow x_0$ oder entsprechend $x \to x_0^-$ für den linksseitigen Grenzwert.

Grenzwert? — Bsp 15



Wie definiert man f an der Stelle $x_0 = -1$?

- Egal wie man sich auf der x-Achse von links der Stelle x_0 nähert, die Funktionswerte sind immer -1.
- Egal wie man sich auf der x-Achse von rechts der Stelle x_0 nähert, die Funktionswerte sind immer $+1$.

$\Rightarrow$ f besitzt keinen Grenzwert für $x \to x_0$.

$\Rightarrow$ der linksseitige Grenzwert existiert: $\lim\limits_{x\uparrow -1} f(x) = -1$.

$\Rightarrow$ der rechtsseitige Grenzwert existiert: $\lim\limits_{x\downarrow -1} f(x) = 1$.

Bemerkungen:

- Einen Grenzwert kann man (nur) für solche Stellen x_0 analysieren, die beliebig nahe Nachbarn im Definitionsbereich von f haben. Diese Stellen können vom Definitionsbereich umschlossen sein (denken Sie an Definitionslücken) oder auf dem Rand des Definitionsbereichs liegen.
- Einen Grenzwert an einer isolierten Stelle im Definitionsbereich kann man mit dem klassischen Grenzwertbegriff nicht bilden.
- Das asymptotische Verhalten einer Funktion f mit $D \subset \mathbb{R}$ ist nichts anderes als der sogenannte uneigentliche Grenzwert von f für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$. Man untersucht, wie sich $f(x_n)$ verhält, wenn x_n eine bestimmt divergente Folge im Definitionsbereich (!) ist.

Neben der Existenz eines Grenzwerts interessiert einem also vor allem der Wert des Grenzwerts! Grenzwerte von Funktionen lassen sich bestimmen, indem man funktionale Ausdrücke geschickt umformt, so dass man

- Grenzwertsätze anwenden kann, nämlich

Grenzwertsätze — Regel 4

Es zwei Funktionen gegeben $f : D \to \mathbb{K}$ und $g : D \to \mathbb{K}$ mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b, \quad a, b \in \mathbb{K}\,.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x)) &= c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) &&= c\cdot a, && c\in\mathbb{K}\,,\\
\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x) &&= a+b\,,\\
\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x) &&= a-b\,,\\
\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) &= \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) &&= a\cdot b\,,\\
\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} &&= \frac{a}{b}, && \text{falls } b\neq 0\,.
\end{aligned}$$

- asymptotische Eigenschaften von Funktionen ausnutzten kann, beispielsweise die folgenden

Grenzwerte rationaler Funktionen — Regel 5

Es seien p und q zwei Polynome mit

$$\begin{aligned}
p: x &\mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0\\
q: x &\mapsto b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}0, & n<m\,,\\ \frac{a_n}{b_m}, & n=m\,,\\ \infty, & n>m\wedge a_n\cdot b_m>0\,,\\ -\infty, & n>m\wedge a_n\cdot b_m<0\,.\end{cases}$$

- wichtige Grenzwerte erkennt und einsetzen kann, beispielsweise die folgenden

Wichtige Grenzwerte von Funktionen für $|x|\to\infty$ — Regel 6

- Für alle $a>0$: $\lim_{x\to\infty} x^a=\infty\,,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^a}=0\,,$
- Für alle $|q|<1\wedge a\in\mathbb{R}$: $\lim_{x\to\infty} q^x=0\,,\quad \lim_{x\to\infty} q^x\cdot x^a=0\,,$
- Für alle $q>1\wedge a\in\mathbb{R}$: $\lim_{x\to\infty}\frac{q^x}{x^a}=\infty\,,$
- Für alle $a>0$: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^a}=0\,,\quad \lim_{x\to 0^+}(\ln(x)\cdot x^a)=0\,.$

Und das erfordert ... wie immer Training. Drei Beispiele folgen.

Grenzwerte von Funktionen — Bsp 16

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{e^x} &\to \frac{11}{e^2}\,,\\
\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)\to 2\,,\\
\lim_{x\uparrow 0}\frac{x}{|x|} &\to -1\,.
\end{aligned}$$

Folgen und Grenzwerte Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.21 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Folgen — Aufg. 1

Betrachten Sie einen Kreis und zeichnen Sie die Fläche A_3 des durch den Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks ein, dann die Fläche A_6 eines regelmäßiges Sechsecks, A_{12} eines regelmäßigen Zwölfecks usw.

- Konvergiert die Folge der Flächeninhalte?
- Wenn ja, wie lautet der Grenzwert?

Grenzwerte — Aufg. 2

(a) Übersetzen Sie die folgende Aussage:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ und es gelte: $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\varepsilon\ |a_n - a| < \varepsilon \quad (*)$

(b) Erfüllt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{2n}{n+4}$ die Eigenschaft $(*)$? Falls ja, wie lautet n_ε bei gegebenem $\varepsilon > 0$?

Grenzwertsätze — Aufg. 3

Geben Sie für $c = 0,\ c = 1,\ c = \infty$ jeweils Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = c \quad \text{mit } a_n \to \infty, b_n \to 0 \text{ für } n \to \infty\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \quad \text{mit } a_n \to 0, b_n \to 0 \text{ für } n \to \infty\,,$$

Grenzwerte von Folgen — Aufg. 4

Bestimmen Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

$(a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2 - n^2}{n} \qquad (b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9\,n^2 + n + 1}{3n^3 + 1} \qquad (c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} \qquad (d)\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

Hinweis zu (c): Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

Grenzwerte von Folgen — Aufg. 5

Überprüfen Sie, ob die Zahlenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ konvergiert und berechnen Sie ggf. den Grenzwert:

$$f_1 = 0,\ f_{n+1} = \frac{1}{3}(f_n + 1)\,.$$

Grenzwerte von Funktionen — Aufg. 6

Bestimmen Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

$(a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + x} \qquad (b)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-(x+1)^2}{2x^2 - x + 1} \qquad (c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3 + x^2 - x}{-x^2 + 4} \qquad (d)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(2^{-x} \cdot x^4\right)$

$(e)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\ln(x))^3}{x^2} \qquad (f)\ \lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln(x)} \qquad (g)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|} \qquad (h)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{x}$

1.22 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen ...	
• was Stetigkeit bedeutet	
• wie man Stetigkeit bzw. Unstetigkeit überprüft und erzwingt	
• was die Ableitung einer Funktion bedeutet	
• wie man Differenzierbarkeit prüft und erzwingt	
Sie sollten bereits ...	
• mit stückweise definierten Funktionen umgehen können	1.2
• mit Grenzwerten von Funktionen und Folgen umgehen können	1.21

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.22.1 Was ist Stetigkeit?

Stetige [continuous] Funktionen[50] sind solche,

„ bei denen eine kleine Veränderung von x zu einer kleinen Veränderung von $f(x)$ führt"

und das ist der Fall, wenn

Stetige Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ Def. 1

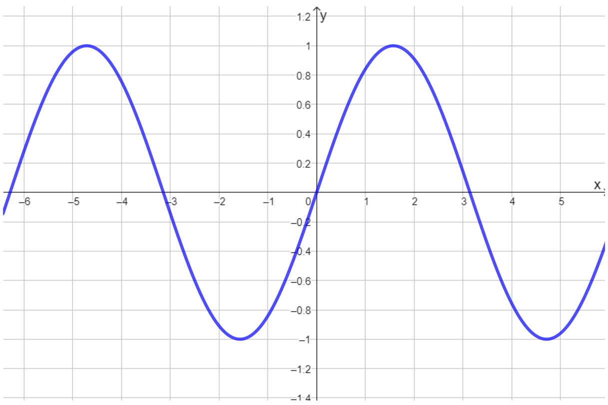
- f an allen Stellen im Definitionsbereich, $x \in D$, die nicht isoliert liegen, einen Grenzwert besitzt und
- dieser Grenzwert jeweils gleich $f(x)$ ist.

Insbesondere können auch Funktionen mit Definitionslücken, beispielsweise

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{x}$$

stetig sein. Merken Sie sich: jede rationale Funktion ist stetig![51]

sin : $x \mapsto \sin(x)$ ist stetig Bsp 1



„ Kann man den Graph einer Funktion zeichnen ohne den Stift abzusetzen, so liegt eine stetige Funktion vor."

Der Zwischenwertsatz [intermediate value theorem] drückt die Eigenschaft der durchgezogenen Kurve aus:

Zwischenwertsatz Regel 1

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $[a, b] \subset D$. Für jedes y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

[50] Hier und im folgenden beschränken wir uns auf Funktionen mit reellem Definitionsbereich, also $D \subset \mathbb{R}$. Die Funktion darf durchaus in die komplexen Zahlen abbilden, es gilt also $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

[51] Man bezeichnet sogar jede beliebige Funktion als stetig an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs, die isoliert liegt.

Aus der Definition der Stetigkeit folgt ein weiterer Satz für Grenzwerte:

Stetigkeit von $f : D \to \mathbb{K}$ in x_0 — Regel 2

Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist in jedem Punkt $x_0 \in D$ folgenstetig und das heißt für $(x_n)_n$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0)\,.$$

Mit anderen Worten: Der Grenzwert einer stetigen Funktion an einer Stelle $x_0 \in D$ ist die Funktion ausgewertet in x_0.

Eine Definitionslücke einer Funktion lässt sich sinnvoll schließen, man sagt auch sie ist hebbar, wenn der Grenzwert existiert. Dies ergibt dann eine stetige Fortsetzung der Funktion. Zum Beispiel besitzt die Funktion f im Nullpunkt eine hebbare Definitionslücke 1.10

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to (0,\infty)\,,\ x \mapsto e^{-1/x^2}\,.$$

und kann zu einer stetigen Funktion fortgesetzt werden. Die stetige Fortsetzung ist eine neue Funktion und wir wählen einen neuen Namen, beispielsweise $\tilde{f}$. Es gilt

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to [0,\infty),\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0\,,\\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

1.22.2 Was ist Differenzierbarkeit?

Für eine Funktion f, die an einer Stelle x und (mindestens) in einer Umgebung davon definiert ist, kann man sich fragen, wie steil f an der Stelle x ansteigt. Die Idee ist, eine Gerade durch $(x, f(x))$ und einen benachbarten Punkt $(x+h, f(x+h))$ zu legen, deren Steigung zu bestimmen und dann h gegen null gehen zu lassen. Die Frage ist, ob dieser Grenzwert existiert, also

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \in \mathbb{K}?$$

Wenn er existiert, dann nennt man die Funktion f an der Stelle x differenzierbar [differentiable]:

Differenzierbarkeit von $f : D \to \mathbb{K}$ an der Stelle $x_0 \in D$: Variante Grenzwert — Def. 2

f differenzierbar an der Stelle x_0 $:\Leftrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{K}\,. \quad (*)$

Der Grenzwert ist die Steigung [slope] (die Tangentensteigung) der Funktion an dieser Stelle. Ist f auf ihrem Definitionsbereich D differenzierbar, dann kann man jedem $x \in D$ die Steigung von f an der Stelle x zuordnen! Das ist eine neue Funktion, die sogenannte Ableitung [derivative] f' der Funktion f:

Erste Ableitung von f — Def. 3

$$f' : x \mapsto \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

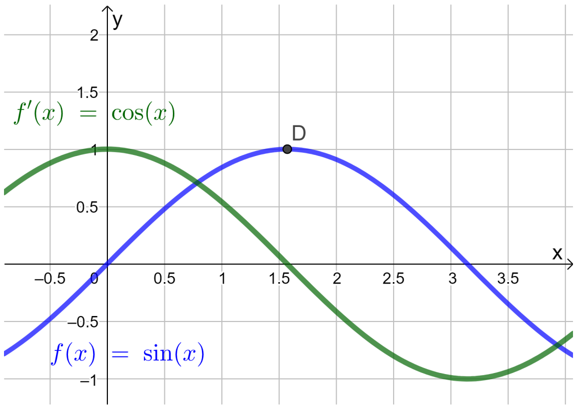
Gängige Bezeichnungen für die erste Ableitung lauten:

$$f',\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\ f^{(1)}, \dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,.$$

Bemerkungen

- Der Definitionsbereich von f' umfasst alle x, die im Definitionsbereich von f liegen und für die f differenzierbar ist.
- $f'(x)$ ist die Steigung an der Stelle x und das heißt, dass $f'(x)$ anzeigt mit welcher Geschwindigkeit sich f an der Stelle x ändert. Skizziert man die Graphen von f und f' direkt untereinander, dann kann man den Zusammenhang zwischen Funktion und Steigung erfasst:

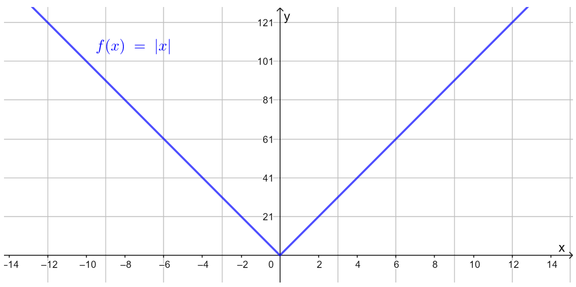
Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitung Bsp 2



- Wächst f, so ist f' positiv.
- Fällt f, so ist f' negativ.
- Wird f maximal, so besitzt f' eine Nullstelle.

- Ist eine Funktion an einer Stelle x differenzierbar, so muss sie dort stetig sein - umgekehrt gilt das nicht:

Stetig aber nicht differenzierbar: $f : x \mapsto |x|$ Bsp 3



- Die Problemstelle ist $x_0 = 0$ - nur dort ist der Differenzenquotient zu analysieren:
- Die einseitigen Grenzwerte existieren, sind aber nicht gleich:

$$\begin{aligned} \text{von links:} \quad & \lim_{h \to 0} \frac{|0| - |0-h|}{h} &= -1 \\ \text{von rechts:} \quad & \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Differenzenquotient springt in $x_0 = 0$.

$\Rightarrow$ f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.

Die Betragsfunktion aus dem vorigen Beispiel ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, weil sich das Monotonieverhalten von f sprunghaft ändert. Differenzierbare Funktionen sind solche, bei denen das nicht passiert: wenn der Differenzenquotient von f an der Stelle x_0 existiert, dann heißt das, dass sich f sich in einer kleinen Umgebung von x_0, in $(x_0 - h, x_0 + h)$ für ein $h > 0$, wie eine lineare Funktion verhält[52]. Diese Sichtweise 1.6
ist führt zu einer alternativen Definition von Differenzierbarkeit:

Differenzierbarkeit von $f : D \to \mathbb{K}$ an der Stelle x_0: Variante Linearisierung Def. 4

$$f \;\text{ differenzierbar an der Stelle }\; x_0 \;:\Leftrightarrow\; f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o\,(h)\;, \qquad (**)$$

wobei o eine Funktion ist, von der man folgendes weiß

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0\,,$$

sie konvergiert also für $h \to 0$ schneller gegen null als h selbst.

$(**)$ können wir auch wie folgt lesen: vorausgesetzt f ist differenzierbar in x_0, dann gibt es eine lineare Funktion t, die mit f und mit f' an der Stelle x_0 übereinstimmt. Diese lineare Näherung ist die Tangente an f in x_0. Die Tangente t an der Stelle x_0 lautet

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,.$$

Bemerkungen:

- Möchte man die Ableitung einer Funktion finden, dann sucht man entweder den Grenzwert des Differenzenquotienten $(*)$ oder man versucht die Funktion zu linearisieren und identifiziert die Ableitung aus einem Ausdruck der Form $(**)$. Beispiele für beide Vorgehensweisen sehen wir im folgenden Kapitel.

[52] Mit anderen Worten: man kann eine Tangente anlegen!

Stetigkeit Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.22 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Stetigkeit — Aufg. 1

(a) Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Was bedeutet die folgende Aussage:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \,.$$

(b) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x$. Gibt es eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, an der die Bedingung unter (a) erfüllt ist?

Stetigkeit — Aufg. 2

Untersuchen Sie die Funktion f mit

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

auf Stetigkeit an einer beliebigen Stelle x_0.

Stetigkeit — Aufg. 3

Für welche $x \in [0, \infty)$ ist f stetig?

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 1 \\ \frac{1}{|x|} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Stetigkeit — Aufg. 4

Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist.

(a) Es sei $x_0 = 1$ und $f : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ x^2 + t & x > 1 \end{cases}$

(b) Es sei $x_0 = t$ und $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2tx & x \geq t \\ 2x - t & x < t \end{cases}$

Stetigkeit — Aufg. 5

Bestimmen Sie für f den Parameter a so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$f : x \mapsto= \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \geq 1 \\ 2 \cdot \exp(a \cdot x), & x < 1\,. \end{cases}$$

Stetige Fortsetzung — Aufg. 6

Vervollständigen Sie f so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$f : x \mapsto \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 2\,. \end{cases}$$

1.23 Ableitungsregeln

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen ...	
• die Ableitung einer beliebigen Funktion zu berechnen	
Sie sollten bereits ...	
• die Definitionen der ersten Ableitung kennen	1.22

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

1.23.1 Ableitungsregeln

Wenn die Funktionen f und g beide an der Stelle x differenzierbar sind und wenn C eine feste Zahl ist, ist durch die Grenzwertsätze klar: 1.21

Summen und skalare Vielfache — Regel 1

$$\begin{aligned}(C\,f)' &= C\,f'\\ (f+g)' &= f'+g'\,.\end{aligned}$$

Um die Ableitung eines Produkts zweier Funktionen zu bestimmen starten wir mit $(**)$ - also der Information, die uns für f und g an der Stelle x zur Verfügung steht: 1.22

$$\begin{aligned}f(x+h)g(x+h) &= (f(x)+f'(x)h+o\,(h))\cdot(g(x)+g'(x)h+o\,(h))\\ &= f(x)g(x)+f(x)hg'(x)+f(x)o\,(h)+hf'(x)g(x)+h^2f'(x)g'(x)+hf'(x)o(h)+\\ &\quad +o(h)\,(g(x)+hg'(x)+o(h))\\ &= f(x)g(x)+f(x)g'(x)h+hf'(x)g(x)+o(h)\\ &= f(x)g(x)+\underbrace{(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))}_{\text{Ableitung!}}h+o(h)\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Produktregel [product rule]:

Produktregel — Regel 2

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g+f\cdot g'\,.$$

Es wird die Verknüpfung (Verkettung oder Komposition) $x\mapsto f\,(g(x))$ untersucht. Die Funktion g sei an der Stelle x differenzierbar, die Funktion f an der Stelle $g(x)$. Die Idee ist hier wieder mit $(**)$ zu arbeiten: 1.12

$$\begin{aligned}f\,(g(x+h)) &= f\big(g(x)+\underbrace{g'(x)h+o(h)}_{=:\,h_2}\big) = f\,(g(x)+h_2)\\ &= f\,(g(x))+h_2f'\,(g(x))+o(h_2)\\ &= f\,(g(x))+hg'(x)f'\,(g(x))+o(h)f'(g(x))h+o(hg'(x)+o(h))\\ &= f\,(g(x))+\underbrace{f'\,(g(x))\,g'(x)}_{\text{Ableitung!}}h+o(h)\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Kettenregel [chain rule]:

Kettenregel — Regel 3

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'\,.$$

Zur Herleitung der Quotientenregel betrachten wir zunächst die Ableitung der Funktion $x \mapsto 1/x$. Wir starten mit einem Trick, nämlich der Tatsache, dass die Ableitung einer Konstanten verschwindet:

$$0 = \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)' = 1 \cdot \frac{1}{x} + x \left(\frac{1}{x}\right)' \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

Nehmen wir nun an im Nenner stände eine differenzierbare Funktion g, dann folgt mit der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x),$$

und damit:

Quotientenregel — Regel 4

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}.$$

1.23.2 Ableitung von Standardfunktionen

1. Ableitung einer Exponentialfunktion: An dieser Stelle ist es geschickt, sich an das zu erinnern, was wir über die Exponentialfunktion schon wissen, nämlich 1.10

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots.$$

Für kleine Argumente $h > 0$ gilt insbesondere

$$e^h = 1 + h + o(h),$$

denn die Terme von höherer als linearer Ordnung verschwinden für $h \to 0$, sind also von der Ordnung $o(h)$. Zur Herleitung der Ableitung betrachten wir die Grenzwertdefinition $(*)$ der Differenzierbarkeit. Es folgt für die Ableitung an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{1 + h + o(h) - 1}{h}}_{=1} = e^x.$$

Ableitung der Exponentialfunktion — Regel 5

$$\exp' = \exp.$$

Um eine allgemeine Exponentialfunktion wie $x \mapsto b^x$ abzuleiten, schreibt man sie mit exp:

Ableitung von Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis $b > 0$ — Regel 6

$$(b^x)' = \left(e^{x\ln(b)}\right)' = e^{x\ln(b)} \cdot \ln(b) = \ln(b) \cdot b^x.$$

2. Ableitung einer Logarithmusfunktion: Um die Ableitung des Logarithmus zu berechnen, starten wir mit einem Trick: wenn wir die Exponentialfunktion auf den Logarithmus anwenden, dann erhalten wir die Identitätsabbildung und deren Ableitung ist eins: 1.10 Warum?

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}e^{\ln(x)}}{\mathrm{d}x} = e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))'.$$

Also:

Ableitung Logarithmusfunktion — Regel 7

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

3. Ableitung von Potenzfunktionen: Wir nutzen wieder die Exponentialfunktion, um eine Ableitungsregel für Potenzfunktionen herzuleiten: 1.7

$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(e^{\ln(x)}\right)^n}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(e^{n\ln(x)}\right)}{\mathrm{d}x} = \underbrace{e^{n\ln(x)}}_{=x^n} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{d}\left(n\ln(x)\right)}{\mathrm{d}x}}_{=\frac{n}{x}} = nx^{n-1}\,.$$

Ableitung Potenzfunktion Regel 8

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,.$$

4. Ableitung der trionometrischen Funktionen: Um die Ableitung von Sinus und Kosinus zu bestimmen, wenden wir die Kettenregel auf die Eulersche Identität an: 1.13 1.15

$$\frac{\mathrm{d}e^{ix}}{\mathrm{d}x} = e^{ix}\cdot i = (\cos(x) + i\sin(x))\cdot i = -\sin(x) + i\cos(x)\,.$$

Der Tangens geht mit Quotientenregel und Pythagoras

$$\frac{\mathrm{d}\tan(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}\,.$$

Zur Ableitung des Arcussinus, gehen wir wie bei der Ableitung des Logarithmus vor:

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\sin(\arcsin(x))\right)}{\mathrm{d}x} = \cos(\underbrace{\arcsin(x)}_{\varphi})\cdot\frac{\mathrm{d}\arcsin(x)}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\arcsin(x)}{\mathrm{d}x}\,.$$

Hier kam unbemerkt die Kreisgleichung zum Einsatz:

$$\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow |\cos(\varphi)| = \sqrt{1-\sin^2(\varphi)}\,.$$

Entsprechend für den Arcuscosinus und den Arcustangens.

Ableitung der trigonometrischen Funktionen Regel 9

$$\begin{aligned}
(\cos(x))' &= -\sin(x)\,, \\
(\sin(x))' &= \cos(x)\,, \\
(\tan(x))' &= \frac{1}{\cos^2(x)}\,, \\
(\arcsin(x))' &= +\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad -1 < x < 1\,, \\
(\arccos(x))' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad -1 < x < 1\,, \\
(\arctan(x))' &= \frac{1}{1+x^2}\,.
\end{aligned}$$

1.23.3 Anwendungen - die Regel von L'Hospital

Der Grenzwertsatz über den Quotienten versagt, wenn der Nenner gegen Null geht. Allerdings kann man im folgenden Fall noch etwas retten: Es wird der Grenzwert von

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

gesucht. Beide Funktionen f und g haben an x_0 den Grenzwert null und beide Funktionen f und g sind an x_0 differenzierbar. Die Ableitung $g'(x_0)$ ist nicht null. Dann gilt die Regel von L'Hospital:

Regel von L'Hospital

Regel 10

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Regel von L'Hospital

Bsp 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{e^x} = 1\,.$$

Man kann sich das mittels der Tangentengerade klar machen: 1.3

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \cdots} = \frac{f'(x_0)(x - x_0) + \cdots}{g'(x_0)(x - x_0) + \cdots} \to \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Sollten $f'(x_0)$ und $g'(x_0)$ beide null sein, kann man die zweiten Ableitungen betrachten usw.

Ebenso kann man betrachten, dass Zähler und Nenner nicht beide null werden, sondern beide unendlich werden.

Differentiation Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.23 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Differenzierbarkeit — Aufg. 1

(a) Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1\,, \\ x^2 - 1, & x > 1\,. \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist:

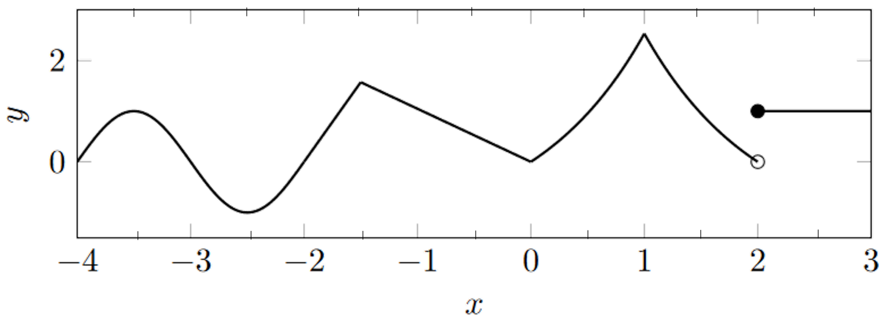
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} a \cdot x^2, & x \geq 1\,, \\ x + b, & x < 1\,. \end{cases}$$

Differenzierbarkeit — Aufg. 2

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x}$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.

Bedeutung der Ableitung — Aufg. 3

Skizzieren Sie die Ableitung für Funktion.



Differenzieren — Aufg. 4

Berechnen Sie von den folgenden Funktionen die Ableitungen. Es ist $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

$(a)\ f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $(b)\ g(u) = \dfrac{u^2}{u^2 + a^2}$

$(c)\ h(p) = \exp\left(-p^2/(2a)^2\right)$ $\qquad$ $(d)\ i(x) = \dfrac{(2x+3)^2 - 2}{\sqrt{x-1}}$

Anwendung: Monotonie-Satz — Aufg. 5

Angenommen Sie wissen über eine Funktion f, dass ihre Ableitung auf einem Intervall I negativ ist, also $f'(x) \leq 0$. Was können Sie dann über das Monotonie-Verhalten aussagen?

Anwendungen: Lineare Näherung — Aufg. 6

Die Mittellinie einer Rennstrecke der Breite 2 m wird durch Funktion $x \mapsto 4 - \frac{1}{2}x^2$ beschrieben. Wir beobachten einen Rennwagen der die Bahnkurve im Uhrzeigersinn entlang rast. Bei spiegelglatter Fahrbahn rutscht das Fahrzeug und landet im Punkt $Y(0|6)$ in den Strohballen. Wo hat das Fahrzeug die Straße verlassen?

1.24 Kurvendiskussion

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen ...	
• einen Graphen auf Extremstellen und Wendepunkte zu analysieren	
• eine Kurvendiskussion für eine beliebige Funktion durchzuführen	
Sie sollten bereits ...	
• sicher charakteristische Eigenschaften einer Funktion bestimmen können	1.5
• sicher die Ableitungen einer Funktion berechnen können	1.23

Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier: Aufgaben

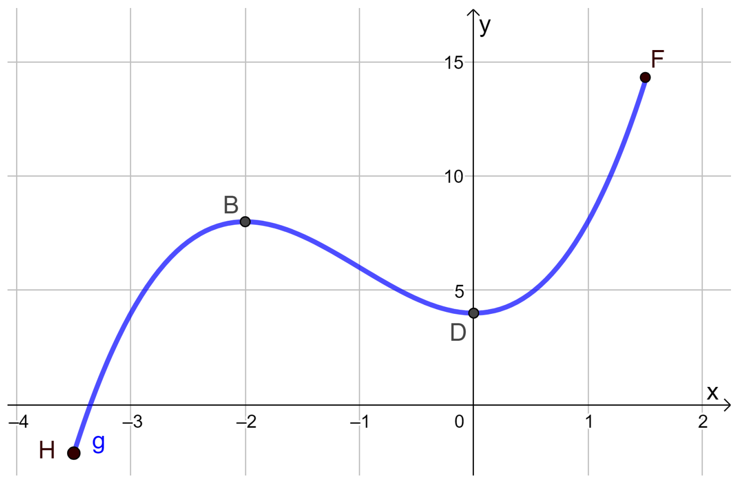
1.24.1 Was ist ein Extremum?

Extremum [extremum] ist ein Oberbegriff für Maximum [maximum] und Minimum [minimum], also den größten bzw. den kleinsten Wert - beispielsweise den größten oder kleinsten Wert bezüglich aller Werte, die eine Funktion annimmt. Die Mehrzahl von Extremum, Maximum und Minimum ist Extrema, Maxima und Minima.

Bei Funktionen spricht man von zwei Sorten von Extrema: lokale (relative) Extrema und globale (absolute) Extrema. Ein lokales Maximum (Minimum) ist eine Stelle x im Definitionsbereich (nicht am Rand!), an der alle Funktionswerte in einer nach links und nach rechts ausgedehnten Umgebung um x kleiner (größer) sind als an der Stelle x. Ein globales Maximum (Minimum) bezeichnet die Stelle x, an der der Funktionswert insgesamt am größten (kleinsten) ist. Globale Extrema werden oft an den Rändern eines abgeschlossenen Definitionsbereichs angenommen.

Extremum, Maximum, Minimum bezeichnen genau genommen die Funktionswerte der Funktion (also Werte auf der y-Achse) und nicht die Stellen x oder die Punkte $(x, f(x))$. Eine Funktion kann deshalb höchstens ein globales Maximum haben und höchstens ein globales Minimum. Allerdings kann sie diese an mehreren Stellen annehmen:

Lokale und globale Extrema Bsp 1



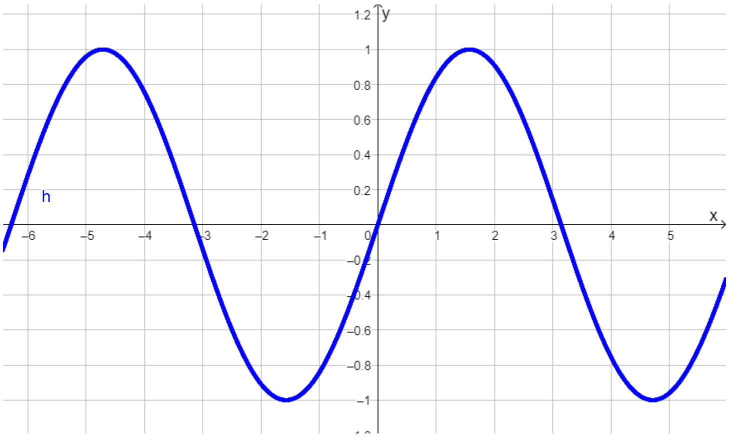
Es sei

$$g : \left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + 3x^2 + 4$$

- H ist das globale Minimum von g
- F ist das globale Maximum von g
- B ist ein lokales Maximum von g
- D ist ein lokales Minimum von g

Es kann auch passieren, dass es gar kein globales Maximum oder kein globales Minimum gibt:

Sinusfunktion hat kein globales Extremum Bsp 2



Es sei

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$$

- h hat unendlich viele lokale Maxima:

$$h(x_k) = 1, \quad x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

- h hat unendlich viele lokale Minima:

$$h(x_k) = -1, \quad x_k = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

- h besitzt auf $\mathbb{R}$ kein globales Extremum.

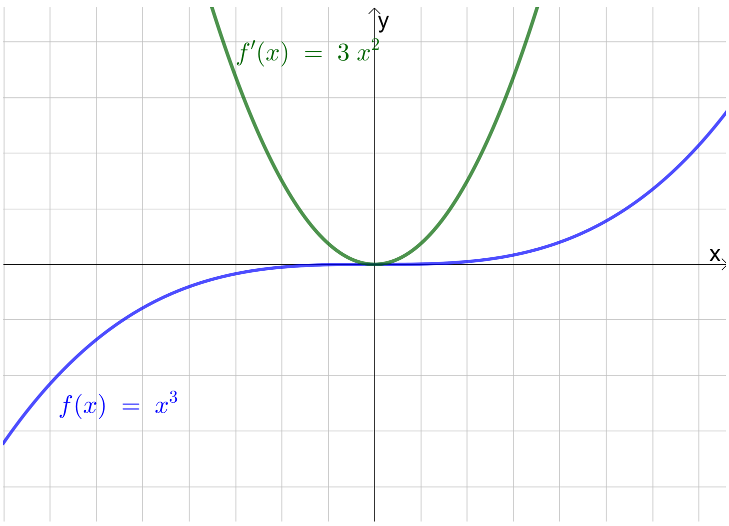
Globale Maximum bzw. Minimum einer Funktion findet man in drei Schritten:

1. lokale Maxima (Minima) bestimmen - diese haben notwendiger Weise eine horizontale Tangente.
2. Funktionswerte an allen Rändern des Definitionsbereichs bestimmen - hierfür muss der Definitionsbereich abgeschlossene Teilmengen besitzen.
3. von all den Funktionswerten den Größten bzw. den Kleinsten nehmen.

1.24.2 Lokale Extrema

Ist die Funktion f auf einem Intervall I differenzierbar, muss an der Stelle $x_0 \in I$ eines lokalen Extremums notwendigerweise $f'(x_0) = 0$ gelten. Diese Bedingung kann man oft leicht in Form einer Gleichung auswerten und hat damit schnell eine Liste an Kandidaten von Stellen für lokale Extrema. Diese Kandidaten nennt man auch kritische Punkte. Wichtig ist, dass $f'(x_0)$ allein nicht ausreicht, um zu entscheiden, ob die Funktion f an der Stelle x_0 tatsächlich ein lokales Extremum besitzt:

Nullstelle erste Ableitung - womöglich nur Sattelstelle Bsp 3



- Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
- Kandidaten:

$$f'(x) = 3x^2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

- Links von $x_0 = 0 : \ f' > 0$
- Rechts von $x_0 = 0 : \ f' > 0$

$\Rightarrow$ Kein Vorzeichenwechsel der Ableitung!

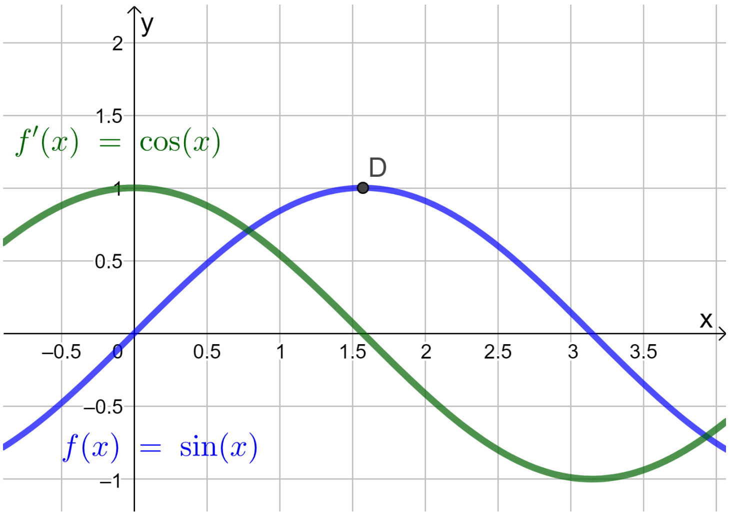
$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ ist kein lokales Extremum!

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ ist Sattelstelle!

Welche Bedinung muss zusätzlich zu $f'(x_0) = 0$ erfüllt sein, damit sichergestellt ist, dass in x_0 eine lokale Extremstelle vorliegt? Hierzu schauen wir uns den Graph einer Funktion an, bei der es " klappt:

Nullstelle erste Ableitung und Vorzeichenwechsel - lokales Extremum

Bsp 4



- Funktion: $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$
- Kandidaten:

$$f'(x) = \cos(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$

- Links von $x_0 = \pi/2 :\ f' > 0$
- Rechts von $x_0 = \pi/2 :\ f' < 0$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der Ableitung!

$\Rightarrow$ $x_0 = \pi/2$ ist lokale Extremstelle!

Hinreichend und notwendig ist also:

Bedingungen für lokales Extremum

Regel 1

f besitzt an $x_0 \in I$ ein lokales Extremum $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) = 0$ mit Vorzeichenwechsel.

Wenn die Funktion f auf einem Intervall I zweimal differenzierbar ist, dann hat mal alternativ folgendes hinreichendes Kriterium: an einer Stelle $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$ nimmt f in x_0 ein lokales Extremum an.

1.24.3 Wendepunkte

Ein Punkt des Graphen, an dem eine auf I zweimal differenzierbare Funktion von Rechtskrümmung (zweite Ableitung negativ) nach Linkskrümmung (zweite Ableitung positiv) oder umgekehrt übergeht, heißt Wendepunkt [inflection point, nicht wie in einer Erzählung turning point]. Der zugehörige x-Wert ist dann die Wendestelle.

Die zweite Ableitung muss also notwendigerweise verschwinden an einem Wendepunkt: f hat an $x_0 \in I$ ein Wendepunkt $\Rightarrow f''(x_0) = 0$. Genauso wie bei den lokalen Extrama, reicht das Verschwinden der zweiten Ableitung alleine nicht aus, um zu wissen, dass eine Wendestelle vorliegt. Wieder muss der Verlauf der zweiten Ableitung hinsichtlich des Nulldurchgangs analysiert werden.

Bedingungen für Wendepunkt

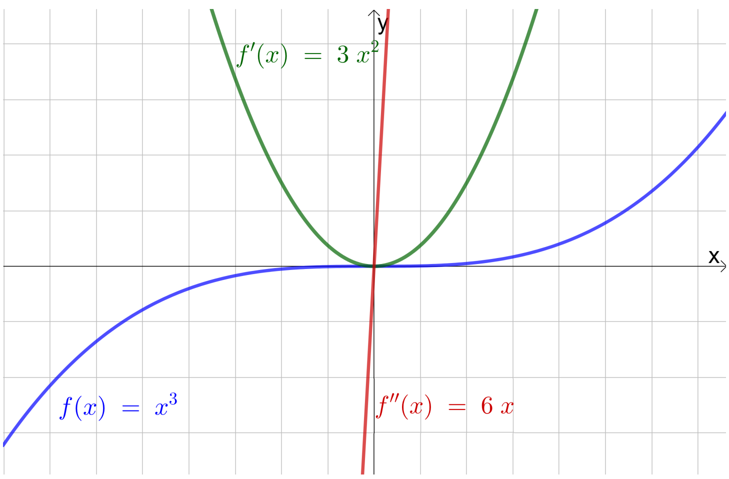
Regel 2

f besitzt an $x_0 \in I$ einen Wendepunkt $\Leftrightarrow$ $f''(x_0) = 0$ mit Vorzeichenwechsel.

Die Funktion aus dem ersten Beispiel besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ einen Wendepunkt:

Nullstelle von f'' und Vorzeichenwechsel - Wendestelle

Bsp 5



- Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$
- Kandidaten:

$$f''(x) = 6x \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung!

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ ist Wendepunkt!

Auch für Wendepunkte gibt es eine alternative hinreichende Bedingung vorausgesetzt die Funktion ist dreimal differenzierbar: f besitzt an $x_0 \in I$ einen Wendepunkt $\Rightarrow f''(x_0) = 0 \land f'''(x_0) \neq 0$.

1.24.4 Kurvendiskussion

Dieser letzte Abschnitt bildet einen Abschluss über die Analyse von Funktion einer reellen Veränderlichen. Bilder sagen mehr als 1000 Worte und es stellt sich heraus, dass wir genügend Hilfsmittel zur Hand haben, um uns sehr schnell ein Bild von einer Funktion zu machen. Bei einer solchen Funktionsuntersuchung hat sich eine Reihenfolge der Schritte als zweckmäßig erwisen - am Beispiel einer ganzrationalen Funktion lauten sie wie folgt:

Kurvendiskussion — Bsp 6

1. (Ableitungen) Zunächst werden von $f : x \mapsto 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$ die ersten drei Ableitungen f', f'', f''' bestimmt.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 + 21x^2 + 10x \\ f''(x) &= 24x^2 + 42x + 10 \\ f'''(x) &= 48x + 42 \end{aligned}$$

2. (Definitionsbereich) f ist eine ganzrationale Funktion, also ist $D_f = \mathbb{R}$.

3. (Symmetrie des Graphen) f hat gerade und ungerade Potenzen. Der Graph besitzt weder eine Symmetrie zum Ursprung noch eine Symmetrie zur y-Achse.

4. (Nullstellen) Um die Nullstellen zu finden, löst man die Gleichung $f(x) = 0$, das heißt:

$$2x^4 + 7x^3 + 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x^2 + 7x + 5) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = -2,5 \end{cases}$$

   Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind also folgende Punkte: $N_1(0|0), N_2(-1|0), N_3(-2,5|0)$.

5. (Senkrechte Asymptoten) Da $D_f = \mathbb{R}$ hat f keine Polstellen.

6. (Waagerechte Asymptoten) Der Summand von $f(x)$ mit der größten Hochzahl ist $2x^4$, also gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

7. (Extremstellen) Die notwendige Bedingung für Extremstellen lautet $f'(x) = 0$. Die Lösung dieser Gleichung liefert drei Kandidaten für Extremstellen:

$$x(8x^2 + 21x + 10) = 0 \quad \Rightarrow x_4 = 0,\ x_5 = -0,625,\ x_6 = -2$$

   Nun wir die (zweite) hinreichende Bedingung für jeden Kandidaten geprüft:

$$\begin{aligned} x_4 = 0: &\quad f'(0) = 0 \land f''(x_4) = 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_4) \text{ ist lokales Minimum.} \\ x_5 = -0,625: &\quad f'(x_5) = 0 \land f''(x_5) = -6,875 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_5) \text{ ist lokales Maximum.} \\ x_6 = -2: &\quad f'(x_6) = 0 \land f''(x_6) = 22 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_6) \text{ ist lokales Minimum.} \end{aligned}$$

   Die Extrempunkte sind also folgende Punkte: $T_1(0|0), H(-0,625|0,55), T_2(-2|-4)$.

8. (Wendestellen) Die notwendige Bedingung für Wendestellen lautet $f''(x) = 0$. Die Lösung dieser Gleichung liefert zwei Kandidaten für Wendestellen:

$$2(12x^2 + 21x + 5) = 0 \quad \Rightarrow x_{7,8} = -\frac{7}{8} \pm \frac{1}{24}\sqrt{201}$$

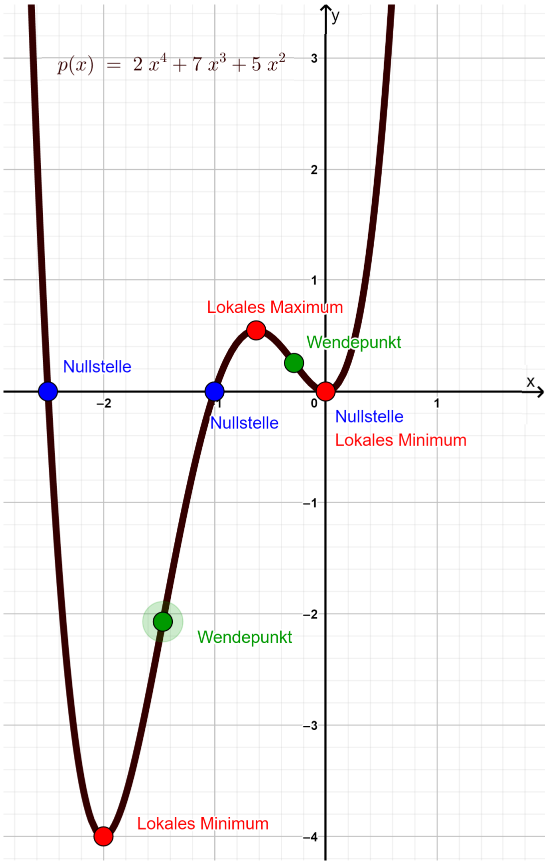
   Nun wir die (zweite) hinreichende Bedingung für jeden Kandidaten geprüft:

$$\begin{aligned} x_7 \approx -0,28: &\quad f''(x_7) = 0 \land f'''(x_7) \approx 28,56 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_7 \text{ ist Wendestelle.} \\ x_8 \approx -1,47: &\quad f''(x_8) = 0 \land f''(x_8) \approx -28,56 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_7 \text{ ist Wendestelle.} \end{aligned}$$

   Die Wendepunkte sind also näherungsweise die folgende Punkte: $W_1(-0,28|0,25), W_2(-1,47|-2,09)$.

9. (Bildbereich) Der Bildbereich von f ist $f(D_f) = \mathbb{R}$.

10. (Graph) Der Verlauf des Graphen kann nun gezeichnet werden.



Extrema, Wendepunkte und Anwendungen Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.24 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Grenzwerte mit L'Hospital — Aufg. 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital.

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} \qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot 2^{-x} \qquad (c)\ \lim_{x\downarrow 0} x \cdot \ln(x)$$

Extremwerte — Aufg. 2

Zerlegen Sie die Zahl 12 so in zwei Summanden, dass ihr Produkt möglichst groß wird.

Abbildungsvorschrift — Aufg. 3

Begründen Sie, warum es keine ganzrationale Funktion f gibt mit folgenden Eigenschaften: f hat Grad 2, f hat Nullstellen für $x = 2$ und $x = 4$ und ein Maximum für $x = 0$.

Extrema — Aufg. 4

Es sei $f = u \circ v$ und die Funktionen u, v und f seien auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage:

(a) Ist x_0 eine Extremstelle von f, dann ist x_0 auch eine Extremstelle von v

(b) Ist x_0 eine Extremstelle von v, dann ist x_0 auch eine Extremstelle von f

Wendepunkte — Aufg. 5

Bei einer Funktion f gelte für alle $x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$. f ist differenzierbar und $f'(x) = x \cdot f(x)$.

(a) Stellen Sie $f''(x)$ und $f'''(x)$ durch $f(x)$ dar.

(b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 ein lokales Extremum hat. Welche Bedingung muss f erfüllen, dass es sich um ein Maximum handelt?

(c) Begründen Sie, dass f keine Wendestelle besitzt.

Kurvendiskussion — Aufg. 6

Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch:

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Anwendungen: Newton-Verfahren — Aufg. 7

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = e^{-x} - \sin(x)$$

und $x_0 = 0$. Gesucht ist eine Nullstelle $\tilde{x}$ der Funktion f.

(a) Bestimmen Sie die lineare Approximation $t(x) = m \cdot x + b$ an der Stelle x_0.

(b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren auf.

(c) Berechnen Sie die ersten Iterierten des Newton-Verfahrens und geben Sie eine Schätzung für die Lösung an.

1.25 Numerische Näherung

1.25.1 Lineare Näherung

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, existiert dort ihre Ableitung f' und es gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

oder mit dem Klein-o von Landau geschrieben:

lineare Näherung — Regel 1

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \quad \text{mit} \lim_{h \to 0} \tfrac{o(h)}{h} = 0\,.$$

In dieser Schreibweise erkennt man deutlich die Tangentengerade und den unbenannten und im Detail unbekannten Rest. Die Tangentengerade an den Graphen an der Stelle x_0 ist die lineare Näherung der Funktion f an der Stelle x_0. Statt die Funktion selbst zu untersuchen, genügt es oft, nur die lineare Näherungen zu betrachten - wenn man sich nicht zu weit von x_0 weg bewegt. Was nicht zu weit weg dabei heißen soll, ist zu untersuchen. Die lineare Näherung hilft, Funktionswerte zu schätzen, und ist wichtig, um das Schwingungs- und Dämpfungsverhalten komplexer Systeme zu untersuchen - dort natürlich keine lineare Näherung in einer Dimension, sondern zum Beispiel in Hunderttausenden von Dimensionen.

Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ hat beispielsweise für $x = 100$ einen bekannten Wert. Welchen Wert hat sie aber für $x = 103$? Das lässt sich mit der Tangentengerade - also der linearen Näherung - schätzen: Statt den Funktionswert $f(103) = \sqrt{103}$ auszurechnen, schauen wir auf der Tangentengerade nach. Die Zutaten, um die Näherung auszurechnen sind:

$$\begin{cases} f(100) = \sqrt{100} = 10, \\ f'(100) = \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20} \end{cases}$$

Lineare Näherung — Bsp 1

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \;\Rightarrow\; \sqrt{103} \approx 10 + \frac{3}{20} = 10,15\,.$$

Allerdings ist diese Zahl alleine noch nicht allzu hilfreich, weil wir keine Idee davon haben, wie groß der Fehler ist. Dieses Argument gilt ja auch bei Messwerten, für die man weder Fehlerschranke noch einen erwarteten Fehler kennt. Kann man die Funktion f zweimal ableiten, lässt sich aber eine Obergrenze für den Fehler angeben. Angenommen wir können f zweimal differenzieren und es gelte $f''(x) = M$ für alle x zwischen x_0 und $x_0 + h$, dann ließe sich die erste Ableitung von f an der Stelle x linearisieren:

$$f'(x) = f'(x_0) + M(x - x_0)\,.$$

Und die Funktion selbst wäre (Beweis durch Ableiten!):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{M}{2}(x - x_0)^2\,.$$

Die schlimmstmögliche Abweichung der Funktion von der Tangentengerade läßt sich also durch die zweite Ableitung beschreiben und nach oben abschätzen durch das Maximum der zweiten Ableitung auf dem gesammten Definitionsbereich.

Also liegt die Tangentengerade an der Stelle $x = x_0 + h$ maximal um plus oder minus diesen Wert neben der wahren Funktion:

Fehlerabschätzung — Regel 2

$$|f(x_0 + h) - (f(x_0) + f'(x_0) \cdot h)\,| \le \frac{\max |f''|}{2} \cdot h^2\,.$$

Der Graph einer zweimal differenzierbaren Funktion liegt also an jedem Punkt in einem nach oben und unten parabelförmigen Korridor um die Tangentengerade. Der Betrag der zweiten Ableitung bestimmt, wie steil diese

Parabeln sind. Beim Beispiel mit $\sqrt{103}$ kann man M so bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f'(x) &= \tfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{4\sqrt{x}^3} \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{4\sqrt{100}^3}}_{=-\frac{1}{4000}} \leq f''(x) < 0\,. \end{aligned}$$

Also wissen wir nun mit Fehlergrenzen:

Approximation ohne Taschenrechner — Bsp 2

$$\sqrt{103} \in [10,15 - \frac{9}{8000}; 10,15]\,.$$

Zum Vergleich: Der exakte Wert ist $\sqrt{103} = 10,148891\ldots$. Ähnliche Überlegungen kann man für höhere Ableitungen anstellen. Es ergibt sich dann ein Polynom, das sogenannte Taylor-Polynom

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{4!}f''''(x_0)h^4 \ldots,$$

das sich an einer Stelle x_0 bestmöglich an die Funktion f schmiegt. Für eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion kann man das Taylor-Polynom bis zum Grad n entwickeln:

Taylor-Entwicklung und Restglied nach Lagrange — Regel 3

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Das n-te Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $x_0 \in I$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,. \end{aligned}$$

Der Fehler $|f(x) - T_n(x)|$ ist durch den Betrag des sogenannten Lagrangeschen Restglieds R_n beschränkt. Es gilt:

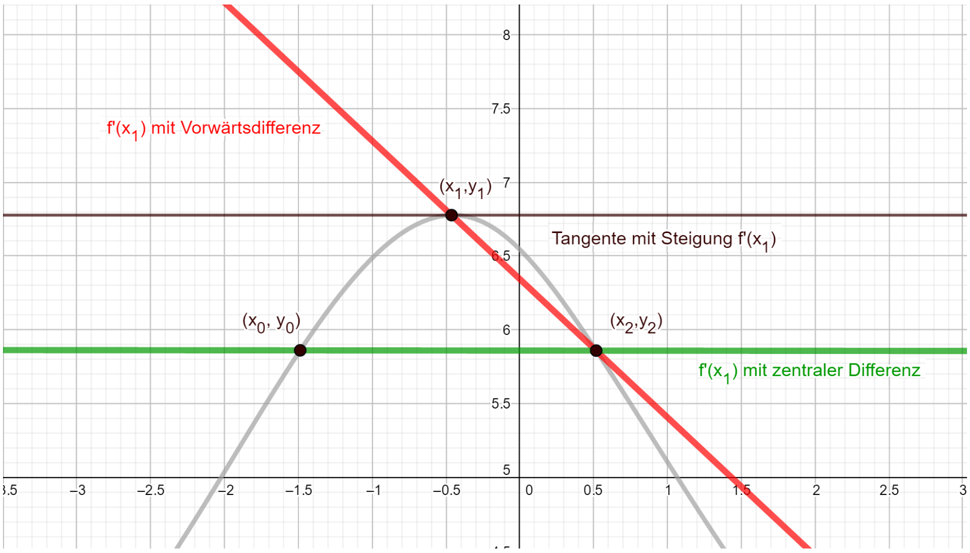
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\,.$$

1.25.2 Numerische Schätzung von Ableitungen

Betrachtet man ein Signal, das die zeitliche Veränderung einer physikalischen Größe darstellt und nehmen wir an, dass der Abstand zweier aufeinanderfolgender Messungen immer der feste Zeitabstand h ist. Angenommen man hätte eine differenzierbare Funktion f abgetastet, die auch für alle reellen Zeiten zwischen den Abtastpunkten definiert ist, dann stellt sich die Frage: Kann man allein aus den Messwerten die Ableitung von f schätzen? Offensichtlich erhalten wir eine Approximation der Ableitung an der Messstelle x_1 durch die Sekantensteigung, also

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}\,.$$

Verschiedene Approximationen für $f'(x_1)$ Bsp 3



Die Skizze macht klar, dass die Sekantensteigung von der Stelle links (also $x_0 = x_1 - h$) zur Stelle rechts (also $x_2 = x_1 + h$) zu nehmen. Diesen Differenzenquotienten nennt man die zentrale Differenz.

Approximation der ersten Ableitung mit $o(h^2)$ Regel 4

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1+h) - f(x_1-h)}{2h}\,.$$

Die zentrale Differenz berechnet die erste Ableitung exakt, wenn die Funktion f eine quadratische Parabel ist. Der Fehler dieser Schätzung hängt also offensichtlich von der dritten Ableitung f''' ab. Er fällt für $h \to 0$ mit dem Quadrat der Schrittweite h.

Die übliche Schätzung für die zweite Ableitung $f''(x_0)$ ist die sogenannte zweite Differenz.

Approximation der zweiten Ableitung mit $o(h^2)$ Regel 5

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\,.$$

Die zweite Differenz berechnet die zweite Ableitung exakt, wenn die Funktion f eine kubische Parabel ist. Der Fehler dieser Schätzung hängt also von der vierten Ableitung $f'''' = f^{(4)}$ ab. Er fällt für $h \to 0$ mit dem Quadrat der Schrittweite h, wie der Fehler der üblichen Schätzung für die erste Ableitung.

Numerische Näherung Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in 1.25 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Zentrale Differenz und zweite Differenz — Aufg. 1

(a) Zeigen Sie, dass sich die erste Ableitung von Polynomen vom Grad 2 mit der zentralen Differenz exakt berechnen läßt.

(b) Zeigen Sie, dass sich die zweite Ableitung von Polynomen vom Grad 4 mit der zweiten Differenz exakt berechnen läßt.

Bestapproximation — Aufg. 2

Gegeben seien Messungen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ einer Größe $x \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Approximation $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, deren Abstand zu allen Messwerten gleichzeitig minimal ist, also

$$\sum_{k=1}^{n} |x - x_k|^2 \stackrel{!}{=} \min .$$

Bestimmen Sie eine Formel für $\tilde{x}$.

Taylorentwicklung — Aufg. 3

Gegeben sei die Funktion $f : x \mapsto \cos(x)$. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung T_7 von f an der Stelle $x_0 = 0$ und schätzen Sie den Betrag des Lagrangeschen Restglieds R_8 im Intervall $x \in I = [-\pi/6, \pi/6]$ ab.

Interpolation (Wiederholung) — Aufg. 4

Gegeben sind die Punkte

i	0	1	2	3
x_i	-3	-1	0	2
y_i	-3	1	0	82

(a) Bestimmen Sie den Grad n des Interpolationspolynoms.

(b) Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten des Interpolationspolynoms in der Darstellung

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

und lösen Sie es.

Interpolation (Wiederholung) — Aufg. 5

Eine Funktion der Form

$$f : x \mapsto \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) ,$$

soll durch die Punkte $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ mit

$$(0|1),\ (\pi/6| - 1),\ (\pi/2| - 3)$$

gelegt werden. Bestimmen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, a_1, b_1 und lösen Sie es.

Kapitel 2

Mathematik 2

2.1 Partialbruchzerlegung

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- Partialbruchzerlegungen durchzuführen

Sie können bereits...

• Polynome faktorisieren	1.8
• Polynomdivisionen durchführen	1.8
• lineare Gleichungssysteme lösen	1.19

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.1.1 Aufgabenstellung

Erinnern Sie sich an die Faktorisierung von Polynomen? Die Idee war sogenannte Linearfaktoren von einem Polynom abzuspalten: 1.8

$$4x^3 - 28x^2 + 28x + 60 = (x-3) \cdot (4x^2 - 16 - 20) = 4 \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)\,.$$

Der letzte Faktor in der Zerlegung ist gegebenenfalls ein Produkt quadratischer Terme, die in $\mathbb{R}$ nicht weiter zerlegbar sind:

$$x^4 + 8x^3 + x^2 + 6x + 13 = (x-7) \cdot (x^3 - x^2 - x - 1) = (x-1) \cdot (x-7) \cdot (x^2+1)\,.$$

Ähnlich wie man Polynome in Faktoren zerlegt, kann man gebrochenrationale Funktionen in Partialbrüche [partial fractions] zerlegen: 1.11

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\,.$$

Es wird sich herausstellen, dass wir diese Partialbruchzerlegung brauchen, um gebrochenrationale Funktionen integrieren zu können. Damit wir die Partialbruchzerlegung dann parat haben, führen wir sie jetzt ein.

2.1.2 Vorgehensweise

Für eine echtgebrochenrationale Funktion f mit $f = \dfrac{p}{q}$, für die also gilt, dass der Grad von q größer ist als der Grad von p, schauen wir uns nacheinander die folgenden Fälle beispielhaft an:

1. Beispiel 1: q hat einfache Nullstellen,
2. Beispiel 2: q hat mehrfache Nullstellen,
3. Beispiel 3: q hat quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen.

Die allgemeine Herangehensweise läßt sich aus den Beispielen ablesen.

Partialbruchzerlegung bei einfachen Polstellen Bsp 1

Partialbruchzerlegung:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{x}{(x+1)\cdot(x-1)}?$$

Ansatz:

$$\frac{x}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\,.$$

Bestimmung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x+1)\cdot(x-1)} &\overset{!}{=} \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{(x+1)\cdot(x-1)} &\overset{!}{=} \frac{(A+B)\cdot x+(B-A)}{(x+1)\cdot(x-1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \overset{!}{=} (A+B)\cdot x+(B-A) \Leftrightarrow \begin{cases}(A-B) & =0 \\ (A+B) & =1\end{cases} \Leftrightarrow A=\frac{1}{2} \wedge B=\frac{1}{2}\,.$$

Lösung:

$$\frac{x}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,.$$

Partialbruchzerlegung bei zweifachen Polstellen

Bsp 2

Partialbruchzerlegung:

$$f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{2x-1}{(x-1)^2}?$$

Ansatz:

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}\,.$$

Bestimmung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{(x-1)^2} &\overset{!}{=} \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(x-1)^2} &\overset{!}{=} \frac{A\cdot x-A+B}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x-1 \overset{!}{=} A\cdot(x-1)+B=A\cdot x+(B-A) \Leftrightarrow \begin{cases}A & =2\,, \\ B-A & =-1\end{cases} \Leftrightarrow A=2\wedge B=1\,.$$

Lösung:

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

Partialbruchzerlegung bei quadratischen Termen

Bsp 3

Partialbruchzerlegung:

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{(1+x)^2}{x\cdot(x^2+1)}?$$

Ansatz:

$$\frac{(1+x)^2}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\,.$$

Bestimmung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)^2}{x\cdot(x^2+1)} &\overset{!}{=} \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{(1+x)^2}{x\cdot(x^2+1)} &\overset{!}{=} \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1 \overset{!}{=} (A+B)x^2+Cx+A \Leftrightarrow \begin{cases}A & =1\,, \\ C & =2\,, \\ A+B & =1\,.\end{cases}$$

Lösung:

$$\frac{(1+x)^2}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1}\,.$$

Bemerkungen:

- Im Allgemeinen treten die vorigen Fälle alle zusammen auf.
- Die Betrachtungen gelten nur für echtgebrochenrationale Funktionen, andernfalls muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

Die allgemeine Vorgehensweise ist also immer:

1. Eventuell Polynomdivision durchführen. 1.8
2. Eventuell die Linearfaktorzerlegung des Nenners bestimmen. 1.8
3. Sinnvollen Ansatz für die Zerlegung machen. Regel 1
4. Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten bestimmen und lösen. 1.19
5. Partialbruchzerlegung aufschreiben.

Ansätze

Regel 1

- Zu jedem Faktor $(x-x_i)^{k_i}$ mit $k_i \geq 1$ des Nennerpolynoms gehört der Ansatz

$$\frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \cdots + \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}}$$

- Zu jedem Faktor $(x^2+a_ix+b_i)^{k_i}$ mit $(a_i^2-4b_i) < 0$ des Nennerpolynoms gehört der Ansatz

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+a_ix+b_i} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+a_ix+b_i)^2} + \cdots + \frac{B_{k_i}x+C_{k_i}}{(x^2+a_ix+b_i)^{k_i}}$$

Die Frage, auf die wir bislang nicht konkret eingegangen sind, ist: Wie bestimmt man auf geschickte Weise die Zerlegungskoeffizienten, die im Ansatz auftauchen? Es gibt zwei Möglichkeiten:

- man kann entweder einen Koeffizientenvergleich durchführen wie in den vorigen Beispielen, oder,
- man kann durch Einsetzen spezieller x-Werte Gleichungen ableiten.

Entscheidet man sich für die zweite Möglichkeit, dann kommt man ganz ohne einen Koeffizientenvergleich aus, wie das folgende Beispiel zeigt:

Partialbruchzerlegung: Bestimmung der Koeffizienten durch Einsetzen

Bsp 4

Partialbruchzerlegung:

$$f:\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{x}{(x-1)^3\cdot(x-2)} := \frac{p(x)}{q(x)}?$$

Ansatz:

$$\frac{x}{(x-1)^3\cdot(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{C_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{x-2}\,.$$

Bestimmung der Koeffizienten:

$$\frac{x}{(x-1)^3\cdot(x-2)} \overset{!}{=} \frac{A_1\cdot(x-1)^2\cdot(x-2) + B_1\cdot(x-1)\cdot(x-2) + C_1\cdot(x-2) + A_2\cdot(x-1)^3}{(x-1)^3\cdot(x-2)}$$

$$\Rightarrow x \overset{!}{=} A_1\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)B_1\cdot(x-1)\cdot(x-2) + C_1\cdot(x-2) + A_2\cdot(x-1)^3\ (*)$$

Und $(*)$ muss für alle x gelten! Die Idee ist nun vier Werte für x zu wählen und damit vier Gleichungen zu erhalten. Geschickt ist es die Nullstellen von p und q zu betrachten:

$$\begin{aligned} q(1)=0: \quad &\Rightarrow x=1 \text{ in } (*) \Rightarrow & -C_1 &= 1 \Rightarrow C_1=-1\,, \\ q(2)=0: \quad &\Rightarrow x=2 \text{ in } (*) \Rightarrow & A_2 &= 2 \Rightarrow A_2=2\,, \\ p(0)=0: \quad &\Rightarrow x=0 \text{ in } (*) \Rightarrow & -2A_1+2B_1 &= 0 \Rightarrow A_1=B_1\,. \end{aligned}$$

Nun fehlt uns noch eine Gleichung. In der Hoffnung auf kleine Zahlen setzen wir $x=-1$ in $(*)$ ein und erhalten:

$$-12A_1+6B_1=-2 \Rightarrow 6A_1=-2 \Rightarrow A_1=\frac{1}{3}$$

Lösung:

$$\frac{x}{(x-1)^3\cdot(x-2)}=\frac{1}{3(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{x-2}\,.$$

In der Praxis setzt man diese beiden Ideen zur Bestimmung der Konstanten simultan ein.

Partialbruchzerlegung Aufgaben

Regeln und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.1 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Faktorisierung — Aufg. 1

Zerlegen Sie die folgenden Polynome weitestgehend in Linearfaktoren.

$(a)\ 4y^3 - 8y^2 - 3y + 9 \quad (b)\ a^4 + 3a^2 - 10 \quad (c)\ x^4 + 2x^3 - 35x^2 \quad (d)\ -64 + b^2$

Polynomdivision — Aufg. 2

Führen Sie folgende Polynomdivisionen aus.

$(a)\ (x^2 + x) : (x - 1) \qquad (b)\ (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1)$

$(c)\ (x^3 + x^2 - 5x + 3) : (x - 1)^2 \qquad (d)\ (x^4 + x^3 - 2x) : (x - 1)$

Gauß-Algorithmus — Aufg. 3

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} A_1 & & & + & B_2 & = & 0 \\ 4A_1 & + & 4A_2 & + & 2B_2 & = & -2 \\ 4A_1 & - & 2A_2 & + & 8B_2 & = & -38 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & x & + & y & + & z & = & 0 \\ & x & - & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & 5x & + & y & + & z & = & -6 \end{array}\right.$$

Partialbruchzerlegung — Aufg. 4

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

$$(a)\ \frac{2x^3 - x^2 - 6x + 2}{(x-5)^2(x^2+3x+4)} \qquad (b)\ \frac{x+1}{x(x^2+1)^2} \qquad (d)\ \frac{x^2 - 5x}{(x-2)^3}$$

Partialbruchzerlegung — Aufg. 5

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch. Hinweis: Die Nennerpolynome haben mindestens eine ganzzahlige Nullstellen.

$$(a)\ \frac{1}{x^3 + x} \qquad (b)\ \frac{(4x^5 - 6x + 13)(x-1)(x^2-1)}{x^3 - x^2 - x + 1} \qquad (c)\ \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$$

$$(d)\ \frac{-x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x + 3}{x^2 + 3x - 4} \qquad (e)\ \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 3x + 2}$$

Partialbruchzerlegung — Aufg. 6

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

$$(a)\ \frac{1}{x^2 - a^2},\ a > 0 \qquad (b)\ \frac{4x^3}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \qquad (c)\ \frac{3z}{z^3 - 3z^2 - 4}$$

$$(d)\ \frac{4x - 2}{x^2 - 2x - 63} \qquad (e)\ \frac{2x + 1}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

2.2 Integration

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- die Eigenschaften des Integrals anzuwenden
- den Hauptsatz der Differential und Integralrechnung anzuwenden
- Uneigentliche Integrale zu diskutieren
- Integrale numerisch zu approximieren

Sie können bereits...

- Ableitungen bilden 1.23
- Grenzwerte untersuchen 1.21

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

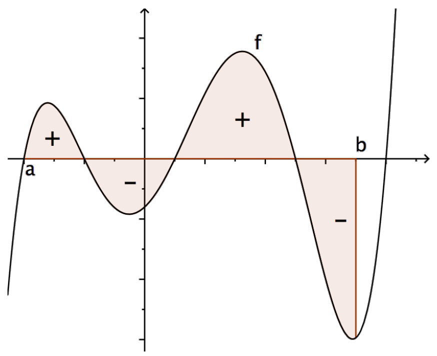
2.2.1 Integrierbare Funktionen und Eigenschaften des Integrals

Gegeben sei eine Funktion f, die auf dem Intervall $[a, b]$ definiert ist. Das bestimmte Integral [definite integral]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

misst die vorzeichenbehaftete Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse:

Integral Def. 1



$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ mit } \ldots$$

- Integrand $f(x)$,
- untere Integrationsgrenze a,
- obere Integrationsgrenze b,
- Differential $\mathrm{d}x$.

Eigenschaften des Integrals Regel 1 Aufgabe

1. Das Integral eines Vielfachen (auch eines negativen Vielfachen!) einer Funktion ist das Vielfache des Integrals der Funktion:

$$\forall C \in \mathbb{R}: \quad \int\limits_a^b C \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = C \cdot \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Das Integral der Summe zweier Funktionen ist die Summe der Integrale:

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Das Integral ist bezüglich der Integrationsgrenzen additiv:

$$\forall\, c \in [a, b]: \quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Vertauscht man die Integrationsgrenzen so ändert sich das Vorzeichen des Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

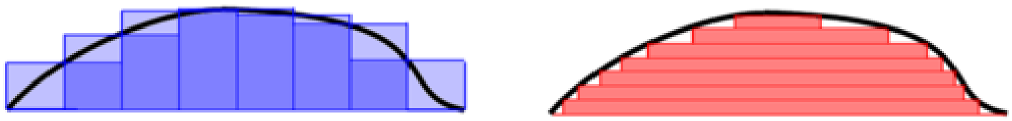
Bemerkungen:

- Eine geometrische Fläche ist immer positiv und das heißt, dass das Integrationsgebiet entsprechend zu zerlegen ist, wenn man eine geometrische Fläche als Integral berechnen möchte! Aufgabe
- Dass das Integral das Vorzeichen der Funktion berücksichtigt, führt dazu, dass " Integration" eine lineare Abbildung ist! 1.18
- Das Integralzeichen $\int$ ist eigentlich ein langes S und steht für Summe, das Differential $\mathrm{d}x$ gibt die Variable an, über die integriert wird (hier x), und steht formal für eine unendliche kleine Differenz zweier verschiedener Werte x_1 und x_2.

Eine einfache Art, sich das Integral vorzustellen, ist die Fläche unter der Funktion in schmale Streifen zu schneiden, diese als Rechtecke anzunähern und dann aufzusummieren. Es gibt zwei Möglichkeiten Rechtecke zu bilden:

- entweder schneidet man die x-Achse in kleine Streifen, oder,
- man schneidet die y-Achse in kleine Streifen.

Abbildung 2.1: links: Riemann-Integral, rechts: Lesbuege-Integral



Die erste Idee, links skizziert, führt auf das Riemann-Integral. Die zweite Idee, rechts skizziert, führt auf das Lebesgue-Integral.
Bemerkungen:

- Das Lebesgue-Integral ist allgemeiner und erlaubt die Integration von pathologischen Funktionen, beispielsweise der folgenden:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\,,\\ 0, & \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}\quad\Rightarrow\forall\,a,b\in\mathbb{R}:\quad\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

- Für die Praxis spielen die verschiedenen Definitionen des Integrals keine Rolle. Die Funktionen, die uns interessieren sind stückweise stetig und beschränkt und die lassen sich über jeden endlichen Integrationsbereich integrieren.

Der Vollständigkeit halber schließen wir diesen Absatz mit der Definition des Rieman-Integrals ab. Hierzu brauchen wir die Begriffe " Riemann-Summe" und " Riemann-Integrabilität" :

Riemann-Summe Def. 2

Gegeben sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z des Intervalls $[a,b]$ in Stützstellen $x_i, i = 0,\cdots,n$, also:

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n}[x_{i-1},x_i]\,,$$

Wählen wir in jedem Teilintervall eine beliebige Zwischenstelle $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so heißt

$$S\left(f, Z, (t_i)_i\right) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{= \Delta x_i}$$

die Riemannsche Summe von f zur Zerlegung Z mit Zwischenstellen $(t_i)_i$.

Die Riemann-Summe verallgemeinert die aus der Schule bekannten Ober- und Untersummen.

Riemann-Integrabilität — Def. 3

Gegeben sei eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine Folge von Zerlegungen $(Z)_{n\in\mathbb{N}}$, für die gilt

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0 \quad \text{mit} \quad \delta_n := \max_{1\leq i\leq n} \Delta x_i \,.$$

Wählen wir für jede Zerlegung in jedem Teilintervall eine beliebige Zwischenstelle $\left(t_i^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, so heißt

$$\left(S\left(f, Z, (t_i^{(n)})_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Riemann-Folge von f. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar oder einfach nur integrierbar, falls jede Riemann-Folge von f konvergiert.

Nun haben wir das Vokabular zusammen, um das Integral zu definieren:

Riemann-Integral — Regel 2

Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann haben alle Riemann-Folgen den gleichen Grenzwert $I \in \mathbb{R}$. Diesen Grenzwert nennen wir im folgenden Riemann-Integral bzw Integral und schreiben:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := I \,.$$

2.2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Wert des Integrals hängt von den Integrationsgrenzen a und b ab. Man kann das Integral also als Funktion beispielsweise von b auffassen,

$$F : b \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \,,$$

und sich fragen, was die Ableitung von F nach b ist. Um die Frage zu beantworten, betrachten wir den Differenzenquotienten und erhalten 1.22

$$\frac{F(b+h) - F(b)}{h} = \frac{\int_a^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{h} = \frac{\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x}{h} \approx \frac{f(b)\cdot h}{h} = f(b) \,. \quad (*)\,,$$

wobei im letzten Schritt der wahre Flächeninhalt über dem Intervall $[b, b + h]$ durch die Fläche des Rechtecks mit Seitenlängen h und $f(b)$ abgeschätzt wurde.

Die Ableitung hebt also in gewisser Weise das Integral auf und das können wir nutzen, um Integrale zu berechnen. Betrachten wir beispielsweise

$$\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x \,.$$

Wegen $(*)$ wissen wir, dass die Ableitung des Integrals von der oberen Grenze b abhängt und b^3 sein muss:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x\right) \overset{!}{=} b^3 \Rightarrow \int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}b^4 + C \,.$$

Die letzte Gleichung muss auch für $b = a$ gelten, also:

$$0 = \int_a^a x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}a^4 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}a^4 \,.$$

Damit ist das Integral gelöst:

$$\int_a^b x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(b^4 - a^4\right) \,.$$

Dieser Trick funktioniert immer und liefert ein Vorgehen zur Berechnung bestimmter Integrale:

1. Finde zum Integrand f eine Funktion F mit
$$F' = f \,.$$
2. Berechne das Integral wie folgt:
$$\int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \,.$$

Bemerkungen:

- Die Funktion F nennt man Stammfunktion [antiderivative].
- Die Stammfunktion F schreibt man auch oft als unbestimmtes Integral ohne Integrationsgrenzen.
- Stammfunktionen sind nur bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt.
- Das unbestimmte Integral ist eine Funktion, die von der Integrationsvariable abhängt. 1.4
- Das bestimmte Integral ist eine Zahl - nämlich die vorzeichenbehaftete Fläche unter dem Integrand.

Der Zusammenhang zwischen Ableitung und Stammfunktion wird im sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [fundamental theorem of calculus] zusammengefasst.

Hauptsatz der Differtial und Inegralrechnung — Regel 3

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt:

- Für jede Stammfunktion F von f und alle $\alpha, \beta \in [a, b]$ gilt
$$\int\limits_\alpha^\beta f(x) \,\mathrm{d}x = F(\beta) - F(\alpha) =: \Big[F(x)\Big]_\alpha^\beta \,.$$
- Für $c \in [a, b]$ lautet eine Stammfunktion von f:
$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x) = \int_c^x f(t) \,\mathrm{d}t \,.$$

Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann man benutzen, um Integrale auszurechnen: Aufgabe

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung — Bsp 1

$$\int\limits_0^4 x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \Big[2\sqrt{x}\Big]_0^4 = 4 \,.$$

Um Stammfunktionen zu finden, stellt man eine Tabelle von Ableitungen auf und liest diese Tabelle rückwärts. Wichtige Stammfunktionen sind die folgenden:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
r	rx	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$x^a, a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
x^{-1}	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$a^x, a > 0$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathrm{arccot}(x)$

2.2.3 Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale sind Integrale mit unbeschränktem Integrationsgebiet und/oder unbeschränktem Integranden. Die Frage, ob der Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen unter diesen Bedingungen eine endliche Zahl ist oder nicht, ist mit den bisherigen Mitteln nicht zu beantworten. Uneigentliche Integrale sind problematisch und man muss sie mit Grenzwertbetrachtungen behandeln, um festzustellen, ob sie endlich, also definiert, sind. 1.21 Aufgabe

Definierte uneigentliche Integrale Bsp 2

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\Big[-e^{-x}\Big]_0^M = \lim_{M\to\infty}\left(-e^{-M}-(-1)\right) = 1 < \infty\,,$$

$$\int_0^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big[2\sqrt{x}\Big]_\varepsilon^{16} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(2\sqrt{16}-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{16} = 8\,.$$

Nicht-definierte uneigentliche Integrale Bsp 3

$$\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\Big[-\cos(x)\Big]_0^M = \lim_{M\to\infty}\left(1-\cos(M)\right)\ \text{kein Grenzwert}\,,$$

$$\int_0^{16}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^{16}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big[\ln(|x|)\Big]_\varepsilon^{16} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\ln(16)-\ln(\varepsilon)\right)\ \text{kein Grenzwert}\,.$$

2.2.4 Numerische Integration

Zu allen üblichen Funktionen lässt sich schnell mit Hilfe von Produktregel, Kettenregel und so weiter die Rechenvorschrift der Ableitung hinschreiben. Mit Stammfunktionen ist das leider nicht so einfach. Zwei Probleme gibt es:

1. Viele Funktionen haben keine Stammfunktion, die man mit üblichen Funktionen geschlossen hinschreiben kann. Die Glockenfunktion $x \mapsto e^{-x^2}$ beispielsweise läßt sich zwar integrieren, aber man findet keine Stammfunktion in Termen bekannten Funktionen. Aufgabe
2. Wenn man nur eine Reihe von Messdaten zur Verfügung hat, dann kann man keine Stammfunktion bestimmen, weil keine Funktionsabbildung gegeben ist.

Ohne Stammfunktion bleibt eigentlich nur die numerische Integration: Man schätzt die Fläche unter der Kurve mit Hilfe endlich vieler Funktionswerte. Vorausgesetzt

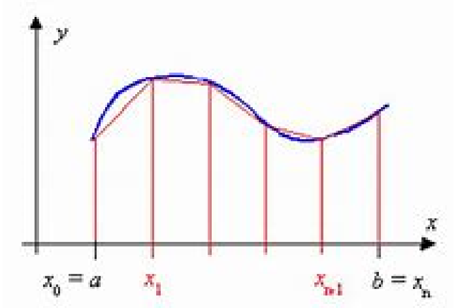
- das Integrationsintervall $[a,b]$ ist in kleine, gleich große Streifen der Breite $h=(b-a)/N$ zerlegt:

$$x_k = \begin{cases} a, & k=0\,,\\ a+k\cdot h, & 0<k<N\,,\\ b, & k=N\,.\end{cases}$$

- und f ist an den äquidistanten Sützstellen x_k bekannt:

$$y_k = \begin{cases} f(a), & k=0\,,\\ f(x_k)=f(a+k\cdot h), & 0<k<N\,,\\ f(b)\,, & k=N\,,\end{cases}$$

dann läßt sich das bestimmte Integral durch die sogenannte Trapezformel annähern. Aufgabe



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad\approx\quad \frac{f(x_1)+f(x_0)}{2}\cdot h + \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}\cdot h + \cdots +$$
$$+\frac{f(x_{N-2})+f(x_{N-1})}{2}\cdot h + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}\cdot h$$
$$= h\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(x_N)}{2}\right) := T_N(f)\,.$$

Trapezformel — Regel 4

Trapezformel für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx T_N(f) = h\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + \frac{f(x_N)}{2}\right)\,.$$

Fehlerabschätzung für $f'' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\exists\,\xi \in [a,b]: \quad \left|T_N(f) - \int_a^b f(x)\right| = \frac{(b-a)\cdot f''(\xi)}{12}\cdot h^2$$

Trapezformel — Bsp 4

Gesuchter Integralwert:

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^\pi = 2\,.$$

Trapezformel für $N = 4$:

$$T_4(\sin) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\left(0\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(1\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 1.896\,.$$

Mit asymptotisch gleichem Rechenaufwand kann man die Funktion sogar durch Stücke kubischer (nicht nur quadratischer!) Parabeln annähern und erhält die Simpson-Formel. Über jedem Intervall der Breite h zieht man zur Approximation des Flächeninhalts neben den Stützstellen an den Intervallenden noch die Intervallmitte heran.

Simpsonformel — Regel 5

Simpsonformel für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad\approx\quad S_N(f) := \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4\cdot f\left(\frac{x_1+x_0}{2}\right) + 2\cdot f(x_1) + 4\cdot f\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \cdots 2\cdot f(x_{N-1}) + 4\cdot f\left(\frac{x_{N-1}+x_N}{2}\right) + f(x_N)\right)\,.$$

Fehlerabschätzung für $f^{(4)} : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\exists\,\xi \in [a,b]: \quad \left|S_N(f) - \int_a^b f(x)\right| = \frac{(b-a)\cdot f^{(4)}(\xi)}{2880}\cdot h^4$$

Bemerkungen:

- Eine Verbesserung des Trapezverfahrens ist das sogenannte das Romberg-Verfahren. Das Romberg-Verfahren nutzt das Trapezverfahren für verschiedene Schrittweiten.
- Die naheliegendste Formel zur numerischen Integration ist die Summe von Rechtecken zu bilden (zum Beispiel Ober- oder Untersumme). Das Preis-Leistungs-Verhältnis dieser Rechteck-Verfahren ist allerdings schlecht im Vergleich zur Trapezformel.

Aufgabe

Integral Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.2 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Flächeninhalt — Aufg. 1

Berechnen mit Hilfe geometrischer Überlegungen den Flächeninhalt zwischen den Graphen und x-Achse

$$(a) \int_0^4 (2x-1)\mathrm{d}x \qquad (b) \int_0^2 (x-1)^3\mathrm{d}x \qquad (c) \int_0^1 |\sin(2\pi x)|\mathrm{d}x$$

Flächeninhalt (Trapezformel) — Aufg. 2

(a) A sei der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r. Zeigen Sie: $2r^2 < A < 4r^2$.

(b) Entwickeln Sie eine Methode zur Bestimmung von A und implementieren Sie diese (Matlab, Excel).

(c) Was ist der Unterschied zur Flächeninhaltsberechnung von Vielecken?

Eigenschaften des Integrals — Aufg. 3

Begründen Sie, dass jede Integralfunktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ mindestens eine Nullstelle hat.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — Aufg. 4

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen folgender Funktionen:

$$(a)\ x \mapsto 4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5 \quad (b)\ x \mapsto e^x + x^2 - 2x + \sin(x) \quad (c)\ x \mapsto \frac{\tan(x)}{\sin(2x)}$$

Bestimmte und uneigentliche Integrale — Aufg. 5

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale, vorausgesetzt sie existieren:

$$(a) \int_0^4 \left(x^3 - 5x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right)\,\mathrm{d}x \quad (b) \int_1^4 \frac{1-z^2}{z}\,\mathrm{d}z \quad (c) \int_0^{0,5} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad (d) \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2(x)}{2\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$(e) \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x \quad (f) \int_0^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad (g) \int_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (h) \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Numerische Integration — Aufg. 6

Das folgende bestimmte Integral soll näherungsweise bestimmt werden:

$$\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x = 20\,.$$

Bestimmen Sie eine Zerlegung des Intervalls $[1,3]$ in 4 gleich große Intervalle. Approximieren Sie das Integral mit Hilfe einer Rechteckregel, mit Hilfe der Trapezregel und mit Hilfe der Simpson-Regel.

Simpson-Regel — Aufg. 7

Bestimmen Sie den relativen Fehler, den Sie bei einer Approximation des Intgrals

$$\int_0^1 x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Simpson-Regel auf drei äquidistanten Teilintervallen machen.

2.3 Integrationsregeln

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen. . .	
• Integrale über stückweise stetige Funktionen zu berechnen	
• Integrale mit Integrationsregeln zu berechnen	
Sie können bereits. . .	
• die Eigenschaften des Integrals anwenden	2.2
• die Ketten-, Produkt- und Quotientenregel anwenden	1.23
• Partialbruchzerlegungen durchführen	2.1

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.3.1 Integration stückweise stetiger Funktionen

Neben den elementaren Integrationstechniken, die sich aus den Eigenschaften des Integrals ergeben, gibt es Tricks und wichtige Regeln, die in diesem Kapitel vorgestellt werden. Aufgaben

Wenn der Integrand $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ einen Knick macht oder stückweise definiert ist, dann heißt es nicht, dass man keine Stammfunktion finden kann. In diesen Fall kann es helfen das Integrationsgebiet zu zerlegen. Findet man in jedem Teilintervall eine Stammfunktion, dann kann man das Integral berechnen.

Integration durch Zerlegung des Integrationsgebiets Bsp 1

Integral:

$$\int_{-2}^{2} |x-1|\,\mathrm{d}x = ?$$

Stammfunktionen:

$$\begin{cases} F_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + C, & x \in [-2, 1]\,, \\ F_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C, & x \in [1, 2]\,. \end{cases}$$

Lösung:

$$\int_{-2}^{2} |x-1|\,\mathrm{d}x = \Big[F_1(x)\Big]_{-2}^{1} + \Big[F_2(x)\Big]_{1}^{2} = 1 - \frac{1}{2} - (-2) + \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = 5\,.$$

Integration durch Zerlegung des Integrationsgebiets Bsp 2

Integral:

$$\int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = ? \quad \text{mit} \quad f : t \mapsto \begin{cases} 2e\cdot t, & t < 1\,, \\ 2e^t, & t \geq 1\,. \end{cases}$$

Stammfunktionen:

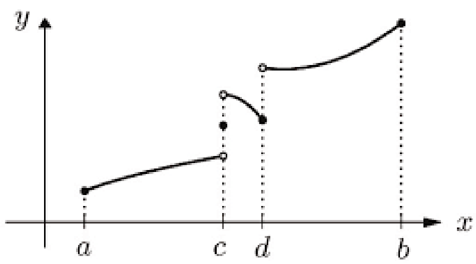
$$\begin{cases} F_1(t) = t^2 e + C, & t \in [0, 1]\,, \\ F_2(t) = 2e^t + C, & t \in [1, 2]\,. \end{cases}$$

Lösung:

$$\int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F_1(t)\Big]_{0}^{1} + \Big[F_2(t)\Big]_{1}^{2} = e + 2e^2 - 2e = 2e^2 - e\,.$$

Wenn der Integrand f auf $[a, b]$ nicht stetig, aber stückweise stetig ist, dann kann man genauso vorgehen. Zuerst die Definition einer stückweise stetigen Funktion und dann die Verallgemeinerung der Integrationstechnik.

Stückweise stetige Funktionen Def. 1



f ist auf $[a, b]$ stückweise stetig, das heißt:

- f ist bis auf höchstens endlich viele Punkte $x_1, \cdots, x_n \in [a, b]$ stetig,
- der links- und der rechtsseitige Grenzwert an allen Punkten $x \in (a, b)$ existiert,
- der rechtsseitige Grenzwert am linken Intervallende existiert und
- der linksseitige Grenzwert am rechten Intervallende existiert.

Integration stückweise stetiger Funktionen Regel 1

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig mit n Unstetigkeitsstellen $x_k \in [a, b], k = 1, \cdots, n$, und $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$. Dann ist f integrierbar über $[a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \overline{f}_k(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei $\overline{f}_k$ die stetige Fortsetzung von f im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ bezeichnet.

2.3.2 Integration von Produkten

Wie kann man die Produktregel der Ableitung rückwärts lesen, um etwas über ein Integral zu erfahren? 1.23

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'\,.$$

Die Produktregel gibt uns eine Stammfunktion für $f'g + fg'$. Also kann man das bestimmte Integral dieser Funktion ausrechnen:

$$\int_a^b \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b\,.$$

Umstellen liefert die partielle Integration [integration by parts]:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x) \cdot g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Grob gesagt, kann man also im Integral eine Ableitung auf den anderen Faktor überwälzen, wenn man das Vorzeichen ändert und noch einen Randterm dazuschreibt. Die entsprechende Stammfunktion lautet also:

Partielle Integration Regel 2

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x + C\,.$$

Partielle Integration ist dann praktisch, wenn die zu integrierende Funktion ein Produkt zweier Faktoren ist, von denen einer durch Ableiten deutlich einfacher und der andere durch Integrieren nicht schlimmer wird.

Partielle Integration Bsp 3

$$\int \cos(x) \cdot x\,\mathrm{d}x = \sin(x) \cdot x - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x + C = x\sin(x) + \cos(x) + C\,.$$

2.3.3 Integration von Verkettungen

Wie kann man die Kettenregel der Ableitung rückwärts lesen, um etwas über ein Integral zu erfahren? Schreiben 1.23

wir die Kettenregel für die Ableitung von $x \mapsto F(u(x))$ hin, wobei F eine Stammfunktion zu f sein soll:

$$\frac{\mathrm{d}F(u(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = f\left(u(x)\right) \cdot u'(x)\,.$$

Die Kettenregel gibt uns eine Stammfunktion für $x \mapsto f(u(x))u'(x)$. Also kann man das bestimmte Integral dieser Funktion ausrechnen:

$$\int_a^b f\left(u(x)\right) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(u(x))\Big]_a^b = F\left(u(b)\right) - F\left(u(a)\right)\,.$$

Dieser letzte Ausdruck ist wieder ein Integral, nämlich das folgende:

$$\int_a^b f\left(u(x)\right) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Das ist die Substitutionsregel [integration by substitution].

Substitutionsregel — Regel 3

$$\int f\left(u(x)\right) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u + C\,.$$

Bemerkungen: Aufgabe

- Mit der Substitutionsregel wird die Integrationsvariable verändert.
- Beim Berechnen eines bestimmten Integrals, müssen die Integrationsgrenzen angepasst werden!

Die Substitutionsregel hilft in folgenden Fällen:

- Man erkennt, dass der Integranden ein Produkt einer Komposition $f \circ u$ und einer Funktion g ist und g bis auf einen Faktor mit u' übereinstimmt. Ein Beispiel: 1.12

Integration durch Substitution — Bsp 4

Integral:

$$\int_3^5 x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = ?$$

Identifikation:

$$f(u) = \sin(u) \wedge u(x) = x^2 \Rightarrow (f(u(x)))' = \cos(x^2) \cdot (2x)$$

Lösung:

$$\int_3^5 x{\cdot}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_3^5 \frac{1}{2}(2x){\cdot}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x \overset{u(x)=x^2}{=} \frac{1}{2}\int_{3^2}^{5^2} \cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\sin(u)\Big]_9^{25} = \frac{1}{2}\left(\sin(25) - \sin(9)\right)\,.$$

- Man erkennt, dass sich der Integrand durch die innere Ableitung, die durch eine Substitution hinzukommt, vereinfacht. Die Kunst steckt darin, eine geeignete Substitution zu finden und das ist eine Sache der Übung. Die folgenden Beispiele veranschaulichen das Vorgehen:

Integration durch Substitution — Bsp 5

Integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Substitution:

$$x = \sin(t) \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Lösung:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}} \cdot \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \overset{\cos(\varphi)>0}{=} \int \frac{1}{\cos(\varphi)} \cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \varphi + c = \arcsin(x) + C$$

Integration durch Substitution — Bsp 6

Integral:

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = ?$$

Identifikation:

$$f(u) = \arctan(u) \wedge u(x) = x \Rightarrow (f(u(x)))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot x$$

$$\Rightarrow \int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \arctan(x) \cdot x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Substitution:

$$t = 1 + x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Lösung:

$$\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \arctan(x) \cdot x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\,.$$

2.3.4 Integration gebrochenrationaler Funktionen

Jede rationale Funktion lässt sich durch Partialbruchzerlegung zerlegen, so dass man nur noch die Stammfunktionen für die Partialbrüche kennen muss und die lauten 2.1

Stammfunktionen von Partialbrüchen — Regel 4

$$\forall n \in \mathbb{N}^+: \quad \int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & n = 1\,, \\ -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, & n > 1\,. \end{cases}$$

Die folgenden zwei Beispiele veranschaulichen die Vorgehensweise.

Integration durch Partialbruchzerlegung — Bsp 7

Integral:

$$\int \frac{(x-3)^5 + (x-3)}{(x-3)\cdot(x-3)^5}\,\mathrm{d}x = ?$$

Partialbruchzerlegung des Integranden:

$$\frac{(x-3)^5 + (x-3)}{(x-3)\cdot(x-3)^5} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^5}$$

Lösung:

$$\int \frac{(x-3)^5 + (x-3)}{(x-3)\cdot(x-3)^5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-3)^5}\,\mathrm{d}x = \ln|x-3| - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x-3)^4} + C\,.$$

Integration durch Partialbruchzerlegung — Bsp 8

Integral:

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x = ?$$

Polynomdivision:

$$\frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4} = 2x - 14 + \frac{22x - 26}{x^2 - 4}$$

Faktorisierung des Nenners:

$$x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{22x - 26}{x^2 - 4} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x - 2} + \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{x + 2}$$

Lösung:

$$\int \frac{2x^3 - 14x^2 + 14x + 30}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x = x^2 - 14x + \frac{9}{2} \ln|x - 2| + \frac{35}{2} \ln|x + 2| + C\,.$$

Vorsicht bei rationalen Funktionen mit Polstellen. Bei Polstellen muss man das Integral aufspalten. Der Integralwert, also die Fläche, im folgenden Beeispiel ist unendlich groß: 1.11 !!!

Vorsicht bei Integration gebrochenrationaler Funktionen Bsp 9

$$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to (0, \infty), x \mapsto \frac{1}{(x - 3)^2}$$

Hier muss man aufpassen, denn f läßt sich nicht über die Polstelle $x = 3$ integrieren, da f in $x = 3$ nicht definiert ist und sich da auch nicht ableiten läßt. Also gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nicht. Probieren wir es trotzdem...

$$\int\limits_2^4 \frac{1}{(x - 3)^2}\,\mathrm{d}x \overset{???}{=} \Big[-\frac{1}{x - 3}\Big]_2^4 = -\frac{1}{4 - 3} - (-\frac{1}{2 - 3}) = -2\,.$$

Das ist offensichtlich ein Widerspruch zur Positivität von f.

Es gibt eine Reihe von Integranden $R : x \mapsto \mathbb{R}$, die durch Substitution $t = f(x)$ in gebrochenrationale Terme übergehen. Letztere behandelt man dann mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung - beispielsweise die folgenden:

$R(x)$	$t = f(x)$	$\mathrm{d}x = f'(t)\mathrm{d}t$	Substitution
$\sin(x)$	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$	$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$
$\cos(x)$	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$\mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$	$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

Integrationsregeln Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.3 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Stückweise stetige Funktionen — Aufg. 1

Gegeben seien die folgenden stückweise definierten Funktionen

$$f : x \mapsto \begin{cases} x, & x < 1\,, \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} x, & x < 1\,, \\ 2, & x = 1\,, \\ \cos(x), & x > 1 \end{cases}$$

(a) Integrieren Sie diese Funktionen stückweise.

(b) Sind die Funktionen, die Sie unter (a) entwickelt haben Stammfunktionen?

Partielle Integration — Aufg. 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$i(a)\ \int x\ln(x)\,\mathrm{d}x \quad (b)\ \int_1^5 \ln(t)\,\mathrm{d}t \quad (c)\ \int_0^{0,8} xe^x\,\mathrm{d}x \quad (d)\ \int e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Finden Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von

$$\int x^n \cdot e^x\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^+\,.$$

Substitution — Aufg. 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a)\ \int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x \quad (b)\ \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \quad (c)\ \int_{-1}^1 \frac{5+x}{5-x}\,\mathrm{d}x \quad (d)\ \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Integrationsregeln — Aufg. 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{array}{llllll} (a) & \displaystyle\int \cot(x)\,\mathrm{d}x & (b) & \displaystyle\int x\cosh(x)\,\mathrm{d}x & (c) & \displaystyle\int \frac{(\ln(x))^3}{x}\,\mathrm{d}x \\ (d) & \displaystyle\int \frac{12x^2}{2x^3-1}\,\mathrm{d}x & (e) & \displaystyle\int \sqrt{x^2-2x}\,\mathrm{d}x & (f) & \displaystyle\int \arctan(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Integrationsregeln — Aufg. 5

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{array}{llll} (a) & \displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad y = \frac{1}{x}+1 & (b) & \displaystyle\int_0^{1/b} \frac{ax}{bx+c}\,\mathrm{d}x, \quad b \neq 0, c > 0, x = \frac{t-c}{b} \\ (c) & \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x & (d) & \displaystyle\int \sqrt{18+2x^2}\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Aufg. 6

Berechnen Sie folgende Integrale. Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnsise auf Blatt 1.

(a) $\displaystyle\int \frac{-x^4-2x^3+7x^2-5x+3}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0$ (f) $\displaystyle\int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{3z}{z^3-3z^2-4}\,\mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}\,\mathrm{d}x$ (i) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-6x^2+9x}\,\mathrm{d}x$

2.4 Längen, Flächen und Volumina

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- geometrische Anwendungen für Integrale in der Praxis kennen
  - Volumen und Mantelflächen elementarer geometrischer Körper
  - Bogenlängen
  - Rotationsvolumen und Mantelflächen
  - Flächenschwerpunkt und Flächen zwischen Graphen

Sie können bereits...

• Integrale geometrisch interpretieren	2.2
• Integrale berechnen	2.3
• Ableitungen bilden	1.23
• Determinanten geometrisch interpretieren und berechenn	1.20

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.4.1 Elementare geometrische Körper

In den vorigen Kapiteln haben wir uns mit dem Integralbegriff auseinandergesetzt. Zunächst nur für reellwertige Funktionen. Offensichtlich können wir damit noch keine Volumen berechnen oder Oberflächen von ausgedehnten Körpern. Was wir allerdings können sind eindimensionale Objekte betrachten und über die integrieren. Zwei Spezialfälle, in denen uns diese Fertigkeit genügt, um was Ñeuesdamit zu tun, sind:

1. Die Berechnung der Länge einer Raumkurve (Kurvenintegral),
2. Die Berechnung des Volumens eines rotationssymmetrischen Körpers (Rotationsvolumen).

Bevor wir uns diesen beiden Themen zuwenden noch eine Zusammenfassung elementarer geometrischer Körper. Letztere kennen wir aus der Schule und wissen, wie Flächeninhalt und Volumen lauten - und das ganz ohne jemals ein Integral aufgeschrieben zu haben.

- **Kreis:** Der Umfang des Einheitskreises ist vom Bogenmaß her bekannt. Wenn man den Einheitskreis um 1.13
  den Faktor r skaliert, hat man einen Kreis mit Radius r. Beim Skalieren um den Faktor r ändern sich alle Längen um den Faktor r, also:
  $$U = 2\pi \cdot r\,.$$
  Die Fläche eines Kreises mit Radius r muss nach r abgeleitet den Umfang ergeben.
  $$\Delta A = \Delta r \cdot U \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta r} = 2\pi \cdot r \quad \Rightarrow A' = 2\pi \cdot r \Rightarrow A = \pi \cdot r^2 + C\,.$$
  Außerdem ist sie null für $r = 0$ und damit $C = 0$, also:
  $$A = \pi \cdot r^2\,.$$
- **Quader:** Ein Quader mit Breite b, Höhe h und Tiefe t hat das Volumen:
  $$V = b \cdot t \cdot h = A \cdot h\,,.$$
- **Gerader Zylinder:** Wenn man die Querschnittsfläche eines Quaders auf der gesamten Höhe gleichartig umformt, dann erählt man einen geraden Zylinder, dessen Volumen genau dem des Quaders entspricht. Denken Sie an Knete!
- **Prisma:** Wenn man die Querschnittsfläche A eines Quaders in ein Vieleck [polygon] gleichen Flächeninhalts umformt, dann spricht man von einem Prisma. Das Prisma hat dasselbe Volumen wie der Quader, wenn die Querschnittsflächen denselben Flächeninhalt haben. (Spezialfall des geraden Zylinders)
- **Schiefer Zylinder:** Stellt man sich einen geraden Zylinder als einen Stapel von Bierdeckeln vor, dann kann man ihn neigen ohne sein Volumen oder seine Höhe zu ändern. Es ergibt sich ein schiefer Zylinder.

- **Pyramide:** Ein Würfel mit Kantenlänge a zerfällt in sechs regelmäßiger Pyramiden der quadratischer Grundfläche a^2 und Höhe $a/2$. Also ist das Volumen einer Pyramide:

$$V = \frac{1}{6} \cdot a^3 \,.$$

- **Kegel:** Lässt man einen Körper von einer ebenen Grundfläche ausgehend geradlinig auf einen Punkt zulaufen, hat man einen Kegel:

$$V = \frac{\sqrt{A}^3}{6} \cdot \frac{h}{\sqrt{A}/2} = \frac{1}{3} A \cdot h \,.$$

- **Kugel:** Das Volumen V und die Oberfläche S einer Kugel mit Radius r ist:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \,, \\ S &= 4\pi r^2 \,. \end{aligned}$$

2.4.2 Bogenlänge

Stellen wir uns einen Laster vor, der eine Strecke von a nach b zurücklegt. Die Strecke L, die der Laster zurücklegt stellen wir uns als Funktionsgraphen vor, das heißt die Koordinate (x, y) des Lasters läßt sich angeben als

$$\forall\, x \in [a, b] : \quad (x, y) = (x, f(x)) \,,$$

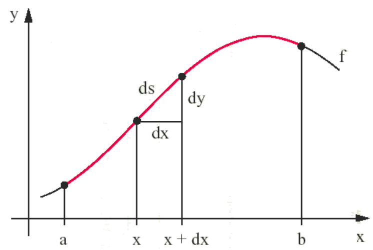
mit einer differenzierbaren Funktion $f : x \mapsto f(x)$. Dann lässt sich die Länge Δs des Bogens mit Phytagoras 1.23
wie folgt approximieren 1.13

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 + (f'(x) \cdot \Delta x)^2 \Rightarrow \Delta s = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)} \,.$$

Summieren wir nun über all die Inkremente Δs, dann erhalten wir eine Approximation der Länge des Graphen. Das Maßband, das wir anlegen ist ein stückweiser Polygonzug. Gehen wir zum Grenzwert über, dann erhalten wir die sogenannte Bogenlänge [arc length]: Aufgabe

Bogenlänge

Def. 1



Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die differenzierbare Funktion. Die Bogenlänge ist

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x \,.$$

Entsprechend kann man sich die Länge einer Raumkurve herleiten. Es gilt:

Bogenlänge einer Raumkurve

Regel 1

Es sei die Parametrisierung einer Raumkurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ gegeben:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (x(t), y(t), z(t))^\intercal \,,$$

wobei x, y, z differenzierbar sind. Die Länge der Kurve ist

$$|\gamma| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, \mathrm{d}t \,,$$

wobei $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))^\intercal$.

Bogenlänge

Bsp 1

Parametrisierung:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \left(\sqrt{2}t, e^t, 1-e^{-t}\right)^\intercal$$

Ableitung (Geschwindigkeitsfeld):

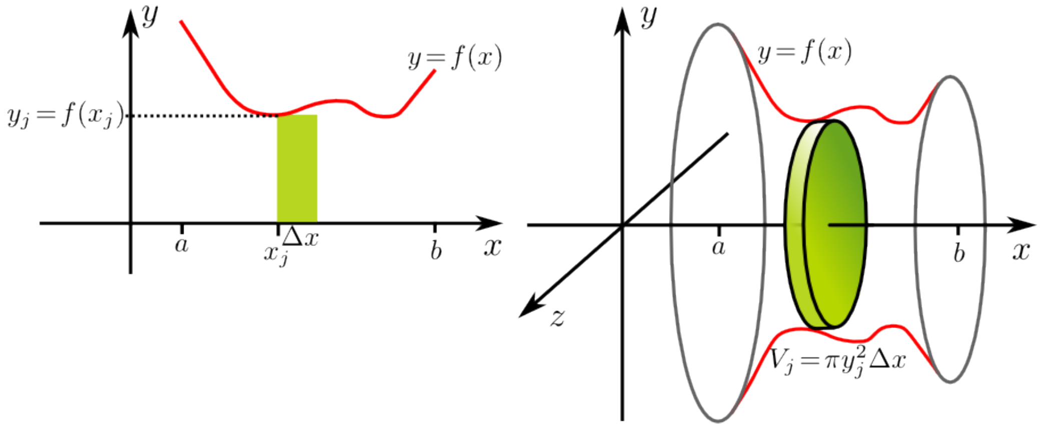
$$\gamma'(t) = (\sqrt{2}, e^t, e^{-t})^\intercal$$

Länge der Raumkurve:

$$\begin{aligned} |\gamma| &= \int_0^1 \sqrt{2+e^{2t}+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \sqrt{2+(e^t+e^{-t})^2-2e^te^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \left(e^t+e^{-t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[e^t - e^{-t}\Big]_0^1 = e-1-\frac{1}{e}+1 = e-\frac{1}{e}\,. \end{aligned}$$

2.4.3 Rotationssymmetrische Körper

Ein Rotationskörper [solid of revolution] entstehe durch Rotation des Funktionsgraphen $f : x \mapsto f(x) \geq 0$ um die x-Achse. An der Stelle x ist seine Querschnittfläche also eine Kreisscheibe mit dem Radius $f(x)$. Wieder im Sinne eines Stapels von Bierdeckeln ist das Volumen V des Körpers zwischen $x = a$ und $x = b$:



Rotationsvolumen

Regel 2

$$V = \int\limits_a^b \pi\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

Bezeichnen wir mit $\overline{R}$ den Schwerpunkt der Querschnittsfläche zwischen der Kurve und der x-Achse:

$$\overline{R} = \int\limits_a^b \frac{r(x)}{2}\,\underbrace{\frac{r(x)}{A}\mathrm{d}x}_{\text{Gewichtung}} = \frac{1}{2}\,\frac{\int_a^b (r(x))^2\,\mathrm{d}x}{A}\,,$$

wobei A die Fläche unter der Kurve bezeichnet. Dann gilt:

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x = \pi\cdot 2\cdot A\cdot\overline{R} = \underbrace{2\pi\cdot\overline{R}}_{\text{Bogenlänge}}\cdot A\,.$$

Das Rotationsvolumen V ist also die Fläche unter der Kurve mal der Bogenlänge des Flächenschwerpunkts bei der Rotation (zweite Pappus-Guldinsche Regel). Aufgabe

Die Mantelfläche M ergibt sich durch ein Aufsummieren der Mantelinkremente

$$\Delta M = 2\pi f(x)\cdot\Delta s(x) = 2\pi f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)}\cdot\Delta x\,,$$

wobei Δs ein Inkrement der Länge der Kurve bezeichnet. Dann erhalten wir im Limit das folgende Integral:

Mantelfläche

Regel 3

$$M = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Bemerkung:

- M ist nur die Mantelfläche. Gegebenfalls muss man noch die Flächen des Deckels unten und oben berücksichtigen!

Diese Formel für die Mantelfläche lässt sich auch anders verstehen: Bezeichnen wir mit $\overline{r}$ die Höhe des Schwerpunkts der Kurve:

$$\overline{r} = \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Dann gilt

$$M = 2\pi\overline{r}\cdot L\,,$$

woei L die Bogenlänge ist. Anschaulich heißt das: Die Mantelfläche M ist die Länge der Kurve mal der Bogenlänge ihres Schwerpunkts (Schwerpunkt der Kurve, nicht der Fläche!) bei der Rotation (erste Pappus-Guldinsche Regel).

Anwendungen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.4 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Kegelvolumen — Aufg. 1

Wie läßt sich ohne Integration beweisen, dass das Volumen eines Kegels mit Grundfläche A und Höhe h gerade $V = \frac{1}{3}A \cdot h$ beträgt? Hinweis: Benutzen Sie, was Sie über das Volumen einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche wissen!

Bogenlänge — Aufg. 2

(a) Geben Sie das Integral an, das die Bogenlänge der Kurve $y = \ln(x^3)$ für $1 \leq x \leq e$ beschreibt.

(b) Geben Sie das Integral an, das die Bogenlänge der Kurve $y = \sqrt{x^3}$ für $1 \leq x \leq 3$ beschreibt.

Flächeninhalt zwischen Graphen — Aufg. 3

(a) Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f : x \mapsto x^2 - 2x - 1, \quad g : x \mapsto -x + 5$$

den Flächeninhalt zwischen den Graphen und ihren Schnittpunkten.

(b) Bestimmen Sie die Fläche A (!) zwischen der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1}{5}x(x^2 - 4)$$

und der x-Achse im Intervall $x \in [-3, 3]$.

Rotationsvolumen — Aufg. 4

Bestimmen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch Drehung des Kurvenstücks $y = \sqrt{x^2 - 9}$ für $3 \leq x \leq 5$

(a) um die x-Achse entsteht.

(b) um die y-Achse entsteht.

Lineare Abbildungen — Aufg. 5

Auf einem Schrottplatz werden Autofracks mit einer Presse zusammengestampft. Jede Karosserie wird dabei in jede Richtung gleichmäßig umgeformt und das Volumen, das es ursprünglich einnahm, wird durch die Presse um 80% verringert.
Geben Sie eine lineare Abbildung an, die den Effekt der Presse simulieren kann (keine eindeutige Lösung).

2.5 Funktionenräume und Bestapproximation

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen. . .

- Funktionen zu mittels Skalarprodukt zu orthonormalisieren
- eine Bestapproximation zu bestimmen

Sie können bereits. . .

- mit den Vektorräumen $\mathbb{K}^n$ umgehen 1.17
- zwei gegebene Spaltenvektoren in $\mathbb{K}^n$ mit Hilfe des Skalarprodukts orthonormalisieren 1.16

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.5.1 Funktionenräume mit Skalarprodukt

In diesem kurzen Kapitel greifen wir nochmal auf, was wir in der linearen Algebra über Vektorräume gelernt haben. Auch Mengen von Funktionen können Vektorraumeigenschaften erfüllen, das haben wir schon bemerkt. Allerdings haben wir uns mit der Bemerkung zufrieden gegeben und das lag vor allem daran, dass uns ein Werkzeug zur weiteren Analyse bislang gefehlt hat, nämlich die Integration. Mit Hilfe der Integration läßt sich allerdings oft ein Skalarprodukt 1.16

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{K}$$

definieren und damit

- Orthogonalität zwischen Funktionen:

$$f,g\in\mathbb{V}\,,\quad f\perp g\ :\Leftrightarrow \langle f,g\rangle = 0\,.$$

- eine Norm (Länge) einer Funktion bzw. ein Abstand zwischen zwei Funktionen:

$$\begin{array}{llcl} \text{Norm}: & f\in\mathbb{V}\,, & \|f\| &=& \sqrt{\langle f,f\rangle}\,,\\ \text{Abstand}: & f,g\in\mathbb{V}\,, & \|f-g\| &=& \sqrt{\langle f-g,f-g\rangle}\,. \end{array}$$

- ein Winkel[1] zwischen zwei Funktionen definiert,

$$f,g\in\mathbb{V}\setminus\{0\}\,,\quad \cos(\alpha) := \frac{\langle f,g\rangle}{\|f\|\|g\|}\,.$$

Das klingt ohne konkrete Anwendung natürlich ziemlich abstrakt, aber wird so nicht bleiben. Anhand eines konkreten Beispiels wird im nächsten Abschnitt gezeigt, dass man mit der Vektorraumstruktur und einem Skalarprodukt eine Aufgabenstellung lösen kann, die in der Praxis von größter Relevanz ist, nämlich die Bestimmung einer Bestapproximation eines Vektors in einem Untervektorraum. Bevor wir uns dieser Aufgabe widmen, nennen wir die Vektor- und Untervektorräume, die wir schon kennen, beim Namen.

Integrierbare Funktionen kann man addieren und mit Skalaren multiplizieren und erhält wieder eine integrierbare Funktion. Die integrierbaren Funktionen bilden also einen Vektorraum. 2.2 1.17

Vektorraum integrierbarer Funktionen $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ Regel 1

Die Menge aller über $[a,b]$ integrierbaren Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,

$$\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) := \{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ :\ f \text{ integrierbar}\}\,,$$

ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Auch stetige Funktionen kann man addieren und mit Skalaren multiplizieren und erhält wieder eine stetige Funktion. Die stetigen Funktionen bilden also einen Vektorraum. 1.22

[1] Achtung: der Winkel ist nicht mehr geometrisch zu verstehen.

Vektorraum stetiger Funktionen $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ — Regel 2

Die Menge aller Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die auf $[a,b]$ stetig sind, sei

$$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) := \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \;:\; f \text{ stetig}\}\,.$$

$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen.

Auch Polynome kann man addieren und mit Skalaren multiplizieren und erhält wieder ein Polynom. Die Polynome bilden also auch einen Vektorraum und zwar einen von endlicher Dimension. Ein Polynom p vom Grad n besitzt die Koeffizientendarstellung 1.6 1.17

$$p : x \mapsto \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_0, \quad \alpha_n, \cdots, \alpha_0 \in \mathbb{R}\,,$$

und das heißt: man kann es eindeutig als lineare Kombination der Monome bis zum Grad n darstellen, oder anders gesagt: die Menge der $n+1$ ersten Monome sind eine Basis von $\mathcal{P}_n([a,b],\mathbb{R})$:

$$\mathcal{P}_n([a,b],\mathbb{R}) = \mathrm{LH}\{1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n\}\,.$$

Gleichzeitig gehören Polynome in den Vektorraum der stetigen Funktionen. Die Polynome bilden einen Untervektorraum[2] der stetigen Funktionen

$$\mathcal{P}_n([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})\,.$$

Und das ist offensichtlich noch nicht alles, denn Polynome kann man über jedes Intervall $[a,b]$ integrieren. Also sind die Polynome auch ein Untervektorraum der integrierbaren Funktionen

$$\mathcal{P}_n([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})\,.$$

Auf dem Vektorraum $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ läßt sich ein Skalarprodukt definieren:

Skalarprodukt und Norm auf $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ — Def. 1

Das Skalarprodukt lautet

$$(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

und die entsprechende Norm ist:

$$f \mapsto ||f|| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Ein Beispiel:

Skalarprodukt, induzierte Normen und Winkel — Bsp 1

Es sei $f : x \mapsto 1$ und $g : x \mapsto x^2$ auf dem Intervall $[a,b] = [1,2]$ gegeben.

- Die Norm von f bzw. die Norm von g lassen sich berechnen zu

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_1^2 (1)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = 1\,, \\ \|g\| &= \sqrt{\langle g,g\rangle} = \left(\int_1^2 (x^2)^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{31}{5}}\,. \end{aligned}$$

- Das Skalarprodukt zwischen f und g ist

$$\langle f,g\rangle = \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{7}{3}\,.$$

[2] Eine Teilmenge $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ nennt man Untervektorraum von $\mathbb{V}$, wenn $\mathbb{U}$ ein Vektorraum ist, der nicht leer ist.

- Die Funktionen f und g sind nicht orthogonal zueinander, weil ihr Skalarprodukt nicht verschwindent. Der Kosinus des zwischen f und g eingeschlossenen Winkels ist:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle f, g\rangle}{||f|| \cdot ||g||} = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{5}{31}}\,.$$

2.5.2 Bestapproximation

Beginnen wir diesen Abschnitt mit einer Begutachtung eines Spaltenvektors $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$. $\boldsymbol{v}$ läßt sich wie immer zerlegen, also

$$(*) \qquad \boldsymbol{v} = v_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + v_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\,,$$

wobei die Zahlen v_1, v_2 und v_3 die sogenannten Koeffizienten des Vektors sind. Präziser: v_1, v_2 und v_3 sind die Koeffizienten des Vektors $\boldsymbol{v}$ bezüglich der Standardbasis $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$, also

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{LH}\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\}\,.$$

Die Standardbasis ist eine Orthonormalbasis und das heißt, dass die Basisvektoren normiert sind und paar- 1.17
weise orthogonal aufeinanderstehen. Orthogonalität wird durch ein Skalarprodukt[3] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert und für eine orthonormale Basis gilt:

$$\langle\hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_k\rangle = \begin{cases} 1, & i = k\,, \\ 0, & i \neq k\,. \end{cases}$$

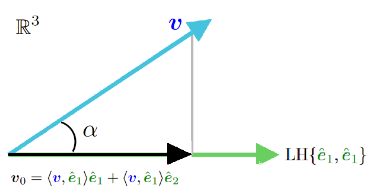
Die Zerlegung eines Vektors in einer Orthonormalbasis ist immer sehr einfach, weil jeder Summand in der Zerlegung für genau eine Richtung[4] zuständig ist.

Beobachtungen:

- In der Zerlegung $(*)$ minimiert jeder Summand den Abstand zwischen $\boldsymbol{v}$ und allen zu ihm parallelen Vektoren. Dasselbe gilt für jede Teilsumme in der Zerlegung. Der Anteil $v_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\hat{\boldsymbol{e}}_2$ ist derjenige in $\mathrm{LH}\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2\}$, der den kürzesten Euklidischen Abstand zu $\boldsymbol{v}$ besitzt.[5]
- Die Zerlegungskoeffizienten lassen sich mit dem Skalarprodukt eindeutig bestimmen. Es gilt

$$v_i = \langle\boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{e}}_i\rangle,\ i = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \langle\boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{e}}_1\rangle\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \langle\boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{e}}_2\rangle\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \langle\boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{e}}_3\rangle\hat{\boldsymbol{e}}_3\,.$$

Veranschaulichung Bestapproximation in $\mathbb{R}^3$ Bsp 2



- Die x-Achse symbolisiert den Untervektorraum $\mathbb{U} = \mathrm{LH}\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2\} \subset \mathbb{R}^3$.
- $\boldsymbol{v}_0$ ist Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\|\,.$$

- $\boldsymbol{v}_0$ ist die Bestapproximation von $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{U}$.

Extrahieren wir die Zutaten, die wir zur Bestimmung einer Bestapproximation brauchen: man nehme

- einen Vektorraum $\mathbb{V}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- einen endlichdimensionalen Untervektorraum $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ mit Orthonormalbasis[6].
- einen Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.

[3]In $\mathbb{R}^3$ gilt $\langle\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\rangle = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3$
[4]Jeder Basisvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ spannt einen eindimensionalen Untervektorraum $\mathrm{LH}\{\hat{\boldsymbol{e}}_i\}$ auf.
[5]Warum? Naja, weil der Abstandsvektor, also die Differenz

$$(v_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\hat{\boldsymbol{e}}_2) - \boldsymbol{v} = v_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \in \mathrm{LH}\{\hat{\boldsymbol{e}}_3\}\,,$$

senkrecht auf dem Untervektorraum $\mathrm{LH}\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2\}$ steht!
[6]Die Orthonormalbasis ist im Allgemeinen nicht bekannt und muss mit Hilfe des fixierten Skalarprodukts konstruiert werden!

Die Bestapproxiamtion $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{U}$ ist der Vektor in $\mathbb{U}$, dessen Abstand zu $\boldsymbol{v}$ im Vergleich zu allein anderen $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ minimal ist:

$$\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{U}: \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{U}: \quad ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0|| \leq ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}|| \,.$$

Das Verfahren zur Bestimmung der Bestapproximaion braucht einzig und allein die Vektorraumstruktur von $\mathbb{V}$ und $\mathbb{U}$ und ein Skalarprodukt! Das haben wir auch in unseren oben genannten Vektorräumen stetiger Funktionen und wir können das Prinzip übertragen.

Bestapproximation Def. 2

Es sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum, ausgestattet mit einem Skalarprodukt und entsprechender Norm:

$$\begin{array}{rcrcllcl} \langle\cdot,\cdot\rangle & : & \mathbb{V}\times\mathbb{V} & \to & \mathbb{K}\,, & (f,g) & \mapsto & \langle f,g\rangle\,, \\ ||\cdot|| & : & \mathbb{V} & \to & [0,\infty)\,, & f & \mapsto & ||f|| = \sqrt{\langle f,f\rangle}\,. \end{array}$$

Es sei $\mathbb{U}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{V}$, der die Dimension $n \in \mathbb{N}$ besitzt und für den man eine Orthonormalbasis kennt:

$$\mathbb{U} = \mathrm{LH}\{\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \cdots, \hat{p}_n\}, \quad \langle \hat{p}_i, \hat{p}_j\rangle = \begin{cases} 1\,, & i = j\,, \\ 0\,, & i \neq j\,. \end{cases}$$

Für einen gegebenen Vektor $v \in \mathbb{V}$ nennt man den Vektor $v_0 \in \mathbb{U}$,

$$v_0 = \sum_{k=0}^{n} \langle v, \hat{p}_k\rangle \hat{p}_k,$$

die Bestapproximation von $v \in \mathbb{V}$ in $\mathbb{U}$.

Was wir jetzt brauchen ist ein Beispiel! Also fixieren wir die Zutaten:

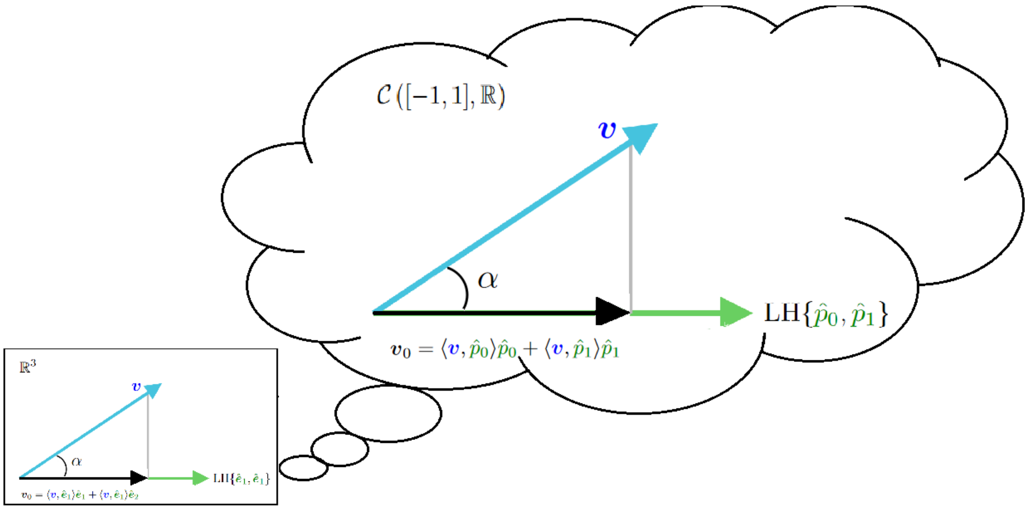
- Es sei $\mathbb{V} = \mathcal{C}\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$, der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$
- Wir betrachten $\mathbb{V}$ mit dem folgenden Skalarprodukt und entsprechender Norm:

$$(f,g) \quad \mapsto \quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

$$f \quad \mapsto \quad ||f|| = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \in [0,\infty)\,.$$

- Es sei $\mathbb{U} = \mathcal{P}_1\left([-1,1],\mathbb{R}\right)$ der Vektorraum aller linearen Funktionen auf $[-1,1]$.
- Es sei $v \in \mathbb{V}$ die Exponentialfuntion, also $v: [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$.

Die Bestapproximation entwickeln wir nun straight-forward gemäß der vorigen Definition. Als gedankliche Stütze und Illustration des Ergebnisses kann man die Skizze folgende Skizze im Kopf behalten:



Bestapproximation Bsp 3

1. Bestimmung von Dimension und Basis des Untervektorraums $\mathbb{U}$

$$\dim \mathbb{U} = 2, \quad \mathbb{U} = \mathrm{LH}\{p_0, p_1\} \subset \mathbb{V} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} p_0 : x \mapsto 1\,, \\ p_1 : x \mapsto x\,. \end{cases}$$

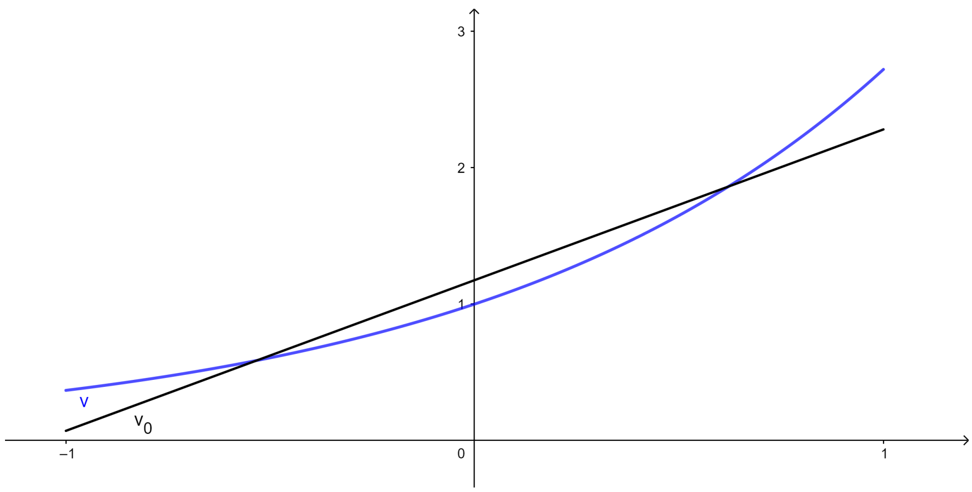
2. Konstruktion einer Orthonormalbasis für $\mathbb{U}$

$$\begin{aligned} \langle p_0, p_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} p_0(x) \cdot p_0(x)\,\mathrm{d}x = 2 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \\ \langle p_1, p_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} p_1(x) \cdot p_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{3}{2}}x\,, \\ \langle \hat{p}_0, \hat{p}_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} \hat{p}_0(x) \cdot \hat{p}_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \hat{p}_0 \perp \hat{p}_1\,. \end{aligned}$$

3. Bestimmung der Bestapproximation von v auf den Untervektorraum $\mathbb{U}$:

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \langle v, \hat{p}_0 \rangle\,\hat{p}_0(x) + \langle v, \hat{p}_1 \rangle\,\hat{p}_1(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}x\int_{-1}^{1} e^x \cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{e} \cdot x + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \\ \Rightarrow \qquad & v_0 : x \mapsto \frac{3}{e} \cdot x + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \end{aligned}$$

Die Skizze zeigt die Exponentialfunktion auf dem Intervall $[-1, 1]$ in blau und die berechnete Bestapproximation $v_0 \in \mathbb{U}$ in schwarz.



Bemerkungen:

- Der Funktionsgraph von v wird vom Graphen von v_0 in keinem einzigen Punkt tangiert. Die Steigung stimmt in keinem einzigen Punkt überein.
- Die Bestapproximation besitzt minimialen Abstand zwischen v und $\mathbb{U}$, wobei das Abstandsmaß eine Fläche ist. Es gilt

$$||v - v_0|| = \min_{u \in \mathbb{U}} ||v - u|| = \min_{u \in \mathbb{U}} \left(\int_{-1}^{1} |v(x) - u(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

  Das Abstandsmaß bezieht jeden Punkt in dem Intervall $[-1, 1]$ ein und führt zu einer Bestapproximation, die v nicht lokal, also an einem Punkt, sondern für alle $x \in [-1, 1]$ gleichermaßen gut approximiert.
- Die Bestimmung einer Bestapproximation wurde in diesem Abschnitt beispielhaft demonstriert und kann entsprechend auf andere Vektorräume, andere Skalarprodukte und andere Unterräume übertragen werden. Aufgabe

- Die Orthogonalprojektion, die wir zur Bestimmung der Bestapproximation kennengelernt haben, wird uns bei der Entwicklung der Fourierreihe wiederbegegnen. 2.17

2.5.3 Gedankenexperimente

Was bedeutet das Wort Bestapproximation? Schaut man in der Literatur, was unter Bestapproximation zu verstehen ist, dann könnte es sein, dass man folgendes findet:

Bestapproximation Def. 3

Es sei $\mathbb{V}$ ein Vektorraum und $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ ein Untervektorraum. Finden wir zu einem gegebenem $v \in \mathbb{V}$ ein $v_0 \in \mathbb{U}$, dessen Abstand zu v kleiner ist als der Abstand, den man für alle anderen, beliebigen Elemente des Unterraums $\mathbb{U}$ zu v messen kann, dann nennt man v_0 die Bestapproximation von v in $\mathbb{U}$.
Auf mathematisch klingt das wie folgt:

$$\|v - v_0\| = \inf\{\|v - u\| : u \in \mathbb{U}\}\,,$$

Die Bestapproximation hängt davon ab, wie diese zwei Striche definiert sind und die zwei Striche bezeichnen eine Norm, mit anderen Worten das Maß(band), das wir anlegen, um den Abstand zwischen $v \in \mathbb{V}$ und $u \in \mathbb{U}$ zu messen. Solange wir nicht wissen welche Norm (welches Maß) wir nutzen sollen, um Abstände in $\mathbb{V}$ zu messen, können wir die Aufgabe gar nicht anpacken. Und an der Stelle hat man wirklich Freiheiten! Es hängt von der Aufgabenstellung und den jeweilgen Bedürfnissen ab, wie man misst. Denken wir wieder an $v : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$.

(a) Soll das Abstandsmaß vielleicht die Differenz an einer fixierten Stelle im Intervall $x_0 \in [-1, 1]$ sein? Also

$$||v - u|| = |v(x_0) - u(x_0)|\,.$$

(b) Oder soll das Abstandsmaß die maximale Differenz auf dem gesamten Intervall $[-1, 1]$ ein? Also

$$||v - u|| = \max_{x\in[-1,1]} |v(x) - u(x)|\,.$$

(c) Oder soll vielleicht die Fläche der Differenz $|v - v_0|$ minimiert werden? Also

$$||v - u|| = \int_{-1}^{1} |v(x) - u(x)|\, \mathrm{d}x\,.$$

(d) Oder vielleicht die Fläche des Abstandsquadrats $|v - v_0|^2$? Also

$$||v - u|| = \int_{-1}^{1} |v(x) - u(x)|^2\, \mathrm{d}x\,.$$

Bemerkungen:

- All die genannten Maßbegriffe sind gültig und können für einen speziellen Anwendungsfall sinnvoll sein.
- Eine Lösung der Minimierungsaufgabe für (a) könnte eine lineare Näherung sein: vorausgesetzt v ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar, dann läßt sich v auf dem Intervall $[-1, 1]$ linearisieren, etwa so 1.22

  $$x_0 \in (-1, 1) : \quad v_0 : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto v(x_0) + v'(x_0)(x - x_0)\,.$$

  Die lineare Näherung v_0 stimmt dann mit v dann an der Stelle x_0 exakt überein, aber für $x \neq x_0$ können die Funktionswerte zwischen v und v_0 sehr stark abweichen. v_0 ist eine lokale Näherung.
- Eine Lösung der Minimierungsaufgabe (d) ist das Verfahren, das im vorigen Abschnitt beschrieben worden ist. Das Maß hat eine besondere Eigenschaft: ihm liegt ein Skalarprodukt zugrunde und das heißt, dass die Bestapproximation ist die Orthogonalprojektion auf dem gegebenen Unterraum. Anders als (a) bezieht das Maß alle Funktionswerte im Intervall $[-1, 1]$ ein und damit ist die Bestapproximation eine globale Approximation.

Funktionenräume und Bestapproximation Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.5 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren Aufg. 1

Gegeben sind drei linear unabhängige Vektoren. Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem.

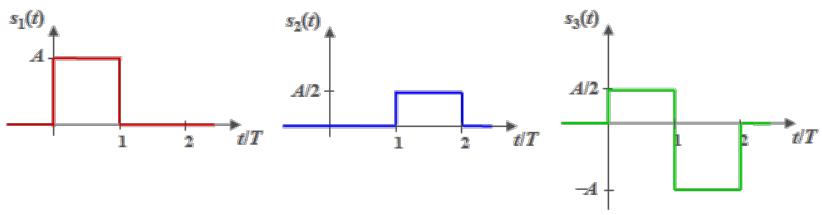
$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Basis Aufg. 2

Bei der Digitalsignalübertragung werden energiebegrenzte Signale betrachtet. Das Skalarprodukt zweier Signale bzw. die Norm eines Signals sind hierbei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \langle s_i, s_k \rangle &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} s_i(t) \cdot s_k(t)\,\mathrm{d}t\,, \\ \|s\| &= \sqrt{\langle s, s \rangle}\,. \end{aligned}$$

Betrachten Sie die folgenden drei energiebegrenzten Signale:



(a) Wie lauten die Abbildungsvorschriften der Signale s_1, s_2 und s_3?

(b) Berechnen Sie die Normen der Signale s_1 und s_2.

(c) Konstruieren Sie aus den Signalen s_1 und s_2 ein Orthonormalsystem.

(d) Zerlegen Sie das Signal s_3 bezüglich des Orthonormalsystems und bestimmen Sie die vektoriellen Repräsentanten der Ausgangssignale bezüglich des Orthonormalsystems.

Bestapproximation Aufg. 3

Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ mit

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \cos(x), \quad f_3 : x \mapsto \sin(x)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen paarweise orthogonal sind bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Berechnen Sie die Bestapproximation $\tilde{f} \in \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ von $f : x \mapsto x^2$ bezüglich f_i, $i = 1, 2, 3$ und zeichnen Sie f und $\tilde{f}$.

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen orthogonal sind

$$\cos(k \cdot x),\ k \in \mathbb{N}_0, \quad \sin(k \cdot x),\ k \in \mathbb{N}\,.$$

2.6 Differentialgleichungen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen...	
• Differentialgleichungen zu klassifizieren	
• Lösungskurven von Anfangswertproblemen erster Ordnung geometrisch zu bestimmen	
Sie können bereits...	
• Ableitungen bilden und kennen	1.23
• Notationen für Ableitungen beliebiger Ordnung reellwertiger Funktionen	1

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.6.1 Woher kommen Differentialgleichungen?

Deterministische dynamische Systeme [dynamical systems] modellieren zeitliche Entwicklungen und Regelungsprozesse – in der Physik, der Elektrotechnik, der Automatisierungstechnik, der Klimaforschung ebenso wie der Volkswirtschaft. Typischerweise leistet der Zufall seinen Beitrag, zum Beispiel durch Messungenauigkeiten oder durch quantenmechanische Effekte. Aber oft kann man den Zufall weitgehend ignorieren und sich nur mit deterministischen dynamischen Systemen befassen. Nur um diese geht es im Folgenden. Zwei Informationen definieren ein dynamisches System:

- Die Beschreibung der Zustände [states]: Zu jedem Zeitpunkt ist das dynamische System in einem bestimmten Zustand. Der aktuelle Zustand umfasst dabei alles, was die zukünftige Entwicklung bestimmt. Die Menge aller denkbaren Zustände heißt Zustandsraum [state space] oder auch Phasenraum [phase space].

- Die Angabe eines Entwicklungsgesetzes: Es gibt eine Regel, die eindeutig (deshalb "deterministisch") festlegt, wie sich der Zustand von einem Zeitpunkt zum nächsten entwickelt. Die Art des Zustandsraums und die Art des Entwicklungsgesetzes lassen sich klassifizieren in zeitlich diskrete und zeitkontinuierliche Systeme.

Schon einfache dynamische Systeme können nicht-triviale Phänomene modellieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

Betrachten wir beispielsweise die "logistische Gleichung" [logistic map] zur Beschreibung der Entwicklung einer Population x_n zum Zeitpunkt t_n. Dabei ist die Wachstumsrate k fest vorgegeben .

Die Population soll sich zum Zeitpunkt t_{n+1} entsprechend der logistischen Gleichung entwickeln:

$$x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)\,.$$

Das System ist also diskret in der Zeit und wir untersuchen die Entwicklung der Population für unterschiedliche Wachstumsraten k:

Logistische Gleichung zur Modellierung begrenzten Wachstums Bsp 1

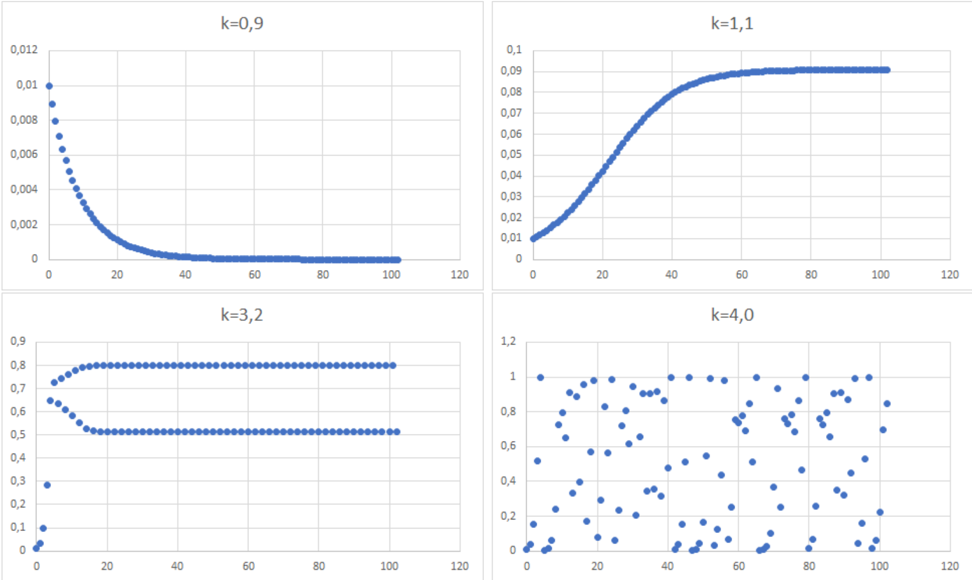
Zustandsraum:

$$x \in [0, 1]$$

Entwicklungsgesetz:

$$t_n \to t_{n+1}: \quad x_{n+1} = k \cdot x_n \cdot (1 - x_n)\,.$$

Entwicklung der Zustandsgröße für verschiedene Werte von k:



Das System läßt Beobachtungen zu:

- Das Wachstum ist nach oben begrenzt durch $x = 1$.
- Das Wachstum ist nach unten begrenzt durch $x = 0$.
- Der Wachstumsprozess hängt von k ab:

Die logistische Gleichung ist offensichtlich in der Lage drei Phänomene zu modellieren:

1. Streben zu einem Gleichgewichtszustand,
2. Einsetzen von Schwingungen,
3. deterministisches Chaos.

Der Begriff deterministisches Chaos beschreibt, dass winzige Unterschiede im Anfangszustand nach wenigen Schritten deutliche Auswirkungen haben (exponentielles Fehlerwachstum). Dass die Folge der Zustände des Systems wie Zufall aussehen, ist nur eine Konsequenz davon. Ein weiteres Phänomen, das mit Hilfe der logistischen Gleichung nicht sichtbar ist, ist die Resonanzkatastrophe: das praktisch unendliche Aufschaukeln von Schwingungen.

Zeit / Zustandsraum	diskret	kontinuierlich
diskret	Steuerungstechnik	digitale Regelungstechnik
kontinuierlich	Quantenmechanik	Mechanik

Was uns im Folgenden interessiert sind dynamische Systeme, deren Zustandsraum kontinuierlich in Zeit und Raum ist. Die Entwicklungsgesetze entstammen in diesem Fall der Mechanik oder der analogen Regelungstechnik. Es sind Differentialgleichungen.

2.6.2 Typen von Differentialgleichungen

Zeitkontinuierliche dynamische Systeme werden typischerweise mit Differentialgleichungen beschrieben. Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen eine Ableitung oder mehrere Ableitungen einer Funktion und gegebenenfalls die Funktion selbst auftreten. Anders als beim Lösen einer Gleichung ist die Lösung einer Differentialgleichung eine Funktion und kein Wert. Das ist also eine Differentialgleichung [differential equation] und die gesuchte Größe ist die Funktion f:

$$f'(x) = 3 \cdot f(x) + x^2 \,.$$

Oft wird die Unbekannte nicht f sondern y genannt:

$$y'(x) = 3 \cdot y(x) + x^2 \,.$$

In der Mechanik betrachtet man oft zeitabhängige Phänomene und die Zeitableitungen werden mit Punkten notiert, man findet also entsprechend

$$\dot{x}(t) = 3 \cdot x(t) + t^2 \,.$$

Klassifikationen von Differentialgleichungen

Def. 1

- Die Ordnung [order] einer Differentialgleichung gibt an, was die höchste Ableitung ist, die in der Differentialgleichung vorkommt. Zum Beispiel ist das eine Differentialgelichung der Ordung zwei:

$$y'' - \sin(x) \cdot y = (y')^2 \; .$$

- In einer expliziten [explicit] Differentialgleichung steht die höchste Ableitung isoliert auf einer Seite und kommt ansonsten nicht vor. Zum Beispiel:

$$y'' = \sin(x) \cdot y + (y')^2 \; .$$

- In einer impliziten [implicit] Differentialgleichung läßt sich die höchste Ableitung nicht isolieren. Zum Beispiel:

$$\sin(y'' + x^2) = y' \, .$$

- In einer linearen [linear] Differentialgleichung tritt nur eine Summe von Vielfachen der Funktion und ihrer Ableitungen auf. Diese Vielfachen dürfen allerdings Funktionen der unabhängigen Variablen sein. Zum Beispiel

$$\sin(x) \cdot y'' - 17 \cdot y' + x^2 \cdot y = \cos(x) \, .$$

- Falls die Vielfachen einer linearen Differentialgleichung nicht Funktionen, sondern Konstanten sind, hat man eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten [constant coefficients]. Die Inhomogenität darf dabei aber weiter eine Funktion sein. Zum Beispiel:

$$3 \cdot y'' - 4 \cdot y' + 7 \cdot y = \cos(x) \, .$$

Bemerkungen:

- Die Differentialgleichungen, in denen nur nach einer Unabhängigen abgeleitet wird, heißen " gewöhnliche Differentialgleichungen" [ordinary differential equations]. Nur um solche geht es hier.
- Differentialgleichungen, in denen mehrere unabhängige Variablen auftauchen, heißen partielle Differentialgleichungen. Partielle Differentialgleichungen werden hier nicht betrachtet.
- Die Bezeichnung " explizit" ist nicht überall gleich definiert. Ist eine explizite Differentialgleichung eine, die nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist? Oder aber eine wie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 7 = x$, die man leicht nach der höchsten Ableitung auflösen kann? Einige Autoren verwenden auch den Begriff " explizite Form" , wenn die Gleichung nach der höchsten Ableitung aufgelöst ist. Wir nennen eine Differentialgleichung explizit, wenn sie in expliziter Form gegeben ist.
- " Implizit" kann das Gegenteil von " explizit" bedeuten, wird oft aber nur für Gleichungen der Art $\cdots = 0$ verwendet, also solchen mit Null auf einer Seite. Nach der letzteren Art der Definition ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ implizit und explizit. – Also immer erst prüfen, was der jeweilige Autor mit diesen Begriffen meint!

2.6.3 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Bevor man Zeit investiert, um eine Lösung einer Differentialgleichung zu bestimmen, lohnt es sich abzuklären, unter welchen Voraussetzung denn eine Lösung existiert und wenn eine Lösung existiert, ob sie eindeutig ist.

Die Existenzbeweise, die man in diesem Kontext führt, erfordern Kenntnisse über die Vollständigkeit normierter Räume und übersteigen den Rahmen dieser Vorlesung. Allerdings ist das Ergebnis für den Fall eines Anfangswertproblems erster Ordnung sehr griffig und leicht zu überprüfen und aus diesem Grund sollten wir nicht darauf verzichten.

Zuvor müssen wir Funktionen charakterisieren können, die eine verschärfte Stetigkeitseigenschaft erfüllen: Aufgabe

Lipschitz-stetige Funktionen

Def. 2

Es sei $f : [a, b] \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion, für die gilt

$$\exists\, L \in \mathbb{R} : \; \forall x \in [a, b], y_1, y_2 \in \mathbb{K} : \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \, . \quad (*)$$

Gilt $(*)$, so nennt man f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L.

Es gilt der folgende Satz über Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung eines Anfangswertprolems mit Differentialgleichung erster Ordnung.

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung — Regel 1

Es sei $f : [a,b] \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ eine Lipschsitz-stetige Funktion. Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' & = f(x,y), \\ y(x_0) & = y_0\,. \end{cases}$$

mit $x_0 \in [a,b]$ und $y_0 \in \mathbb{K}$ eine eindeutige Lösung.

2.6.4 Vektorfelder und Lösungskurve

Es gibt eine Methode, um die Lösung eines Anfangswertproblems geometrisch zu konstruieren. Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung läßt sich das am schönsten veranschaulichen. Die Idee ist die Differentialgleichung in ein System erster Ordnung umzuformen und zu verstehen, dass die rechte Seite gerade die Richtung angibt, in die sich die Lösung im Phasenraum entwickelt.

Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung, die die Bewegung eines Federpendels mit Masse m, Federkonstante D, Reibungskonstante ρ und Position x (gemessen ab der Ruhelage) beschreibt:

$$m\ddot{x} = -Dx - \rho\dot{x}\,.$$

Der Zustandsraum (Phasenraum) sind Vektoren mit zwei Komponenten, also der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit folgender physikalischer Zuordnung:

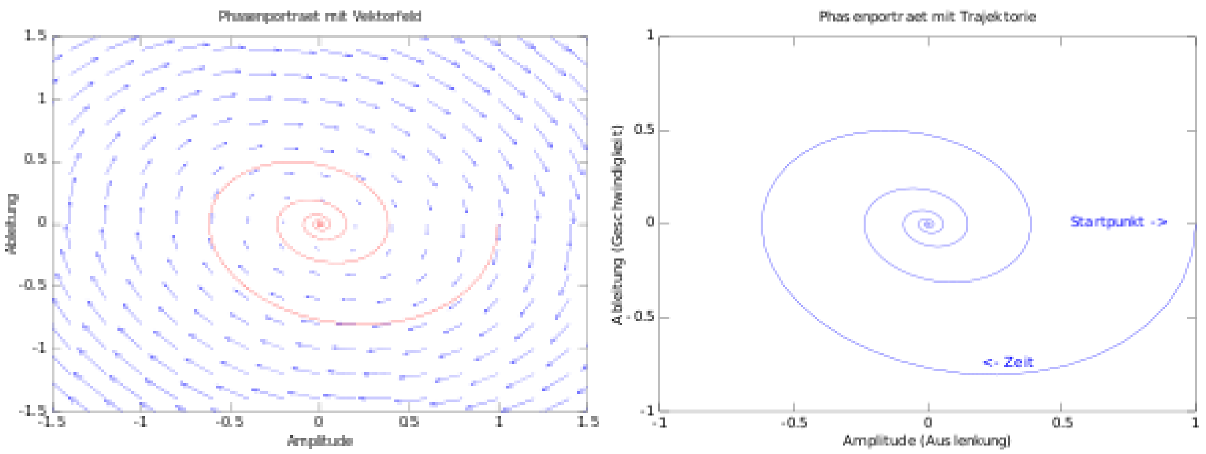
$$\begin{pmatrix} \text{Position} \\ \text{Geschwindigkeit} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \text{Position} \\ \text{Impuls} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ p = m\dot{x} \end{pmatrix}$$

Die Differentialgleichung lässt sich so umformen, dass man sieht, wie sich der Zustand zeitlich entwickelt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ -Dx - \rho\dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ -Dx - \rho p/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -D & -\rho/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}.$$

Das kann man sich das Vektorfeld veranschaulichen:

Phasenraum und Trajektorie des Federpendels — Bsp 2



Verbindet man im Phasenraum die nacheinander zeitlich erreichten Zustände, ergibt sich eine Lösungskurve. Wenn man einen Punkt im Phasenraum als Anfangszustand ("Anfangsbedingung") vorgibt, dann ist der Zustand zu jedem beliebigen Zeitpunkten danach und davor (!) eindeutig festgelegt.

Mathematisch heißt das, dass man beweisen kann, dass es zu jeder gegebenen Anfangsbedingung $x(t_0), p(t_0)$ eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung (das heißt: eine passende Funktion $(x(t), p(t))$) gibt. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu jeder Anfangsbedingung ist mathematisch nicht trivial und sie gilt auch nicht immer!

Differentialgleichungen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.6 und, falls Sie nicht weiterkommen, schauen Sie hier.

Typeneinteilung — Aufg. 1

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $\dot{p}(t) = a \cdot p(t) - b \cdot p^2(t)$

(b) $M\ddot{s}(t) = As(t), \quad M, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$.

(c) $y' = xy^2$.

(d) $y \cdot y^{(4)} + xy'' + \ln(y) = 0$.

(e) $\Delta u(x, y) = 0\,, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Differentialgleichungen — Aufg. 2

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $y : x \mapsto c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-x}$ für jede Wahl von $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die folgende Differentialgleichung löst:

$$y'' - 4y' - 5y = 0\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass $y : x \mapsto \dfrac{c \cdot x}{1 + x}$ für jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ die folgende Differentialgleichung löst

$$x(1 + x)y' - y = 0,\ x \in (-1, 1)$$

und bestimmen Sie c so, dass auch $y(1) = 8$ gilt.

Asymptotik — Aufg. 3

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} s(0) = 0, & t_0 = 0\,, \\ \dot{s}(t) = 1 + s^2(t)\,, & t > t_0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $s : t \mapsto \tan(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

(b) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der angegebenen Lösung für $t \to \pi/2$

Eindeutige Lösbarkeit — Aufg. 4

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(1) = 1, & x_0 = 1\,, \\ (y')^2 - 4xy' + 4y = 0\,, & x > x_0\,. \end{cases}$$

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung.

(b) Zeigen Sie, dass $y : x \mapsto 2cx - c^2$ die Differentialgleichung löst und skizzieren Sie die Geradenschar.

(c) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass y das Anfangswertproblem löst.

(d) Ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig?

2.7 Lineare Differentialgleichungen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit Ansatz zu lösen
- homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen
- inhomogene Differentialgleichungen der vorigen Typen zu lösen
  - durch Variation der Konstanten (nur für Gleichungen erster Ordnung)
  - durch Ansatz vom Typ der rechten Seite

Sie können bereits...

- inhomogene lineare Gleichungssysteme lösen 1.19
- Determinanten berechnen 1.20

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.7.1 Lösungsstrategie

Eine Differentialgleichung allein liefert noch kein wohldefiniertes mathematisches Problem. Neben der Gleichung, in der eine Ableitung einer gesuchten Funktion vorkommt, braucht man unbedingt noch einen Startpunkt (Anfangswert) im Phasenraum. Eine Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung nennt man Anfangswertproblem.

Anfangswertproblem Bsp 1

Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(3) = 7\,, & y = 3\,, \\ y'(x) = \sin(x)\,, & y > 3\,. \end{cases}$$

Ansatz für y:

$$\begin{aligned} y(x) &= -\cos(x) + c\,, \\ y'(x) &= \sin(x)\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstante c:

$$y(3) \stackrel{!}{=} 7 \Rightarrow c = (7 + \cos(3))\,.$$

Lösung:

$$y(x) = -\cos(x) + (7 + \cos(3))\,.$$

Die Lösung eines Anfangswertproblems kann man also finden, indem man die Form der Lösung rät (Ansatz). Aus dem vorigen Beispiel wird deutlich, warum das Lösen von Differentialgleichungen auch Integrieren von Differentialgleichungen heißt. Der Ansatz - die kultivierte Art des Ratens - ist beim Lösen von Differentialgleichungen gang und gäbe.

Wenn man eine Lösungsfunktion zum vorgegebenen Anfangswert angeben kann, hat man gewonnen, egal, wie man auf die Lösung gekommen ist. Denn (bis auf pathologische Fälle in der Mathematik) ist die Lösung eindeutig.

Lineare Differentialgleichungen haben, ähnlich der Lösungen inhomogener linearer Gleichungssysteme, eine 1.19
wichtige Gemeinsamkeit. Ist eine Differentialgleichung linear, dann besitzt die allgemeine Lösung im Allgemeinen zwei Lösungsanteile:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,,$$

wobei y_h die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung und y_p eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. y_h nennt man die homogene Lösung und y_p nennt man eine partikuläre Lösung [particular solution] der Differentialgleichung.

Diese Superpositionseigenschaft führt dazu, dass immer die folgenden Lösungsschritte anfallen:

Lösungsschema - Superpositionsprinzip

Regel 1

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung y_h.
2. Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung.
3. Superposition beider Lösungskomponenten $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$.
4. Bestimmung der Konstanten der homogenen Lösung, falls ein Anfangswert gegeben ist.

2.7.2 Lineare Differentialgleichung der Ordnung eins $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$

Betrachten wir lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die so aussehen:

$$y'(x) + f(x) \cdot y(x) = 0\,.$$

Anhand des folgenden Beispiels wird demonstriert, wie ein allgemeiner Exponentialansatz zu einer Lösung führt - im Falle eines Anfangswertproblems zu einer eindeutigen Lösung:

$y_h(x)$ allgemeiner Exponentialansatz

Bsp 2

Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(1) = 7\,, & x = 1\,, \\ y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = 0\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

Ansatz für y:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda(x)}\,, \\ y'(x) &= e^{\lambda(x)} \cdot \lambda'(x)\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Funktion $\lambda : x \mapsto \lambda(x)$:

$$e^{\lambda(x)} \cdot \lambda'(x) + \frac{1}{x}e^{\lambda(x)} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda(x) = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln(|x|) + C$$

Bestimmung der Konstante:

$$y(x) = c \cdot e^{-\ln(x)} = \frac{c}{x}, \quad c = e^C > 0 \quad \text{mit} \quad y(1) = c \cdot 1 \stackrel{!}{=} 7 \Leftrightarrow c = 7\,.$$

Lösung:

$$y(x) = \frac{7}{x}\,.$$

Bemerkungen:

- Ist kein Anfangswertproblem zu lösen, so behält man die Integrationskonstante c in der Lösung bei.

Was ist zu tun, wenn die Differentialgleichung inhomogen ist? Wenn die Differentialgleichung also die folgende Struktur hat:

$$y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)\,.$$

Entsprechend unserem Lösungsschema, bleibt nur noch die Frage zu klären, wie y_p zu bestimmen ist. Die Lösungsstrategie nennt sich " Variation der Konstante" und der Name ist Programm: eine partikuläre Lösung y_p besitzt dieselbe Gestalt wie die homogene Lösung, wobei für die Integrationskonstante eine unbekannte, von x abhängige Funktion anzusetzen ist. Betrachten wir ein Beispiel:

$y_p(x)$ Variation der Konstante

Bsp 3

Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}\,, & x = \pi\,, \\ y'(x) + \dfrac{1}{x}y(x) = \cos(x)\,, & x > \pi\,. \end{cases}$$

Homogene Lösung y_h:

$$y_h(x) = c\frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Ansatz für y_p:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c(x)\frac{1}{x}\,, \\ y_p'(x) &= c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Funktion $c : x \mapsto c(x)$:

$$\begin{aligned} c'(x)\frac{1}{x} - c(x)\frac{1}{x^2} + c(x)\frac{1}{x^2} &\overset{!}{=} \cos(x) \\ \Leftrightarrow \qquad c'(x) &= x \cdot \cos(x) \\ \Leftrightarrow \qquad c(x) &= \int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)\,. \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = \frac{\cos(x) + x\sin(x)}{x}$$

Superposition der Lösungskomponenten:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = c\frac{1}{x} + \frac{\cos(x) + x\sin(x)}{x}\,.$$

Bestimmung der Konstante:

$$y(\pi) = \frac{c-1}{\pi} \overset{!}{=} \frac{1}{\pi} \Rightarrow c = 2\,.$$

Lösung:

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{\cos(x) + x\sin(x)}{x}\,.$$

2.7.3 Lineare Differentialgleichung der Ordnung eins $y'(x) + ay(x) = g(x)$

Betrachten wir nun eine Differentialgleichungen erster Ordnung, die so aussieht:

$$y'(x) + ay(x) = 0, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

$y_h(x)$ Exponentialansatz — Bsp 4

Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(1) = 7\,, & x = 1\,, \\ y'(x) + 5y(x) = 0\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

Ansatz für y:

$$\begin{aligned} y(x) &= c \cdot e^{\lambda x}, \quad c \not{0}\,, \\ y'(x) &= \lambda \cdot c \cdot e^{\lambda x}\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Lösung $y : x \mapsto y(x)$:

$$y'(x) + 5y(x) = \lambda \cdot c \cdot e^{\lambda x} + 5 \cdot c \cdot e^{\lambda x} \overset{!}{=} 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \lambda + 5 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = -5\,,$$

wobei $(*)$, da $\quad c \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R} e^{\lambda x} \neq 0\,.$
Bestimmung der Konstante c:

$$y(x) = c \cdot e^{-5x} \quad \text{mit } y(1) \overset{!}{=} 7 \Rightarrow c \cdot e^{-5} \overset{!}{=} 7 \Rightarrow c = 7e^5\,.$$

Lösung:

$$y(x) = 7 \cdot e^5 e^{-5x}\,.$$

Offensichtlich liefert der Ansatz $y(x) = ce^{\lambda x}$ eine Lösungsstrategie für eine homogene Differentialgleichung mit konstantem Koeffizient. Bemerkungen:

- Die Lösungsstrategie verschleiert, dass die Konstante c eine Integrationskonstante ist. Um das zu verstehen, lösen Sie die Differentialgleichung nach dem Schema „Trennbare Variablen". 1.8
- Ist man an einer allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung interessiert, dann behält man die Integrationskonstante c in der Lösung bei.

Was, wenn die Differentialgleichung inhomogen ist? Wenn die Differentialgleichung also die folgende Struktur hat:

$$y'(x) + a \cdot y(x) = g(x)\,.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung setzt sich wieder aus homogener und partikulärer Lösung zusammen und die Frage ist, wie y_p zu bestimmen ist. Die Strategie nennt sich „Ansatz vom Typ der rechten Seite". Betrachten wir ein Beispiel.

$y_p(x)$ Ansatz vom Typ der rechten Seite Bsp 5

Differentialgleichung:

$$y'(x) + 5y(x) = x^2\,.$$

Homogene Lösung:

$$y_h(x) = ce^{-5x}\,.$$

Ansatz für y_p:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A_1x^2 + A_2x + A_3\,, \\ y_p'(x) &= 2A_1x + A_2\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Koeffizienten für y_p

$$2A_1x + A_2 + 5A_1x^2 + 5A_2x + 5A_3 \overset{!}{=} x^2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 5A_1 & = 1 \\ 2A_1 + 5A_2 & = 0 \\ A_2 + 5A_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\; \begin{cases} A_1 & = 1/5 \\ A_2 & = -2/25 \\ A_3 & = 2/125 \end{cases}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + \frac{2}{125}\,.$$

Superposition beider Lösungsanteile:

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{25}x + \frac{2}{125} + ce^{-5x}\,.$$

Ansätze vom Typ der rechten Seite Regel 2

Betrachten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' + ay = f(x), \quad a \in \mathbb{R}$$

mit Inhomogenität

$$f : I \to \mathbb{R}, x \mapsto p(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos(\beta x) + q(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin(\beta x)\,,$$

wbei $\mu, \beta \in \mathbb{R}$ und p ein Polynom vom Grad m und q ein Polynom vom Grad n.
Dann lautet der Ansatz für y_p

$$y_p(x) = P(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \cos(\beta x) + Q(x) \cdot e^{\mu x} \cdot \sin(\beta x)\,,$$

wobei P ein Polynom vom Grad m und Q ein Polynom vom Grad n ist:

$$\begin{aligned} P(x) &= A_mx^m + A_{m-1}A^{m-1} + \cdots + A_0\,, \\ Q(x) &= B_nx^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_0\,. \end{aligned}$$

Ansätze vom Typ der rechten Seite

Bsp 6

$$\begin{array}{lllllll} f(x) &=& \cos(3x) & \Rightarrow & y_p &=& A\cos(3x) + B\sin(3x)\,, \\ f(x) &=& e^{4x} & \Rightarrow & y_p &=& Ae^{4x}\,, \\ f(x) &=& \cos(3x)\cdot e^{4x} & \Rightarrow & y_p &=& (A\cos(3x) + B\sin(3x))\, e^{4x}\,, \\ f(x) &=& \cos(3x) + e^{4x} & \Rightarrow & y_p &=& A\cos(3x) + B\sin(3x) + Ce^{4x}\,, \\ f(x) &=& x^2 & \Rightarrow & y_p &=& A_2x^2 + A_1x + A_0\,. \end{array}$$

2.7.4 Lineare Differentialgleichung der Ordnung n $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots a_1 y = g(x)$

Homogene, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind Ihnen wahrscheinlich schon begegnet:

- In der Mechanik lautet die Bewegungsgleichung für einen gedämpften harmonischen Oszillator

  $$m\ddot{x} = -Dx - \rho\dot{x}\,,$$

  wobei $\boldsymbol{x}$ die Auslenkung beispielsweise eines Pendels, m seine Masse, D die Federkonstante und ρ die Reibungskonstante ist.

- In der Elektrodynamik wird der elektrische Schwingkreis durch die folgende Differentialgleichung beschrieben

  $$\ddot{i} = -\frac{1}{LC}i\,,$$

  wobei i die Stromstärke, C die Kapaziät des Kondensators und L die Induktivität der Spule ist.

Bemerkungen:

- Es lohnt sich jetzt kurz zu überlegen, was für eine Lösungskurve wir beim gedämpften harmonischen Oszillator erwarten! Haben Sie eine Idee? 1.15
- Die unahbhängige Variable, in den zuletzt genannten Differentialgleichungen, ist die Zeit t.
- Die Differentialgleichungen sind so keinesfalls eindeutig lösbar - es müssen noch zwei Anfangsbedingungen gegeben sein.

Die Lösungstrategie entspricht dem Vorgehen aus dem vorangegangenen Abschnitt. Schauen wir uns ein konkretes Beispiel an.

$y_h(x)$ Exponentialansatz

Bsp 7

Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x(0) = 1, & t = 0\,, \\ \dot{x}(0) = -1, & t = 0\,, \\ \ddot{x}(t) = -2\dot{x}(t) - 5\cdot x(t)\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Ansatz für x:

$$\begin{array}{lll} x(t) &=& c\cdot e^{\lambda t},\ c > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,. \\ \dot{x}(t) &=& c\cdot\lambda\cdot e^{\lambda t}\,, \\ \ddot{x}(t) &=& c\cdot\lambda^2\cdot e^{\lambda t} \end{array}$$

Bestimmung von λ:

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda^2\cdot c\cdot e^{\lambda t} + 2\cdot c\cdot\lambda e^{\lambda t} + 5\cdot c\cdot e^{\lambda t} &=& 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right)\cdot c\cdot e^{\lambda t} &=& 0,\ c\cdot e^{\lambda t} \neq 0\,, \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 + 2\cdot\lambda + 5 &=& 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \end{array}$$

Allgemeine Lösung:

$$\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{C}: \quad x(t) = c_1\cdot e^{\lambda_1 t} + c_2\cdot e^{\lambda_2 t} = e^{-t}\cdot\left(c_1\cdot e^{2i\,t} + c_2\cdot e^{-2i\,t}\right)\,.$$

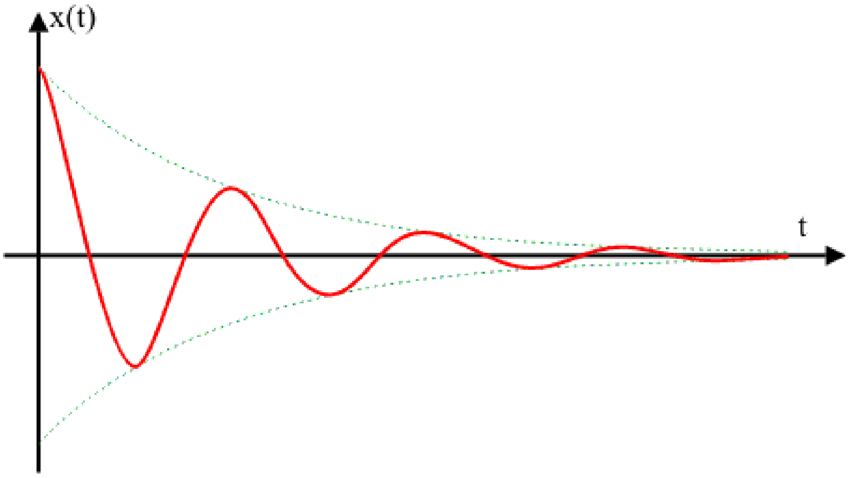
Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1\,, \\ c_1 \cdot (-1+2i) + c_2 \cdot (-1-2i) & = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+2\,i & -1-2\,i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{2}\,.$$

Lösung:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \cdot \left(e^{2i\,t} + e^{-2i\,t}\right) = e^{-t} \cdot \cos(2\,t)\,.$$



Bemerkungen:

- Das Polynom, dessen Nullstellen die Werte für λ liefert nennt man das charakteristische Polynom p. Im Beispiel ist $p : \lambda \mapsto \lambda^2 + 2 \cdot \lambda + 5$.
- Man erhält typischerweise zwei verschiedene Lösungen $\lambda_{1,2}$ und über die Lösungsanteile läßt sich folgendes sagen:
  - $\mathrm{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0 \Rightarrow$ Sinusförmige Schwingung enthalten.
  - $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0 \Rightarrow$ Die Lösung klingt exponentiell ab.
  - $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0 \Rightarrow$ Die Löusng wächst exponentiell.
- Die Lösungsfunktion zu λ_1 und diejenige zu λ_2 können beliebig superponiert werden, weil die Differentialgleichung linear und homogen ist. Dies liefert zwei Integrationskonstanten und so die Möglichkeit, alle erdenklichen Anfangswerte einzustellen, falls die beiden $\lambda_1 \neq \lambda_2$ verschieden voneinander sind.
- Wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann muss man eine weitere linear unabhängige Lösung der homogenen Gleichung hinzufügen. Eine zweite linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung lautet $t \cdot e^{\lambda t}$. Die die allgemeine Lösung ist dann:
$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda\,t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda\,t}\,.$$
- Eine Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung nennt man auch Fundamentalsystem (siehe Beispiel 2.7.4).
- Falls man zwei unterschiedliche homogene Lösungen ϕ_1, ϕ_2 gegeben hat und man möchte überprüfen, ob sie den Lösungsraum aufspannen, also linear unahbhängig sind, dann gibt es ein notwendig und hinreichendes Kriterium: man berechnet die sogenannte Wronski-Determinante. 1.20
$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{pmatrix}$$
Gilt $W(x) \neq 0$, so ist (ϕ_1, ϕ_2) ein Fundamentalsystem.
- Zur Bestimmung der Integrationskonstanten ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen. 1.19

Fundamentalsystem

Bsp 8

Differentialgleichung:

$$y'' + 4y' + 4y = 0\,.$$

Ansatz für y:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x}\,, \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x}\,, \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x}\,. \end{aligned}$$

Bestimmung von λ:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} &\overset{!}{=}& \; 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda^2 + 4\lambda + 4)\cdot e^{\lambda x} &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 + 4\lambda + 4 &=& \; 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2\,. \end{aligned}$$

Fundamentalsystem:

$$(e^{-2x}, xe^{-2x})\,, \qquad \text{da } W(x) = \det\begin{pmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{pmatrix} = e^{-4x} \neq 0\,.$$

Ist die Lösung komplex, das heißt es gibt auch echt imaginäre Anteile, dann gibt man im Allgemeinen die physikalisch sinnvolle Lösung an und das ist der Realteil der komplexen Lösung. Es liegt aus diesem Grund nahe den Ansatz für y_h schon auf den reellen Anteil zu reduzieren und das gelingt wie folgt: wenn $\lambda = a + ib$ mit $b \neq 0$ eine Nullstelle des charateristischen Polynoms ist, dann ist auch $\overline{\lambda} = a - ib$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Der herkömmliche Ansatz für dieses Pärchen von Nullstellen lautet

$$y_h(x) = c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x} = e^{ax}\left(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}\right) \quad \text{mit} \quad c_1 = x_1 + iy_1, c_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Formen wir den Ansatz mit Hilfe der Eulerschen Identität um! 1.15

$$y_h(x) \;=\; e^{ax}\left(c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}\right) = e^{ax}\left(c_1\left(\cos(bx) + i\sin(bx)\right) + c_2\left(\cos(bx) - i\sin(bx)\right)\right)\,.$$

Um nun einen vernünftigen Ansatz allein für eine relle Lösung abzuleiten, muss man offensichtlich die Multiplikation mit den komplex-wertigen Konstanten durchführen:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= e^{ax}\left((x_1 + iy_1)\left(\cos(bx) + i\sin(bx)\right) + (x_2 + iy_2)\left(\cos(bx) - i\sin(bx)\right)\right) \\ &= e^{ax}\left((x_1 + x_2)\cos(bx) + (y_2 - y_1)\sin(bx)\right) + ie^{ax}\left((y_1 + y_2)\cos(bx) + (x_1 - x_2)\sin(bx)\right) \\ \Rightarrow \quad & \mathrm{Re}\,(y_h)\,(x) = e^{ax}\left((x_1 + x_2)\cos(bx) + (y_2 - y_1)\sin(bx)\right)\,. \end{aligned}$$

Es lohnt sich dieses Ergebnis zusammen zu fassen:

Ansatz für Realteil der Lösung für ein komplexes Nullstellen-Pärchen

Regel 3

Gilt $p(\lambda) = p(\overline{\lambda}) = 0$ für eine komplexe Zahl $\lambda = a + ib$ mit $b \neq 0$, so gilt:

$$\mathrm{Re}\,(y_h)\,(x) = e^{ax}\left(c_1\cos(bx) + c_2\sin(bx)\right) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Die Differentialgleichung des Federpendels gibt es auch in einer inhomogenen Variante: Man regt das Pendel mit einer oszillierenden Kraft mit Kreisfrequenz ω und der Amplitude $\hat{F}$ an:

$$m\ddot{x} + \rho\dot{x} + Dx = \hat{F}\cos(\omega t)\,.$$

Hier geht man so vor, wie wir es schon bei der Differentialgleichung erster Ordnung gesehen haben: zu der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung x_h wird eine partikuläre Lösung x_p der inhomogenen Differentialgleichung hinzuaddiert und erhält die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)\,.$$

Eine Strategie zur Bestimmung einer partikulären Lösung ist ein Ansatz vom Typ der rechten Seite.[7]

[7]Bei Polynomen muss der Polynomgrad entsprechend der Ordnung der Differentialgleichung erhöht werden!

$y_p(x)$ Ansatz vom Typ der rechten Seite

Bsp 9

Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x(t_0) = y_0, & t = t_0\,, \\ \dot{x}(t_0) = y_1, & t = t_0\,, \\ m\ddot{x}(t) + \rho\dot{x}(t) + Dx(t) = \hat{F}\cos(\omega \cdot t)\,, & t > t_0\,. \end{cases}$$

Homogene Lösung x_h:

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \text{ mit } \lambda_{1,2} = \frac{-\rho + \sqrt{\rho^2 \pm 4mD}}{2m},\ \lambda_1 \neq \lambda_2\,.$$

Ansatz für x_p:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= a\cos(\omega \cdot t) + b\sin(\omega \cdot t)\,, \\ \dot{x}_p(t) &= -\omega a\sin(\omega \cdot t) + \omega b\cos(\omega \cdot t)\,, \\ \ddot{x}_p(t) &= -\omega^2 a\cos(\omega \cdot t) - \omega^2 b\sin(\omega \cdot t)\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Koeffizienten a und b:

$$\forall\, t > t_0: \quad m\ddot{x}_p + \rho\dot{x}_p + Dx_p = \hat{F}\cos(\omega \cdot t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left(-m\omega^2 + D\right) \cdot a + \rho\omega b & \overset{!}{=} \hat{F}\,, \\ \left(-m\omega^2 + D\right) \cdot b - \rho\omega a & \overset{!}{=} 0\,. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & = \dfrac{D - m\omega^2}{(D - m\omega^2)^2 + (\omega\rho)^2}\hat{F}\,, \\ b & = \dfrac{\omega\rho}{(D - m\omega^2)^2 + (\omega\rho)^2}\hat{F}\,. \end{cases}$$

Superposition der Lösungskomponenten:[a]

$$\begin{aligned} x(t) &= x_p(t) + x_h(t) \\ &= \frac{D - m\omega^2}{(D - m\omega^2)^2 + (\omega\rho)^2}\hat{F}\cos(\omega \cdot t) + \frac{\omega\rho}{(D - m\omega^2)^2 + (\omega\rho)^2}\hat{F}\sin(\omega \cdot t) + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,, \end{aligned}$$

[a] Ist ein Anfangswertproblem zu lösen, müssen noch die Integrationskonstanten c_1 und c_2 bestimmt werden.

2.7.5 Mathematische Resonanz

Eine Situation ist bis jetzt noch nicht aufgetregen. Betrachten wir beispielsweise die Differentialgleichung

$$y'' + y = \sin(x)\,.$$

Unser herkömmlicher Ansatz für die partikuläre Lösung ist

$$\begin{aligned} y_p(x) &= a\sin(x) + b\cos(x)\,, \\ y_p''(x) &= -a\sin(x) - b\sin(x)\,. \end{aligned}$$

Um die Konstanten a und b zu bestimmen, setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein und erhalten …nichts - sehen Sie selbst: !!!

$$-a\sin(x) - b\sin(x) + a\sin(x) + b\cos(x) = 0\ !$$

Offensichtlich löst y_p die homogenen Gleichung! In der Tat, denn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind $\lambda_{1,2} = \pm i$ und damit lautet die allgemeine, reelle Lösung der homogenen Gleichung

$$\mathrm{Re}\,(y_h)\,(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) = y_p(x)\,.$$

Hätten wir uns zuerst Gedanken über y_h gemacht, hätten wir wahrscheinlich schon längst festgestellt, dass die Inhomogenität auf der rechten Seite selbst Lösung der homogenen Gleichung ist! Diesen Fall bezeichnet man als den mathematischen Resonanzfall.

Liegt der Resonanzfall vor, muss der Ansatz für die partikuläre Lösung modifiziert werden:

$$y_p(x) = x\left(a\sin(x) + b\cos(x)\right)\,.$$

Mathematischer Resonanzfall — Bsp 10

Differentialgleichung:

$$y'' + y = \sin(x)$$

Allgemeine, reelle Lösung der homogenen Gleichung:

$$\mathrm{Re}\,(y_h) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) \quad \Rightarrow \text{ mathematischer Resonanzfall}$$

Ansatz für partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x\,(a\sin(x) + b\cos(x)) \\ y_p''(x) &= 2a\cos(x) - 2b\sin(x) + x\,(-a\sin(x) - b\cos(x))\,. \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten a, b:

$$\begin{aligned} & 2a\cos(x) - 2b\sin(x) + x\,(-a\sin(x) - b\cos(x)) + x\,(a\sin(x) + b\cos(x)) = 2a\cos(x) - 2b\sin(x) \\ \Rightarrow \quad & 2a\cos(x) - 2b\sin(x) \overset{!}{=} \sin(x) \Rightarrow a = 0 \wedge b = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x)\,.$$

Ansatz für y_p im Fall mathematischer Resonanz — Bsp 11

Differentialgleichung:

$$y^{(4)} + 3y''' + 6y'' + 4y' + 5y = -8\cos(x) - 8\sin(x)\,.$$

Charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)\cdot(\lambda^2 + 4\lambda^2 + 5) \quad \Rightarrow p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{\pm i, -2 \pm i\}$$

Allgemeine, reelle Lösung der homogenen Gleichung:

$$\mathrm{Re}\,(y_h)\,(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + e^{-2x}\,(c_3\cos(x) + c_4\sin(x)) \quad \Rightarrow \text{ mathematischer Resonanzfall}$$

Ansatz für partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = x(a\sin(x) + b\cos(x))\,.$$

Ansatz für y_p im Fall mathematischer Resonanz — Bsp 12

Differentialgleichung:

$$y'' + y = x\sin(x)$$

Charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \Rightarrow p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{\pm i\}$$

Allgemeine, reelle Lösung der homogenen Gleichung:

$$\mathrm{Re}\,(y_h)\,(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) \quad \Rightarrow \text{ mathematischer Resonanzfall}$$

Ansatz für partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = x(a_1x + a_0)\sin(x) + x(b_1x + b_0)\cos(x)\,.$$

Eine lineare Differentialgleichung der Ordnung $n \geq 1$ mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y^{(1)}(x) + a_0y(x) = g(x)\,.$$

Die Lösungsstrategie ist wie folgt:

- Die Lösungsstrategie zur Lösung einer inhomogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Ordnung n-ter Ordnung ist entsprechend:

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung mit Hilfe des Ansatzes $y_h(x) = e^{\lambda \cdot x}$.
2. Vervollständigung des Lösungsraums zu n linear unabhängigen Lösungsfunktionen, falls das charakteristische Polynom mehrfache Nullstellen besitzt.
3. Falls $g \neq 0$, erfolgt die Bestimmung einer partikulären Lösung y_p mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite, hierbei auf mathematische Resonanz achten.
4. Superposition beider Lösungskomponenten.
5. Falls ein Anfangswertproblem zu lösen ist, erfolgt die Bestimmung der n Konstanten durch die n Anfangsbedingungen.

- Eine eindeutige Lösung ist nur möglich wenn n Anfangsbedingungen vorgegeben sein, beispielsweise:

$$y(x_0),\, y'(x_0), \cdots y^{(n-1)}(x_0)$$

Pro Integrationsschritt kommt ja eine Konstante hinzu! Die Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordung ohne fixierten Anfangsbedingungen nennt man die allgemeine Lösung [general solution].

Lineare Differentialgleichungen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in den Abschnitten 2.6 und 2.7 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Lösungskurve — Aufg. 1

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen und zeichnen Sie eine Lösungskurve für den gegebenen Anfangswert ein.

$$(a)\ y' = y,\ y(0) = 2 \quad (b)\ y' = \frac{y}{2x}, \quad x \in (0, \infty),\ y(1) = 1\,.$$

Lipschitz-Stetigkeit — Aufg. 2

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen auf $D_f := [0,0] \times [1,1]$ Lipschitz-stetig sind - ob also gilt

$$\exists\, L \leq 0:\ \forall y_1, y_2 \in D_f: \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|\,,$$

und geben Sie gegebenenfalls die Lipschitz-Konstante an.

$$(a)\ f : (x, y) \mapsto y^2 \quad (b)\ f : (x, y) \mapsto 2\sqrt{y}\,.$$

Inhomogenität — Aufg. 3

Lösen Sie die folgende inhomogene Differentialgleichung

$$y' - 3y = x \cdot e^x$$

durch (a) Variation der Konstanten und (b) Ansatz vom Typ der rechten Seite.

Inhomogen — Aufg. 4

Lösen Sie folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe des Ansatz vom Typ der rechten Seite

$(a)\ y' = 2x - y$ $\quad (b)\ y' + 2y = 4 \cdot e^{5x}$ $\quad (c)\ y' + y = e^{-x}$

$(d)\ y' - 4y = 5\sin(x)$ $\quad (e)\ y' - 5y = \cos(x) + 4\sin(x)$ $\quad (f)\ y' - 6y = 3e^{6x}$

Inhomogen — Aufg. 5

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mit Hilfe des Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$(a)\ y' + 4y = x^3 - x \wedge y(1) = 2 \ (b)\ y' - y = e^x \wedge y(0) = 1 \ (c)\ y' + 3y = -\cos(x) \wedge y(0) = 5$$

Gleichungen höherer Ordnung

Aufg. 6

Geben Sie für folgende Differentialgleichungen jeweils die allgemeine Lösung an und lösen Sie anschließend das zugehörige Anfangswertproblem

(a) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = -2$

(b) $\ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = \cos(t) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 4$

(c) $y'' + 2y' + 3y = e^{-2x} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

(d) $\ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{4}x = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = -1$

(e) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 17x = 2\sin(5t) \quad x(\pi) = 0 \quad \dot{x}(\pi) = 1$

(f) $y''' + 9y' = 18x, \ y(\pi) = \pi^2 \quad y'(\pi) = 2\pi \quad y''(\pi) = 10$

(g) $y''' + 8y'' + 17y' + 10y = 34\sin(x) + 12\cos(x) \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -3, \ y''(0) = 8$

(h) $\ddot{x} + 7\dot{x} + 12x = 0 \quad x(0) = 5 \quad \dot{x}(0) = 0$

2.8 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen...	
• Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen kennen und lösen	
Sie können bereits...	
• Integrale berechnen	2.3

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.8.1 Trennbare Variablen

Die sogenannte "Trennung der Variablen" [separation of variables] ist ein beliebter Trick, um Anfangswertprobleme erster Ordnung (und nur erster Ordnung) zu lösen. Differentialgleichungen erster Ordnung haben trennbare Variablen [separable variables], wenn gilt:

Differentialgleichung mit trennbaren Variablen — Def. 1

Die Differentialgleichung läßt sich eine Form bringen, in der

- auf der linken Seite das Produkt der Ableitung y' mit einer Funktion h steht, wobei h nur von y abhängt,
- auf der rechten Seite nur eine Funktion f der unabhängigen Variable x auftaucht.

Schematisch sieht sie dann so aus:

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = f(x)\,.$$

2.8.2 Lösungsstrategie

Die grundsätzliche Idee ist beide Seiten der Gleichung zu integrieren und die Substitutionsregel anzuwenden. 2.3
Die Substitution lautet

$$s = y(x) \Rightarrow \mathrm{d}s = y'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Anstatt s schreibt man einfach y, also

$$y = y(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x\,. \quad (*)$$

Wir schauen uns das Vorgehen für das folgende Anfangswertproblem an:

$$\begin{cases} y(3) = 7\,, & x = 3\,, \\ e^{y(x)} y'(x) = x^5, & x > 3\,. \end{cases}$$

Wir integrieren beide Seiten der Differentialgleichung vom Startpunkt $(x, y) = (3, 7)$ zu einem beliebigen Endpunkt (x_1, y_1) und integrieren durch Substitution:

$$\begin{aligned} \int_3^{x_1} e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_3^{x_1} x^5\,\mathrm{d}x \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \int_7^{y_1} e^y\,\mathrm{d}y &= = \int_3^{x_1} x^5\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad \Big[e^y\Big]_7^{y_1} &= \left[\frac{1}{6}x^6\right]_3^{x_1} \\ \Leftrightarrow \quad e^{y_1} - e^7 &= 7\frac{x_1^6}{6} - \frac{3^6}{6} \end{aligned}$$

Und es ergibt sich die Lösung:

$$y_1 = \ln\left(e^7 + \frac{x_1^6}{6} - \frac{3^6}{6}\right)\,.$$

Bemerkungen:

- Das Auflösen nach y_1 im letzten Schritt kann problematisch sein - denken Sie an den Definitionsbereich der Umkehrfunktionen. 1.5

- Der Name der Lösungmethode kommt daher, dass man die Differentialgleichung formal umformen kann zu

$$e^y y' = x^5 \Leftrightarrow e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^5 \Rightarrow e^y \mathrm{d}y = x^5 \mathrm{d}x\,.$$

  In dieser Form sind die Variablen x und y getrennt und dann auf beiden Seiten von $(x, y) = (3, 7)$ bis (x_1, y_1) integriert:

$$\int_7^{y_1} e^y \,\mathrm{d}y = \int_3^{x_1} x^5 \,\mathrm{d}x\,.$$

- Manche Leute verzichten auf die Anfangs- und Endwerte und schreiben unbestimmte Integrale, um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zu erhalten. Aber dann darf man die Integrationskonstante nicht vergessen:

$$\int e^y \,\mathrm{d}y = \int x^5 \,\mathrm{d}x \Leftrightarrow e^y = \frac{x^6}{6} + c\,.$$

  Die allgemeine Lösung lautet mit $C = \ln(c)$ also

$$y(x) = C \cdot \ln\left(\frac{x^6}{6}\right)\,.$$

Nichtlinear von erster Ordnung Bsp 1

Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y(0) = 1\,, & x = 0\,, \\ y'(x) + y^2(x) = 0\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} y' + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y^2 &= 0 \\ \overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \cdot \mathrm{d}y &= -\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Integration:

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = -\int \mathrm{d}x \overset{x\neq C}{\Leftrightarrow} y = \frac{1}{x - C}\,.$$

Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$y(0) = -\frac{1}{C} \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow C = -1\,.$$

Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{x + 1}\,.$$

Bei den folgenden Differentialgleichungen führt eine Substitution auf eine Form, die mit dem Schema dieses Abschnitts zu lösen ist:

vorher	Substitution	nachher
$y' = \tilde{h}(ax + by + c)$	$u = ax + by + c$	$u' = a + b\tilde{h}(u)$
$y' = \tilde{h}\left(\frac{y}{x}\right)$	$u = \frac{y}{x}$	$u' = \frac{\tilde{h}(u) - u}{x}$

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.8 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Trennung der Variablen — Aufg. 1

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen:

$$(a)\ y' = \frac{y^2}{x^2},\ x \in (0,\infty) \qquad (b)\ y' = \frac{x \cdot y}{1+x^2}$$
$$(c)\ y' = (1-y)^2 \qquad (d)\ y' \cdot \sin(y) = -x,\ y \in (0,\pi)$$

Inhomogenität — Aufg. 2

Lösen Sie folgenden Anfangswertprobleme durch Variation der Konstanten:

$$\begin{array}{lll} (a) & xy' - y = x^2 \cdot \cos(x) & \wedge \quad y(\pi) = 2\pi \\ (b) & xy' + y = \ln(x) & \wedge \quad y(1) = 1 \\ (c) & y' - \tan(x) \cdot y = 5 \cdot \sin(2x) & \wedge \quad y(3\pi) = 2 \end{array}$$

Hinweis zur Integration in Aufgabenteil (c): benuzten Sie ein Additionstheorem!

Substitution — Aufg. 3

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(1) = \sqrt{2}\,.$

Substitution — Aufg. 4

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution. Schlagen Sie die auftretenden Integrale gegebenenfalls in einer Formelsammlung nach:

$$(a)\ y' = \frac{y}{x} + 4,\ x \in (0,\infty) \qquad (b)\ y' = (x+y+1)^2$$
$$(c)\ y' = \frac{1}{4} + \frac{y^2}{x^2}, x \in (0,\infty) \qquad (d)\ y' = \sin(\tfrac{y}{x}) + \tfrac{y}{x},\ x \in (0,\infty)$$

Logistisches Wachstum — Aufg. 5

Die Anzahl der von einem Virus infizierten Personen $x(t)$ zum Zeitpunkt t in einer Bevölkerung der Größe N kann folgendermaßen modelliert werden: Pro Tag habe jede Person $k > 0$ zufällige Kontakte, wobei der Virus bei jedem Kontakt übertragen wird.

(a) Wie viele nicht infizierte Personen gibt es in Abhängigkeit von $x(t)$ zum Zeitpunkt t? Wie groß ist der Anteil der nicht infizierten Personen zum Zeitpunkt t?

(b) Wie viele Personen trifft eine infizierte Person in einer kleinen Zeitpanne $[t, t+\Delta t]$? Wieviele nicht infizierte Personen trifft eine infizierte Person in $[t, t+\Delta t]$?

(c) Wie viele Kontakte von infizierten Personen mit nicht infizierten Personen gibt es insgesamt in $[t, t+\Delta t]$? Wie viele Personen werden daher in $[t, t+\Delta t]$ neu angesteckt?

(d) Drücken Sie $x(t+\Delta t)$ durch $x(t)$ und die Anzahl der neu infizierten Personen in $[t, t+\Delta t]$ aus.

(e) Führen Sie den Grenzwert $\Delta t \to 0$ aus, um eine Differentialgleichung zu erhalten. Wie lautet die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblemes wenn $x(0) = 1$ war?

Differentialgleichungen erster Ordnung

Aufg. 6

Lösen Sie folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Methode:

(a) $y' = x(y^2 + 1)$ (b) $y' = y \cdot \sin(x)$ (c) $y' = xy$

(d) $xy' + y = 2\ln(x)$ (e) $y' = 5x^4(y + 1)$ (f) $y' - 5y = 2\cos(x) - \sin(3x)$

2.9 Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen...	

• numerische Löser zum Lösen von Differentialgleichungen kennen, insbesondere
  • das explizites Euler Verfahren (Einschritt- oder Polygonzugverfahren)
  • das implizite Euler Verfahren	

Sie kennen bereits...	
• ein numerisches Verfahren, nämlich das Newton-Verfahren	1.9

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.9.1 Keine Lösungstrategie passt - was nun?

Die Differentialgleichungen der meisten interessanten Modelle können nicht mit Bleistift und Papier gelöst werden (etwa mittels Variation der Konstanten oder mittels Trennung der Variablen). Die Lösungsfunktionen von Differentialgleichungen lassen sich typischerweise nicht einmal mit Standardfunktionen wie sin und exp hinschreiben. Also versucht man, die Lösungsfunktionen numerisch zu bestimmen, also Wertetabellen aufzustellen. Das geht immer nur mehr oder weniger genau!

Die Differentialgleichung wird in einen numerischen Löser hineingegeben [numerical integrator], der dann eine Wertetabelle bestimmt. Typischerweise erwarten numerische Löser Anfangswertprobleme in der Form

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0\,, & x = x_0\,,\\ y'(x) = f(y(x),x)\,, & x > x_0\,. \end{cases}$$

wobei der Startpunkt (x_0, y_0) vorgegeben werden muss. Die Funktion f wird programmiert, so dass sie der Löser für alle (x, y) auswerten kann, für die er das will.

Die Differentialgleichung wird oft auch mit anderen Variablen, nämlich $\dot{x} = f(x, t)$ geschrieben, also mit t statt x und mit x statt y. Also Vorsicht mit der Rolle von x.

Für die Differentialgleichung $x^2y' + \sin(y) - x^5 = 0$ wäre die Funktion f beispielsweise

$$f(y(x), x) = x^3 - x^{-2}\sin(y)\,.$$

GeoGebra bietet die Funktion `LöseDgl` an, die Ihnen die Lösung eines Anfangswertproblems per Knopfdruck liefert. Versuchen Sie es.

2.9.2 Explizites Euler-Verfahren

Gegeben ist eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangsbedingung:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0\,, & x = x_0\,,\\ y'(x) = f(y,x)\,, & x > x_0\,. \end{cases}$$

Gesucht ist die Funktion $y(x)$ für $x \geq x_0$. Der Wert von $y(x_0)$ ist vorgegeben. Wenn man in x nun ein kleines Stückchen h weitergeht, also zu $x = x_0 + h$, kennt man für sehr kleines h die Änderung von y in guter Näherung und kann damit sagen:

$$y(x_0 + h) \approx y_1 := y_0 + h \cdot f(x_0, x_0)$$

Nun kann man schätzen, was y sein soll, wenn man noch einen Schritt h weitergeht:

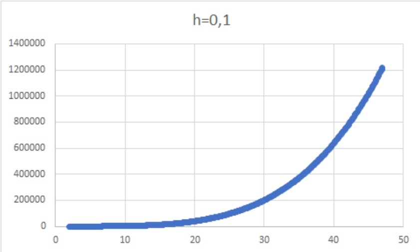
$$y(x_1 + h) \approx y_2 := y_1 + h \cdot f(x_1, x_1)\,.$$

Und nach $k + 1$ Schritten

$$y(x_k + h) \approx y_{k+1} := y_k + h \cdot f(x_k, x_k)\,.$$

Dies ist das explizite Euler-Verfahren.

Explizites Euler-Verfahren für Differentialgleichung erster Ordnung Bsp 1



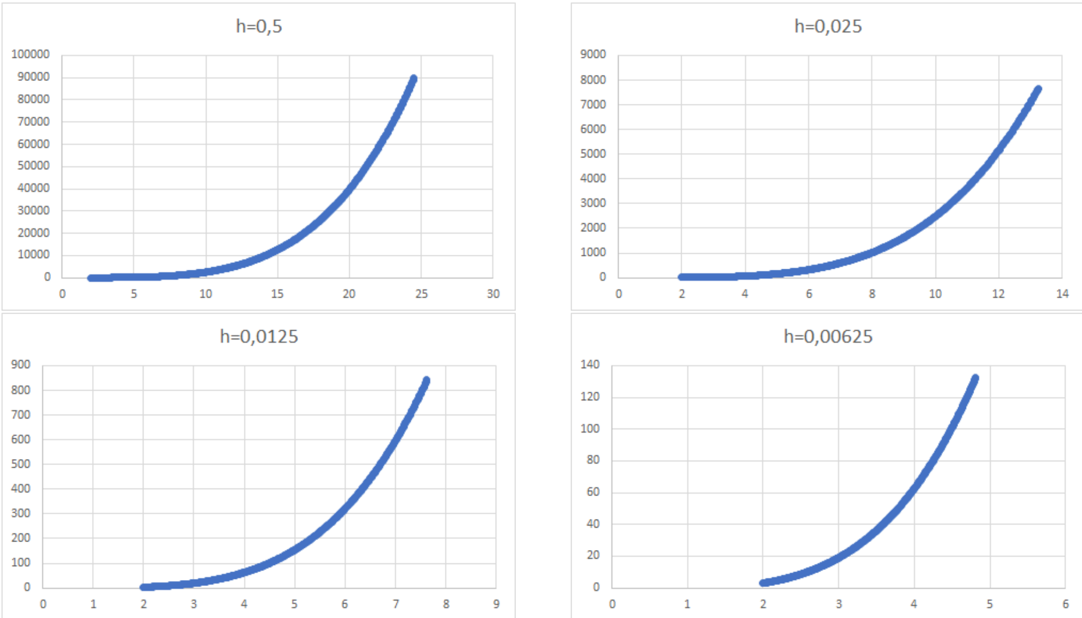
Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y(2) = 3\,, & x = 2\,,\\ y'(x) = x^3 - x^{-2}\sin(y)\,, & x > 2\,. \end{cases}$$

Iterationsvorschrift Euler-Verfahren:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot (x_k^3 - x_k^{-2}\sin(y_k))\,.$$

Wenn man die Schrittweite h halbiert, verdoppelt sich die Zahl der Schritte, um einen bestimmten x-Wert von x_0 aus zu erreichen. Andererseits halbiert sich dabei ungefähr der Fehler der Näherung.



Das stößt allerdings an eine Grenze, wenn die Schrittweite h zu klein wird: Dann addiert man in dem Iterationsschritt Zahlen in sehr unterschiedlicher Größenordnung, so dass die Rundungsfehler überhand nehmen. Erinnern Sie sich daran, dass man Nachkommastellen verlieren kann, wenn man normal große Zahlen mit kleinen Zahlen addiert:

$$13 + 0{,}000000001 \cdot 42 = 13{,}0000000042\cdots.$$

Das explizite Euler-Verfahren kann also fehlerhaft sein. Das ist eine numerische Instabilität. Diese Instabilität kann man vermeiden, wenn man das implizite Euler-Verfahren betrachtet.

2.9.3 Andere Löser für Differentialgleichungen erster Ordnung

Um das $y(x)$ zu einem vorgegebenen x sehr genau zu bestimmen und auch noch schnell zu rechnen, benötigt man deshalb Verfahren, die mit recht groben Schrittweiten h auskommen.

Ein gängiges Verfahren ist das Runge-Kutta Verfahren von vierter Appoximationsordnung. Wenn man hier die Schrittweite h halbiert, sinkt der Fehler etwa auf ein Sechzehntel. Allerdings muss man die Funktion f dazu pro Schritt viermal auswerten. Aufgabe

Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung Regel 1

Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0\,, & x = x_0\,,\\ y'(x) = f(y(x), x)\,, & x > x_0\,. \end{cases}$$

Iterationsvorschrift Runge-Kutta-Verfahren:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right)\,,$$

mit

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(y_k, x_k)\,, \\
k_2 &= f(y_k + \frac{h}{2}k_1, x_k + \frac{h}{2})\,, \\
k_3 &= f(y_k + \frac{h}{2}k_2, x_k + \frac{h}{2})\,, \\
k_4 &= f(y_k + hk_3, x_k + h)\,.
\end{aligned}
$$

Neben der Genauigkeit von $y(x)$ zu einem vorgegeben x kann man auch das asymptotische Verhalten für $x \to \infty$ untersuchen: Die genäherte Lösung soll nicht explodieren. Hierzu kann man implizite Löser einsetzen. Die Iteration beim implizite Euler-Verfahren lautet beispielsweise:

$$y_k = y_{k-1} + h \cdot f(y_k, x_{k-1})\,.$$

Anders als beim expliziten Verfahren, ist ein Gleichungssystem zu lösen - das ist der Preis den man für numerische Stabilität zu zahlen hat. 1.20 Aufgabe

Bemerkungen:

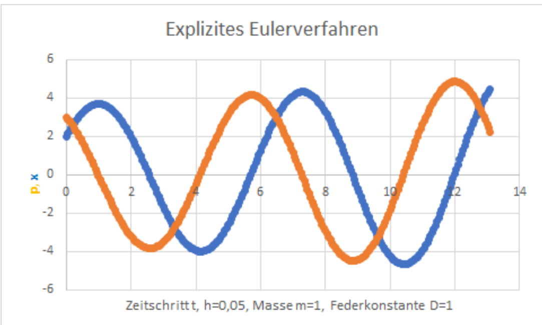
- Implizite Löser sind hilfreich beim Umgang mit steifen [stiff] Systemen. So heißen Systeme von Differentialgleichungen, in denen sehr verschieden schnelle Abklingverhalten gemischt werden. Die Anteile mit dem schnellen Abklingverhalten erzwingen gegebenenfalls eine entsprechend kleine Schrittweite.

2.9.4 Symplektische Verfahren für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Gerade in der Mechanik ist man an Differentialgleichungen zweiter Ordnung interessiert. Man kann sich hier die symplektische Struktur der Differentialgleichungen der Mechanik zu Nutze machen.

Betrachten wir beispielsweise ein ungedämpftes Pendel der Masse m mit Federkonstante $D > 0$.

Explizites Euler-Verfahren für System erster Ordnung Bsp 2



Anfangswertproblem:

$$
\begin{cases}
x(t_0) = x_0\,, & t = t_0\,, \\
p(t_0) = p_0\,, & t = t_0\,, \\
\dot{x}(t) = \dfrac{p(t)}{m}\,, & t > t_0\,, \\
\dot{p}(t) = -D \cdot x(t)\,, & t > t_0\,.
\end{cases}
$$

Iterationsvorschrift Euler-Verfahren:

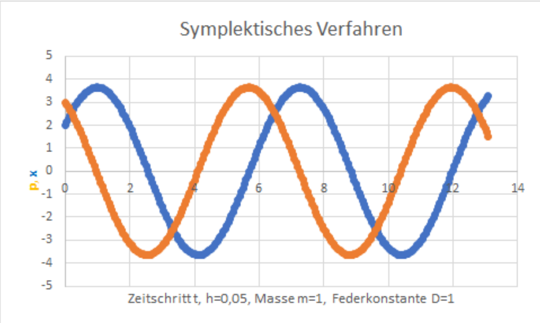
$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} p_k/m \\ D \cdot x_k \end{pmatrix}\,.$$

Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass das explizite Eulerverfahren eine unphysikalische Lösung produziert: die Amplitude der Schwingung wird immer größer! 1.13

Witzigerweise stellt sich heraus, dass der Löser wesentlich besser funktioniert, wenn man das neue x in die Gleichung für p einsetzt - oder umgekehrt. So ergibt sich das symplektische Euler-Verfahren:

Symplektisches Verfahren für ein System erster Ordnung

Bsp 3



Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0\,, & t = t_0\,,\\ p(t_0) = p_0\,, & t = t_0\,,\\ \dot{x}(t) = \dfrac{p(t)}{m}\,, & t > t_0\,,\\ \dot{p}(t) = -D \cdot x(t)\,, & t > t_0\,. \end{cases}$$

Iterationsvorschrift symplektisches Verfahren:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} p_k/m \\ D \cdot x_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Numerische Verfahren Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.9 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Explizites Euler Verfahren — Aufg. 1

Berechnen Sie für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = 1\,, & x = 0\,, \\ y' = x^2 + y\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

eine Näherungslösung für $y(2)$. Die Näherungslösung soll mit Hifle des Eulerschen Polygonzugverfahrens zur Schrittweite $h = 1/4$ hergeleitet werden. Lösen Sie das Anfangswertproblem exakt und bestimmen Sie den relativen Fehler der Approximation für $x = 2$.

Verbessertes Euler Verfahren — Aufg. 2

Eine Verbesserung des expliziten Euler Verfahrens lautet

$$\begin{cases} k_1 = f(x_k, y_k)\,, \\ k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1)\,, \\ y_{k+1} = y_k + hk_2\,. \end{cases}$$

(a) Verdeutlichen Sie graphisch die Funktionsweise des Verfahrens.

(b) Bestimmen Sie für das Anfangswertproblem aus der ersten Aufgabe die Approximation für $x = 2$ zur Schrittweite $h = 1/4$ und bestimmen Sie den relativen Fehler zur exakten Lösung.

(c) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = y_0\,, & x = 0\,, \\ y' = -2at\,, & x \neq 0\,. \end{cases}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass die verbesserte Polygonzugmethode das Anfangswertproblem zu unterschiedlichen Werten von $a = 2$ und Anfangswerten $y_0 = \sqrt{(}2)$ exakt löst (numerisch!). Was können Sie daraus schließen?

Explizites Euler Verfahren — Aufg. 3

Betrachten Sie ein explizites Euler-Verfahren für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, & x = 0\,, \\ y' = 4x^2 - 7x + 3\,, & x \neq 0\,. \end{cases}$$

- Berechnen Sie die exakte Lösung Φ des Anfangswertproblems.
- Berechnen Sie bei vorgegebener Schrittweite h mit dem Euler-Verfahren Näherungswerte y_k für $\Phi(x_k)$ und explizit die Fehler $\epsilon(x_k, h) = y_k - \Phi(x_k)$ mit $x_k = kh$.
- Zeigen Sie, dass der Fehler $\epsilon(x_k, h) = y_k - \Phi(x_k)$ bei festem x für $h \to 0$ gegen Null konvergiert.

Implizites Euler Verfahren — Aufg. 4

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = y_0\,, & x = 0\,, \\ y' = -2at\,, & x \neq 0\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für das implizite Eulerverfahren den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\tau(t, h) := \frac{1}{h} \left(y(t_{k+1}) - y_{k+1} \right)$$

2.10 Reihen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- Kriterien anzuwenden, um die Konvergenz von Reihen systematisch zu untersuchen
  - Quotientenkriterium
  - Wurzelkriterium
  - Vergleichskriterien (konvergente Mayorante, divergente Minorante)
- wichtige Reihen und deren Konvergenzverhalten kennen

Sie können bereits...

- Grenzwerte von Zahlenfolgen berechnen 1.21
- Ungleichungen lösen 1.3

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.10.1 Paradoxon von Zenon

Paradoxon von Zenon, griechischer Philosoph, 5. Jhd vor Christus — Bsp 1

" Ein Läufer kann niemals das Ende einer Rennstrecke erreichen."

Die Argumentation von Zenon war wie folgt: nehmen wir an, ein Läufer möchte die Rennstrecke $[0, 1]$ absolvieren. Er startet an der Stelle $x = 1$ und das Ziel ist bei $x = 0$. Der Läufer läuft mit konstanter Geschwindigkeit v. Wir beobachten ihn:

1. er hat nach $t_1 = \frac{1}{2v}$ die Hälfte der Strecke hinter sich gebracht,
2. er hat die Hälfte der Hälfte nach weiteren $t_2 = \frac{1}{4v}$ geschafft,
3. $\cdots$

Wir können dieses Gedankenexperiment unendlich lange so fortsetzen mit dem folgenden Ergebnis:

- die Zeitinkremente werden immer kleiner, denn es gilt offensichtlich

$$t_k = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

- um ins Ziel zu kommen benötigt der Läufer die Summe aller dieser einzelnen Zeitspannen t_k, also

$$T = t_1 + t_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} t_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Fazit: Die Summe von unendlich vielen positiven Zeiteinheiten kann aber keine endliche Zahl sein - oder doch?

2.10.2 Konvergenz von Reihen

Diese Frage wollen wir jetzt genauer beleuchten. Aber zuvor nochmal zur Begrifflichkeit. Bei gegebener Zahlenfolge 1.21 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen wir die Summe, die wir aus den Zahlenfolgen bilden können eine Reihe:

Partialsummen und Reihen — Def. 1

Für jede reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

die zu $(a_n)_{n\mathbb{N}}$ gehörende Reihe. Die Zahl S_n heißt n-te Partialsumme. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,,$$

so sprechen wir von einer konvergenten Reihe, ansonsten nennt man die Reihe divergent.

Es gibt Reihen, deren Konvergenz- und Divergenzverhalten sich sehr präzise beschreiben läßt. Wir fassen sie in der nächsten Box zusammen:

Wichtige Reihen

Regel 1
!!!

- Eine der wichtigsten Reihen ist die Exponentialreihe, deren Wert die Eulersche Zahl ist:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

- Reihen vom Typ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k$$

nennt man geometrische Reihen. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für} \quad |q| < 1\,, \\ \text{divergent} & \text{für} \quad |q| \geq 1\,. \end{cases}$$

In den seltensten Fällen läßt sich der Reihenwert analytisch berechnen - um so wichtiger, dass es für konvergente geometrische Reihen gelingt:

$$|q| < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k = \frac{a}{1-q}\,.$$

- Reihen vom Typ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^a \,, \qquad a \geq 0\,,$$

nennt man harmonische Reihen. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^a = \begin{cases} \text{konvergent} & \text{für} \quad a > 1\,, \\ \text{divergent} & \text{für} \quad a \leq 1\,. \end{cases}$$

- Reihen vom Typ

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \,, \qquad a_k \geq 0\,,$$

nennt man alternierende Reihen. Ist die Folge $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe (Leibniz-Kriterium).

Bemerkungen:

- Im obigen Fall unseres Läufers konvergiert die Reihe, denn sie gehört in die Klasse der geometrischen Reihen: es ist $a = 1/v$ und $q = 1/2 < 1$, das heißt der Läufer ist nach $2/v$ am Ziel.

Hat man den Wert einer Reihe zu berechnen, so benutzt man - ähnlich wie bei Grenzwerten von Folgen oder Funktionen - Grenzwertsätze: 1.21

Grenzwertsätze und Rechenregeln

Regel 2

Es seien $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $b = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen.

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = a + b$ ist konvergent,

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot a$ ist konvergent,

3. gilt $a_k \leq b_k$ für alle k, dann gilt $a \leq b$.

Einige Beispiele - Rechnen Sie nach! Bsp 2

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 \to \infty$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$
- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{5}{3^k} = \frac{15}{2}$
- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

Die Konvergenz einer Reihe hängt davon ab, wie schnell die Summanden gegen Null konvergieren. Neben den Grenzwertsätzen dienen uns Konvergenzkriterien, um Aussagen zu treffen: Aufgabe

Konvergenzkriterien Regel 3

1. (Wurzelkriterium) Für eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, berechnet man den Grenzwert
$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,.$$
Es gilt:
   - ist $r > 1$, dann divergiert die Reihe,
   - ist $r < 1$, dann konvergiert die Reihe,
   - ist $r = 1$, dann ist keine Aussage möglich.

2. (Quotientenkriterium) Für eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \neq 0$, berechnet man den Quotienten
$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,.$$
Es gilt:
   - ist $r > 1$, dann divergiert die Reihe,
   - ist $r < 1$, dann konvergiert die Reihe,
   - ist $r = 1$, dann ist keine Aussage möglich.

3. (Konvergente Majorante) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe und gilt $0 \leq b_k \leq a_k$ für alle k, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent.

4. (Divergente Minorante) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine divergente Reihe und gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle k, so ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

5. (Leibniz-Kriterium) Eine alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ konvergiert, wenn $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Reihen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.10 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Reihen — Aufg. 1

Geben sind die folgenden Reihen

$$\begin{array}{ll} (a) & 1+1+1+1+\dots \\ (b) & 1-1+1-1+\dots \end{array}$$

Schreiben Sie die Reihen in der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und bestimmen Sie die Partialsummen S_n für $n \in \mathbb{N}$ und gegebenenfalls den Wert der Reihe.

Reihen — Aufg. 2

Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen

$$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \qquad (b)\ \sum_{k=1}^{\infty} 0,3^{k-1} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty} 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

Reihen — Aufg. 3

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!}{k^k} \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^4}{3^k} \qquad (c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$$

Rechenregeln — Aufg. 4

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{9}{19}\right)^{k} \quad (b)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^k}{4^{k+1}} \quad (c)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{121}+5^{2k-1}}{29^{k+1}}$$

Konvergenz — Aufg. 5

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die unendliche Reihe

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(1-4|x|)^{k-1}}?$$

Hinweis: Klammern Sie eine geeignete Potenz von x^k aus und lösen Sie die Ungleichung mit GeoGebra o.ä..

(b) Bestimmen Sie für diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $S(x)$ konvergiert, den Reihenwert.

2.11 Taylor-Reihe

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen. . .

- Taylor-Reihen formal zu bestimmen
- die Konvergenz der Taylor-Reihen in Frage zu stellen
- den Fehler eines Taylor-Polynoms konservativ abzuschätzen

Sie kennen bereits. . .

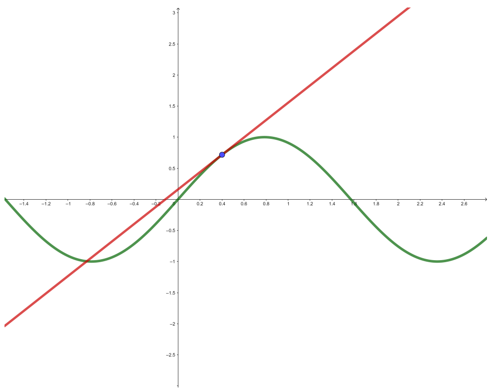
- das Konzept der linearen Näherung durch eine Tangente 1.22
- und beherrschen das Bilden von Ableitungen 1.23
- und das Lösen von Ungleichungen 1.3

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.11.1 Idee

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$. Dann kann man die Gerade suchen, welche f an einer 1.23
Stelle $x_0 \in D_f$ am besten annähert[8]: das ist die lineare Näherung oder auch Tangentengerade. 1.22

Tangentengerade Bsp 1



Für $\sin : x \mapsto \sin(x)$ lautet die Tangente in $x_0 = 2/5$:

$$p_1 : x \mapsto \sin(2/5) + \cos(2/5)(x - 2/5)$$

Die Tangente erfüllt:

- $p_1(2/5) = \sin(2/5)$,
- $p_1'(2/5) = \cos(2/5)$.

Für eine beliebige differenzierbare Funktion lautet die Tangentengerade an der Stelle x_0 also

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,,$$

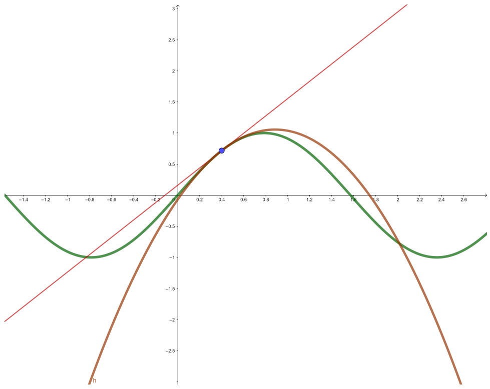
und es gilt

- p_1 läuft durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$, also $p_1(x_0) = f(x_0)$,
- p_1 hat in x_0 dieselbe Steigung wie f, also $p_1'(x_0) = f'(x_0)$.

Als nächstes kann man die quadratische Parabel suchen, die sich einer zweimal differenzierbaren Funktion f an einer Stelle x_0 am besten annähert[9]: das ist die quadratische Näherung oder auch Schmiegeparabel.

[8] im Sinne einer Interpolation bzüglich Funktion und Ableitung!
[9] im Sinne einer Interpolation.

Schmiegeparabel Bsp 2



Für $\sin : x \mapsto \sin(x)$ lautet die Schmiegeparabel in $x_0 = 2/5$:

$p_2 : x \mapsto \sin(2/5) + \cos(2/5)(x - 2/5) - 1/2 \sin(2/5)(x - 2/5)^2$

Die Schmiegeparabel erfüllt:

- $p_2(2/5) = \sin(2/5)$,
- $p_2'(2/5) = \cos(2/5)$.
- $p_2''(2/5) = -\sin(2/5)$.

Für eine beliebige zweimal differenzierbare Funktion lautet die Schmiegeparabel an der Stelle x_0:

$$p_2(x) \quad = \quad f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2,$$

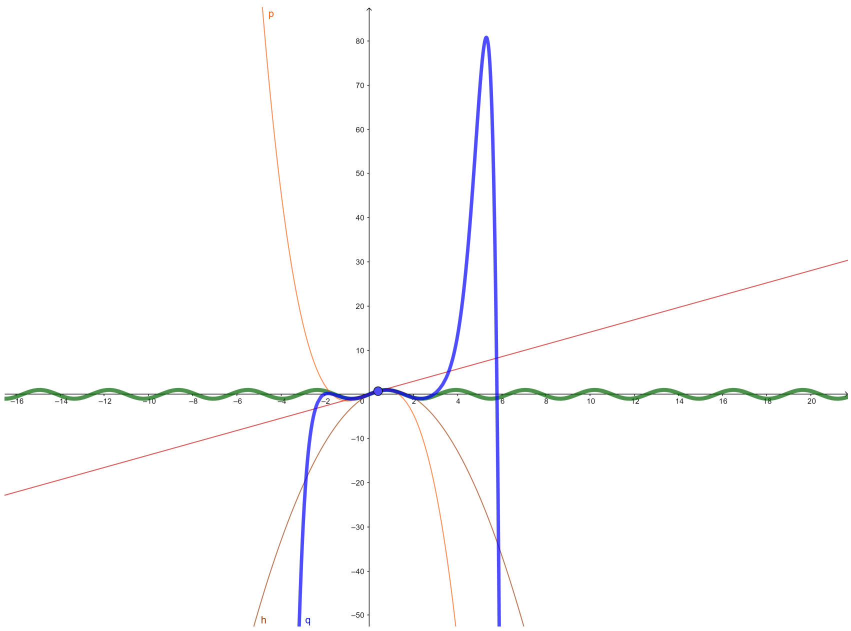
und es gilt

- p_2 läuft durch den Punkt $(x_0|f(x_0))$, also $p_2(x_0) = f(x_0)$,
- p_2 hat in x_0 dieselbe Steigung wie f, also $p_2'(x_0) = f'(x_0)$.
- p_2 hat x_0 dieselbe Krümmung wie f, also $p_2''(x_0) = f''(x_0)$.

Entsprechend findet man die Formeln für die beste lokale Näherung durch Polynome dritten ... oder zehnten 1.8
Grades:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 \,, \\ &\ldots \\ p_{10}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{10!} f^{(10)}(x_0)(x - x_0)^{10} \,. \end{aligned}$$

Taylor-Polynom vom Grad 10 Bsp 3



Vorausgesetzt die Funktion f besitzt mindestens Ableitungen bis zur Ordnung n, dann kann man auf diese Weise ein Polynom p_n vom Grad n entwickeln, das sogenannte Taylor-Polynom vom Grad n:

Taylor-Polynom vom Grad n Def. 1

Für eine n-mal differenzierbare Funktion lautet das Taylor-Polynom vom Grad n:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \,. \end{aligned}$$

Das Taylorpolynom p_n stimmt an der Stelle $x = x_0$ mit der Funktion f und mit deren Ableitung bis zum Grad n überein:

$$\forall\, k = 0, \cdots, n: \quad p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\,.$$

Bemerkungen: Aufgaben

- In der Praxis ist nur das lokale Verhalten einer Funktion oder Kennlinie interessant. Um die Analyse zu erleichtern kann man anstatt der Orginalfunktion ein Taylorpolynom betrachten!
- Das asymptotische Verhalten des Taylorpoynoms entspricht dem des Polynoms und kann unter Umständen ganz anders sein als das der betrachteten Funktion! 1.24
- Wechselt man den Entwicklungspunkt x_0, muss man das Taylorpolynom neu bestimmen.

Im folgenden Beispiel wird die Wurzelfunktion an der Stelle $x_0 = 4$ mit einem Taylorpolynom vom Grad 3 angenährt:

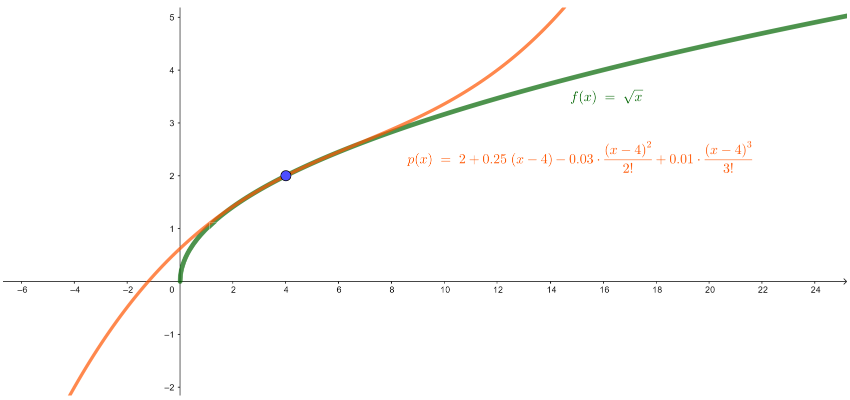
Taylor-Polynom an $f: x \to \sqrt{x}$ vom Grad $n = 3$ an $x_0 = 4$ Bsp 4

Bestimmung der Ableitungen bis zum Grad 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2}\,, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}^3}\,, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-5/2} = -\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x}^5}\,. \end{aligned}$$

Lösung p_3 mit $x_0 = 4$:

$$p_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{32}\frac{1}{2}(x-4)^2 + \frac{3}{256}\frac{1}{6}(x-4)^3\,.$$



2.11.2 Taylor-Reihe

Für eine unendlich oft differenzierbare Funktion, kann man die Näherung durch Polynome immer weiter verbessern[10] und gelangt damit formal zur Taylor-Reihe [Taylor series]:

[10] im Sinne einer lokalen Approximation!

Taylor-Reihe — Def. 2

Eine unendlich oft differenzierbare Funktion läßt sich formal an jedem Punkt $x_0 \in D_f$ in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$Tf(x,x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k .$$

Bemerkungen:

- Die Struktur einer Taylor-Reihe ist anders als diejenige der unendlichen Reihen, die wir im vorangegangenen Kapitel kennengelernt haben. 2.10
- Anstatt Zahlen aufzuaddieren, werden hier Potenzen von x, also Funktionen, aufaddiert!
- Fixiert man ein $x \in D_f$, und setzt es in die Reihe ein, dann erhält man eine unendliche Reihe nach dem Schema des letzten Abschnitts. Beispielsweise für $x = 3, x_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}3^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad a_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}3^k \in \mathbb{R} .$$

- Eine unendliche Reihe, in der Potenzen von x aufsummiert werden - garniert mit einem Koeffizienten - bezeichnet man Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k .$$

  Taylor-Reihen sind also spezielle Potenzreihen.

Zwei Fragen stellen sich:

- Gibt es $x \in D_f$, für die die Taylor-Reihe konvergieren? 2.10
- Wenn wir ein $x \in D_f$ identifiziert haben, für das die Taylor-Reihe konvergiert, gilt dann Gleichheit, also: $\forall\, x \in D_f : \quad Tf(x,x_0) = f(x)$?

Klar ist: falls wir Bedingungen kennen, unter denen sich die Fragen mit ja beantworten lassen, dann bedeutet das einen enormen Gewinn, denn f, egal wie kompliziert, wird plötzlich einfach berechenbar. Es lohnt sich also auf diese Fragen einzugehen und das werden wir in den nächsten Abschnitten tun. Für den Moment konzentrieren wir uns noch auf das Erlernen des Handwerkszeugs: wir entwickeln Taylor-Reihen!

Taylor-Reihe für $f : x \mapsto \exp(x)$ — Bsp 5

Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to (0,\infty), x \mapsto e^x$$

Entwicklungspunkt:

$$x_0 \in \mathbb{R} : \ x_0 = 0 .$$

Ableitungen:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0 : \quad f^{(k)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 .$$

Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$:

$$Tf(x,0) := x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k .$$

Taylor-Reihe für $f : x \mapsto \exp(ix)$ — Bsp 6

Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{ix}$$

Entwicklungspunkt:

$$x_0 \in \mathbb{R} : \ x_0 = 0 .$$

Ableitungen...

$$\forall\, k \in \mathbb{N}_0 : \quad f^{(k)}(ix) = i^k e^{ix} \Rightarrow f^{(k)}(0) = i^k .$$

Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$:

$$Tf(x,0) := 1 + \cdots + \frac{i^n}{n!}x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}x^k\,.$$

Bemerkungen: Aufgaben

- Um eine Näherung beispielsweise an die Zahl $e^{1/2}$ anzugeben, summeriert man die ersten fünf bis zehn Summanden dieser Reihe auf.
- Entsprechend betrachtet man eine Talyor-Reihe für ein komplexes Argument $z = x + iy$ und kann eine Näherung von e^{3+4i} angeben.

Die Eulersche Identität 1.15

$$re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))\,.$$

eröffnet einen Weg, um von der komplexen Exponentialfunktion zu den trigonometrischen Funktionen zu gelangen. Die Taylor-Reihen für Sinus und Kosinus sind folgende Potenzreihen: 1.13

Taylor-Reihe für $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ und $f_2 : x \mapsto \cos(x)$ Bsp 7

Funktionen:

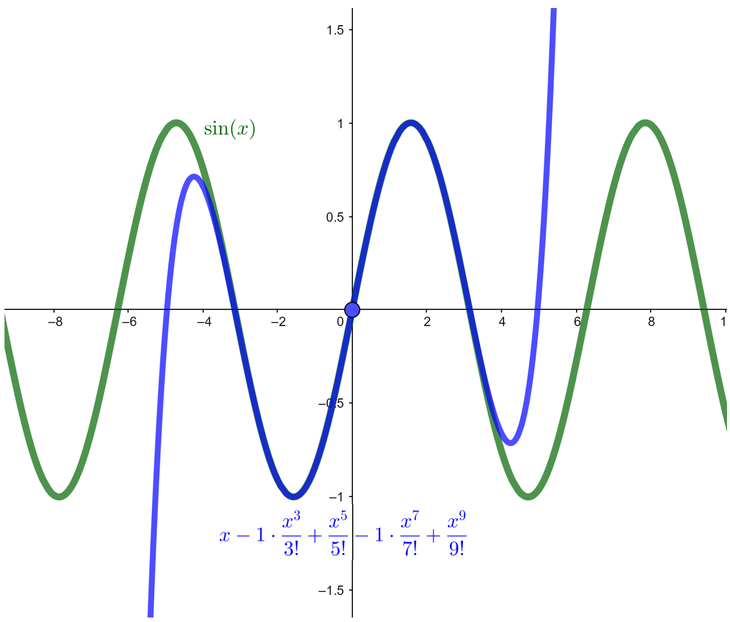
$$\begin{cases} f_1 : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) \\ f_2 : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) \end{cases}$$

Ableitungen:

	$f(0)$	$f(1)(0)$	$f^{(2)}(0)$	$f^{(3)}(0)$	$f^{(4)}(0)$	$f^{(5)}(0)$	$f^{(6)}(0)$	$f^{(7)}(0)$	...
sin	0	1	0	−1	0	1	0	−1	...
cos	1	0	−1	0	1	0	−1	0	...

Taylor-Reihen mit $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} Tf_1(x,0) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}\,, \\ Tf_2(x,0) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}\,. \end{cases}$$



Als nächstes Beispiel entwickeln wir die gebrochenrationale Funktion $f : x \mapsto 1/(1-x)$ an der Stelle $x_0 = 0$. Dazu sind die Ableitungen dieser Funktion zu bestimmen und an der Stelle $x_0 = 0$ auszuwerten: 1.11

Taylor-Reihe für $f : x \mapsto 1/(1-x)$ Bsp 8

Funktion:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

Ableitungen:

$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$\dots$	$f^{(n)}(x)$
$(1-x)^{-1}$	$(1-x)^{-2}$	$2(1-x)^{-3}$	$6(1-x)^{-4}$	$\dots$	$n!(1-x)^{-n-1}$

Taylor-Reihe mit $x_0 = 0$:

$$Tf(x,0) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + 2\frac{1}{2!}x^2 + 3!\frac{1}{3!}x^3 \cdots + n!\frac{1}{n!}x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \,. \quad (**)$$

Bemerkungen:

- Benutzt man die Tayplor-Reihen zur Darstellung von sin und cos, so ist x im Bogenmaß einzusetzen, denn die Ableitungen von Sinus und Cosinus bildet man typischerweise im Bogenmaß!
- Die Taylor-Reihen, die wir für die Exponentialfunktion entwickelt haben, kennen wir schon und wir wissen auch schon, dass die Taylor-Reihe die Exponentialfunktion für jedes $x \in \mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ darstellt! Das Thema Konvergenz scheint hier kein Problem zu sein.
- Bei $(**)$ sieht das anders aus, wie folgendes Experiment zeigt: multiplizieren wir die Partialsumme $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$ mit $(1-x)$, dann erhalten wir : Aufgabe

$$\begin{aligned}\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n\right) \cdot (1-x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n - x - x^2 - x^3 - \cdots - x^{n+1} \\ &= 1 - x^{n+1} \\ \overset{x \neq 1}{\Rightarrow} \qquad 1 + x + x^2 + \cdots + x^n &= \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}\,.\end{aligned}$$

Der Term auf der rechten Seite des letzten Gleichheitszeichen entspricht also für $n \to \infty$ der Taylor-Reihe $(**)$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = ?$$

Die Konvergenz der Reihe muss also maßgeblich von dem Wertebereich von x abhängen, denn

$$\left|x^{n+1}\right| \to \begin{cases} \infty, & |x| > 1\,, \\ 1, & |x| = 1\,, \\ 0, & |x| < 1\,. \end{cases}$$

Also können wir an der Stelle schließen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n\right) = \frac{1}{1-x} \quad \text{falls} \quad -1 < x < 1\,.$$

2.11.3 Taylor-Restformel

Eine Funktion f soll an der Stelle x_0 mit einem Taylor-Polynom n-ten Grades genähert werden, also durch den Anfang der Taylor-Reihe:

$$f(x) \approx p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\,.$$

Die Frage ist, wie gut diese Näherung an einer Stelle x ist. Anschaulich scheint es so, dass die Näherung lokal um so besser ist, je näher x an x_0 ist und je höher der Grad n ist. Um das zu untersuchen, betrachtet man die Abweichung der Funktion f von der Näherung. Der Fehler bzw. Rest R_n ist:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n\right)\,.$$

Für R_1, also den Fehler der Tangentengerade $p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, ergibt sich:

$$R_1(x) = f(x) - p_1(x) = \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t\,,$$

denn mit partieller Integration folgt 2.3

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t &= \Big[f'(t)(x-t)\Big]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} f'(t)(-1)\,\mathrm{d}t \\ &= 0-f'(x_0)(x-x_0)+(f(x)-f(x_0)) = f(x)-p_1(x) = R_1(x)\,.\end{aligned}$$

Für R_2, also der Fehler der Schmiegeparabel $p_2(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$, ergibt sich:

$$R_2(x) = f(x)-p_2(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t\,,$$

Das zeigt man, indem man diesen Ausdruck mit Hilfe einer partiellen Integration auf R_1 zurückführt: 2.3

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t &= \Big[f''(t)(x-t)^2\Big]_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+R_1(x) = f(x)\underbrace{-p_1(x)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{=-p_2(x)} = R_2(x)\,.\end{aligned}$$

Nach diesem Muster ergibt sich offensichtlich allgemein für R_n, also den Fehler des Taylor-Polynoms n-ten Grades:[11]

Taylor-Restformeln: Integrale Darstellung Regel 1

Sei $D_f \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Schneidet man die Taylor-Reihe nach dem n-ten Glied an, so gilt

$$f(x) = p_n(x)+R_n(x), \quad \text{mit } R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t\,.$$

2.11.4 Abschätzung des Fehlers

Die Formel für R_n erlaubt zu sagen, wie dicht x an x_0 liegen muss und wie hoch der Grad n gewählt werden muss, um den Fehler R_n hinreichend klein zu halten. Typischerweise gibt man dazu vor, wie groß der Absolutbetrag des Fehlers maximal sein darf (sagen wir eine Zahl F). Also ist die Frage, für welche x und für welche n dies gilt:

$$|R_n(x)| = \Big|f(x)-p_n(x)\Big| \le F\,.$$

Das Integral auszurechnen, ist mit Bleistift und Papier oft gar nicht möglich. Man gibt sich mit einer konservativen Schätzung zufrieden, d. h. einer Schätzung, die auf der sicheren Seite liegt, den Fehler im Betrag also allenfalls zu groß schätzt und nie zu klein. Das Integral ändert man dazu so, dass es im Betrag allenfalls größer werden kann. Betrachten wir zunächst den Fall $x > x_0$:

$$\begin{aligned}|R_n(x)| = \left|\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t\right| &\le \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\left|f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\left|f^{(n+1)}(t)\right|(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\max\limits_{x_0\le\xi\le x}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &\le \max_{x_0\le\xi\le x}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,.\end{aligned}$$

[11] Man findet in der Literatur eine äquivalente Darstellung des Restglieds. Sie heißt Restglied nach Lagrange: es existiert ein $\xi \in (x_0, x)$ mit $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$.

Abschätzung des Fehlers — Regel 2

Sei $D_f \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Es gilt:

$$|R_n(x)| \leq \max_{\xi \in [x_0, x]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \frac{1}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} .$$

Wenn man x und n so wählt, dass dieser Ausdruck kleiner als die gewünschte Fehlerschranke F ist, dann ist es der Betrag $|R_n|$ des wahren Fehlers erst recht.

Betrachten wir beispielsweise wieder die Wurzelfunktion $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Wie groß ist der Fehler, wenn wir die f an $x_0 = 4$ mit einer quadratischen Parabel p_2 annähern?

Fehlerabschätzung für $R_2(x)$ für $x_0 = 4$ im Intervall $[1, 7]$ — Bsp 9

Taylor-Polynom p_2 für $x_0 = 4$:

$$p_2(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) - \frac{1}{8\sqrt{4}^3}(x-4)^2 .$$

Größtmöglicher Fehler im Intervall $x \in [1, 7]$:

$$\left| R_2(x) \right| \leq \underbrace{\max \left| \frac{3}{8} \xi^{-5/2} \right|}_{\leq 3/8 1^{-5/2}} \cdot \underbrace{\frac{(x-4)^3}{6}}_{\leq 3^3/6} \leq \frac{3}{8} \frac{3^3}{6} = \frac{27}{16} .$$

Taylorreihen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.11 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Taylorpolynom und Restgliedabschätzung — Aufg. 1

Bestimmen Sie für die Funktion $f : x \mapsto \ln\left(x \cdot e^{-2x}\right)$ das Taylorpolynom 3. Grades in $x_0 = 1$ und berechnen Sie damit näherungsweise $f(6/5)$. Geben Sie anschließend eine Restgliedabschätzung an.

Taylor-Entwicklung — Aufg. 2

Geben Sie die ersten vier Glieder der Taylorreihe folgender Funktionen mit Entwicklungspunkt x_0 an:

$$(a)\ f : x \mapsto \cos(x),\ x_0 = \frac{\pi}{3} \qquad (b)\ f : x \mapsto \sqrt{x},\ x_0 = 1 \qquad (c)\ f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x},\ x_0 = 1$$

Taylor-Entwicklung — Aufg. 3

Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes und berechnen Sie die ersten vier Glieder explizit.

Taylor-Entwicklung — Aufg. 4

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : x \mapsto \cosh(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Restglieds R_{n-1} für welche Werte x die Potenzreihe gegen $\cosh(x)$ konvergiert. Schätzen Sie dazu R_{n-1} geeignet ab und stellen Sie fest für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n-1} = 0$.

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$\cosh(x) = 4 - x^2$$

näherungsweise mit Hilfe der nach der vierten Potenz abgebrochenen Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$. Geben Sie die Lösung mit vier Nachkommastellen an.

Taylor-Entwicklung Anwendung — Aufg. 5

Berechnen Sie einen Näherungswert der folgenden Integrale. Bestimmen Sie dazu das Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur angegebenen Ordnung n mit Hilfe bekannter Taylorreihen und integrieren Sie dieses. Geben Sie das Ergebnis mit 4 Nachkommmastellen an.

$$(a)\ \int_0^{1/2} \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x,\ n = 3 \qquad (b)\ \int_0^{2/10} \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x,\ n = 3 \qquad (c)\ \int_0^{1} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x,\ n = 4$$

Taylor-Entwicklung Anwendung — Aufg. 6

Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : x \mapsto \ln(1-x)$ mit $x_0 = 0$ und differenzieren Sie diese gliedweise. Welche Potenzreihe erhalten Sie?

2.12 Potenzreihen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen...	
• den Konvergenzbereich einer Potenzreihe zu interpretieren und zu bestimmen	
• wie eine analytische Funktion definiert ist	
• wie ein Potenzreihenansatz zur Lösung von Differentialgleichungen funktioniert	
Sie können bereits...	
• das Konvergenzverhalten einer Reihe analysieren	2.10
• Taylor-Reihen formal bilden	2.11
• Ableitungen bilden	1.23
• Differentialgleichung mit Hilfe eines Ansatzes lösen	2.7

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.12.1 Fragestellungen

Die Entwicklung einer beliebig oft differenzierbaren Funktion f an einer Stelle x_0 in eine Taylor-Reihe war: 2.11

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \cdots$$

Wenn wir es mit Reihen zu tun haben, stellt sich die Frage nach ihrem Wert oder anders gesagt nach Konvergenz. Im Kontext der Potenzreihe stellt sich die Frage nach Konvergenz sogar in Abhängigkeit der Variable, die potenziert wird: 2.10

1. Konvergiert diese Reihe für irgendwelche Werte von x?

Und bezüglich der Eigenschaften der Taylor-Reihe können wir uns fragen, ob sich die lokale Approximationseigenschaft auf den gesamten Definitionsbereich der Funktion ausdehnt, also:

2. Vorausgesetzt die Taylor-Reihe konvergiert für $x \in D_f$, ist der Wert der Reihe dann der Funktionswert $f(x)$?

Eine mathematisch präzise Analyse dieser Fragen führt auf den Begriff der analytischen Funktionen - das sind genau die Funktionen, die sich durch eine Taylor-Reihe darstellen lassen. Aber zuvor beantworten wir die Frage nach der Konvergenz.

2.12.2 Konvergenz von Potenzreihen

Betrachten wir eine beliebige Potenzreihe, also eine Reihe der Form:

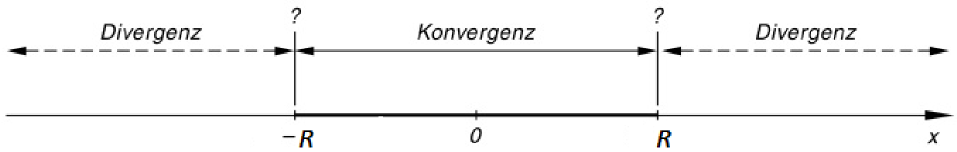
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots = \lim_{N\to\infty} S_N(x)\,.$$

Wenn der Grenzwert der Partialsummen für ein gegebenes x existiert, dann sagt man, dass die Potenzreihe für dieses x konvergiert. Die große Frage ist, für welche x das der Fall ist. 2.10

Anschaulich ist klar, dass die Gefahr, dass die Werte einer Potenzreihe explodieren, größer ist je weiter x von x_0 weg liegt, je größer also der Betrag $|x-x_0|$ ist. Und in der Tat findet man genau das: Zu jeder Potenzreihe gibt es einen sogenannten Konvergenzradius R, so dass die Reihe für $|x-x_0| < R$ konvergiert und für $|x-x_0| > R$ divergiert (also keinen Grenzwert hat). Genau auf dem Rand, also für $|x-x_0| = R$, kann sie konvergieren oder divergieren, je nach $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Im Prinzip sieht das so aus:

- $R = \infty$ bedeutet, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.
- $R = 0$ bedeutet, dass die Reihe nur für einen Wert von x nämlich für $x = x_0$ konvergiert.

Abbildung 2.2: Konvergenz



Wie läßt sich der Konvergenzradius für eine gegebene Potenzreihe auf systematische Weise bestimmen? Naja, lassen Sie uns die Frage nach Konvergenz der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (*)$$

mit Hilfe dessen beantworten, was wir schon über <u>Zahlenreihen</u> wissen - denn genau das wird aus $(*)$ wenn wir für x eine reelle Zahl einsetzen. 2.10

- Das Wurzelkriterium liefert

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|x-x_0| = r|x-x_0| \begin{cases} < 1 \;\Rightarrow\; (*) \text{ konvergent }, \\ = 1 \;\Rightarrow\; (*) \text{ keine Aussage möglich}, \\ > 1 \;\Rightarrow\; (*) \text{ divergent}. \end{cases}$$

- Das Quotientenkriterium liefert

$$\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| = r|x-x_0| \begin{cases} < 1 \;\Rightarrow\; (*) \text{ konvergent}, \\ = 1 \;\Rightarrow\; (*) \text{ keine Aussage möglich}, \\ > 1 \;\Rightarrow\; (*) \text{ divergent}. \end{cases}$$

Lösen wir die Ungleichungen nach $|x - x_0|$ auf, dann erhalten hinreichende Kriterien für Konvergenz und Divergenz der Potenzeihe:

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x-x_0| \begin{cases} < \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; (*) \text{ konvergent }, \\ > \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; (*) \text{ divergent}, \\ = \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; (*) \text{ keine Aussage möglich}. \end{cases}$$

Konvergenz von Potenzreihen — Regel 1

Für eine Potenzreihe der Form $(*)$ ist der Konvergenzradius R wie folgt definiert:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{alternativ} \quad R = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

mit den Spezialfällen

$$\begin{cases} R = 0, \text{ falls } r = \infty, \\ R = \infty, \text{ falls } r = 0. \end{cases}$$

Folgende drei Fälle kann man dann unterscheiden:

$$\begin{cases} |x-x_0| < R \;\Rightarrow\; \text{Konvergenz}, \\ |x-x_0| = R \;\Rightarrow\; \text{unklar}, \\ |x-x_0| > R \;\Rightarrow\; \text{Divergenz}. \end{cases}$$

Konvergenzradius Bsp 1

Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{2^k} x^k$$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n+2}{2^n}\right|} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; R = 2\,.$$

Lösung: Die Potenzreihe konvergiert für $-2 < x < 2$.

Bemerkungen:

- Bei Berechnung des Konvergenzradius kommt es also nur auf den Betrag $|x - x_0|$ an. Die Grenzlinie zwischen Konvergenz und Divergenz ist ein Kreis.
- Entsprechend seiner Definition wird der Konvergenzradius R aus dem Wurzelkriterium abgeleitet. Man kann auch das Quotientenkriterium benutzen! Es hängt von der Stuktur der a_n ab, ob man den Quotienten oder die n-te Wurzel heranzieht.
- Im Allgemeinen ist $\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0|$ bzw $|a_{n+1}/a_n||x - x_0|$ nicht durchgängig für alle n größer oder kleiner als 1 und das ist auch nicht nötig. Die mathematisch präzise Charakterisierung des Konvergenzradius gelingt mit Hilfe des Limes superior. Er bezeichnet den größten Häufungspunkt einer Folge inklusive $+\infty$ und $-\infty$.

2.12.3 Analytische Funktionen

Nun zu der zweiten Fragestellung: Angenommen, eine Taylor-Reihe konvergiert für eingegebenes x. Ist das Ergebnis dann wieder $f(x)$? Funktionen f, für die genau das gilt, heißen analytisch. Jede analytische Funktion muss offensichtlich unendlich oft differenzierbar sein. Das gilt aber nicht umgekehrt: Eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist, muss nicht unbedingt analytisch sein, das heißt nicht jede konvergente Taylor-Reihe repräsentiert wieder die ihr zu Grunde liegende Funktion f.

- Die Ausnahmen in der Mathematik sind exotisch, beispielsweise ist die Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0\,, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

  nicht anayltisch.
- Die Ausnahmen in der Praxis sind die Regel: die meisten Signalverläufe sind keine analytischen Funktionen - sonst könnte man die Zukunft vorhersagen.

2.12.4 Lösen von Differentialgleichungen mit Potenzreihen

Möchte man eine Differentialgleichung lösen und hat keine Ahnung, wie man vorzugehen hat, dann kann man eine Potenzreihe als Ansatz verwenden[12]. 2.6

Potenzreihen als Ansatz zur Lösung von Dgls Bsp 2

Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y(2) = 3\,, & x = 2\,, \\ y' = y^2 + x\,, & x \neq 2\,. \end{cases}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-2)^k = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + \cdots\,, \\ y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k (x-2)^{k-1} = a_1 + 2\cdot a_2 \cdot (x-2) + 3 \cdot a_3 \cdot (x-2)^2 + \cdots\,. \end{aligned}$$

[12] Damit geht man implizit davon aus, dass die Lösung analytisch ist.

Bestimmung von a_0 (Anfangsbedingung):

$$\begin{aligned} y(2) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (2-2)^k = a_0 = 3 \\ &\Rightarrow y(x) = 3 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 \cdots . \end{aligned}$$

Bestimmung der a_k, $k > 0$ (Einsetzen in Differentialgleichung):

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot (x-2) \cdots &= \left(3 + a_1 \cdot (x-2) + a_2 \cdot (x-2)^2 + a_3 \cdot (x-2)^3 + \cdots\right)^2 + (x-2) + 2\,, \\ &= 9 + 2 + (6 \cdot a_1 + 1) \cdot (x-2) + (a_1^2 + 6 \cdot a_2) \cdot (x-2)^2 + \cdots\,, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ a_2 = 67/2 \\ \ldots \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Auf diese Weise ist es bei vielen Differentialgleichungen möglich, die ersten Koeffizienten der Reihe auszurechnen.
- Man kann die Reihenentwicklung irgendwann abbrechen und hat damit ein Taylor-Polynom als Näherung für die Lösung.
- Manchmal findet man sogar eine handliche Formel für alle Koeffizienten. Die Potenzreihe konvergiert aber nur innerhalb ihres Konvergenzradius und kann auch nur da eine Lösung des Anfangswertproblems darstellen. Aufgabe

Potenzreihen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.12 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Konvergenz — Aufg. 1

Bestimmen Sie den Konvergenzradius und geben Sie den Konvergenzbereich der folgenden Reihen an. Untersuchen Sie dabei auch die Ränder des Konvergenzbereichs.

$$(a)\ P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k \qquad (b)\ P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k} \qquad (c)\ P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

$$(d)\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k} \qquad (e)\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^{k+1} \qquad (f)\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k$$

Konvergenz — Aufg. 2

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k!}{3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k+1)} \right)^2 x^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^4 - 4k^3\right) x^k$$

Analytische Funktionen — Aufg. 3

Begründen Sie, warum die folgende Funktion nicht analytisch ist

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0\,, \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Leibnitz-Kriterium — Aufg. 4

Der Weg eines Teilchens in Abhängigkeit der Beschleunigung $x < 0$ sei durch die unendliche Reihe

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k^2 \cdot 3^k}$$

gegeben. Untersuchen Sie mit Hilfe des Leibnizkriteriums für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $S(x)$ sinnvoll gegeben ist.

Potenzreihen und Differentialgleichungen — Aufg. 5

Ein Körper mit der Masse m bewege sich auf einer geradlinigen Bahn. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 1$. Durch eine Kraft F, die der Geschwindigkeit proportional ist, wird der Körper abgebremst.

(a) Stellen Sie Bewegungsgleichung für den Körper auf.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

2.13 Fourier-Reihen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- wie man periodische Funktionen mit Fourier-Analyse zerlegt
- wie man aus einer Fourier-Reihe mit Fourier-Synthese die zugehörige periodische Funktion zurück gewinnt
- die reelle und die komplexwertige Darstellung von Fourier-Reihen kennen
- in welchem Sinne die Fourier-Reihe gegen eine periodische Funktion konvergiert

Sie können bereits...

• mit harmonischen Schwingungen umgehen	1.13
• mit der komplexen Exponentialfunktion umgehen	1.15
• Integrale berechnen	2.3
• mit Skalarprodukten in Funktionenräumen umgehen	2.5
• lineare Abhängigkeit und Orthonormalität von Funktionen überprüfen	2.5

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

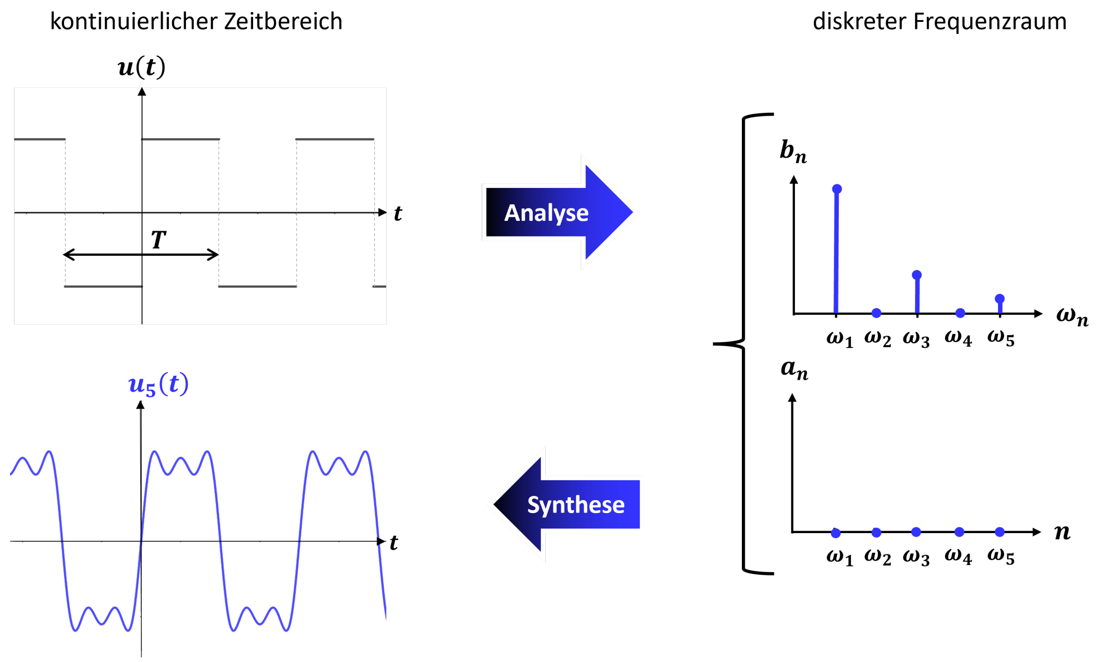
2.13.1 Fragestellung

Die Fourier-Theorie beschäftigt sich mit der Frage, ob und wie man das Spektrum eines Signals findet. Das Spektrum gibt an, aus welchen harmonischen Schwingungen sich ein periodisches Signal zusammensetzt. Das 1.13
Verfahren, das zu einem periodischen Signal die Amplituden und die Phasen seiner sinusförmigen Teilsignale bestimmt, heißt Fourier-Analyse. Der umgekehrte Weg, also ein Signal u mit Hilfe des bekannten Spektrums zu rekonstruieren, heißt Fourier-Synthese. Die Fourier-Synthese hat die folgende Struktur:

$$\begin{array}{rlr} u(t) = & \frac{a_0}{2} + & \text{Gleichanteil} \\ + & a_1 \cdot \cos(\omega_0\, t) + b_1 \cdot \sin(\omega_0\, t) & \text{Grundschwingung} \\ + & a_2 \cdot \cos(2\,\omega_0\, t) + b_2 \cdot \sin(2\,\omega_0\, t) + a_3 \cdot \cos(3\,\omega_0\, t) + b_3 \cdot \sin(3\,\omega_0\, t) + \cdots & \text{Oberschwingungen} \end{array}$$

Interessanterweise, braucht man zur Charakterisierung der Zerlegung von u eigentlich nur $\frac{a_0}{2}$ und alle Tripel (a_n, b_n, n) zu kennen! Behält man diesen Gedanken im Hinterkopf, so gelangt man zu der Darstellung eines Signals durch Angabe seines Spektrums:

Abbildung 2.3: Visualisierng von Fourier-Analyse und Fourier-Synthese



Bemerkungen:

- Es gibt in der Zerlegung einen Anteil, der nicht schwingt, nämlich die Konstante $\frac{a_0}{2}$. Diese Konstante ist der sogenannte Gleichanteil [DC component]. Der Gleichanteil ist genau dann ungleich Null, wenn das Signal nicht symmetrisch um die Zeitachse schwingt.
- Die Schwingung mit der kleinsten Kreisfreqzenz heißt Grundschwingung [fundamental] und die kleinste Kreisfrequenz heißt Grundfrequenz (Grundkreisfrequenz) $\omega_0 = \frac{2\,\pi}{T}$.
- Die Grundschwingung und die Oberschwingungen, die zum Signal u beitragen, nennt man " die Harmonischen" oder auch die Teiltöne [partials].
- Die Kreisfrequenzen der harmonischen Schwingungen in einem T-periodischen Signal sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz, also $\omega_n = n \cdot \omega_0,\ n \in \mathbb{N}^+$.
- Die n-te Harmonische hat die Kreisfrequenz $\omega_n = n \cdot \omega_0$. Bei der Darstellung des Frequenzraums wird zur Kennzeichnung der Frequenz ω_n auch oft einfach der Index n benutzt.
- Das Spektrum ist die Menge von Zahlen $\{a_n, b_n, n \in \mathbb{N}^+\}$, also die Amplituden der harmonischen Schwingungen, die zum Signal beitragen.
- Kennt man das Spektrum, so kennt man die Funktion im Zeitbereich!

Das Spektrum, das in der vorigen Abbildung rechts skizziert ist, gehört zu dem Signal u, das durch die periodische Fortsetzung der Funktion

$$u_T(t) \quad = \quad \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi)\,, \\ -1, & t \in [\pi, 2\pi)\,, \end{cases}$$

entsteht. Der Graph von u ist in der vorigen Abbildung links oben zu sehen. u ist 2π-periodisches Rechtecksignal. Die Grundfrequenz ist $\omega_0 = 1$ und die Fourier-Synthese bis $n = 5$ lautet:

$$u_5(t) = \underbrace{1.27324}_{=\,b_1} \cdot \sin(t) + \underbrace{0.42441}_{=\,b_3} \cdot \sin(3\,t) + \underbrace{0.25465}_{=\,b_5} \cdot \sin(5\,t)\,.$$

Beobachtungen:

- Alle Harmonischen haben die Periode $T = 2\,\pi$.

- Der Gleichanteil ist null $a_0 = 0$. Warum?
- In der Zerlegung treten keine Kosinus-Anteile auf: die Amplituden $a_1, \cdots, a_5$ sind null! Warum?
- In der Zerlegung treten keine Sinus-Anteile mit geradem Index auf: die Amplituden b_2 und b_4 sind null!
- Je höher die Kreisfrequenz der beitragenden Oberschwingung, desto kleiner wird die zugehörigen Amplitude: $b_1 > b_3 > b_5$.

Bei der Signalverarbeitung in der Elektrotechnik gehört die Fourier-Analyse und die Fourier-Synthese zum unverzichtbaren Handwerkszeug, denn

- neben dem Rechtecksignal [rectangle], werden oft das Sägezahnsignal [sawtooth] und das Dreieckssignal [triangle] betrachtet.[13]
- das Verhalten vieler Systeme ist für sinusförmige Störungen/Anregungen relativ leicht zu beschreiben.
- in der Praxis sind hinreichend schwache Schwingungen immer harmonische Schwingungen, weil die entsprechenden Differentialgleichungen dann mehr und mehr linear werden und damit der des Federpendels 2.7 entsprechen.

Es spricht also viel dafür die Zerlegung periodischer Signal in harmonische Schwingungen besser zu verstehen. Let's go!

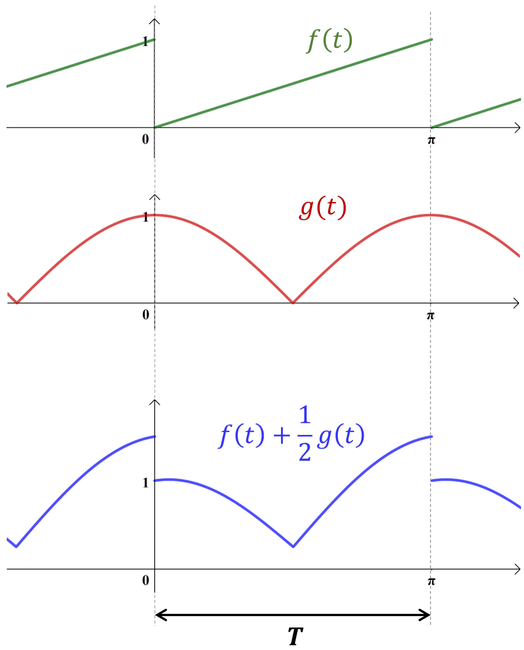
2.13.2 Vektorraum periodischer Funktionen

T-periodische Funktionen, also Funktionen für die gilt

$$\begin{cases} f(t) &= f(t+T)\,, \\ g(t) &= g(t+T)\,, \end{cases}$$

lassen sich addieren und skalieren ohne dass die T-Periodizität verloren geht:

Abbildung 2.4: Visualisierung der Vektorraumeigenschaft



Mit T wird ab jetzt die kleinste Periode einer periodischen Funktion f bezeichnet. Das ist eine Konvention, die in der Mathematik notwendig ist, um das Symbol T, also die Periode, für f eindeutig zu machen. T ist ab jetzt also eindeutig und wir bringen die beiden eingangs genannten Eigenschaften auf einen Punkt: es handelt sich um einen Vektorraum. 2.5

[13] Fourier-Analysen kann man hier anschauen: `https://valdivia.staff.jade-hs.de/fft.html`. Mit der App Audacity kann man sich das Spektrogramm von Songs anschauen.

Vektorraum periodischer Funktionen: $\mathcal{P}_T$ — Regel 1

Die Menge der T-periodischen, stückweise stetig differenzierbaren Funktionen f ist ein Vektorraum und dieser Vektorraum wird im folgenden mit $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ bezeichnet.

Nehmen wir die Eigenschaften einer Funktion $f \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ nochmal detailliert auseinander:

- f ist T-periodsich, die Funktionswerte wiederholen sich also im Abstand T:
$$f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$
- f bildet im Allgemeinen reelle Zahlen auf komplexe Zahlen ab:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto f(t)\,.$$
- f ist nicht nur T-periodisch, sondern auch noch stückweise stetig differenzierbar. f muss also nicht glatt sein (f darf Sprungstellen haben!), aber f lässt sich auf jeden Fall über jedes endliche Intervall (insbesondere über eine volle Periode) integrieren!

In Vektorräumen integrierbarer Funktionen, ist auf natürliche Weise ein Skalarprodukt und die zugehörige Norm definiert, so auch hier.

Genauso, wie eine Zerlegung eines Vektors in $\mathbb{R}^n$ bezüglich einer gegebenen Orthonormalbasis funktioniert, 2.5
funktioniert es nämlich hier, vorausgesetzt wir kennen ein Orthonormalsystem des Vektorraums $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Um Orthonormalität $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ diskutieren zu können, benötigen wir ein Skalarprodukt und eine Norm auf $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

Skalarprodukt und Norm in $\mathcal{P}_T$ — Regel 2

$$\begin{aligned} \text{Skalarprodukt:} \quad \langle f,g\rangle &:= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\,,\\ \text{Norm:} \quad \|f\| &:= \sqrt{\langle f,f\rangle}\,,\\ \Rightarrow \quad \|f\|^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)\cdot\overline{f(t)}}_{=|f(t)|^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Der Begriff " Vektorraum" ist neu, aber wir kennen Funktionen, die in $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ leben: alle Funktionen φ_k mit
$$\varphi_k : t \mapsto e^{i\,k\,\omega_0\,t}\,,$$
sind T-periodisch! Das sieht man, wenn man die Eulersche Identität benutzt und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ einsetzt: 1.15
$$\varphi_k(t) = \cos(k\,\omega_0\,t) + i\,\sin(k\,\omega_0\,t) = \cos\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right) + i\,\sin\left(k\,\frac{2\pi}{T}\,t\right)\,.$$
Betrachten wir zwei beliebige Funktionen dieser Art und berechnen ihr Skalarprodukt:
$$\begin{aligned} \langle\varphi_k,\varphi_l\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\,k\,\omega_0\,t}\cdot\overline{e^{i\,l\,\omega_0\,t}}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{T}\int_0^T e^{i\,(k-l)\,\omega_0\,t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{T}\begin{cases} [t]_0^T\,, & k = l\\ \dfrac{-i}{(k-l+1)\,\omega_0}\left[e^{i\,(k-l+1)\,\omega_0\,t}\right]_0^T\,, & k \neq l \end{cases}\\ &= \frac{1}{T}\begin{cases} 1\,, & k = l\\ 0\,, & k \neq l\,. \end{cases} \end{aligned}$$
Interpretieren wir das Ergebnis und schreiben es mit Worten auf:

- Jede Funktion φ_k besitzt Norm eins, sie ist also normiert!
- Zwei unterschiedliche Funktionen φ_k, φ_l stehen im Vektorraum $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ senkrecht aufeinander. 2.5

$\Rightarrow$ Wir haben ein Orthonormalsystem in $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ gefunden!

Orthonormalsystem von $\mathcal{P}_T$ Regel 3

Die Funktionen

$$\varphi_k : t \mapsto e^{i\,k\,\omega_0\,t} = \cos(k\,\omega_0\,t) + i\,\sin(k\,\omega_0\,t)$$

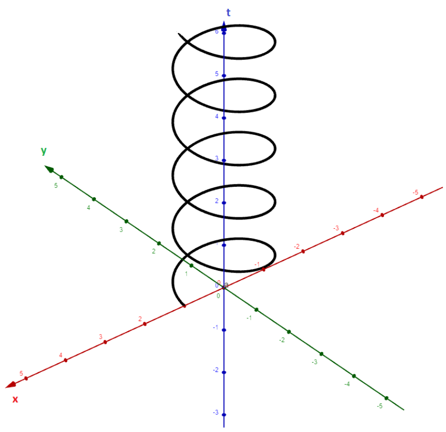
mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ sind T-periodisch und orthonormiert:

$$\forall\, k, l \in \mathbb{Z}: \quad \langle \varphi_l, \varphi_k \rangle = \delta_{kl} := \begin{cases} 1, & l = k\,, \\ 0, & k \neq l\,. \end{cases} \qquad (*)$$

Bemerkungen:

- Jede einzelne Funktion φ_k ist vergleichbar mit einem Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$.
- Anders als in $\mathbb{R}^n$, gibt es nicht nur n Stück, sondern (abzählbar) unendlich viele dieser Einheitsvektoren.

Veranschaulichung einer Basisfunktion Bsp 1



- Grundfrequenz $T = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$
- Basisfunktion für $k = 5$ und $\omega_0 = 2\,\pi$:

$$\begin{aligned} \varphi_5(t) &= e^{i\,5\,2\pi\,t} = \cos(2\pi\,k\,t) + i\,\sin(2\pi\,k\,t) \\ &\mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \cos(2\pi\,k\,t) \\ \sin(2\pi\,k\,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

- Basisfunktion als eine Raumkurve über der Gaußschen Zahlenebene:

$$\varphi_5 : t \mapsto \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi\,k\,t) \\ \sin(2\pi\,k\,t) \\ t \end{pmatrix}$$

2.13.3 Komplexe Fourier-Reihe

Angenommen eine Funktion f hat die folgende Darstellung:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\varphi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{i\,k\,\omega_0\,t}\,.$$

Dann sagt man f ist als Fourier-Reihe gegeben. Die Zahlen c_n heißen komplexe Fourier-Koeffizienten. Zum Beispiel sagen c_{17} und c_{-17} aus, welchen Anteil die harmonischen Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega_{17} = 17 \cdot \omega_0$ an dem Signal f hat. Möchte man den Fourier-Koeffizienten c_{17} isolieren, dann projiziert man f auf die Basisfunktion φ_{17}. Dank der Orthonormalität $(*)$ der Basisfunktionen untereinander gilt 2.5

$$\forall\, l \in \mathbb{Z}:\ \langle f, \varphi_{17} \rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \varphi_k, \varphi_{17} \right\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \langle \varphi_k, \varphi_{17} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta_{17\,k} = c_{17}\,. \quad (**)$$

Im Allgemeinen ist uns f nicht als Fourier-Reihe gegeben - vielmehr möchten wir für f eine Fourier-Reihe angeben. Wie berechnet man also die Zerlegungskoeffizienten c_k für $k \in \mathbb{Z}$? Genau, wie wir es bei der Bestimmung der Bestapproximation gemacht haben - mit dem einzigen Unterschied, dass wir auf unendlich viele Funktionen 2.5
projizieren müssen und so eine Reihe, die Fourier-Reihe, erhalten:

Komplexe Fourier-Reihe Regel 4

Für eine Funktion $f \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ läßt sich die Fourier-Reihe mit Grundfrequenz $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ entwickeln. Die

Fourier-Reihe lautet

$$\begin{aligned}
\mathrm{FR}_f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f,\varphi_k\rangle\,\varphi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,\omega_0\,t}\,,\\
c_k &= \langle f,\varphi_k\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\cdot\overline{\varphi_k(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\cdot e^{-i\,k\,\omega_0\,t}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten ist c_0 immer gesondert zu berechnen. !
- Das zweite Gleichheitszeichen in $(**)$ ist mathematisch nicht trivial: man muss beweisen, dass man auch bei unendlich langen Summen (also Reihen) so ausklammern kann.

Und nun ein konkretes Beispiel:

Rechtecksignal Bsp 2

2-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f:[0,2)\to\mathbb{R},t\mapsto\begin{cases}1, & t\in([0,1)\,,\\ 0, & t\in[1,2)\end{cases}\,.$$

Grundfrequenz : $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi\,.$
Komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,,\\
c_k &= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 f(t)\cdot e^{-i\,k\,\pi t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-i\,k\,\pi\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-i\,k\,\pi\,t}}{-i\,k\,\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,\frac{1-(-1)^k}{i\,k\,\pi} = \begin{cases}\frac{1}{i\,k\pi}, & k \text{ ungerade}\,,\\ 0, & k \text{ gerade}\,.\end{cases}\\
&\Rightarrow c_{2k+1} = \frac{1}{i\,(2\,k+1)\,\pi}\,.
\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FR}_f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{i\,(2\,k+1)\,\pi}\cdot e^{i\,(2\,k+1)\,\pi\,t}\\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i\,(2\,k+1)\,\pi}\cdot e^{i\,(2\,k+1)\,\pi\,t} - \frac{1}{i\,(2\,k+1)\,\pi}\cdot e^{-i\pi(2k+1)t}\right)\\
&= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{i(2k+1)\pi}\cdot\underbrace{\left(e^{i\,\pi\,(2\,k+1)\,t} - e^{-i\,(2k+1)\,\pi\,t}\right)}_{=\,2\,i\,\cdot\,\sin\left((2k+1)\,\pi t\right)}\\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\,k+1}\cdot\sin\left((2\,k+1)\,\pi\,t\right)\,.
\end{aligned}$$

2.13.4 Stückweise stetig differenzierbare Funktionen

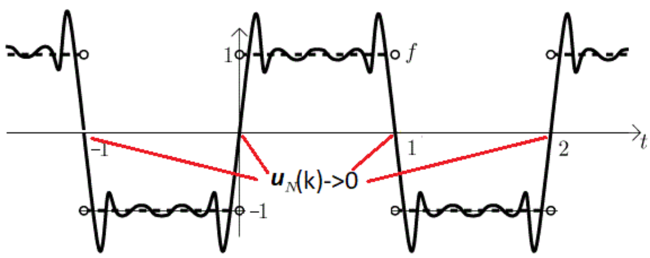
Damit eine Potenzreihe eine Funktion punktweise reproduziert auf ihrem Konvergenzgebiet, war es notwendig und hinreichend, dass die Funktion analytisch war. Genauso können wir uns auch jetzt die Frage stellen: was muss eine Funktion erfüllen, damit sie sich als Fourier-Reihe darstellen läßt[14]? Es läßt sich zeigen, dass … 2.12

- vorausgesetzt f ist überall stetig differenzierbar, dann konvergiert die Fourier-Reihe überall punktweise gegen f.

[14] im Sinne einer punktweisen Konvergenz

- vorausgesetzt f ist stückweise stetig differenzierbar, dann konvergiert die Fourier-Reihe an jeder Sprungstelle von f gegen den Mittelwert aus linkem und rechtem Grenzwert von f!

Abbildung 2.5: Konverenz der Fourier-Reihe



Konvergenz der Fourier-Reihe

Regel 5

- Es sei f eine T-periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion und ihre Fourier-Reihe lautet

$$\mathrm{FR}_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,\omega_0\,t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Dann gilt für $t_* \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{FR}_f(t_*) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,\omega_0\,t_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t \uparrow t_*} f(t) + \lim_{t \downarrow t_*} f(t) \right)$$

und falls f an der Stelle t_* stetig ist, dann folgt hieraus

$$\mathrm{FR}_f(t_*) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,\omega_0\,t_*} = f(t_*)\,.$$

- Wenn f an der Stelle t_* nur stetig ist, dann kann es sein, dass die Fourier-Reihe an der Stelle t_* divergiert.

2.13.5 Reelle Fourier-Reihe

Gegeben sei eine T-periodische, reellwertige Funktion $f \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. f lässt sich also in eine Fourier-Reihe entwickeln (Fourier-Synthese) und die Fourier-Reihe lautet

$$\mathrm{FR}_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \varphi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{i\,k\,\omega_0\,t}\,.$$

Dabei sind die c_n die komplexen Fourier-Koeffizienten (Fourier-Analyse):

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{\varphi_k(t)} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\,k\,\omega_0\,t} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Das kann man alles mit Sinus und Kosinus umschreiben, indem man die Eulersche Identität anwendet. Dabei ergibt sich die reelle Fourier-Reihe mit Sinus und Kosinus:

Reelle Fourier-Reihen

Regel 6

$$\mathrm{FR}_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(n\,\omega_0\,t\right) + b_n \sin\left(n\,\omega_0\,t\right)\right), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}\,.$$

Die reellwertigen Fourier-Koeffizienten lauten:

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\,, \\ a_n &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cdot\cos(k\,\omega_0\,t)\,\mathrm{d}t\,, \\ b_n &= \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cdot\sin(k\,\omega_0\,t)\,\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

Bemerkungen:

- Zur Berechnung von a_0 wird f über eine Periode integriert und der Integralwert skaliert. Der Gleichanteil, $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert des Signals über eine Periode.
- Die Fourierkoeffizienten a_n sind die Amplituden der Kosinus-Schwingungen und die Fourierkoeffinenten b_n sind die Amplituden der Sinus-Schwingungen.
- Die Fourierkoeffizienten sind die Projektionen auf alle möglichen harmonischen Schwingungen mit Periode ω_0.
- Ist das Signal $\tilde{f} = f - \frac{a_0}{2}$ ungerade, so gilt $a_n = 0$.
- Ist das Signal $\tilde{f} = f - \frac{a_0}{2}$ gerade, so gilt $b_n = 0$.
- Im Unterschied zur komplexen Fourier-Reihe, taucht in der reellen Fourierreihe kein " negativer" Laufindex auf.
- Im Unterschied zur komplexen Fourier-Reihe, ist die Amplitude und die Phase der n-ten Oberwelle nun in a_n und b_n versteckt statt im Betrag und Winkel von c_n.
- Man kann die reellen Fourier-Koeffizienten a_n und b_n aus den komplexen Fourierkoeffizienten c_n und c_{-n} bestimmen . Aufgabe
- Die harmonischen Schwingungen $c_n(t) = \cos(n\,\omega_0\,t)$ und $s_n(t) = \sin(n\,\omega_0\,t)$ bilden für $n \in \mathbb{N}_0$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{P}_T(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Aufgabe
- Wichtig zum Lösen von Aufgaben: Wenn man eine periodische Funktion über eine volle Periode integriert, dann ist es egal, an welcher Stelle man anfängt! Aufgabe

Rechtecksignal Bsp 3

2-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f_T : [0,2) \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} 1, & t \in [0,1)\,, \\ 0, & t \in [1,2)\,. \end{cases}$$

Reelle Fourier-Koeffizienten mit $\omega_0 = \pi$:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1\,,$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\cos(n\,\pi\,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(n\,\pi\,t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(n\,\pi\,t)}{n\,\pi}\right]_0^1 = 0, \quad n > 1\,,$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin(n\,\pi\,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(n\,\pi\,t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos(n\,\pi\,t)}{n\,\pi}\right]_0^1 = \frac{1-(-1)^n}{n\,\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n\,\pi}, & n = 3,5,7,\cdots, \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots. \end{cases}$$

Lösung:

$$\mathrm{FR}_f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi\,t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\,\pi\,t) + \cdots + \frac{2}{(2\,n+1)\pi}\sin((2n+1)\,\pi\,t) + \cdots$$

Parabel

Bsp 4

2π-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f_T : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{(t-\pi)^2}{\pi}.$$

Reelle Fourier-Reihe ($\omega_0 = 1$):

$$\mathrm{FR}_f(t) = \frac{\pi}{3} + \frac{4}{\pi}\cos(t) + \frac{4}{\pi}\frac{\cos(2\,t)}{2^2} + \cdots + \frac{4}{\pi}\frac{\cos(n\,t)}{n^2} + \cdots$$

Sägezahnfunktion

Bsp 5

2π-periodische Fortsetzung der Funktion:

$$f_T : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\pi - t}{2}, & 0 < t < 2\pi\,, \\ 0, & t = 0\,. \end{cases}$$

Reelle Fourier-Reihe ($\omega_0 = 1$):

$$\mathrm{FR}_f(t) = \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,t) + \cdots + \frac{1}{2}\sin(n\,t) + \cdots$$

2.13.6 Zusammenfassung

...der Formeln und der wichtigsten Ergebnisse:

Fourier-Reihe für T-periodische Funktionen (komplexe Variante)

Regel 7

Der Vektorraum $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ der T-periodischer Funktionen wird betrachtet mit

- Grundfrequenz: $\omega_0 := \dfrac{2\pi}{T}$
- Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle := \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cdot\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$
- Norm: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} \Rightarrow \|f\|^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$
- Orthonormalsystem: $\{\varphi_k(t) = e^{i\,k\omega_0\,t}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ lautet:

komplexe Fourier-Reihe: $\quad \mathrm{FR}_f(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\,k\,\omega_0\,t}\,,$

komplexe Fourier-Koeffizienten: $\quad c_k = \langle f, \varphi_k\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cdot e^{-i\,k\,\omega_0\,t}\,\mathrm{d}t\,.$

Fourier-Reihe für T-periodische Funktionen (reelle Variante)

Regel 8

Der Vektorraum $\mathcal{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der T-periodischer Funktionen wird betrachtet mit

- Grundfrequenz: $\omega_0 := \dfrac{2\pi}{T}$
- Skalarprodukt: $\langle f, g\rangle := \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t$

- Norm: $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle} \Rightarrow \|f\|^2 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t$
- Orthonormalsystem:

$$\begin{cases} c_n(t) & := & \cos(n\,\omega_0\,t)\,, \quad n \in N_0\,, \\ s_n(t) & := & \sin(n\,\omega_0\,t)\,, \quad n \in \mathbb{N}^+\,, \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in \mathcal{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lautet:

reelle Fourier-Reihe: $$\mathrm{FR}_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n\,\omega_0\,t) + b_n \sin(n\,\omega_0\,t)\right)\,,$$

reelle Fourier-Koeffizienten: $$a_n = \langle f, c_n\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\,\omega_0\,t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$b_n = \langle f, s_n\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\,\omega_0\,t)\,\mathrm{d}t$$

Bemerkungen:

- Die Fourier-Koeffizienten sind die Amplituden genau der harmonischen Schwingungen, die in f stecken.
- Die Fourier-Reihe ist die Überlagerung aller Teilschwingungen in f und rekonstruiert f fast überall. Die Fourier-Reihe ist die Fourier-Synthese.
- Die Menge der Fourier-Koeffizienten wird das Spektrum von f genannt: die Berechnung bzw. Angabe der Fourier-Koeffizienten ist die Fourier-Analyse.
- Das Spektrum von f ist diskret und unendlich groß: es gibt im Allgemeinen unendlich viele Fourier-Koeffizienten.

Fourierreihen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.13 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Harmonische Schwingungen — Aufg. 1

Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Nullphase der folgenden harmonischen Schwingungen und skizzieren sie den Funktionsverlauf

$$(a)\; y(t) = 2\,\sin\left(3\,t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad (b)\; y(t) = 10\,\sin\left(\pi\,t - 3\,\pi\right)\,.$$

komplexes Fourier-Polynom vs. reelles Fourier-Polynom — Aufg. 2

(a) Zeigen Sie, dass man die komplexwertigen Koffizienten c_k eines komplexen Fourier Polynoms

$$p_{N,f}(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{i\,k\,\omega_0\,t}\,,$$

in die reell-wertigen Koeffizieinten a_n und b_n des entsprechenden reellen Fourier-Polynom umrechnen kann.

(b) Zeigen Sie, dass man die reellen Koffizienten eines Fourier Polynoms

$$p_{N,f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cdot \cos(n\,\omega_0\,t) + b_n \cdot \sin(n\,\omega_0\,t)\right)\,,$$

in die komplex-wertigen Koeffizienten c_k des entsprechend komplex-wertigen Fourier-Polynoms umrechnen kann.

Fourier-Reihen — Aufg. 3

Skizzieren Sie zunächst die Funktionen und berechnen Sie anschließend die Fourier-Reihen.

(a) Periode $T = 2$ und

$$f(t) = t, \quad t \in [0, 2]\,.$$

(b) Periode $T = 1$ und

$$f(t) = |t|, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\,.$$

(c) Periode $T > 0$ und

$$f(t) = t \cdot (T - t), \quad t \in [0, T]\,.$$

(d) Periode $T = 2\pi$ und

$$f(t) = \max(\sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

2.14 Fourier-Transformation

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen...	
• die Fourier-Transformierte einer absolut integrierbaren Funktion zu berechnen	
Sie können bereits...	
• uneigentliche Integrale berechnen	2.2
• Grenzwerte bilden	1.21

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.14.1 Fragestellung

Kann man auch für Funktionen, die nicht periodisch, sind ein Spektrum finden? Wenn ja, wie sieht das Spektrum aus und wie berechnet man es? Mit diesen Fragen werden wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen. Die Antwort auf die Frage lautet " ja, kann man" und das Ergebnis ist eine Funktion, die sogenannte Fourier-Transformierte.

2.14.2 Definition

Betrachten wir eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto f(t)$, die nicht periodisch ist, aber für die gilt:

(a) f ist stetig differenzierar und

(b) f ist absolut integrierbar $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty\,.$

Mit dem folgenden Trick nähern wir uns langsam der Frage nach dem Spektrum von f:

1. Wir wählen eine positive, reelle Zahl $T > 0$ und fixieren das Intervall $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$.
2. Wir definieren eine periodische Funktion g, $g(t) = g(t + T)$, die f periodisch fortsetzt:

$$\forall t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) : \; g(t) = f(t)\,.$$

Die Funktion g erfüllt alle Voraussetzung aus dem vorigen Abschnitt und wir erhalten eine Darstellung von g als Fourierreihe, insbesondere gilt für alle $t \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
-\tfrac{T}{2} < t < \tfrac{T}{2} : \quad g(t) \quad &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\,\omega_k\,t} \\
\text{Formel für } c_k : \quad &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-i\,\omega_k\,t}\,\mathrm{d}t \right) \cdot e^{i\,\omega_k\,t}, \quad \omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{T} \\
\text{Relation zu } f : \quad &= f(t)
\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt per Konstruktion: f stimmt auf $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ ja mit g überein! Naja, wenn das so ist, dann schicken wir T gegen Unendlich und erhalten eine eine Darstellung von f für alle $t \in \mathbb{R}$, oder? Die Idee ist genial und schlägt zwei Fligen mit einer Klappe:

1. wir würden verstehen, was das Spektrum von f ist,
2. wir hätten eine der Fourier-Synthese ähnlich Darstellung von f gefunden.

Leider handelt sich bei dem Grenzübergang $T \to \infty$ um eine mathematisch heikle Angelegenheit: die Variable T steckt ja überall drin: im Integranden und in den Integrationsgrenzen. Der Grenzübergang klappt für Funktionen, die die Voraussetzungen (a) und (b) erfüllen. Um die Details zu verstehen braucht man mehr mathematische Kenntnisse als wir sie zur Verfügung haben. Versuchen wir trotzdem ein grundsätzliches Verständnis dafür zu entwickeln, was für $T \to \infty$ passiert.

Offensichtlich wird für $T \to \infty$ der Abstand zwischen zwei Kreisfrequenzen beliebig klein! Wir lösen die Bindung an eine diskrete Variable ω_k auf, indem wir auf den Laufindex k verzichten und das geht so:

- Die Kreisfrequenz $\omega = \omega(k)$ wird als Laufvarible in der Summe benutzt und auf den ganzzahligen Laufindex wird komplett verzichtet,
- Anstatt k führen die Weite $\Delta\omega$ zwischen zwei Frequenzen explizit ein
$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T} \;\Rightarrow\; \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\,.$$

Damit
$$\begin{aligned}
\forall t \in \left(-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}\right): \quad f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-i\,\omega_k\,t}\,\mathrm{d}t \right) \cdot e^{i\,\omega_k\,t} \\
&= \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t \right) \cdot e^{i\,\omega\,t} \\
&= \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t \right) \cdot e^{i\,\omega\,t} \cdot \Delta\omega\,,
\end{aligned}$$
das Summensymbol bedeutet, dass ω schrittweise um $\Delta\omega$ nach $+\infty$ inkrementiert bzw nach $-\infty$ dekrementiert wird. Schickt man $T \to \infty$, so wird aus der Summe ein Integral über die stetige Variable ω. Es gilt
$$\lim_{T\to\infty} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \cdot e^{i\omega t} \cdot \Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \right) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$
und
$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}: \quad f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \right) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t \right) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,.
\end{aligned}$$
Der blau eingefärbte Term ist die Fourier-Transformierte $\hat{f} : \omega \to \hat{f}(\omega)$. Die Fourier-Transformierte stellt das stetige Spektrum zu f dar.

Die (kontinuierliche) Fourier-Transformierte $\hat{f}$ einer Funktion f (zu Einschränkungen siehe den vorigen Abschnitt) wird definiert durch:

Fourier-Transformation und inverse Fourier-Transformation — Def. 1

- Die Abbildung $\mathcal{F} : f \to \hat{f}$ nennt man die Fouiertransformation [Fourier transform]. Die Fouriertransformation ist ein Basiswechsel: vom Zeitbereich in den Frequenzbereich.
- Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ zu einer Funktion f berechnet sich wie folgt:
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t\,.$$
- Die Abbildung $\mathcal{F}^{-1} : \hat{f} \to f$ nennt man die inverse Fouiertransformation [inverse Fourier transform]. Die inverse Fouriertransformation ist ein Basiswechsel: vom Frequenzbereich in den Zeitbereich.
- Die Funktion f kann man bei gegebener Fourier-Transformierten $\hat{f}$ wie folgt berechnen:
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \cdot e^{i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Bemerkungen:

- Ähnlich wie bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten, ist der Fall $\omega = 0$ separat zu betrachten:

$$\begin{cases} \omega = 0: & \hat{f}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\,, \\ \omega \neq 0: & \hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t\,. \end{cases}$$

  Mit einem Grenzprozess läßt sich verifizieren, dass gilt

$$\lim_{\omega \to 0} \hat{f}(\omega) = \hat{f}(0)\,.$$

- Wie die Fourier-Analyse eines periodischen Signals ist die Fourier-Transformation eine Umwandlung des Signal von Zeit- in Frequenzdarstellung (Basiswechsel).
- Die inverse Fourier-Transformation macht das Umgekehrte. Anders als bei periodischen Signalen ist die Synthese vollkommen äquivalent zur Analyse! (Bei periodischen Signalen ist die Fourier-Synthese das Rekonstruieren des Signals im Zeitbereich mittels Fourier-Reihe.)
- In der Literatur sieht man die Fourier-Transformierte auch mit anderen Vorfaktoren.
- Und statt $\hat{f}$ mit Hut sieht man auch $\tilde{f}$ mit Tilde.
- Was ein Echtzeit-Spectrum-Analyzer zeigt, ist nicht die Fourier-Transformation, sondern immer nur die Fourier-Reihe eines kurzen, weich abgeschnittenen Ausschnitts des Signals, praktisch immer per FFT berechnet.
- Die Fourier-Transformation ist eine lineare Abbildung: Aufgabe

$$\begin{cases} \mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)\,, \\ \mathcal{F}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathcal{F}(f)\,. \end{cases}$$

- Die Fourier-Transformation verändert die Länge nicht, sie verhält sich wie eine Drehung. Es gilt der Satz von Plancherel (entsprechendes gilt für die Fourier-Reihe und heißt der Satz von Parseval): Aufgabe

$$\|f\|^2 = \|\mathcal{F}(f)\|^2 \Leftrightarrow \langle f, f\rangle = \langle \hat{f}, \hat{f}\rangle \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\,.$$

  Praktisch bedeutet dies, dass man die physikalische Arbeit sowohl in der Zeit- als auch Frequenzdarstellung berechnen kann.

Fourier-Transformation — Bsp 1

Funktion:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-|t|}$$

Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned} \omega = 0: \quad \hat{f}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[e^{t}\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-e^{-t}\Big]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(1-0) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(0+1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\omega \neq 0: \quad \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{t} \cdot e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cdot e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(1+i\omega)t}}{-(1+i\omega)} \right]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-i\omega} \left(1 - \underbrace{\lim_{t\to-\infty} e^{(1-i\omega)t}}_{\overset{(*)}{=} 0} \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\omega} \left(\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{-(1+i\omega)t}}_{\overset{(*)}{=} 0} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\omega^2}\,,
\end{aligned}
$$

wobei die Grenzwerte in $(*)$ null sind, weil die komplexe Exponentialfunktion beschränkt ist und der reelle Anteil gegen null konvergiert:

$$
\lim_{t\to\pm\infty} \left| e^{\mp t \mp i\omega t} \right| \leq \lim_{t\to\infty} e^{-|t|} \cdot 1 = 0\,.
$$

Anders als bei der Fourier-Reihe entwickelt man seltener die Fourier-Transformierte in reeller Form. Für Signale mit Symmetrieeigenschaften kann das aber sinnvoll sein. Es gilt Aufgabe

Fourier-Transformation für Signale mit Symmetrieeigenschaften Def. 2

(a) Die Fourier-Transformierte einer Funktion f mit $f(t) = f(-t)$ lautet:

$$
\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega\, t)\,\mathrm{d}t\,.
$$

(b) Die Fourier-Transformierte einer Funktion f mit $f(t) = -f(-t)$ lautet:

$$
\hat{f}(\omega) = \frac{-2\,i}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot \sin(\omega\, t)\,\mathrm{d}t\,.
$$

Fouriertransformation Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.14 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Fourier-Transformation — Aufg. 1

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von folgenden Funktionen.

(a) $\delta > 0, \quad f : t \mapsto \begin{cases} e^{-\delta t}, & t \geq 0\,, \\ 0 & t < 0\,. \end{cases}$

(b) $f : t \mapsto \begin{cases} \cos^2(t), & |t| \leq \pi/2\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Hinweis: Benutzen Sie zur Integration das Additionstheorem $\cos^2(t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos(2\,t)\right)$.

(c) $f : t \mapsto t \cdot e^{-|t|}$

Fourier-Transformation der Gaußschen Funktion — Aufg. 2

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Gaußschen Glockenkurve $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Benutzen Sie ohne Beweis die folgende Identität $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}$ wobei $z \in \mathbb{C}$.

Fourier-Transformation — Aufg. 3

Im Skript wurde die Idee verfolgt die Fourier-Transformation mathematisch als Grenzprozess aus der Fourier-Reihe zu entwickeln. Den Grenzprozess schauen wir uns an einem konkreten Beispiel jetzt an.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$c_k = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}} \cdot \tilde{c}_k, \quad \tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot e^{-i\,\omega_k\,t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{mit Kreisfrequenz } \omega_k = \frac{2\pi k}{T}\,.$$

(b) Betrachten Sie nun die T-periodische Funktion f mit $f|_T : [-T/2, T/2) \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-|t|}$ und bestimmen Sie eine Formel für die Fourierkoeffizienten $\tilde{c}_k$.

(c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{g}$ von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-|t|}$.

(d) Setzen Sie $T = 50$ und bestimmen Sie mit Hilfe einer Software die Punkte $(\omega_k, \tilde{c}_k)$, $1 \leq k \leq 50$. Erzeugen Sie ein Bild, das die Punkte und die den Graph von $\hat{g}$ zeigt.

(e) Interpretieren Sie das Ergebnis.

2.15 Laplace-Transformation

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- die Laplace-Transformierte einer Funktion zu berechnen
- wie die Laplace-Transformation auf Ableitungen wirkt

Sie können bereits...

- uneigentliche Integrale berechnen 2.2
- Ableitungen bilden 1.23

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.15.1 Definition

Die Fourier-Transformation zerlegt Funktionen in sinusförmige Anteile, die sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. 2.14
Das ist für die Physik spannend, für die Regelungstechnik dagegen nicht: In der Regelungstechnik möchte man kurze Störungen und kurze Regelvorgänge betrachten. Dort benutzt man die Laplace-Transformation - und interessiert sich nicht einmal dafür, in welche Anteile man die Schwingungen zerlegt. Neben den Anwendungen in der Regelungstechnik, kommt die Laplace-Transformation zum Einsatz, um Differentialgleichungen zu lösen.

Man betrachtet bei der Laplace-Transformation Signale y für Zeiten $t \geq 0$. Meist setzt man einfach $y(t) = 0$ für $t < 0$. Der Gedanke ist, dass erst bei $t = 0$ oder später eine Störung auftritt. Die Laplace-Transformierte eines Signals $y : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ wird definiert als:

Laplace-Transformation — Def. 1

$$\mathcal{L}(y) : D_Y \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, s \mapsto Y(s),\; Y(s) := \int_0^\infty y(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t\,. \quad (*)$$

Bemerkungen:

- Das Integral $(*)$ muss nicht für alle komplexen Zahlen $s \in \mathbb{C}$ existieren und das heißt der Definitionsbereich D_Y der Laplacetransformierten Y ist im Allgemeinen eine echte Teilmenge der komplexen Zahlen.
- Hinreichend dafür, dass $(*)$ existiert ist: y hat nur endlich viele Sprungstellen und das Wachstum von y für $t \to \infty$ wird durch die Exponentialfunktion so gedämpft, dass das uneigentliche Integral existiert 2.2
(Grenzwertsätze). 1.21

Für die Laplace-Transformierte eines Signals y findet man die folgenden Bezeichnungen:

$$s \mapsto (\mathcal{L}y)(s), s \mapsto Y(s), s \mapsto \mathcal{L}\{y(t)\}(s) \;\text{ und } y \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet Y\,.$$

Man sagt, das Signal liegt im Zeitbereich; seine Laplace-Transformation liegt im Bildbereich. i

2.15.2 Eigenschaften

Was passiert, wenn man die Laplace-Transformation auf die Ableitung $\dot{y}$ eines Signals los lässt?

$$\int_0^\infty \dot{y}(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \Big[y(t)e^{-st}\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = -y(0) + sY(s)\,.$$

Die Ableitung wird also quasi ein Produkt - quasi, weil der Randterm noch als additive Konstante hinzukommt![15] Aufgabe

In ähnlicher Weise kann man die Frage stellen, ob sich die Ableitung der Laplace-Transformierten in ein Produkt im Zeitbereich darstellt. Die Antwort ist ja. Die Formeln für höhere Ableitungen sind in der folgenden Box zusammengefasst:

[15] Die Fourier-Transformation der Ableitung liefert übrigens exakt ein Produkt.

Laplace-Transformierte und die Ableitung — Regel 1

Die Laplace-Transformierte von $y^{(n)}$ lautet:

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}\right)(s) = s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(0) s^{n-k-1}$$

Die n-te Ableitung der Laplace-Transformierten von y lautet:

$$Y^{(n)}(s) = \mathcal{L}\left((-t)^n y\right)(s)\,.$$

Laplace-Transformation von exp, sin und cos — Bsp 1

- Für $y : t \mapsto e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_0^\infty e^{\lambda t} \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty e^{(\lambda-s)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(\lambda-s)t}}{\lambda - s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-\lambda}, \quad \text{wenn } \mathrm{Re}(s) > \lambda\,.$$

- Für $y : t \mapsto e^{i\omega t}$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_0^\infty e^{i\omega t} \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty e^{(i\omega-s)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega - s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega}, \quad \text{wenn } \mathrm{Re}(s) > 0\,.$$

- Für $y : t \mapsto \cos(\omega t)$ gilt

$$\int\limits_0^\infty \cos(\omega t) \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \text{wenn } \mathrm{Re}(s) > 0\,.$$

- Für $y : t \mapsto \sin(\omega t)$ gilt

$$\int\limits_0^\infty \sin(\omega t) \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \text{wenn } \mathrm{Re}(s) > 0\,.$$

Laplace-Transformation von Potenzfunktionen — Bsp 2

Das Integral

$$\int\limits_0^\infty t^n \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t = ?$$

Um das Integral zu lösen ist es geschickt, den Integranden so umzuschreiben, dass eine Ableitung nach s auftaucht:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty t^n \cdot e^{-st}\,\mathrm{d}t &= \int\limits_0^\infty (-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s^n}\left(e^{-st}\right)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty \\ &= (-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0\,.\end{aligned}$$

Laplace-Transformierten der Potenzfunktionen — Regel 2

Für die Potenzfunktion $y : t \mapsto t^n$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ existiert die Laplace-Transformierte für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ und sie lautet:

$$Y : s \mapsto n!\,\frac{1}{s^{n+1}}\,.$$

Zeitliche Verzögerung — Bsp 3

Wenn das Signal y um die Zeit a verzögert wird, ergibt sich als Laplace-Transformierte:

$$\int_a^\infty y(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int_0^\infty y(u)e^{-s(u+a)}\,\mathrm{d}u = e^{-sa}\,(\mathcal{L}y)\,(s)\,.$$

$(*)$ mit der Substitution $u = t - a$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

Zeitliche Beschleunigung — Bsp 4

Wenn das Signal y um den Faktor $b > 1$ beschleunigt (oder bei $b < 1$ verlangsamt) wird, ergibt sich als Laplace-Transformierte:

$$\int_0^\infty y(b\cdot t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int_0^\infty y(u)e^{-\frac{s}{b}\cdot u}\frac{1}{b}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{b}\,(\mathcal{L}y)\left(\frac{s}{b}\right)\,.$$

$(*)$ mit der Substitution $u = b\cdot t$, $\mathrm{d}u = b\,\mathrm{d}t$.

Eigenschaften der Laplace-Transformation — Regel 3

Die Laplace-Transformation $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$ ist eine lineare Abblidung:

- $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$
- $\mathcal{L}(\lambda f) = \lambda\mathcal{L}(f)$

Rechenregeln für die Laplace-Transformation — Bsp 5

Die Laplacetransformierten der Standardsignale $f_1 : t \mapsto \cos(t)$ und $f_2 : t \mapsto t$ sind gegeben:

$$\cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+1}, \quad t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2}$$

Mit Hilfe der Rechenregeln folgt:

$$\begin{array}{llcllll}
f : t \mapsto \cos(t) + t & \mathcal{L}(f)(s) & = & \mathcal{L}(f_1)(s) + \mathcal{L}(f_2)(s) & = & \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} & \text{Linearitaet} \\
f : t \mapsto \cos(t-3) & \mathcal{L}(f)(s) & = & e^{-3\,s}\cdot\mathcal{L}(f_1)(s) & = & e^{-3\,s}\frac{s}{s^2+1} & \text{Verzögerung} \\
f : t \mapsto \cos(4t) & \mathcal{L}(f)(s) & = & \frac{1}{4}\mathcal{L}(f_1)\left(\frac{s}{4}\right) & = & \frac{1}{4}\frac{\frac{s}{4}}{\left(\frac{s}{4}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+16} & \text{Beschleunigung} \\
f : t \mapsto \cos(4t) - t & \mathcal{L}(f)(s) & = & \frac{1}{4}\mathcal{L}(f_1)\left(\frac{s}{4}\right) - \mathcal{L}(f_2)(s) & = & \frac{s}{s^2+16} - + \frac{1}{s^2} & \text{gemischt}
\end{array}$$

Es gibt eine für die Praxis wichtige Eigenschaft der Laplacetransformation. Um diese Eigenschaft zu aufzuschreiben, definieren wir die sogenannte Faltung:

Faltung — Def. 2

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Die Faltung von f udn g ist die folgende Funktion, falls sie existiert:

$$(f \star g)\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Es gilt

(a) $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$

(b) $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$

(c) $f \star g = g \star f$

(d) $(\lambda \dot{f}) \star g = \lambda \cdot (g \star f), \quad \lambda \in \mathbb{K}$

Gilt $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ für $x < 0$ so folgt

$$(f \star g)(x) = \int_0^x f(x - \xi) g(\xi) \,\mathrm{d}\xi\,.$$

Die Faltung ist ein Integraloperator, der assoziativ, distributiv und kommutativ ist und im Kontext der Laplace-Transformation gilt folgendes: 2. Anwendung im Kontext der Laplace-Transformation

Laplace-Transformation einer Faltung

Regel 4

Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig mit Laplace-Transformationen F, G. Dann gilt für die Faltung:

$$(f \star g)\,(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) \,\mathrm{d}\tau$$

die Produktformel

$$\mathcal{L}\,(f \star g)\,(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)\,.$$

Laplace Transformation Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.15 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Uneigentliche Integrale — Aufg. 1

Bestimmen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale, falls er existiert.

$$(a)\ \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (b)\ \int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (c)\ \int_{-\infty}^2 e^x\,\mathrm{d}x \quad (d)\ \int_0^\infty x^2\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Uneigentliche Integrale — Aufg. 2

Bestimmen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale, falls er existiert.

$$(a)\ \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \quad (b)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad (c)\ \int_0^{10} \frac{e^x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Laplace-Transformation — Aufg. 3

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Laplace-Transformierte durch explizite Berechnung.

(a) $f(t) = 2t\cdot e^{-4t}$

(b) $f(t) = e^{-\delta t}\cdot\sin(\omega t),\ \delta,\omega > 0$

(c) $f(t) = \sinh(at),\ a > 0$

(d) $f(t) = \sin^2(t)$

(e) (Rechteckimpuls) Für $a > 0$

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < a\,, \\ -A, & a < t < 2a\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(f) (Sinusimpuls) Für $a > 0$

$$f(t) = \begin{cases} A\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{a}\right), & 0 \le t \le a\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Laplace-Transformation — Aufg. 4

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi),\ \omega,\varphi > 0\,.$$

2.16 Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen...	
• Anfangswertprobleme mit Hilfe einer Laplace-Transformation zu lösen	
Sie kennen bereits...	
• die Eigenschaften der Laplace-Transformation bzgl. der Ableitung	2.15
• die Methode zur Bestimmung einer Partialbruchzerlegung	2.7

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.16.1 Idee

Die Eigenschaften der Laplace-Transformation bzgl. Ableiten und Linearität legen nahe die Laplace-Transformation zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen anzuwenden. 2.15 2.6

Gegeben sei Anfangswertproblem mit einer Differentialgleichung der Form

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = t^2\,.$$

Die Differentialgleichung ist inhomogen, linear, von zweiter Ordnung und hat nur konstante Koeffizienten. Die Idee ist beide Seiten der Differentialgleichung einer Laplace-Transformation zu unterziehen. Was passiert?

2.16.2 Vorgehensweise

Anfangswertproblem Part I — Bsp 1 AWP → $Y(s)$

Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y(0) = y_0\,, & t = 0\,,\\ \dot{y}(0) = y_1\,, & t = 0\,,\\ \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = t^2\,, & t > 0\,. \end{cases}$$

Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned} \left(-\dot{y}(0) - sy(0) + s^2Y(s)\right) + 5\left(-y(0) + sY(s)\right) + 6Y(s) &= 2s^{-3} \\ \Leftrightarrow \qquad \left(s^2 + 5s + 6\right)Y(s) - \dot{y}(0) - (5+s)y(0) &= 2s^{-3} \\ \Leftrightarrow \qquad Y(s) &= \frac{2s^{-3} + \dot{y}(0) + (5+s)y(0)}{s^2 + 5s + 6}\,. \end{aligned}$$

Lösung im Bildraum:

$$Y : s \mapsto \frac{2s^{-3} + \dot{y}(0) + (5+s)y(0)}{s^2 + 5s + 6}\,.$$

Und damit haben wir eine Differentialgleichung durch Laplace-Transformation in eine algebraische Gleichung für die Laplace-Transformierte Y der Lösung transformiert! Wir wissen nun also wie die Laplace-Transformierte unserer Lösung aussieht: 1.9

$$Y(s) = \frac{2s^{-3} + \dot{y}(0) + (5+s)y(0)}{s^2 + 5s + 6}\,.$$

Leider sind wir nicht an $s \mapsto Y(s)$, sondern an der Lösung $y \mapsto y(t)$ im Zeitbereich interessiert und deshalb stellen sich die folgenden Fragen:

- Können wir zurück transformieren?
- Falls ja, ist die Rücktransformation eindeutig bestimmt?

Anstatt eine inverse Laplace-Transformation zu definieren und durchzuführen[16], nutzen wir die Struktur der rationalen Funktion aus! Die Idee ist, eine Tabelle mit Laplace-Transformationen rückwärts zu lesen. Zuvor 1.11

[16] Bei der Fourier-Transformation ist der Weg zurück klar: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$.

muss die komplizierte rationale Funktion in einfache Teile zerlegt werden, die wir in der Tabelle auch finden. Das bedeutet praktisch, dass eine Partialbruchzerlegung durchzuführen ist. 2.1 Aufgaben

Bezüglich der zweiten Frage, merken wir uns: Es gibt nur eine Funktion, deren Laplace-Transformation dieses Y ist. Wenn man diese Funktion gefunden hat, hat man die Lösung der Differentialgleichung gefunden!

Anfangswertproblem Part *II*

Bsp 2 $Y(s) \to y(t)$

Lösung im Bildraum:

$$Y(s) = \frac{2s^{-3} + \dot{y}(0) + (5+s)y(0)}{s^2 + 5s + 6}$$

Lösung im Zeitbereich:

1. $Y(s)$ wird so umgeformt, dass im Zähler und im Nenner Polynome in s stehen:

$$Y(s) = \frac{2 + s^3\dot{y}(0) + s^3(5+s)y(0)}{s^3 \cdot (s^2 + 5s + 6)}$$

2. Der Nenner von $Y(s)$ wird weitestgehend in Faktoren zerlegt (Nullstellensuche und Polynomdivision):

$$s^3 \cdot (s^2 + 5s + 6) = s^3 \cdot (s+3) \cdot (s+2)\,.$$

3. Für $Y(s)$ wird eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{B_1}{s^2} + \frac{C_1}{s^3} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_3}{s+2}$$

durch und erhält durch Koeffizientenvergleich die folgende Zerlegung

$$Y(s) = \frac{1}{3s^3} - \frac{5}{18s^2} + \frac{19}{108s} + \frac{-\dot{y}(0) - 2y(0) + 2/27}{s+3} + \frac{\dot{y}(0) + 3y(0) - 1/4}{s+2}\,.$$

4. Für jeden der fünf Teile schlägt man nach, welche Funktion hier jeweils transformiert wurde. Damit hat man die Lösung der Differentialgleichung gefunden:

$$y(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{18}t + \frac{19}{108} + \left(-\dot{y}(0) - 2y(0) + \frac{2}{27}\right) \cdot e^{-3t} + \left(-\dot{y}(0) + 3y(0) - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-2t}\,.$$

Laplace Transformation Anwendungen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt **??** und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Laplace-Transformation Rechenregeln — Aufg. 1

Bestimmen Sie durch Anwendung der Regeln die Laplace-Transformierte der angegebenen Funktionen:

(a) $f(t) = 4t^3 - t^2 + 2t$

(b) $f(t) = C(1 - e^{-\lambda t})$

(c) $f(t) = (3t)^5$ Hinweis: $t^5 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{120}{s^6}$

(d) $f(t) = \cos(4t)$ Hinweis: $\cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+1}$

(e) $f(t) = \cos^2(\omega t)$ Hinweis: $\cos^2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s^2+2}{s \cdot (s^2+4)}$

(f) $f(t) = (t-4)^2$ Hinweis: $t^2 \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{2}{s^3}$

(g) $f(t) = e^{t-b},\ b > 0$ Hinweis: $e^t \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-1}$

(h) $f(t) = \sin(t + \pi/2)$ Hinweis: $\sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2+1}$

(i) $f(t) = e^{3t} \cdot \cos(2t)$ Hinweis: $\cos(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{s}{s^2+1}$

(j) $f(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t),\ \delta, \omega > 0$ Hinweis: $\sin(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s^2+1}$

(k) $f(t) = 2^{3t}$ Hinweis: $e^{\lambda t} \circ\!\!-\!\!\bullet \dfrac{1}{s-\lambda}$

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen — Aufg. 2

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = 0,\ \omega > 0$ mit den beiden Anfangswerten

1. $y(0) = 1 \wedge y'(0) = 0$
2. $y(0) = 0 \wedge y'(0) = 1$

(a) Berechnen Sie die Lösung der beiden Anfangswertprobleme.

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $Y(s)$ der Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$. Nutzen Sie dabei die Ableitungsregeln.

(c) Bestimmen Sie, ausgehend von den speziellen Lösungen der Anfangswertprobleme im Bildbereich, die Lösungen im Zeitbereich. Verwenden Sie für die Rücktransformationen eine Tabelle.

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen — Aufg. 3

Lösen Sie die folgenden Systeme mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$(a) \begin{cases} x(0) = y(0) = 0, & t = 0\,, \\ \dot{x} + 2y = e^t, & t > 0\,, \\ \dot{y} + 2x = e^{-t}, & t > 0\,. \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x(0) = y(0) = 0, & t = 0\,, \\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, & t = 0\,, \\ \ddot{x} + \dot{y} + 3y = 1, & t > 0\,, \\ \ddot{y} - 4\dot{x} + 3y = 0, & t > 0\,. \end{cases}$$

2.17 Wahrscheinlichkeitlehre

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen. . .	
• Ereignismengen von einfachen Zufallsexperimenten explizit anzugeben	
• Wahrscheinlichkeiten von diskreten Ereignissen zu berechnen	
Sie können bereits. . .	
• mit Mengen rechnen	1.1
• Binomialkoeffizienten berechnen	1

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.17.1 Ereignisse

In der Wahrscheinlichkeitslehre oder Stochastik geht es darum Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen [events] zu berechnen. Die folgenden Aussagen beschreiben beispielsweise Ereignisse:

- "Der Zug kommt pünktlich."
- "Das Licht geht an."

Ereignisse treten ein oder nicht (oder sind eingetreten oder nicht). Zwei Ereignisse A und B sind gleich, wenn A genau dann eintritt, wenn B eintritt.

Identische Ereignisse Würfel Bsp 1

Für das Zufallsexperiment "Wurf eines Würfels" sind die folgenden Ereignisse mathematisch identisch:

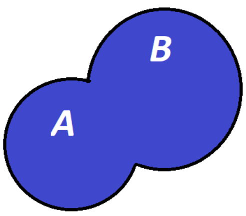
- Es fällt die Zahl 5 oder es fällt die Zahl 6.
- Es fällt eine Zahl > 4.
- Es fällt eine Zahl x mit $x^2 > 20$.

Die Ereignisse sind genau dann wahr (treten also ein), wenn der Würfel die Ziffer 5 oder die Ziffer 6 fällt.

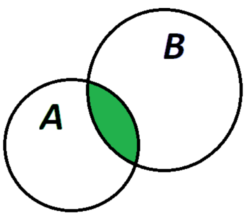
Als Modell zur Beschreibung von Ereignissen haben sich Mengen durchgesetzt. Vereinigung, Schnitt und Komplement von Ereignissen haben in diesem Kontext die folgende Bedeutung: 2.1.2

Ereignisse mit Mengen modellieren Def. 1

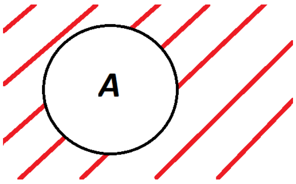
Es seien A, B zwei Ereignisse, also Mengen. Es gilt



$A \cup B$: "A tritt ein oder B tritt einöder "A und B tritt ein"



$A \cap B$: "A und B treten zusammen ein"



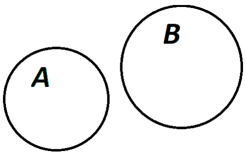
$\overline{A}$: "A tritt nicht ein"

Außerdem definieren wir die beiden speziellen Ereignisse:

- $\emptyset$: das unmögliche Ereignis.
- Ω: das sichere Ereignis.

Haben zwei Ereignisse eine leere Schnittmenge, also $A \cap B = \emptyset$, dann nennt man $A \cap B$ unvereinbar oder inkompatibel.

Unvereinbare Ergeignisse — Bsp 2



Unvereinbar sind beispielsweise die folgenden Ereignisse

- der Würfel zeigt eine gerade Zahl: $A = \{2, 4, 6\}$,
- der Würfel zeigt eine ungerade Zahl $B = \{1, 3, 5\}$.

2.17.2 Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis ω eintritt, ist eine Zahl, wir nennen sie $P(\omega)$. Mit anderen Worten: P ist eine Abbildung, die einem Ergeignis ω eine Zahl, nämlich $P(\omega)$ zuordnet. Von drei speziellen Ereignissen kennen wir die Wahrscheinlichkeit schon:

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen — Def. 2

- $\omega = \emptyset : \quad P(\emptyset) = 0,$
- $\omega = \Omega : \quad P(\Omega) = 1,$
- $\omega = A \cap B \wedge A \cap B = \emptyset : \quad P(A \cap B) = 0.$

Oft zerlegt man Ereignisse in atomare Teile, die sogenannten Elementarereignisse und das führt dazu, dass man Ereignis als Mengen von Elementarereignissen angibt. Ein Beispiel:

Ereignisse Würfel — Bsp 3

Ein Würfel besitzt die Elementarereignisse: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ und damit haben die im folgenden aufgelisteten Ereignisse die angegebenen Mengendarstellungen:

- " Es fällt eine Zahl > 4" $\;\widehat{=}\; \{5, 6\}$.
- " Es fällt eine Zahl, die ungerade ist" $\;\widehat{=}\; \{2, 4, 6\}$.
- " Es fällt eine Zahl, die kleiner als 7 ist" $\;\widehat{=}\; \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$.
- " Es fällt die Zahl 3" $\;\widehat{=}\; \{3\}$.

Für den Begriff Wahrscheinlichkeit [probability] gibt zwei wesentliche Interpretationen. Beide führen zum selben mathematischen Modell.

Wahrscheinlichkeitsbegriffe — Def. 3

- Definition von Bayes: $P(A) :=$ Wie sicher bin ich mir, dass das Ereignis A passiert, passiert ist oder passieren wird.
- Frequentistische Definition:
$$P(A) := \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N},$$
wobei N die Anzahl an durchgeführten Zufallsexperimenten ist und m die Versuche bezeichnet, bei

denen das Ereignis A eingetreten ist.

Eine Vorform des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff:

$$P(A) := \frac{m}{N},$$

wobei N die Anzahl aller Fälle und m die Anzahl der günstigen Fälle bezeichnet.[17]

2.17.3 Kolmogorow-Axiome

Modellierung von Wahrscheinlichkeit — Regel 1

Mathematisch modelliert man Wahrscheinlichkeit als eine Abbildung

$$\begin{aligned} P &: \text{Menge aus Elementarereignissen } \to \mathbb{R}, \\ P(A) &= \text{Wahrscheinlichkeit, dass alle Elementarereignisse in } A \text{ eintreten.} \end{aligned}$$

Die Abbildung P erfüllt die drei Axiome von Kolmogorow:

- $P(A) \geq 0$ für alle Ereignisse A.
- $P(\Omega) = 1$ für das sichere Ereignis Ω.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für alle Ereignisse A, B, die unvereinbar sind, also $A \cup B = \emptyset$.[a]

[a]Entsprechend für Vereinigungsmengen abzählbar vieler Ereignisse.

Aus den Axiomen kann man viele weitere Eigenschaften herleiten:

$$\begin{aligned} 1 &= P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A), \\ P(A \cup B) &= P((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Die Ergebnisse fassen wir noch einmal zusammen:

Rechnenregeln — Regel 2

- Wahrscheinlichkeit des Gegenereignis zu A tritt ein: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Mindestens eines zweier Ereignisse A oder B tritt ein: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Würfelexperiiment — Bsp 4

Wir beobachten das Zufallsexperiment " Einmaliges Würfel eines Würfels" und messen die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{cases} P(\{1\}) = 1/2, \\ P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/10. \end{cases}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl ungerade ist?

$$\begin{aligned} P(\{1,3,5\}) &= P(\{1\},\{3\},\{5\}) = P(\{1\} + P(\{3\} + P(\{5\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Von bedingter Wahrscheinlichkeit ist die Rede, wenn A eintreten soll, vorausgesetzt B ist bereits eingetreten.

Bedingte Wahrscheinlichkeit — Regel 3

Seien A, B Ereignisse und $P(B) > 0$. Dann heißt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

[17]Der Wahrscheinlichkeitsbegriff von Laplaace erscheint heute allerdings naiv, weil man mit dieser Definition zum Beispiel keinen gezinkten Würfel beschreiben kann. Laplace funktioniert, wenn die Elementarereignisse alle gleich Wahrscheinlich sind.

die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B. Entsprechend gilt der Produktsatz:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)\,.$$

Wahrscheinlichkeit Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.17 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Ereignismenge — Aufg. 1

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, die man aus den Ziffern...

(a) $7, 8$ und 9 bilden kann,

(b) $7, 8$ und 9 bilden kann, wenn jede Ziffer nur einmal auftreten darf.

Ereignismenge — Aufg. 2

Die Handy-Pin ist gerade, vierstellig und genau die Ziffern $1, 23, 4$ und 5. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Ereignismenge — Aufg. 3

Geben Sie für die Zufallsexperimente die Mächtigkeit der Ergenbismenge und alle möglichen Ergebnisse an:

(a) Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Augenzahlen festgestellt.

(b) Eine Münze soll so lange geworfen, bis zum ersten Mal Wappen oben liegt. Die maximale Anzahl an Würfen ist vier.

Zufallsexperiment — Aufg. 4

Es wird folgendes Zufallsexperiment betrachtet: Dreimaliges Werfen einer Münze und Feststellen, ob Wappen oder Zahl oben liegt. Formulieren Sie die Ereignisse in Worten.

(a) $\{WWZ, WZW, ZWW\}$

(b) $\{WWW, WWZ, ZWW, ZWZ\}$

(c) $\{WZZ, ZWZ, ZZW, ZZZ\}$

(d) $\{WZW, ZWZ\}$

Wahrscheinlichkeiten — Aufg. 5

Man hat einen Topf mit 10 Kugeln, davon sind 6 aus Silber und 4 aus Gold. Man zieht zufällig zwei Kugeln (ohne Zurückzulegen). Wir nennen

A: Ziehen einer Goldkugel beim ersten Mal

B: Ziehen einer Goldkugel beim zweiten Mal

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse an:

$$P(A),\ P(B|A),\ P(A \cap B),\ P(B),\ P(A|B)\,.$$

Wahrscheinlichkeiten — Aufg. 6

Ein Computerchip wird zweimal unabhängig voneinander auf Produktionsfehler untersucht. Sowohl im ersten Test A als auch im zweiten Test B werden c Fehler festgestellt. Zusätzlich werden beim Test A a Fehler und beim Test B b Fehler festgestellt. Wir nehmen an, dass die verschiedenen Fehler mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gefunden werden. Geben Sie eine Schätzung an für die Gesamtanzahl der Produktionsfehler des getesteten Chips.

2.18 Zufallsvariablen

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen. . .

- zwischen diskreten und stetigen Zufallsvariblen zu unterscheiden
- die Beschreibungsmerkmale "Erwartungswert", "Median" und "Perzentile" kennen
- Beschreibungsmerkmale von diskreten Zufallsvariablen zu berechnen
- Beschreibungsmerkmale von stetigen Zufallsvariablen zu berechnen

Sie können bereits. . .

- endliche Summen berechnen 1
- Integrale berechnen 2.3

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.18.1 Klassifikation von Zufallsvariablen

Ein Würfel besitzt die Elementarereignisse $1, 2, 3, 4, 5, 6$ und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis bei einmaligem Würfeln eintritt, läßt sich als Menge von Elementarereignissen beschreiben. Die Zahl, die das Würfeln hervorbringt, nennt man in der Stochastik abstakt Zufallsgröße oder Zufallsvariable [random variable] und das Würfeln nennt man das Zufallsexperiment.

Zufallsvariablen und Zufallsexperimente Bsp 1

- Messen von Temperatur ist Grad Celsius ein Zufallsexperiment und die Zufallsgröße ist die Temperatur,
- Würfeln eines Würfels ist ein Zufallsexperiment und die Zufallsgröße ist die gewürfelte Zahl,
- Messen von Temperatur in Grad Celsius ist ein Zufallsexperiment und die Weiterverarbeitung, beispielsweise Umrechnung der Temperatur in Fahrenheit ist eine Zufallsvariable.

Zufallsvariablen nehmen verschiedenen Werte an. Beim Würfeln sind die Möglichkeiten endlich und diskret, wohingegen das Messen einer Temperatur unendlich viele mögliche Werte annehmen kann. Diese Beobachtung führt zu folgender Klassifikation von Zufallsvariablen:

Klassifikation von Zufallsvariablen Def. 1

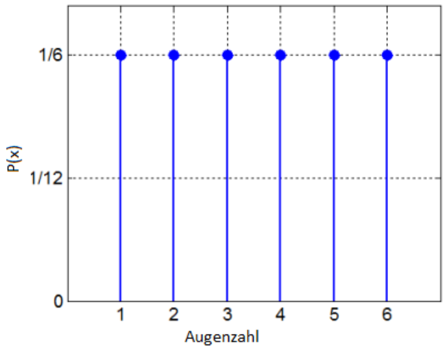
- diskrete Zufallsvariablen: endliche viele oder abzählbar viele mögliche Werte.
- stetige Zufallsvariablen: mehr als abzählbar viele mögliche Werte.
- alle anderen.

Praktisch sind alle physikalischen Messungen stetige Zufallsvariblen. Die diskreten Zufallsvariablen sind aber einfacher zu verstehen und wir schauen uns diese zuerst an.

2.18.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

Die Verteilung einer diskreten Zufallsgröße ist dadurch bestimmt, dass man angibt (gegebenfalls aus Messungen), wie häufig die Zufallsvariable bestimmte Werte annimmt. Das zeichnet man gerne als ein Histogramm.

Gleichverteilte diskrete Zufallsgröße Bsp 2



Jede Zahl beim Würfeln ist gleichwahrscheinlich, also ergibt sich für jedes Elementarereignis

$$P(\{n\}) = \frac{1}{6}, \quad n \in 1, 2, 3, 4, 5, 6\,.$$

Die Verteilung dieser gleichverteilten Zufallsgröße ist links dargestellt.

Der Erwartungswert [expected value] $E[X]$ einer Zufallsvariable X ist die Zahl, die die Zufallsvariable im Mittel annimmt. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung der diskreten Zufallsvariable angibt, wie häufig jeder Wert im Mittel vorkommt, gelangt man zu folgender Definition:

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable Def. 2

Es seien $x_k, k, \cdots, M$, alle Elementarereignisse, die die Zufallsvariable annehmen kann (womöglich sind das unendlich viele, aber abzählbar unendlich viele). Der Erwartungswert von X ist

$$E[X] := \sum_{k=1}^{M} P(\{x_k\}) \cdot x_k\,.$$

Erwartungswert beim Würfeln Bsp 3

Für einen idealen Würfel heißt das

$$E[X] := \sum_{n=1}^{6} P(\{n\}) \cdot n = \frac{1}{6}\,(1+2+3+4+5+6) = \frac{3}{2}\,.$$

Bemerkungen:

- Wie man sieht, muss der Erwartungswert nicht unbedingt als Wert der Zufallsvariable vorkommen.
- Wenn die Zufallsvariable X unendlich viele verschiedene Werte annehmen kann, kann es passieren, dass der Erwartungswert nicht sinnvoll zu definieren ist. Aber diese Fälle kommen in der Praxis nicht vor.

Neben dem Erwartungswert gibt es noch weitere gängige Kennzahlen zur Beschreibung diskreter, ordinalskalierter (geordneter) Zufallsvariablen: Aufgabe

- der Median [median] ist derjenige Wert, der genau in der Mitte von n geordneten Werten $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ liegt. Es gilt

$$\begin{aligned} n \text{ ungerade:} \qquad & x_{\text{med}} = x_{\frac{n+1}{2}}\,, \\ n \text{ gerade:} \qquad & x_{\text{med}} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)\,. \end{aligned}$$

- eine Perzentile [percentile], zum Beipsiel das 20%-Perzentil P_{20}, ist der Wert, der eine geornete Menge im Verhältnis 20 zu 80 teilt: 20% der Werte sind kleiner und 80% der Ergebnisse sind größer als P_{20}.

Bemerkungen:

- Der Median ist nicht zwangsläufig der Erwartungswert!
- Im Unterschied zum Erwartungswert ist der Median robust gegenüber Ausreißern!
- Der Median ist die 50%-Perzentile.

2.18.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gemessene Temperatur exakt gleich $\sqrt{2}\,°\mathrm{C}$ ist?

$$P(\{\sqrt{2}\,°\mathrm{C}\}) = 0\,.$$

Für eine solche stetige [continuous] Zufallsgröße ergibt es also keinen Sinn, von der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Werte auszugehen. Viele - aber nicht alle - nicht-diskreten Zufallsvariablen sind in dem Sinne stetig, dass man eine Wahrscheinlichkeitsdichte [probability density] $x \mapsto p(x)$ angeben kann und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis $a \leq x \leq b$ eintritt ist das folgende Integral 2.2

$$P(\{a \leq x \leq b\}) = \int\limits_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Eine stetige Zufallsvariable X über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) ist also definiert durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte p, wobei p folgende Bedingungen erfüllt:

Wahrscheinlichkeitdichte einer stetigen Zufallsgröpe — Def. 3

Gegeben sei eine reelle Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt

- p ist nichtnegativ, also $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- p ist integrierbar,
- p ist normiert in dem Sinne, dass
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Bemerkungen:

- Die Fläche unter der Kurve der Wahrscheinlichkeitsdichte muss also eins ergeben - alles andere widerspricht dem zweiten Axiom von Kolmogorow. 2.17
- Die Wahrscheinlichkeitsdichte p darf keine negativen Werte annehmen, sie darf aber Werte über 1 annehmen, wenn denn die Fläche unter ihr gleich 1 bleibt.
- Den Plot der Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsvariable sollte man nicht mit dem Histogramm einer diskreten Zufallsvariable verwechseln!
- Zu den stetigen Zufallsvariablen, die in der Praxis vorkommen, gibt es jeweils eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

Vorausgesetzt wir kennen die Wahrscheinlichkeitsdichte einer stetigen Zufallsgröße, dann lassen sich Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse berechnen:

Wahrscheinlichkeiten berechnen — Bsp 4

- Die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment ein Ergebnis X mit $13 \leq X \leq 50$ liefert, ist:
$$P\left(\{13 \leq X \leq 50\}\right) = \int\limits_{13}^{50} p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass $x = 32$ eintritt ist
$$P\left(\{X = 32\}\right) = \int\limits_{23}^{23} p(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$
- Die Wahrscheinlichkeit, irgendein ein $x \in (-\infty, \infty)$ zu treffen, muss sein:
$$P\left(\{-\infty < X < \infty\}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Wenn die Zufallsvariable X eine Wahrscheinlichkeitsdichte $x \mapsto p(x)$ hat, definiert man entsprechend wie bei einer diskreten Zufallsvariable den Erwartungswert, indem man den gesammten Ereignisraum abläuft:

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvaribale — Def. 4

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot x \, \mathrm{d}x$$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert ist die x-Koordinate des Schwerpunkts der Fläche unter der Kurve der Wahrscheinlichkeitsdichte.
- In der Praxis ist das uneigentliche Integral meist unproblematisch. Theoretisch kann es aber passieren, dass der Wert $p(x)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte für $x \to \pm\infty$ nicht schnell genug abfällt, obwohl sie schon recht schnell fällt, weil die Fläche unter dieser Kurve 1 sein muss. 2.2

Neben dem Erwartungswert gibt es noch weitere gängige Kennzahlen für Wahrscheinlichkeitsverteilungen stetiger Zufallsvariablen:

- der Median [median] ist derjenige x-Wert, der die Fläche unter der Kurve in zwei gleich große Hälften teilt. Mit 50% Wahrscheinlichkeit tritt also ein kleinerer Wert auf und ebenfalls mit 50% Wahrscheinlichkeit tritt ein größerer Wert auf.
- eine Perzentile [percentile], zum Beipsiel ist das 20%-Perzentil P_{20} der x-Wert, der die Wertemenge in dem Verhältnis 20 zu 80 teilt: 20% der Ergebnisse sind kleiner und 80% der Ergebnisse sind größer als P_{20}.

Bemerkungen:

- Der Median ist nicht zwangsläufig der Erwartungswert!
- Der Median ist die 50%-Perzentile.
- Das Perzentile P_{20} kann man auch $0,2$-Quantil nennen. Perzentilen gibt es nur für ganzzahlige Prozentzahlen, Quantilen dagegen für alle Wahrscheinlichkeitswerte zwischen 0 und 1.
- Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte mittendrin auf null abfällt, ist diese simple Definition der Perzentilen/Quantilen gegebenfalls nicht eindeutig.

Zufallsvariablen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.18 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Median und Perzentile — Aufg. 1

Es werden 20 Probanden gebeten, den Geschmack einer neuen Eissorte auf einer Skala von 1 (hervorragend) bis 5 (scheußlich) zu bewerten. Der Test erbringt die folgenden Daten:

1	2	3	4	5
5	6	2	1	6

Bestimmen Sie den Median und den Abstand zwischen dem 25%-Perzentil und dem 75%-Perzentil.

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable — Aufg. 2

Gegeben seien drei Glühlampen mit paarweise unabhängigen Asfallwahrscheinlichkeiten $0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1$ einmal in Reihe und einmal parallel geschaltet. Wir betrachten die folgenden Ereignisse

A_i: Die i-te Glühlampe brennt durch.

B: Der Stromkreis wird unterbrochen.

(a) Beschreiben Sie das Ereignis B mit Hilfe der Ereignisse A_i für beide Schaltungen.

(b) Beschreiben Sie $P(B)$ für beide Schaltungen.

(c) Welche Bedeutung haben die Ereignisse $A_1 \cup A_2$ und $A_2 \cup A_3$?.

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable — Aufg. 3

Ein gezinkter Würfel wird geworfen und es wird jeweils die Augenzahl festgestellt. Mittels langer Serien ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\{x_i\})$	$0,25$	$0,35$	$0,18$	$0,15$	$0,05$	$0,02$

(a) Bestätigen Sie, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben ist.

(b) Tim und Tom machen aus dem Zufallsexperiment ein Glücksspiel: Tim gewinnt 10€, falls eine ungerade Augenzahl gewürfelt wird, andernfalls gewinnt Tom 10€. Ist das Spiel fair?

Erwartungswert und Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen — Aufg. 4

Berechnen Sie für folgende Zufallsvariablen jeweils die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert.

(a) Diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsverteilung

x_i	-2	-1	1	2	sonst
$P(\{x_i\})$	$1/8$	$3/8$	$1/4$	$1/4$	0

(b) Stetige Zufallsvariable mit der Dichte $p : x \mapsto ax^2(1-x)$

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable — Aufg. 5

(a) Eine Firma stellt Solarzellen her, von denen 2% Ausschuss sind. Bei welcher Anzahl an produzierten Solarzellen, ist mit 90%-iger Sicherheit mindestens eine dabei, die defekt ist?

(b) Ein Butterbrot fällt in 60% aller Fälle auf die geschmierte Seite. Wieviele von drei Broten fallen erwartungsgemäß auf die belegte Seite?

2.19 Varianz und Standardabweichung

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen

Sie lernen...

- die Beschreibungsmerkmale "Varianz" und "Standardabweichung" kennen
- Beschreibungsmerkmale von diskreten Zufallsvariablen zu berechnen
- Beschreibungsmerkmale von stetigen Zufallsvariablen zu berechnen
- die wichtigsten Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen kennen Moodle-Theorie

Sie können bereits...

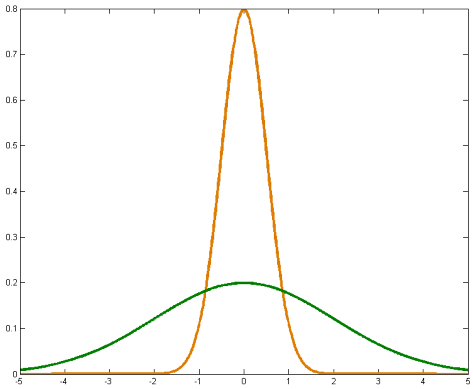
- Erwartungswerte berechnen 2.18

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

2.19.1 Varianz und Standardabweichung

Der Erwartungswert $E[X]$ einer Zufallsvariablen X sagt nur etwas über den Schwerpunkt der Verteilung aus, aber nichts über ihre Breite: 2.18

Höhe und Breite Bsp 1



Der Erwartungswert der zwei gezeigten Verteilungen unterscheidet sich nicht, aber die "Breite" der Verteilungen ist unterschiedllich.

Um die Unterschide in der Breite der Verteilung beschreiben zu können, brauchen wir ein Maß für die mittlere Streuung oder Abweichung vom Erwartungswert. Die üblichen Kennzahlen sind

- die Varianz [variance] σ^2 und
- die Standardabweichung [standard deviation] σ.

Varianz und Standardabweichung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung Def. 1

- Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert $E[X]$ einer stetigen Zufallsgröße:
$$\sigma^2 := E\Big[\,(X - E[X])^2\,\Big] \overset{(*)}{=} E[X^2] - (E[X])^2\ .$$
- Die Standardabweichung ist die Wurzel der Varianz:
$$\sigma := \sqrt{E\Big[\,(X - E[X])^2\,\Big]}\ .$$

Bemerkungen:

- Anstatt der Varianz, könnte man zur Messung der Breite auch $E[|X - E[X]|]$ nehmen, aber das ist wegen der Betragsfunktion umständlich handzuhaben.
- Es gibt pathologische Fälle, in denen dieser Erwartungswert unendlich wird und damit die Varianz nicht existiert.

- Man definiert die Varianz im Namen mit der Potenz zwei definiert, weil man für die Standardabweichung die Wurzel ziehen muss.
- Die Standardabweichung nennt man auch die Varianz der Grundgesamtheit.
- Die Standardabweichung hat dieselbe Einheit wie die Zufallsgröße und ist damit sinnfälliger als die Varianz.

Durch Ausmultiplizieren lässt sich die Varianz noch etwas geschickter berechnen: !!!

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\Big[(X-E[X])^2\Big] = E\Big[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2\Big] \overset{(*)}{=} E[X^2] - 2\cdot E[X]\cdot E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2\,, \quad (*)\end{aligned}$$

wobei in $(*)$ jeweils die Linearität des Integrals benutzt worden ist.

Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße Bsp 2

Wir betrachten die diskrete Zufallsgröße X, die jede natürliche Zahl zwischen 1 und 6 mit $P(\{n\}) = \frac{1}{6}, n = 1,2,3,4,5,6$ (idealer Würfel):

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[X^2] - (E[X])^2 = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} - \\ &\quad -\left(1\cdot\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{22}{12}\,, \\ \Rightarrow \sigma &= \sqrt{\frac{22}{12}} \approx 1,7\,.\end{aligned}$$

X ist im Mittel $3,5$ und schwankt mit $1,7$.

Standardabweichung einer stetigen Zufallsgröße Bsp 3

Wir betrachten die stetige Zufallsgröße X, die jede Zahl zwischen 1 und 6 mit derselben Wahrscheinlichkeit annimt. X ist also eine gleichverteilte Zufallsgröße mit $p : x \mapsto \frac{1}{5}$.

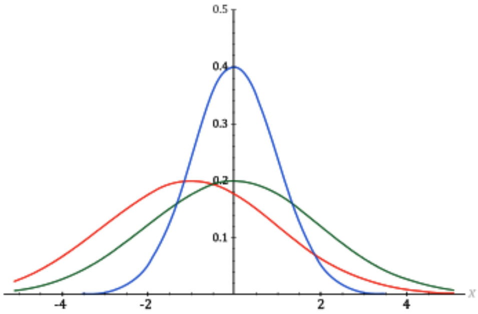
$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[X^2] - (E[X])^2 = \int_1^6 \frac{1}{5}\cdot x^2\,\mathrm{d}x - \left(\int_1^5 \frac{1}{5}\cdot x\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left[\frac{1}{15}x^3\right]_1^6 - \left(\left[\frac{1}{10}x^2\right]_1^6\right)^2 \\ &= \frac{2}{12}\,, \\ \Rightarrow \sigma &= \sqrt{\frac{2}{12}} \approx 1,4\,.\end{aligned}$$

X ist im Mittel $3,5$ und schwankt mit $1,4$.

2.19.2 Normalverteilung

Selbst wenn der Erwartungswert $\mu = E[X]$ und die Varianz $\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$ einer Zufallsvariablen X bekannt sind, gibt es viele Möglichkeiten für die Verteilung der Zufallsvariable X. Es gibt allerdings eine Verteilung, die allein durch diese beiden Werte eindeutig festgelegt ist und die in der Praxis enorm wichtig ist: die sogenante Normalverteilung [normal distribution]:

Normalverteilung Def. 2



Eine Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, die gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

verteilt ist, nennt man normalverteilte Zufallsgröße.

Normalverteilungen kommen in der Natur quasi immer vor und eine theoretische Begründung dafür liefert der zentrale Grenzwertsatz [central limit theorem].
Bemerkungen:

- Die Standardnormalverteilung ist eine Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.
- Die Konstante vor der Exponentialfunktion ist eine Normierungskonstante.
- Bei der Normalverteilung liegen etwa 68% der Werte innerhalb der Standardabweichung (ausgehend vom Erwartungswert).

Aufgabe

Erwartungswert und Varianz Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.19 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Varianz — Aufg. 1

Warum betrachtet man zur Definition der Varianz nicht $E[X - E[X]]$?

Beschreibende Statistik — Aufg. 2

Bei einem zehnmaligen Wurf mit einem Würfel ergaben sich folgende Augenzahlen:

$$1, 2, 4, 6, 3, 6, 4, 4, 3, 5\,.$$

(a) Bestimmen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten der Augenzahlen aufgrund des Experiments.

(b) Erstellen Sie ein Stabdiagramm der relativen Häufigkeiten.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und zeichnen Sie diese.

(d) Erstellen Sie einen Box-Plot.

(e) Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung.

Diskrete Zufallsvariablen — Aufg. 3

Berechnen Sie für die diskrete Wahrscheinlichkeitsdichten Erwartungswert und Varianz.

$$(a)\; x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n}\,, & x \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (b)\; x \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (-p)^{n-k}\,, & x = k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(c)\; p : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}\,, & x = k \in \mathbb{N}_0 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

Stetige Zufallsvariablen — Aufg. 4

Skizieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

$$(a)\, p : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (b)\, p : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (c)\, p : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Varianz einer Summe — Aufg. 5

Eine Firma stellt Platten her, die in der Höhe um einen Sollwert μ schwanken. Die Stardabweichung beträgt unabhängig vom Sollwert σ. Es werden jeweils 10 Platten auf einen Stapel gelegt und zwar auf zwei unterschiedliche Weisen:

(1) gleich dicke Platten werden aufeinandergestapelt,

(2) Platten mit unterschiedlicher Höhe.

Bestimmmen Sie für die Varianten (1) und (2) jeweils den Erwartungswert für die Stapelhöhe. **Hinweis:** Überlegen Sie sich zu erst, wie die jeweilige Zufallsgröße zur Beschreibung der Stapelhöhe lautet.

Buffons Nadel

Aufg. 6

Unser Zufallsexperiment sei folgendes: wir lassen eine Nadel der Länge L auf ein liniertes Blatt mit Linienabstand a fallen. Die Zufallsvariable sei die Richtung der Nadel, gemessen als Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$. Keine Richtung soll bevorzugt angenommen werden, damit handelt es sich um eine stetige Gleichverteilung von α mit

$$p : \alpha \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0\,, \\ \dfrac{1}{2\pi}\,, & 0 \leq x < \pi\,, \\ 0\,, & 2\pi \leq x\,. \end{cases}$$

Wie viele Linien wird die Nadel im Mittel schneiden? Hinweis: berechnen Sie den Erwartungswert der Schnitthäufigkeit $s = L|\sin(\alpha)|/a$.

2.20 Grundlagen der Statistik

Übersicht über Lernziele und Voraussetzungen	
Sie lernen...	
• wie man den Erwartungswert einer Zufallsvariable anhand einer Stichprobe schätzt	
• wie man den Fehler der Schätzung des Erwartungswert quantifizieren kann	
• wie man die Varianz einer Zufallsvariable anhand einer Stichprobe schätzt	
Sie können bereits...	
• Varianzen berechnen	2.19
• Erwartungswerte berechnen	2.18

Die Übungsaufgaben zum Thema finden Sie hier.

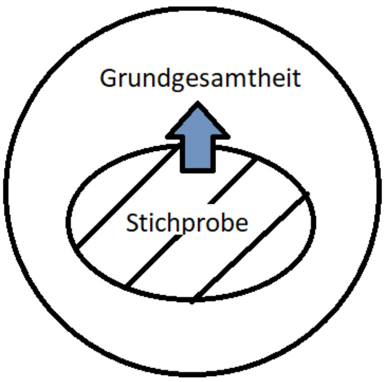
2.20.1 Aufgabenstellung

Nun kommen wir von der Stochastik (Wahrscheinlichkeitslehre) zu elementaren Ideen der mathematischen Statistik. Und die lautet: gewinne Kennzahlen aus gegebenen Messreihen. Die Messreihen sind die Ergebnisse von durchgeführten Zufallsexperimenten. Man nennt diese Experimente die Stichproben [samples]. Unsere Aufgabe ist es mit Hilfe der Stichproben

- Wahrscheinlichkeiten von konkreten Ereignissen, oder
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen der zugrundeliegenden Zufallsvariable in der Grundgesamtheit [population]

systematisch zu bestimmen bzw zu schätzen.

Abbildung 2.6: Statistik



2.20.2 Schätzung des Erwartungswerts

Eine Idee ist den Erwartungswert einer Zufallsvariable X zu bestimmen. Man macht N Messungen und erhält dabei die Ergebnisse $x_1, \cdots, x_N$. Eine sinnvolle Schätzung für den Erwartungswert $\mu = E[X]$ der Zufallsvariable X, also der Mittelwert der Gesamtheit aller möglichen Ergebnisse (die einem nicht zur Verfügung steht), ist der Mittelwert $\overline{x}$ aller vorliegenden Stichproben [sample mean]: 2.18

Schätzung des Erwartungswerts Def. 1

Bei N Messungen der Zufallsgröße X, dann ist

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N}$$

eine Schätzung des Erwartungswerts $E[X]$ der Zufallsgröße X.

Diese Schätzung ist sinnvoll, denn es läßt sich zeigen, dass die Zufallsgröße $\overline{x}$ den Mittelwert μ besitzt : $\overline{x} \to \mu$ für $N \to \infty$. Aufgabe

Gesetz der großen Zahlen Regel 1

Gegeben seien Zufallsvariablen x_i mit einer Verteilung F mit Mittelwert μ und Varianz σ^2. Definiere

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$P(-\varepsilon \leq \overline{x}_n - \mu \leq \varepsilon) \to 1 \text{ für } n \to \infty \,.$$

Wie jede Schätzung ist auch diese Schätzung sinnlos, wenn man keine Idee hat, wie groß der Fehler ist: Wie weit ist also der Mittelwert $\overline{x}$ von N Versuchen typischerweise vom Erwartungswert $E[X]$ entfernt? Analysieren wir konkret den mittleren quadratischen Fehler des Schätzung für den Fall $N = 2$ - wobei wir annehmen dass die beiden Messungen unabhängig voneinander sind: Aufgabe

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2} - \mu\right)^2\right] &= E\left[\left(\frac{x_1-\mu+x_2-\mu}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}E\left[(x_1-\mu)^2 + +2(x_1-\mu)(x_2-\mu) + (x_2-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\underbrace{E\left[(x_1-\mu)^2\right]}_{=\sigma^2} + \frac{1}{2}\underbrace{E\left[(x_1-\mu)(x_2-\mu)\right]}_{=0} + \frac{1}{4}\underbrace{E\left[(x_2-\mu)^2\right]}_{=\sigma^2} \\
&= \frac{1}{2}\sigma^2 \,.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt in entsprechender Weise für N Messungen: die Varianz des Mittelwerts ist dann die Varianz σ^2 des einzelnen Messwerts geteilt durch N:

Fehler der Schätzung des Erwartungswerts Regel 2

Bei N Messungen der Zufallsgröße X gilt

$$E\left[(\overline{x}-\mu)^2\right] = \frac{1}{N}\sigma^2 \,.$$

Die Standardabweichung des Mittelwerts von N Werten verringert sich also um den Faktor $1/\sqrt{N}$. Mittelwertbildung ist also ein aufwendiges Verfahren, um die Genauigkeit einer stark fluktuierenden Messung deutlich zu verbessern: Um zwei Stellen Genauigkeit zu gewinnen, muss man also 10000 Messungen mehr machen!

2.20.3 Schätzung der Varianz

Stellen wir uns die Aufgabe die Varianz einer Zufallsvariablen X mit Hilfe von N Messungen zu schätzen. Die N Messungen liefern die Ergebnisse $x_1, \cdots, x_N$. Eine sinnvolle Schätzung für die Varianz $\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$ der Zufallsvariable X könnte (könnte!) die " unkorrigierte Stichprobenvarianz" sein: 2.19 MA2-19

$$\frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \cdots + (x_N-\overline{x})^2}{N} \quad \text{mit} \quad \overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N} \,.$$

Je mehr Versuche man macht ($N = 1000, 100000, \cdots$), stimmt dies im Grenzwert[18] Aber der Mittelwert $\overline{x}$ ist nicht der Erwartungswert $\mu = E[X]$, sondern der Schwerpunkt der Stichprobe. Das führt dazu, dass die unkorrigierte Stichprobenvarianz von N Messungen immer etwas zu klein ist. Unter der Annahme, dass die Abweichungen der einzelnen Messungen unabhängig von einander sind, läßt sich der Fehlerfaktor zu $\frac{N-1}{N} < 1$ berechnen. Schauen wir uns den Fall $N = 2$ an, um das zu zeigen: Aufgabe

[18] Man wende das Gesetz der großen Zahlen für den Erwartungswert vom Quadrat von $(X - E[X])^2$ an.

$$
\begin{aligned}
E\Big[\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2}{2}\Big] &= \frac{1}{2}E\Big[\Big(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\Big)^2+\Big(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\Big)^2\Big] \\
&= \frac{1}{2}E\Big[\Big(\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\Big)^2+\Big(\frac{x_1}{2}-\frac{x_1}{2}\Big)^2\Big] = \frac{1}{4}E\Big[(x_1-x_2)^2\Big] \\
&= \frac{1}{4}E\Big[x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\Big] = \frac{1}{4}\Big(E\Big[x_1^2\Big]-2E\Big[x_1x_2\Big]+E\Big[x_2^2\Big]\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(E\Big[X^2\Big]-2E\Big[X\Big]\cdot E\Big[X\Big]+E\Big[X^2\Big]\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(E\Big[X^2\Big]-\Big(E\Big[X\Big]\Big)^2\Big) = \frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}
$$

Daher definiert man die (korrigierte) Stichprobenvarianz [sample variance] und die (korrigierte) Standardabweichung der Stichprobe wie folgt:

Schätzung der Stichprobenvarianz und der Standardabweichung Regel 3

$$
\begin{aligned}
s^2 &:= \frac{N}{N-1}\frac{(x_1+\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2}{N} = \frac{(x_1+\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2}{N-1}, \\
s &:= \sqrt{\frac{(x_1+\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_N-\overline{x})^2}{N-1}}.
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert ist übrigens dann nicht unbedingt die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit.
- Streng genommen muss man noch untersuchen, wie präzise diese Schätzung der Standardabweichung ist – wie groß also sozusagen der Fehler der Schätzung des Fehlers ist.
- Mittelwert und Standardweichung der Stichprobe sind empfindlich gegenüber Ausreißern [outliers]. Eigentlich sind Perzentilen sinnvoller, da deren Berechnung robuster [robust statstics] ist. Aufgabe

Grundlagen der Statistik und Anwendungen Aufgaben

Erklärungen und Beispiele, die zur Bearbeitung der Aufgaben hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.20 und, falls Sie nicht weiterkommen, dann schauen Sie hier.

Erwartungstreue von Schätzfunktionen — Aufg. 1

(a) Es seien X und Y Zufallsvariablen, die nicht unabhängig sind. Es gelte $E[XY] = \mu$, $10 < E[X] < \infty$ und $10 < E[X] < \infty$. Ist die Schätzfunktion

$$\hat{\mu} = \left(X - \frac{1}{n}\right)\left(Y - \frac{1}{n}\right)$$

erwartungstreu für μ?

(b) Das gewichtete arithmetische Mittel ist gegeben durch $\mu_g = \sum_{i=1}^{n} \omega_i X_i$. Die Größen ω_i sind die Gewichte. Es gelte $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$. Ist μ_g eine erwartungstreue Schätzfunktion für das Mittel μ der Grundgesamtheit?

Schätzung von Erwartungswert und Varianz einer Stichprobe — Aufg. 2

Eine Stichprobe hat die Zahlen

$$(2.43, 2.37, 2.06, 2.71, 2.49, 1.91)$$

Schätzen Sie den Erwartungswert der Stichprobe (Stichprobenmittel) und die Stichprobenvarianz, die Varianz des Stichprobenmittels und die Standardabweichung des Stichprobenmittels.

Anwendung: Schätzung der Erwartungswerts — Aufg. 3

Betrachten Sie ein Einheitsquadrat $Q = \{(x, y)|0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$ und den Einheitskreis $K = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$. Approximieren Sie mit Hilfe einer Monte-Carlo-Integration den Wert des Integrals

$$\int_Q \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)} \chi_K \, \mathrm{d}A \, .$$

Anwendung: Binomialverteilung — Aufg. 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein AKW einen Supergau erlebt, ist nach Berechnungen der Reaktorsicherheitskommission 1 Mal in 10000 Jahren. Es werde angenommen, dass ein Supergau jederzeit passieren kann (zum Beispiel in Folge einer Naturkatastrophe) und damit liegt eine Gleichverteilung vor. Es laufen weltweit 400 Atomreaktoren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 25 Jahren mindestens eines dieser AKWs einen Supergau hat?

Anwendung: Minimierung der Varianz — Aufg. 5

(a) Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $g : x \mapsto a$ so, dass gilt

$$\langle (Y - g(X))^2 \rangle \to \text{Minimum}$$

(b) Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $g : x \mapsto a - bx$ so, dass gilt

$$\langle (Y - g(X))^2 \rangle \to \text{Minimum}$$

.1 Symbole

Tabelle 1: Symbole

Symbol	Bedeutung	Beispiel
$\{\ldots\}$	Mengenklammern	Die natürlichen Zahlen sind $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
$a \in A$	a ist ein Element der Menge A	$3 \in \{-1, \frac{3}{1}, *\}$
$b \notin B$	b ist kein Element der Menge B	$3 \in (-\infty, \infty) \setminus \{3\}$
$\|A\|$	Mächtigkeit der Menge A, also die Anzahl der Elemente der Menge A	$A = \{0\} \Rightarrow \|A\| = 1$
$A = \emptyset$	A ist die leere Menge, also $\|A\| = 0$	$\emptyset = \{\},\ \{0\} \neq \emptyset$
$\|A\| = \infty$	A hat unendlich viele Elemente	$A = [3, \infty) \Rightarrow \|A\| = \infty,\ \|\mathbb{R}\| = \infty$
$A = B$	A und B sind identische Mengen	$\{n \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot m,\ m \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$
$A \subset B$	A ist eine Teilmenge der Menge B, es kann auch $A = B$ gelten	$\{n \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot m,\ m \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{N}_0$
$A \subsetneq B$	A ist eine echte Teilmenge der Menge B	$\{1\} \subsetneq \mathbb{N}$
$C = A \cup B$	C ist die Vereinigung der Mengen A und B	$\{-1, 2\} \cup \{-1, 3\} = \{-1, 2, 3\}$
$C = A \cap B$	C ist die Schnittmenge der Mengen A und B	$\{-1, 2\} \cap \{-1, 3\} = \{-1\}$
$C = A \setminus B$	C ist die Differenzmenge "A ohne B".	$\{-1, 2\} \setminus \{-1, 3\} = \{2\}$
$C = \overline{A}$	C ist das Komplement von A und einer nicht explizit genannten Obermenge	$A = \{1, 3\} \Rightarrow \overline{A} = \mathbb{N}_0 \setminus A$
$p_1 \Rightarrow p_2$	Aus p_1 folgt p_2	$x = -1 \Rightarrow x \leq 0$
$p_1 \Leftarrow p_2$	Aus p_2 folgt p_1	$x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{Q} \Leftarrow x = \pi$
$\Rightarrow$	p_1 ist genau dann wahr, wenn p_2 wahr ist	x ist eine gerade Zahl $\Leftrightarrow x \mod 2 = 0$
$\forall\, x \in A : \ldots$	Für alle Elemente x der Menge A gilt ...	$A = (-\infty, 0)$ es gilt: $\forall\, x \in A : x \leq 10$
$p_1 \wedge p_2$	p_1 ist wahr und p_2 ist wahr	$x > 0 \wedge x \leq 10 \ \Leftrightarrow x \in (0, 10]$
$p_1 \vee p_2$	p_1 ist wahr oder p_2 ist wahr oder beide	$x > 0 \vee x \leq 10 \ \Leftrightarrow x \in (-\infty, \infty)$
$p_1 \veebar p_2$	entweder ist p_1 wahr oder p_2	$x > 0 \vee x \veebar 10 \ \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup (10, \infty)$
$\neg p$	der Wahrheitswert von p wird negiert	$\neq (x > 0 \vee x \veebar 10) \ \Leftrightarrow x \in \overline{(-\infty, 0] \cup (10, \infty)} = (0, 10]$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$
$\mathbb{N}^+$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$ Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null	$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
$\mathbb{N}_0$	explizite hervorgehoben, dass $0 \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\forall\, n \in \mathbb{N}_0 :\ -n \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	Menge der ganzrationalen Zahlen	$\forall\, n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} :\ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen (irrationalen) Zahlen	$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	$3 + 4i \in \mathbb{Z}$
$\|x\|$	Betrag einer Zahl	$\|x\| = -x$ für $x < 0$ und $\|x\| = x$ für $x \geq 0$
$\operatorname{Im} z$	Imaginärteil einer komplexen Zahl	$\operatorname{Im}(3 + 4i) = 4$
$\operatorname{Re} z$	Realteil einer komplexen Zahl	$\operatorname{Re}(3 + 4i) = 3$
$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$	abgeschlossenes Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}$	$x \in [-2, 2] \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$
$I = (a, b) \subset \mathbb{R}$	offenes Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\}$	$x \in (-2, 2) \Leftrightarrow -2 < x < 2$
$p_1 \Leftrightarrow p_2$	Man kommt von p_1 zu p_2 durch Äquivalenzumformungen	$x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$
$x < y$	x ist kleiner als y	$-3 < -2$

$x > y$	x ist größer als y	$3 > 2$
$x \leq y$	x ist kleiner oder gleich y	$-3 \leq -2$
$x \geq y$	x ist größer oder gleich y	$3 \geq 2$
$(x+y)^2$	Quadrieren (allgemein Potenzieren) $(x+y)^2 = (x+y) \cdot (x+y)$	
$\sin(x)$	Sinus der Zahl x (trigonometrische Funktionen)	$\sin(0) = 0$
∞	Symbol für Unendlich	$\lvert\mathbb{R}\rvert = \infty$
$p_1 \wedge p_2$	p_1 oder p_2 gilt	$x \geq 0 \wedge x \leq 0 \Rightarrow x \in \{0\}$
$f : D \to W$	Eine Funktion bildet den Definitionsbereich D auf den Bildbereich W ab	$f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$
$y := f(x)$	y bezeichnet definitionsgemäß den Wert von f an der Stelle x	$f : x \mapsto x^2 \Rightarrow f(3) = 9$
$f : x \mapsto y$	Eine Funktion f ordnet ein x einem y zu	Identische Abbildung $f : x \mapsto x \Rightarrow f(3) = 3$
$A \times B$	Kartesisches Produkt der Mengen A und B	$\{1\} \times \{0\} = \{(1,0)\} \neq \{(0,1)\}$
(a,b)	geordneter Punkt oder Tupel (entsprechend Tripel, Quadrupel...)	$\{x \in D_f : (x, f(x)) \in D_f \times W_f\}$ sind der Graph der Funktion f
$\mathbb{R}^2$	Euklidische Ebene	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ zuerst x dann y
$\mathbb{R}^3$	Euklidischer Raum	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ zuerst x dann y dann z
f^{-1}	Umkehrfunktion von f	$f : x \mapsto x^3 \Rightarrow f^{-1} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$
x^n	n-te Potenz von x, x wird n mal mit sich selbst multipliziert	$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
x^{-n}	$\frac{1}{x^n}$ negative, ganzzahlige Potenzen	$x^{-4} = x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1}$
$\sqrt[n]{x}$	$x^{\frac{1}{n}}$ n-te Wurzel von x	$\sqrt[3]{x^{-5}} = x^{-\frac{3}{5}}$
$p_1 \approx p_2$	p_1 ist eine Approximation von p_2	$\frac{1}{3} \approx 0,3333333$
$\lim\limits_{x \to \infty} f$	horizontale Asymptote (für x gegen Unendlich)	$f : x \mapsto x^3 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$
$p_1 \overset{!}{=} p_2$	p_1 soll gleich p_2 sein$^{(*)}$[19]	$x - 1 \overset{!}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$
f'	erste Ableitung von f (entsprechend f'', f''')	$f : x \mapsto x^3 + 3 \Rightarrow f' = 3x^2$
$f^{(n)}$	n-te Ableitung von f	$f : x \mapsto x^4 + 2x^2 + (x-2)^2 \Rightarrow f^{(4)} = 1$
$(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$	Zahlenfolge, k ist der Laufindex	$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\} \Rightarrow x_k = \frac{1}{k}$
e	die Eulersche Zahl	$e \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für große $n \in \mathbb{N}^+$
$n!$	Fakultät	$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient	$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10$
$\ln := \log_e$	Logarithmus zur Basis e, der natürliche Logarithmus	$\ln(e) = 1$
$\lg := \log_{10}$	Logarithmus zur Basis 10	$\lg\left(10^3\right) = 3$
$\mathrm{lb} := \log_2$	Logarithmus zur Basis 2	$2^x = 8 \Leftrightarrow x = \mathrm{lb}(8) = 3$
k	Bolzman-Konstante	$k = 1,380649 \cdot 10^{-23} \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right]$
$\boldsymbol{x}(t)$	Raumkurve eines Teilchens	Die sich verändernde Position eines Balls, der geworfen worden ist
$\boldsymbol{v}(t) := \dot{\boldsymbol{x}}(t)$	Geschwindigkeit eines Teilchens	Die sich verändernde Geschwindigkeit des Balls
$\boldsymbol{a}(t) := \dot{\boldsymbol{v}}(t)$	Beschleunigung eines Teilchens	Die sich verändernde Beschleunigung des Balls (Erdbeschleunigung)

[19](∗) Schreibweise wird oft benutzt, wenn ein Parameter so zu bestimmen ist, dass das Gleichheitszeichen gilt!

U, I, R	Spannung in Volt $[V]$, Stromstärke in Ampère $[A]$, Widerstand in Ohm $[\Omega]$	Ohm'sches Gesetz: $U = R \cdot I$
T	Temperatur	Bei einer Temperatur von $100°$ Celcius kocht Wasser.
t	Zeit	meist die Zeitvariable, die die relative Zeit bei einem Experiment misst
$A \setminus \{x = a\}$	Differenzmenge	Es sei $\sin(x) = 0$ und $A = \mathbb{R}$, dann ist $A \setminus \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$f \circ g$	Verkettung, Komposition der Funktionen f und g	$x \mapsto \sin(x^2) = f \circ g$ mit $g : x \mapsto x^2$ und $f : x \mapsto \sin(x)$ - erst g dann f
f^n	n-malige Verkettung der Funktion f mit sich selbst	$f : x \mapsto x^2 \Rightarrow f^3 : x \mapsto \left(x^2\right)^3$
f^{-1}	Umkehrfunktion von f	$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f : x \mapsto x$ die identische Abbildung $\Rightarrow$ Graph von f^{-1} ist Spiegelung an der Winkelhalbierenden
$f^{(n)}$	n.te Ableitung der Funktion f	s.o.
sin	Verhältnis von Kathete zu Hypothenuse, es gilt $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\sin(0) = 0$
cos	Verhältnis von Ankathete zu Hypothenuse $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$	$\cos(0) = 1$
tan	Verhältnis von Kathete zu Ankathete, es gilt: $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow$ nicht definiert für $x : \cos(x) = 0$
π	Kreiszahl	Flächeninhalt des Einheitskreises ist $\pi \approx 3,1415 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
arcsin	" Umkehrfunktion" vom Sinus: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	Der Sinus ist auf $\mathbb{R}$ nicht bijektiv, aber beispielsweise auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	" Umkehrfunktion" vom Cosinus: $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$	Der Cosinus ist auf $\mathbb{R}$ nicht bijektiv, aber beispielsweise auf dem Intervall $[0, \pi]$
arctan	" Umkehrfunktion" vom Tangens $\arctan : (-\infty, \infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	Der Tangens ist auf $\mathbb{R}$ nicht bijektiv, aber beispielsweise auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\mathbb{C}$	Körper dre komplexen Zahlen	$3 + 4i \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R}^2$	Gaußsche Zahlenebene	$(3\|4) \in \mathbb{R}^2 \mathrel{\widehat{=}} 3 + 4i \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Im}(z)$	Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$	$\mathrm{Im}(3 + 4i) = 4 \in \mathbb{R}$
$\mathrm{Re}(z)$	Realteil von $z \in \mathbb{C}$	$\mathrm{Re}(3 + 4i) = 3 \in \mathbb{R}$
$\overline{z}$	Konjugiert komplexe Zahl	$z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$ Spiegelung an der x-Achse
$\|z\|$	Betrag einer komplexen Zahl	$\|z\| = \|x + yi\| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ ist immer positiv!!!
$\arg(z)$	Argument einer komplexen Zahl, Winkel	$\arg(i) = \frac{\pi}{2}$
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$	die komplexe Exponentialfunktion	Eine gedämpfte Schwingung hat die Form $e^{(-3+4i)x} = e^{3x} \cdot (\cos(4x) + i\sin(4x))$
$\boldsymbol{a}, \vec{a}, \underline{a}$	gängige Notationen für Vektoren	$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ Vorstellung: Pfeil von einem Raumpunkt zu einem anderen Raumpunkt
$\boldsymbol{a}^\intercal$	transponierter Vektor	$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 :\ \boldsymbol{a}^\intercal = (11, \pi, -1)^\intercal$
$\boldsymbol{F}$	Kraft in $[N]$	$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$ Die Newtonsche Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
$\boldsymbol{x}$	Bahnkurve $[m]$	$\boldsymbol{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ der Skalar Zeit wird auf einen Vektor abbildet
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeitsvektor $[\frac{m}{s}]$	$\boldsymbol{v} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ der Skalar Zeit wird auf einen Vektor abbildet
$\boldsymbol{a}$	Beschleunigungsvektor $[\frac{m}{s^2}]$	$\boldsymbol{a} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ der Skalar Zeit wird auf einen Vektor abbildet

$\mathbb{R}^2$	Ebene	erste Koordinate x, zweite Koordinate y: $(0,0)$ Ursprung
$\mathbb{R}^3$	Raum	erste Koordinate x, zweite Koordinate y, dritte Koordinate z: $(0,0,0)$ Ursprung
$\mathbb{R}^n$	n-maliges kartesisches Produkt des Körpers $\mathbb{R}$	$\boldsymbol{a}^\intercal = (1,-2,39,4)^\intercal \in \mathbb{R}^5$
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$	Länge des Vektors	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2+9^2+4^2} \geq 0$
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ steht senkrecht auf $\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} :\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$
$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a}$ ist parallel zu $\boldsymbol{b}$	in $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Kreuzprodukts zu überprüfen
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\perp + \boldsymbol{a}_\parallel$	eine eindeutige orthogonale Zerlegung eines Vektors	$(3,1)^\intercal = (3,0)^\intercal + (0,4)^\intercal$
$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$	Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$	bildet nach $\mathbb{R}$ ab! Eine alternative, häufig verwendete Bezeichung ist $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$	Kreuzprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$	$(1,2,3)^\intercal \times (1,0,0)^\intercal = (0,3,-2) \in \mathbb{R}^2$
$\mathbb{C}^n$	n-maliges kartesisches Produkt des Körpers $\mathbb{C}$	machen Sie sich bewußt, dass gilt $\mathbb{C}^2 \widehat{=} \mathbb{R}^4$
a, b, c	gängige Bezeichnungen der Seiten im Dreieck	–
A, B, C	gängige Bezeichnungen der Ecken eines Dreiecks	–
λ, ν, μ	gängige Bezeichnung für Parameter	$f : x \mapsto e^{\lambda x}$
α, β, γ	gängige Bezeichnung für Paramter	$\boldsymbol{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
m, n, k, l	gängige Bezeichnung für Laufindizees	$\sum_{k=1}^{n} x^k = x + x^2 + \cdots + x^n$
φ, ψ, ω	gängige Bezeichnung für Winkel	–
ε, δ, h	gängige Bezeichnungen für kleine, positive Zahlen	Das ist eine Konvention, an die sich alle halten. Aus dem Grund ist der Ausspruch ” sei $\varepsilon < 0$” für einen Mathematiker auch witzig.
$\Delta x := \lvert x_1 - x_2 \rvert$	gängige Bezeichnung den Abstand zweier Zahlen	$x_1 = a, x_2 = a + h \Rightarrow \Delta x = h$
x, y, z	gänge Bezeichnung für kartesische Koordinaten	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
r, φ	gänge Bezeichnung für Polarkoorinaten	$x = r\cos(\varphi) \wedge y = r\sin(\varphi,\ r \geq 0\ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$ gemäß `atan2`
r, φ, z	gänge Bezeichnung für Zylinderkoordinaten	$x = r\cos(\varphi) \wedge y = r\sin(\varphi) \wedge z = z$
$A^\intercal$	transponierte Matrix	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ \pi & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\intercal = \begin{pmatrix} 3 & \pi \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
A^2	zweite Potenz der Matrix A	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{1}$, I_n	Einheitsmatrix	$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
A^{-1}	inverse Matrix	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$	Lineares Gleichungssystem	Gegeben sind A und $\boldsymbol{b}$, gesucht $\boldsymbol{x}$

$\mathrm{im}(A)$	Das Bild umfasst alle Vektoren, die von der Matrix produziert werden können	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{im}(A) = LH\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\mathrm{rk}(A)$	Der Rang ist die Dimension des Bilds einer Matrix	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{im}(A) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{rk}(A) = 2$
$\ker(A)$	Der Kern umfasst alle Vektoren, die von der Matrix zu Null gemacht werden	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker(A) = LH\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$
$\mathrm{def}(A)$	Dimension des Kerns einer Matrix	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{def}(A)0$
$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $a_{ij}, i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m$	a_{ij} sind die Koeffizienten der Matrix, i Zeilenindex, j Spaltenindex	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{12} = 1$
$\det(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$	Determinante der Matrix	$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$
$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$	Spatprodukt	–
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Eine Zahlenfolge mit Laufindex $n \in \mathbb{N}$	$a_n = 2^n \Rightarrow \{1, 2, 4, 8, \cdots\}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$	Grenzwert der Zahlenfolge $(a_n)_n$	$a_n = 2^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
$a_n \to a$	Grenzwert der Zahlenfolge $(a_n)_n$ gegen a	$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow a_n \to e$
f', f'', f'''	erste, zweite und dritte Ableitung von f	$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2$
$U(x_0)$	gängige Bezeichnung für eine Umgebung um den Punkt x_0	–
$o(h)$	Landau Symbol	–

Tabelle 2: Symbole

Symbol	Bedeutung	Beispiel
lhs $\overset{!}{=}$ rhs	Das Symbol wird verwendet, um auszudrücken, dass Parameter so bestimmt werden sollen, dass die linke Seite (lhs) gleich der rechten Seite (rhs) ist	Bei einem Lösungsansatz, zum Beispiel bei einer Partialbruchzerlegung
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Vorzeichenbehafteter Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse für $x \in [a,b]$	$\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\,.$
$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\,\mathrm{d}x$	Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse für $x \in [a,b]$	$\int_{-1}^{1} \lvert x\rvert\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$	Das Symbol ist der Ableitungsoperator, also der Grenzwert des Differenzenquotient: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$f(x) = x^2 :\Rightarrow\ \forall x \in \mathbb{R}: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2\cdot x\,.$
f'	Gängige Bezeichung für die Funktion " erste Ableitung von f". Andere Notationen sind $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ oder auch $\dot{f}$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2\,x$
f''	Gängige Bezeichung für die Funktion " zweite Ableitung von f". Andere Notationen sind $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, $f^{(2)}$ oder $\ddot{f}$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2$
$\mathrm{d}x$	Das Symbol nennt man das Differential. Differentiale treten zur Formulierung von Ableitung und Integration auf und symbolisieren einen Grenzübergang bzgl der auftauchenden Variable.	
$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$	F nennt man die Stammfunktion zu f	$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \int x^2\,\mathrm{d}x$
$F' = f$	Die Eigenschaft der Stammfunktion ist folgende: leitet man F ab, so erhält man f	$F(x) = \frac{1}{3}\,x^3 + c$ ist Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ für alle $c \in \mathbb{R}$.
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$	uneigentliches Integral mit unbeschränkten Integrationsgrenzen oder unbeschränktem Integrand (müssen nicht existieren)	$\int\limits_{0}^{\infty} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \sin(b) - 1 \ \Rightarrow$ existiert nicht.
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$	Hauptsatz der Differential und Integralrechnung	$\int\limits_{-1}^{1} \lvert x\rvert\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_{0}^{1} = 1\,.$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$	partielle Ableitung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nach x_i	$f(x_1,x_2) = x_1^2 \cdot \sin(x_1 \cdot x_2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= 2\cdot x_1 \cdot \sin(x_1\cdot x_2) + x_1^2 \cdot (-\cos(x_1\cdot x_2))\cdot x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= x_1^2 \cdot (-\cos(x_1\cdot x_2))\cdot x_1 \end{cases}$

$\nabla f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$	Gradient der Funktion f ist ein Vektorfeld, der alle partiellen Ableitungen von f nach allen unabhängigen Variablen enhält. Der Gradient zeigt in Richtung des stärkestn Anstiegs von f.	$f(x,y) = x^2 \cdot \sin(x \cdot y) \Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \cdot \sin(x \cdot y) + x^2 \cdot (-\cos(x \cdot y)) \cdot y \\ x^2 \cdot (-\cos(x \cdot y)) \cdot x \end{pmatrix}$
$\mathrm{d}f$	totales Differential, die Ableitung einer Funktion $f : \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$	
$\\| \cdot \\|$	Betrag oder Norm eines Vektors	$\vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \Rightarrow \\|\vec{v}\\| = \sqrt{3}$
$\hat{v}$	Symbol für einen Einheitsvektor, Vektor mit Betrag eins	$\vec{v} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{v} = \frac{\vec{v}}{\\|\vec{v}\\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$
$\overline{\boldsymbol{v}}$	Vektor in $\mathbb{C}^n$ mit komplex konjugierten Einträgen: $v_i = x + iy \Rightarrow \overline{v}_i = x - iy$	
$\langle \cdot , \cdot \rangle$	Skalarprodukt	
$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$	Raum der auf $[a,b]$ stetigen Funktionen	
$\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$	Raum der auf $[a,b]$ integrierbaren Funktionen	
$\mathbb{V}$	abstrakter Vektorraum	
$\mathbb{U}$	abstrakter Untervektorraum	
$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}$	Bogenlänge	
h	gängige Bezeichung für die Schrittweite eines numerischen Verfahrens	
x_k, y_k	gängige Bezeichung für die Iterierten	
$\approx$	Symbol zum Ausdruck einer Approximation	
$\sum_{k=0}^{\infty}$	Symbol für eine (unendliche) Reihe, also den Grenzwert einer Partialsummenfolge von Zahlen oder Funktionen	
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$	Potenzreihe	
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k$	Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$	
$\lvert \cdot \rvert$	Absolutbetrag einer Zahl (Fallunterscheidung notwendig im Allgemeinen)	$\lvert -3 \rvert = 3$
$\lim$	Grenzwertsymbol	
$n!$	n Fakultät	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$
$r\, e^{i\,\varphi}$	Polardarstellung einer komplexen Zahl	
e	Eulersche Zahl	
p_n	Taylor-Polynom vom Grad n. Andere Notationen sind T_n oder $T_{f,x_0,n} \dots$	
$T_f(x, x_0)$	Taylor-Reihe mit Entwicklungsstelle x_0	

R_n	Taylor-Restformel	
ξ	gängige Bezeichung für eine Zwischenstelle in einem fixierten Intervall	
$\max \lvert f^{(n+1)}(\xi)\rvert$	Maximum des Betrags der $(n+1)$-ten Ableitung für alle ξ zwischen x_0 und x	
T	gängige Bezeichung für die kleinste Periode einer Funktion	$f(t) = \sin(10\,t) \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{5}$.
$\mathbb{V}$	abstrakter Vektorraum	$\mathbb{R}^n$ oder auch Raum aller Polynome vom Grad n $\mathcal{P}_n$
$\mathbb{K}$	abstraktes Symbol für einen Köper	$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
$\mathcal{P}_T$	Vektorraum der T-periodischen Funktionen	Für $T = 1$ sind alle Funktionen $s_n(t) = \sin(n\,t),\ n \in \mathbb{N}^+$ Elemente von $\mathcal{P}_1$
$a_k, b_k, k \in \mathbb{N}_0$	gängige Bezeichung für die reellen Fourier-Koeffizienten	
$c_k, k \in \mathbb{Z}$	gängige Bezeichung für komplexe Fourier-Koeffizienten	
$\hat{f}(\omega)$	Gängige Bezeichung für die Fourier-Transformierte einer Funktion f. Andere Notationen sind $\tilde{f}, \mathcal{F}(f)$	es gilt $\hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$
ω_0	Grund(kreis)frequenz eines periodischen Signals	$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T},\ f(t) = \sin(3\,t) \Rightarrow \omega_0 = 3$.
ω_k	Variable des diskreten Frequenzraums, i.e., ganzhalige Vielfache der Grundfrequenz (Frequenzen der Oberschwingungen)	$\omega_k = k \cdot \omega_0$
ω	Kreisfrequenz als kontinuierliche Variable des Frequenzraums	
$\hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}$	Fourier-Transformation einer Funktion f	
$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$	inverse Fourier-Transformation einer Funktion $\hat{f}$	
$\mathcal{L}(y)$	Gängige Bezeichungen für Laplace-Transformierte einer Funktion y. Andere Bezeichungen sind $Y(s)$ oder $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$	es gilt $Y(s) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} y(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$
$n!$	n-Fakultät	$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient	$\binom{4}{3} = \dfrac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4$
$\langle X\rangle, \overline{X}, E[X], E(X),$	gängie Bezeichungen für den Erwartungswert einer Zufallsgröße	
$\hat{X}$	gängie Bezeichungen für die Schätzung des Erwartungswert einer Zufallsgröße	
σ^2	gängie Bezeichung für die Varianz einer Zufallsgröße	
s^2, S^2	gängie Bezeichung für die Schätzung der Varianz einer Zufallsgröße	
$\sigma^2_{\hat{X}}$	gängie Bezeichung für die Varianz der Schätzung einer Zufallsgröße	
σ	gängie Bezeichung für die Standardabweichung einer Zufallsgröße	

$\mu^k = \langle (X-\mu)^k \rangle$	gängie Bezeichung für die zentralen Momente der Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ

Mengen und Aussagenlogik Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.1.

Mengen — Aufg. 1

Die Mengen lauten:

(a) $A = \{x : \ x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$

(b) $B = \{x;\ x$ ist ein Buchstabe aus dem Wort Leipzig$\} = \{$L, e, i, p, z, g$\}$

(c) $C = \{x : \ x^2 = 9 \wedge x^3 = 27\} = \{3\}$

(d) $D = \{x : \ x^2 = 9 \vee x - 3 = 6\} = \{9, -3, 3\}$

(e) $E = \{x : \ x^2 = 9 \wedge x - 3 = 6\} = \emptyset$

Mengenoperationen — Aufg. 2

Wie lässt sich anhand der beiden Mengen $\mathbb{M}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathbb{M}_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ zeigen, dass bei einer Differenzmenge $\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2$ die Mengen $\mathbb{M}_1$ und $\mathbb{M}_2$ im Allgemeinen nicht vertauscht werden können?

Lösung:

$$\mathbb{M}_1 \setminus \mathbb{M}_2 = \{1, 2, 3\} \neq \{7, 8, 9, 10\} = \mathbb{M}_2 \setminus \mathbb{M}_1 \,.$$

Aussagenlogik — Aufg. 3

Negieren Sie die folgenden Ausdrücke und vereinfachen Sie die Negation so weit wie möglich und entscheiden Sie, ob die negierte Aussage wahr oder falsch ist.

(a) Alle gut vorbereiteten Studierenden bestehen die Mathematikklausur.

(b) Es gibt eine reelle Zahl, die gerade und Teiler von 27 ist. (falsch)

(c) Alle Zahlen, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, sind durch 3 teilbar. (wahr)

Lösung: Wir wenden die Negation quantorisierter Aussagen an und es folgt:

(a) Es gibt einen gut vorbereiteten Studenten, der die Mathematikklausur nicht besteht.

(b) Alle reellen Zahlen sind ungerade oder nicht Teiler von 27. (wahr)

(c) Es gibt eine Zahl deren Quersumme durch 3, die selbst aber nicht nicht durch 3 teilbar ist. (falsch)

Mengen und Aussagenlogik — Aufg. 4

Seien A und M Mengen. Unter welchen Bedingungen an Elemente von A und M ist $A \not\subseteq M$ eine wahre Aussage?

Lösung:
Wir negieren die Definition für $A \subseteq M$ und erhalten:

$$A \not\subseteq M \,\widehat{=}\, \neg\,(A \subseteq M) \;\Rightarrow\; \neg\,(\forall x \in A : x \in M) \;\widehat{=}\; \exists x \in A : x \notin M \,.$$

In Worten: es gilt $A \subsetneq M$ genau dann, wenn es ein $x \in A$ gibt mit $x \notin M$.

Aussagenlogik — Aufg. 5

Negieren Sie die folgenden Aussagen! Schreiben Sie dabei die Aussagen und ihre Negationen auch mit Quantoren und geben Sie an, ob die Aussage oder ihre Negation wahr ist!

(a) Jede natürliche Zahl hat einen Vorgänger.

(b) Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.

(c) Es gibt keine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist.

(d) Es gibt keine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist.

(e) Jede nichtnegative reelle Zahl ist positiv.

(f) Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat eine reelle Lösung.

(g) Jedes Viereck, das zugleich Rechteck und Drachenviereck ist, ist ein Quadrat.

Lösung:
Die Negationen lauten:

(a) Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Vorgänger hat. (wahr, in $\mathbb{N}_0$: $n = 0$)

(b) Es gibt eine natürliche Zahl, die keinen Nachfolger hat. (falsch)

(c) Es gibt eine reelle Zahl, die zugleich positiv und negativ ist. (falsch)

(d) Es gibt eine reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist. (wahr, nämlich 0)

(e) Es gibt eine nichtnegative reelle Zahl, die nicht positiv ist. (wahr, nämlich 0)

(f) Die Gleichung $x^2 + 2x + 3 = 0$ hat keine reelle Lösung. (wahr, denn $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$)

(g) Es gibt ein Viereck, das zugleich Rechteck und Drachenviereck, aber kein Quadrat ist. (falsch)

Bemerkung:

- Negation von $\forall$ lautet " Nicht für alle gilt" oder " Es gibt ein ..., für das nicht gilt"
- Negation von $\exists$ lautet " Es gibt kein ..., für das gilt" oder " Für alle gilt nicht"

	Ausgangsaussage	Negation
(a)	$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists m \in \mathbb{N}_0 : \ m = n - 1$	$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \nexists m \in N_0 : m = n - 1$
(b)	$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \exists m \in \mathbb{N}_0 : \ m = n + 1$	$\exists n \in \mathbb{N}_0 : \nexists m \in N_0 : m = n + 1$
(c)	$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \vee x \leq 0$	$\exists x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x < 0$
(d)	$\forall x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 0$	$\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge x \geq 0$
(e)	$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 : \ x > 0$	$\exists x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge \neg(x > 0)$
(f)	$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 = 0$	$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 < 0 \vee x^2 + 2x + 3 > 0$
(g)	$\forall v \in V : (v \in R \wedge v \in D) \Rightarrow v \in Q^{(*)}$	$\exists v \in V : v \in R \wedge v \in D \wedge v \notin Q$

$(*)$ Hierbei sei V die Menge der Vierecke, R die der Rechtecke, D die der Drachenvierecke und Q die der Quadrate.

Brainteaser

Aufg. 6

An einer Weggabelung wohnen zwei Brüder, von denen einer die Angewohnheit hat, stets die Wahrheit zu sagen, während der andere immer lügt. Ein Wanderer, der vorbeikommt, möchte sich nach dem richtigen Weg erkundigen. Er hat von den eigentümlichen Geschwistern gehört, weiß aber nicht, welcher von beiden die Wahrheit sagt. Wie kann er mit nur einer Frage an einen der Männer herausfinden, welchen Weg er nehmen muss?

Lösung:
Die Idee ist eine Frage zu stellen, auf die beide Brüder B_1 und B_2 **dieselbe** Antwort liefern. Wenn man den Wahrheitswert der Antwort kennt, weiß man, was zu tun ist. Es gibt eigentlich nur die folgenden zwei möglichen Fragen[a]:

A Welchen Weg soll ich wählen?

B Welchen Weg soll ich nicht wählen?

C Welchen Weg würdest Du mir raten?

D Welchen Weg würde Dein Bruder mir raten?

Der systematische Weg zur Lösung ist für diese vier Fragen eine Wahrheitstabelle zu erstellen: Nehmen wir an B_1 sagt immer die Wahrheit und B_2 lügt. Wir fixieren einer der Fragen (erste Spalte) und überprüfen den Wahrheitsgehalt der Antwort des Bruders B_1 (zweite Spalte) und des Bruders B_2 (dritte Spalte): Los geht's:

Frage	Antwort B_1	Antwort B_2
A	w	f
B	w	f
C	w	f
D	f	f

Nur auf Frage D liefern beide dieselbe Antwort! Da man den falschen Weg als Antwort bekommt und muss man entsprechend den anderen Weg wählen.

[a] Andere Formulierungen sind äquivalent zu den genannten Fragen und im Grunde sind A und B äquivalent zu C.

Zahlenmengen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.2.

Körperaxiome — Aufg. 1

Welche Rechenregeln erfüllen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ nicht im Vergleich zu $\mathbb{R}$?

Lösung: In $\mathbb{Z}$ gibt es keine multiplikativ inversen Elemente! $\mathbb{Z}$ ist kein Körper.

Summen- und Produktzeichen — Aufg. 2

Schreiben Sie die folgenden Summen aus und berechnen Sie ihren Wert:

$$\begin{array}{lllll} (a)\ \sum_{i=1}^{7} i & (b)\ \prod_{i=1}^{2} i & (c)\ \prod_{i=0}^{5} i & (d)\ \sum_{i=1}^{5} i^2 & (e)\ \sum_{i=-3}^{3} i^2 \\ (f)\ \prod_{i=-3}^{3} i^2 & (g)\ \sum_{i=0}^{7} 5 & (h)\ \prod_{i=0}^{7} 2 & (i)\ \sum_{i=3}^{9} (i-2) & (j)\ \prod_{i=-1}^{3} (i+2) \end{array} \tag{1}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lllll} (a)\ \sum_{i=1}^{7} i = 28 & (b)\ \prod_{i=1}^{2} i = 2 & (c)\ \prod_{i=0}^{5} i = 0 & (d)\ \sum_{i=1}^{5} i^2 = 55 & (e)\ \sum_{i=-3}^{3} i^2 = 28 \\ (f)\ \prod_{i=-3}^{3} i^2 = 0 & (g)\ \sum_{i=0}^{7} 5 = 40 & (h)\ \prod_{i=0}^{7} 2 = 256 & (i)\ \sum_{i=3}^{9} (i-2) = 28 & (j)\ \prod_{i=-1}^{3} (i+2) = 120 \end{array} \tag{2}$$

Summenzeichen - Indexverschiebung — Aufg. 3

Wie lautet das Argument für folgende Indexverschiebung? $\sum_{i=k}^{l} x_i = \sum_{i=k+a}^{l+a} ???$

Lösung:

$$\sum_{i=k}^{l} x_i = \sum_{i=k+a}^{l+a} x_{i-a}$$

Summen- und Produktzeichen — Aufg. 4

Lösung:

$$(a)\ \sum_{i=0}^{\mathrm{n}} \frac{x^i}{i!} = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}+1} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{i=-2}^{n-2} \frac{x^{i+2}}{(i+2)!} \qquad (b)\ \sum_{i=0}^{n} x^{0\cdot i} = n+1$$

$$(c)\ \sum_{i=0}^{\mathrm{n}} \frac{x^i}{i!} = x \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i-1}}{i!} \qquad (d)\ \frac{\prod_{i=1}^{n} 4^i}{\prod_{i=2}^{n+1} 2^i} = \prod_{i=1}^{n-1} 2^i$$

Binomialkoeffizient — Aufg. 5

Zeigen Sie

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \; k \geq 1 \, .$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k+1)}{(n-k+1)}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\frac{k}{k}\\ &= \frac{n!(n-k+1)!+n!k}{k!(n-k+1)!}=\frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!}\\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

Binomischer Satz

Aufg. 6

Bestimmen Sie mithilfe des Binomischen Satzes eine Formel für $(a-b)^n$.

Lösung:

$$(a-b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i\cdot(-b)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}a^i\cdot b^{n-i}\,.$$

Binomischer Satz

Aufg. 7

Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

Lösung:

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,.$$

Äquivalenzumformungen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.3.

Gleichungen und Ungleichungen

Aufg. 1

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

$$(a)\ \frac{x+52}{x+2} = 11 \qquad (b)\ \frac{x^2+2\cdot x-3}{x+3} = 1$$

$$(c)\ \frac{(n+2)!}{n!} = 72, n \in \mathbb{N}_0 \qquad (d)\ |2\cdot x - 6| = |4 - 5\cdot x|$$

$$(e)\ 3\cdot x - 3 < 7 - 2\cdot x \qquad (f)\ \frac{3\cdot x - 5}{x-2} \le 3$$

$$(g)\ |6\cdot x+1| < |2\cdot x - 1| \qquad (h)\ \left|\frac{3\cdot x+2}{x-2}\right| < 1$$

Lösung:

(a)

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{x+52}{x+2} & = & 11 & ||\cdot(x+2) \\ \overset{x\neq -2}{\Leftrightarrow} & x+52 & = & 11\cdot(x+2) & ||-11x-22 \\ \Leftrightarrow & 10\cdot x & = & 30 & ||:10 \\ \Leftrightarrow & x & = & 3\,. & \end{array}$$

Da Probe für $x = 3$ ergibt eine wahre Aussage. Die Lösungsmenge ist daher $\mathbb{L} = \{3\}$.

(b)

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{x^2+2\cdot x-3}{x+3} & = & 1 & ||\cdot(x+3) \\ \overset{x\neq -3}{\Leftrightarrow} & x^2+2\cdot x-3 & = & x+3 & ||-x-3 \\ \Leftrightarrow & x^2+x-6 & = & 0 & \end{array}$$

Mit der allgemeinen Lösungsformel erhält man

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}.$$

Die Probe für $x_1 = 2$ ergibt eine wahre Aussage, aber für $x_2 = -3$ ist die ursprüngliche Gleichung nicht definiert, da der Nenner Null wird. Die Lösungsmenge ist daher $\mathbb{L} = \{2\}$.

(c)

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{(n+2)!}{n!} & = & 72 & \\ \Leftrightarrow & (n+1)\cdot(n+2) & = & 72 & ||-72 \\ \Leftrightarrow & n^2+3\cdot n-70 & = & 0 & \end{array}$$

Mit der allgemeinen Lösungsformel erhalten Sie $n_1 = -10$ und $n_2 = 7$. Da $n_1 \notin \mathbb{N}_0$ folgt $\mathbb{L} = \{7\}$.

(d) Da $x = 4/5$ keine Lösung der Gleichung ist, kann durch $|4-5\cdot x|$ dividiert werden, so dass

$$\begin{array}{rrcll} & |2\cdot x-6| & = & |4-5\cdot x| & ||:|4-5\cdot x| \\ \overset{x\neq \frac{4}{5}}{\Leftrightarrow} & \left|\frac{2\cdot x-6}{4-5\cdot x}\right| & = & 1 & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2\cdot x-6}{4-5\cdot x} = 1 \quad \vee \quad \frac{2\cdot x-6}{4-5\cdot x} = -1$$

Auflösen der Gleichung ergibt $\mathbb{L} = \{10/7, -2/3\}$.

(e)

$$\begin{array}{rrcll} & 3\cdot x-3 & < & 7-2\cdot x & \|+2\cdot x+3 \\ \Leftrightarrow & 5\cdot x & < & 10 & \|:5 \\ \Leftrightarrow & x & < & 2 & \end{array}$$

Somit gilt $\mathbb{L} = (-\infty, 2)$.

(f) Multiplizieren mit $(x-2)$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens liefert die folgenden zwei Fälle:

1.

$$\begin{array}{rrcll} x-2<0 \Leftrightarrow x<2: \Rightarrow & 3\cdot x-5 & \geq & 3\cdot x-6 & \|-3\cdot x+5 \\ \Leftrightarrow & 0 & \geq & -1 & \end{array}$$

Die Ungleichung ist immer erfüllt, also gilt $\mathbb{L}_1 = (-\infty, 2)$.

2.

$$\begin{array}{rrcll} x-2>0 \Leftrightarrow x>2: \Rightarrow & 3\cdot x-5 & \leq & 3\cdot x-6 & \|-3\cdot x+5 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq & -1 & \end{array}$$

Die Ungleichung ist nie erfüllt, also gilt $\mathbb{L}_2 = \emptyset$.

Insgesamt folgt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, 2)$.

(g) Die beiden Terme im Betrag wechseln für $x = -1/6$ und für $x = 1/2$ die Vorzeichen, das führt auf drei Fälle, die zu unterscheiden sind, um die Betragsstriche aufzulösen:

1. Für $x \leq -1/6$ ist das Argument des linken Betrags negativ und das Argument des rechten Betrags negativ, also

$$\begin{array}{rrcll} \Leftrightarrow & -(6\cdot x+1) & < & -(2\cdot x-1) & \|+6\cdot x-1 \\ \Leftrightarrow & -2 & < & 4\cdot x & \|:4 \\ \Leftrightarrow & -1/2 & < & x & \end{array}$$

Es gilt also $\mathbb{L}_1 = (-1/2, -1/6]$.

2. Für $-1/6 \leq x \leq 1/2$ ist das Argument des linken Betrags positiv und das Argument des rechten Betrags negativ, also

$$\begin{array}{rrcll} \Leftrightarrow & 6\cdot x+1 & < & -(2\cdot x-1) & \|+2\cdot x-1 \\ \Leftrightarrow & 8x & < & 0 & \|:8 \\ \Leftrightarrow & x & < & 0 & \end{array}$$

Also $\mathbb{L}_2 = (-1/6, 0)$.

3. Für $x > 1/2$ ist das Argument des linken Betrags positiv und das Argument des rechten Betrags negativ, also

$$\begin{array}{rrcll} \Leftrightarrow & 6\cdot x+1 & < & 2\cdot x-1 & \|-2\cdot x-1 \\ \Leftrightarrow & 4\cdot x & < & -2 & \|:4 \\ \Leftrightarrow & x & < & -1/2 & \end{array}$$

Also $\mathbb{L}_3 = \emptyset$ und insgesamt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-1/2, 0)$.

(h) Für $x \neq 2$ gilt

$$\begin{array}{rrcll} & \dfrac{|3\cdot x+1|}{|x-2|} & < & 1 & \|\cdot|x-2| \\ \stackrel{x\neq 2}{\Leftrightarrow} & |3x+1| & < & |x-2| & \end{array}$$

Die beiden Terme im Betrag wechseln für $x = -2/3$ und für $x = 2$ die Vorzeichen.

1. $x \leq -2/3$:

$$\begin{array}{rrcll} \Leftrightarrow & -(3\cdot x+2) & < & -(x-2) & \|+3\cdot x-2 \\ \Leftrightarrow & -4 & < & 2\cdot x & \|:2 \\ \Leftrightarrow & -2 & < & x & \end{array}$$

Es gilt also $\mathbb{L}_1 = (-2, -2/3]$.

2. $-2/3 < x < 2$:

$$\begin{array}{rrcll} \Leftrightarrow & 3 \cdot x + 2 & < & -(x-2) & \|+x-2 \\ \Leftrightarrow & 3 \cdot x & < & 0 & \| : 3 \\ \Leftrightarrow & x & < & 0 & \end{array}$$

Es gilt also $\mathbb{L}_2 = (-2/3, 0)$.

3. $x > 2$:

$$\begin{array}{rrcll} \Leftrightarrow & 3 \cdot x + 2 & < & x-2 & \|-x-2 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot x & < & -4 & \| : 2 \\ \Leftrightarrow & x & < & -2 & \end{array}$$

Also $\mathbb{L}_3 = \emptyset$ und insgesamt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-2, 0)$.

Gleichungssystem

Aufg. 2

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme

$$(a) \begin{cases} 2 \cdot y - 4 \cdot x & = -6 \\ 5 \cdot y - 4 \cdot x & = -21 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} 2 \cdot x + y & = 7 \\ 2 \cdot x + y & = 7 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x^2 + y^2 & = 10 \\ x + y & = 4 \end{cases}$$

Lösung:
Die angegebenen Gleichungssysteme bestehen alle aus zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Wir werden im Laufe des Semesters größere Gleichungssysteme anschauen und systematische Wege kennenlernen, wie man sie löst. Für diese einfachen Fälle genügt es die Gleichungen gewinnbringend miteinander zu verrechnen und dann nach einer Variable aufzulösen etc.

(a) Ziehen Sie die erste Gleichung von der zweiten ab, dann erhalten Sie $y = -5$. Nun setzen Sie $y = 5$ in die erste Gleichung ein und erhalten $x = -1$. Die Lösung für das Gleichungssytem ist eindeutig und lautet $\mathbb{L} = \{(x, y) : \ x = -1 \wedge y = -5\}$.

(b) Die beiden Gleichungen sind identisch. Daher ist die zweite Gleichung automatisch erfüllt, wenn die erste erfüllt ist. Die erste Gleichung wird von allen Zahlenpaaren (x, y) mit $2x + y = 7$ erfüllt, also von allen Punkten der Geraden $y = -2x + 7$. Es gilt also $\mathbb{L} = \{(x, y) : \ x \in \mathbb{R} \wedge y = -2x + 7\}$.

(c) Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $y = 4 - x$. Dies in die erste Gleichung eingesetzt ergibt eine quadratische Gleichung mit den Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Also insgesamt $\mathbb{L} = \{(1, 3), (3, 1)\}$.

Gleichungssystem mit Parameter

Aufg. 3

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem für $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & p \cdot x_2 & = & 1 \\ (p-1) \cdot x_1 & + & x_2 & = & -1 \end{array}$$

Lösung:
Wir lösen die erste Gleichung nach x_1 auf und setzen x_1 in die zweite Gleichung ein

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & p \cdot x_2 & = & 1 & \Leftrightarrow & {\color{blue} x_1 = 1 - p \cdot x_2} \\ (p-1)\,{\color{blue} x_1} & = & x_2 & = & -1 & \Leftrightarrow & (p-1)\,{\color{blue}(1 - p \cdot x_2)} + x_2 = -1\,. \end{array}$$

Nun lösen wir die zweite Gleichung nach x_2 auf

$$\begin{array}{rrcll} & (p-1) \cdot (1 - p \cdot x_2) + x_2 & = & -1 & \\ \Leftrightarrow & (p-1) - (p^2 - p - 1) \cdot x_2 & = & 1 & \| - (p-1) \\ \Leftrightarrow & -(p^2 - p - 1) \cdot x_2 & = & -1 - p + 1 & \| \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow & (p^2 - p - 1) \cdot x_2 & = & p & \| : (p^2 - p - 1) \neq 0 \quad (*) \\ \overset{p \neq p_{1,2}}{\Leftrightarrow} & x_2 & = & \dfrac{p}{p^2 - p - 1} & \Rightarrow x_1 = 1 - \dfrac{p^2}{p^2 - p - 1}\,. \end{array}$$

Wie müssen in (∗) unbedingt ausschließen, dass wir durch Null dividieren. Wir müssen also die Werte für p ausschließen, für die der Ausdruck $p^2 + p - 1$ Null wird:

$$p^2 - p - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Unser Zwischenergebnis lautet: für alle Werte von p mit $p \in \mathbb{R} \setminus \{p_1, p_2\}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar mit

$$\begin{cases} x_1 &= 1 - \dfrac{p^2}{p^2 - p - 1} \\ x_2 &= \dfrac{p}{p^2 - p - 1} \end{cases}$$

Aber was, wenn es noch mehr Lösungen gibt für die ausgeschlossenen Werte von p? Die beiden Fälle überprüfen wir jetzt:

- Wir steigen wir in die Gleichung (∗) ein und setzen $p = p_1$: es folgt $0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und das ist falsch. Also liefert der Fall $p = p_1$ keine weitere Lösung für x_1, x_2.
- Wir steigen wir in die Gleichung (∗) ein und setzen $p = p_2$: es folgt $0 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ und das ist falsch. Also liefert der Fall $p = p_2$ keine weitere Lösung für x_1, x_2.

Mit anderen Worten: unser Zwischenergebnis ist schon unser Endergebnis.

Brainteaser

Aufg. 4

In einer Familie hat jeder Sohn gleich viele Schwestern und Brüder. Jede Tochter hat aber doppelt so viele Brüder wie Schwestern. Wie viele Söhne und Töchter hat die Familie?

Lösung:
Es bezeichne n die Anzahl der Söhne und m die Anzahl der Töchter. Dann gilt

$$\begin{cases} (n-1) = m \\ (m-1) = \frac{n}{2} \ \Rightarrow 2 \cdot (m-1) = n \end{cases}$$

Dies ist ein einfaches Gleichungssystem mit zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Sie können es lösen, in dem Sie in $m = n - 1$ in die zweite Gleichung einsetzen. Die Lösung lautet $n = 4$ und $m = 3$.

Brainteaser

Aufg. 5

Zu einem Fest auf dem Land fahren mehrere Pferdewagen mit der jeweils gleichen Anzahl an Personen. Auf halbem Weg fallen zehn Wagen aus, sodass jeder der übrigen Wagen eine weitere Person aufnehmen muss. Vor Antritt des Rückwegs fallen weitere 15 Wagen aus, was zur Folge hat, dass in jedem Wagen drei Personen mehr sind als bei der Abfahrt am Morgen. Wie viele Personen nahmen an dem Fest teil?

Lösung:
Es bezeichne x die ursprüngliche Anzahl der Wagen und y die Anzahl der Personen. Die Anzahl von Personen pro Wagen ist damit der Quotient $\dfrac{y}{x}$ und es gilt

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} + 1 = \dfrac{y}{(x-10)} \\ \dfrac{y}{x} + 3 = \dfrac{y}{(x-25)} \end{cases}$$

Das Ergebnis erhält man, indem man eine der beiden Gleichugnen nach x oder y auflöst und in die andere Gleichung einsetzt. Als Lösung ergibt sich $y = 900$ und $x = 100$.

Funktionen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.4.

Funktionale Abhängigkeiten

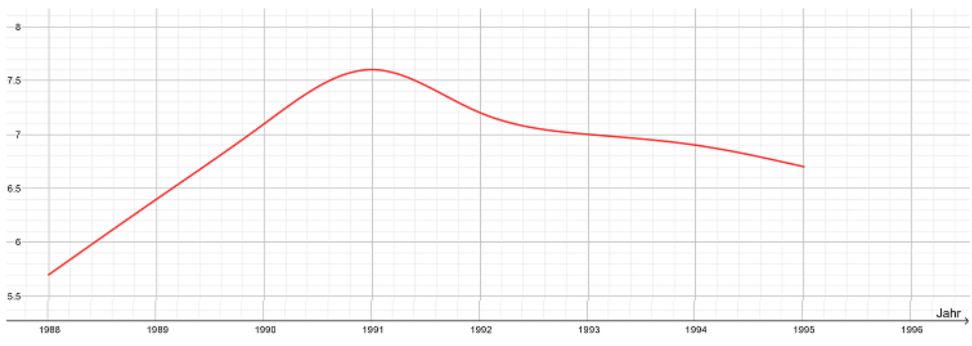
Aufg. 1

Die Tabelle gibt den Verpackungsverbrauch pro Jahr von Privathaushalten und Kleinbetrieben in Millionen Tonnen an.

1. Veranschaulichen Sie die Werte der Tabelle durch einen Graphen.
2. Wann wurde vermutlich die neue Verpackungsverordnung (Grüner Punkt) eingeführt?
3. Wie hoch wäre der Verpackungsverbrauch 1993 wohl gewesen, wenn man die neue Verpackungsverordnung nicht eingeführt hätte? Wie viel Prozent an Verpackungsmaterial wurde dadurch etwa eingespart?

Jahr	Verbrauch in Mio. Tonnen
1988	5.7
1989	6.4
1990	7.1
1991	7.6
1992	7.2
1993	7.0
1994	6.9
1995	6.7

Lösung:



2. 1992
3. Ohne den Grünen Punkt hätte man mit einer jährlichen Steigerung um ca 0.5 Mio t rechnen müssen. Die Prognose für 1993 ergibt sich aus dem Verbrauch aus dem Jahr 1991 plus ca 1.0 Mio t für die Jahre 1992 und 1993: $7.6\,\text{Mio t} + 1.0\,\text{Mio t} = 8.6\,\text{Mio t}$. Die Ersparnis bis zum Jahr 1993 beträgt also ca $8.6\,\text{Mio t} - 7.0\,\text{Mio t} = 1.6\,\text{Mio t}$, das entspricht einer Einsparung von Verpackung von ca $\frac{1.6}{8.6} \cdot 100\% \approx 16\%$.

Mathematische Kurzschreibweise

Aufg. 2

Drücken Sie die Aussagen in mathematischer Kurzschreibweise aus.

1. Durch die Funktion f wird der Zahl 3 die Zahl 10 zugeordnet.
2. Die Funktion g nimmt an der Stelle 5 den Funktionswert 12 an.
3. Die Zahl 3 gehört nicht zur Definitionsmenge der Funktion f.
4. Die Funktion f ordnet der Zahl 4 einen größeren Funktionswert zu als der Zahl 5.
5. Die Funktionen f und g nehmen für $x = 2$ denselben Funktionswert an.
6. Alle Funktionswerte der Funktion g sind positiv.

Lösung:

1. $f(3) = 10$
2. $g(5) = 12$
3. $3 \notin D_f$
4. $f(4) > f(5)$
5. $f(2) = g(2)$
6. $W_g \subseteq \mathbb{R}^+$

Definitionsbereich

Aufg. 3

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der folgenden Abbildungen:

$(a)\ x \mapsto (x-1)^2$	$(b)\ x \mapsto 3 - 5 \cdot x - x^2$	$(c)\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$(d)\ x \mapsto \dfrac{1}{3-x}$	$(e)\ x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$	$(f)\ x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$
$(g)\ x \mapsto \sqrt{x-3}$	$(h)\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$	$(i)\ x \mapsto \ln(x+3)$

Lösung:

$(a)\mathbb{R}$	$(b)\ \mathbb{R}$	$(c)\ \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$(d)\ \mathbb{R} \setminus \{3\}$	$(e)\ \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$(f)\ \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
$(g)\ [3, \infty)$	$(h)\ (3, \infty)$	$(i)\ (-3, \infty)$

Bildbereich

Aufg. 4

Bestimmen Sie den Bildbereich (die Bildmenge) der folgenden Abbildungen:

$(a)\ x \mapsto x^2$	$(b)\ x \mapsto x^2 + 1$	$(c)\ x \mapsto 2 - x^2$
$(d)\ x \mapsto -(x+2)^2 + 3$	$(e)\ x \mapsto 3 \cdot x - 0.5$	$(f)\ x \mapsto \sin(x)$
$(g)\ x \mapsto 3^x$	$(h)\ x \mapsto 3$	

Lösung:

$(a)\ \mathbb{R}_0^+$	$(b)\ [1, \infty)$	$(c)\ (-\infty, 2]$
$(d)\ (-\infty, 3]$	$(e)\ \mathbb{R}$	$(f)\ [-1, 1]$
$(g)\ \mathbb{R}^+$	$(h)\ \{3\}$	

Eigenschaften von Funktionen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.5.

Symmetrie — Aufg. 1

Welche der folgenden Funktionen ist gerade, welche ungerade?

$(a)\ x \mapsto -2 \cdot x^6 + 3 \cdot x^2$ $\quad (b)\ x \mapsto 2 - 3 \cdot x^4$ $\quad (c)\ x \mapsto 2 - 3 \cdot x^3$

$(d)\ x \mapsto 3 \cdot x^3 - x + 1$ $\quad (e)\ x \mapsto x \cdot (2 \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^4)$ $\quad (f)\ x \mapsto (x-1) \cdot (x-2)$

$(g)\ x \mapsto (x-1)^3 + 3 \cdot x^2 + 1$ $\quad (h)\ x \mapsto (1 - 3 \cdot x^2)^2$ $\quad (i)\ x \mapsto (x - x^2)^2$

Lösung:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
gerade	•	•						•	
ungerade					•		•(∗)		
weder noch			•	•		•			•

$(*)\ (x-1)^3 + 3 \cdot x^2 + 1 = (x-1) \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 1) = x^3 - 2 \cdot x^2 + x^2 - x^2 + 2 \cdot x^2 - 1 + 3 \cdot x^2 + 1 = x^3 - 2 \cdot x$

Umkehrfunktion — Aufg. 2

Gegeben sei die (diskrete) Funktion $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$ mit der Wertetabelle

x	1	2	3	4
$f(x)$	9	6	7	8

Lösung:
Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \{6, 7, 8, 9\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ besitzt die folgende Wertetabelle

x	9	6	7	8
$f^{-1}(x)$	1	2	3	4

Umkehrfunktion — Aufg. 3

Auf welchen Intervallen ist f umkehrbar? Bestimmen Sie f^{-1} und geben Sie $D_{f^{-1}}$ an

$(a)\ f : x \mapsto 4x - x^2$ $\quad (b)\ f : x \mapsto \dfrac{2 \cdot x}{x - 1}$ $\quad (c)\ f : x \mapsto x \cdot |x|$

Lösung:

(a) Offenbar gilt

$$f : \mathbb{R} \to (-\infty, 4], x \mapsto x \cdot (4 - x)$$

f besitzt dasselbe asymptotische Verhalten wie $x \mapsto -x^2$ und ist demnach auf $\mathbb{R}$ nicht injektiv und damit nicht invertierbar. Aber man kann f auf zwei Intervalle einschränken, auf denen Injektivität sicher gestellt ist, nämlich auf dem Intervall $I_1 := (-\infty, 2]$ und auf dem Intervall $I_2 := [2, \infty)$. Die Abbildungsvorschriften der entsprechenden Umkehrfunktionen erhält man, in dem man die Gleichung $y = 4 \cdot x - x^2$ nach x auflöst:

$$\begin{array}{rrcll}
\forall x \geq 2: & y & = & 4 \cdot x - x^2 & \\
\Leftrightarrow & y & = & (-x^2 + 4 \cdot x - 4) + 4 & \\
\Leftrightarrow & y & = & -(x-2)^2 + 4 & || - 4 \\
\Leftrightarrow & 4 - y & = & (x-2)^2 & || \sqrt{\cdot} \\
\overset{x \geq 2!}{\Leftrightarrow} & \sqrt{4 - y} & = & x - 2 & || + 2 \\
\Leftrightarrow & \pm\sqrt{4 - y} + 2 & = & x &
\end{array}$$

Entsprechend löst man für $x < 2$ auf und erhält:

$$\begin{array}{lll} f_1^{-1}: & (-\infty,4] \to (-\infty,2], & x \mapsto 2-\sqrt{4-x} \\ f_2^{-1}: & (-\infty,4] \to [2,\infty), & x \mapsto 2+\sqrt{4-x} \end{array}$$

(b) f ist auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ invertierbar und es gilt:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\},\, x \mapsto \frac{x}{x-2}$$

(c) Um die Abbildung f zu verstehen, lösen wir den Betragsstrich auf:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ x \geq 0\,, \\ -x^2, \ x < 0\,. \end{cases}$$

f ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte streng monoton steigende Funktion (für $x \geq 0$ entspricht sie der Normalparabel und für $x < 0$ der, an der x-Achse gespiegelten Normalparabel). Also f ist auf $\mathbb{R}$ invertierbar und wir bestimmen die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion stückweise wie folgt:

$$x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0: \quad y = x^2 \Rightarrow +\sqrt{y} = x\,.$$
$$x < 0 \Rightarrow y < 0: \quad y = -x^2 \Leftrightarrow |y| = x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{|y|} = x\,.$$

Nach der Variablenumbennenung erhalten wir insgesamt

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|}, & x < 0 \end{cases}$$

Anwendung: Verpackungsreduktion

Aufg. 4

Umweltbewusste Studenten behaupten: Bei Dosen-Limo ist die Verpackung teurer als der Inhalt. Für die Überprüfung treffen die Studenten folgende Annahmen: Die Dose ist ein Zylinder, dessen Höhe doppelt so groß ist wie sein Durchmesser. Für den Hersteller kostet 1 Liter Limo 15 ct. Die Kosten für $1\,\mathrm{dm}^2$ Blech betragen 3 ct

(a) Überprüfen Sie die Behauptung für den Dosenradius $r = 3\,\mathrm{cm}$.

(b) Ab welchem Dosenradius ist der Inhalt teurer als die Dose?

Lösung:

1. Die Behauptung trifft zu! Mit $h = 4r$[dm] erhält man

	Funktionaler Zusammenhang	Einheit
Materialbedarf M	$M: r \mapsto 2 \cdot (\pi \cdot r^2) + (2\pi \cdot r) \cdot h = 10\pi \cdot r^2$	$[\mathrm{dm}^2]$
Doseninhalt V	$V: r \mapsto (\pi \cdot r^2) \cdot h = 4\pi \cdot r^3$	$[\mathrm{dm}^3] = [\mathrm{l}]$
Materialkosten K_M	$K_M: r \mapsto 3 \cdot M(r) = 30\pi \cdot r^2$	[ct]
Kosten für Limo K_L	$K_L: r \mapsto 15 \cdot V(r) = 60\pi \cdot r^3$	[ct]

Und für $r = 3\,\mathrm{cm} = 0.3\,\mathrm{dm}$ folgt

Materialkosten	$K_M(0.3\,\mathrm{dm}) = 2.7\pi \approx 8.48\,\mathrm{ct}$
Kosten für Limo	$K_L(0.3\,\mathrm{dm}) = 1.62\pi \approx 5.09\,\mathrm{ct}$

2. Die Bedingung $K_L(r) > K_M(r)$ wird für $r > \frac{1}{2}\mathrm{dm}$ erfüllt.

Aufg. 5

Die Herstellungskosten eines Airbus-Seitenleitwerks aus Metall werden angenähert durch

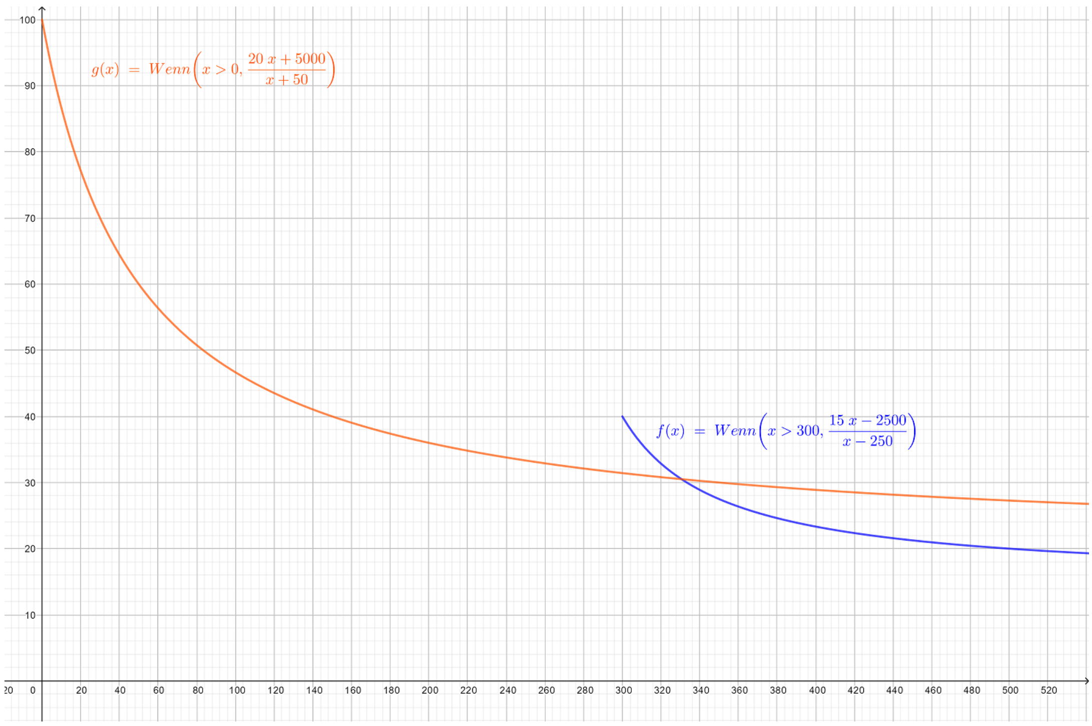
$$k_1 : x \mapsto \frac{20 \cdot x + 5000}{x + 50}\,,$$

wobei x die Anzahl der hergestellten Leitwerke und $k_1(x)$ eine willkürliche Geldeinheit beschreibt. Nachdem 300 Leitwerke hergestellt sind, wird erwogen, die Produktion auf Kunststoffleitwerke umzustellen. Die Stückkosten betragen dann näherungsweise

$$k_2 : x \mapsto \frac{15 \cdot x - 2500}{x - 250}\,, \quad x > 300\,.$$

1. Zeichnen Sie die beiden Graphen, zum Beispiel mit Hilfe von Geogebra o.ä..
2. Wie verhalten sich die Stückkosten bei sehr großen Produktionszahlen?
3. Ab welcher Stückzahl ist das Kunststoffleitwerk billiger?

Lösung:



2. $\lim\limits_{x\to\infty} k(x) = 20$ und $\lim\limits_{x\to\infty} k^*(x) = 15$ und
3. $k^*(x) < k(x)$ für $x > 330$.

Lineare Funktionen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.6.

Abbildungsvorschrift

Aufg. 1

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung in der Form

$$f(x) = m \cdot x + b$$

einer linearen Funktion durch die Punkte $(1,5|2)$ und $(-3|3)$.

Lösung:
Es gilt

$$y(x) = \frac{3-2}{-3-1,5}(x-1,5)+2 = -\frac{2}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)+2 = -\frac{2}{9}x+\frac{7}{3}\,.$$

Umkehrfunktion

Aufg. 2

Für welche reellen Werte von m und b ist die lineare Funktion $f : x \mapsto m \cdot x + b$ umkehrbar?

Lösung: Alle linearen Funktionen mit $m \neq 0$ sind umkehrbar.

Abbildungsvorschrift

Aufg. 3

Die durch die Gleichung $x + 3y = 8$ beschriebene Gerade im $\mathbb{R}^2$ wird um zwei Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben geschoben. Geben Sie die Abbildungsvorschrift für die verschobene Gerade an.

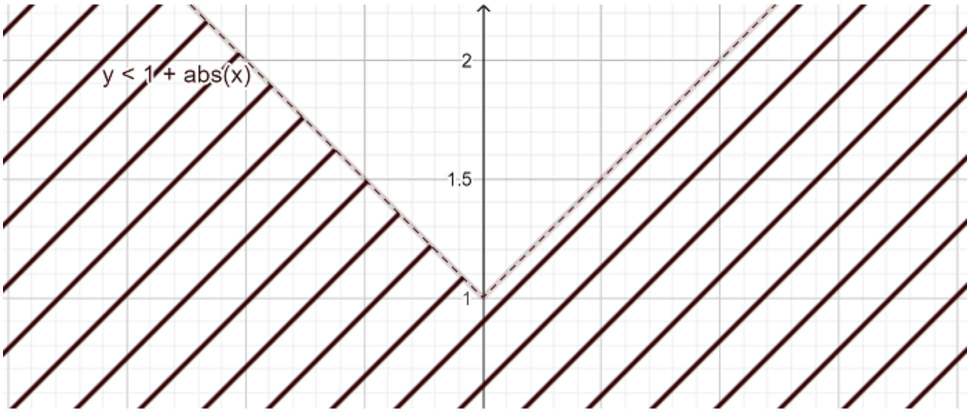
Lösung:
$y(x) = \frac{1}{3}(8-x) \Rightarrow \tilde{y}(x) = y(x-2)+1 = \frac{1}{3}(10-x)+1$

Betragsfunktion

Aufg. 4

Skizzieren Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1 + |x|\}$. Kennzeichnen Sie, ob die Ränder dazu gehören oder nicht.

Lösung:



Betragsfunktion

Aufg. 5

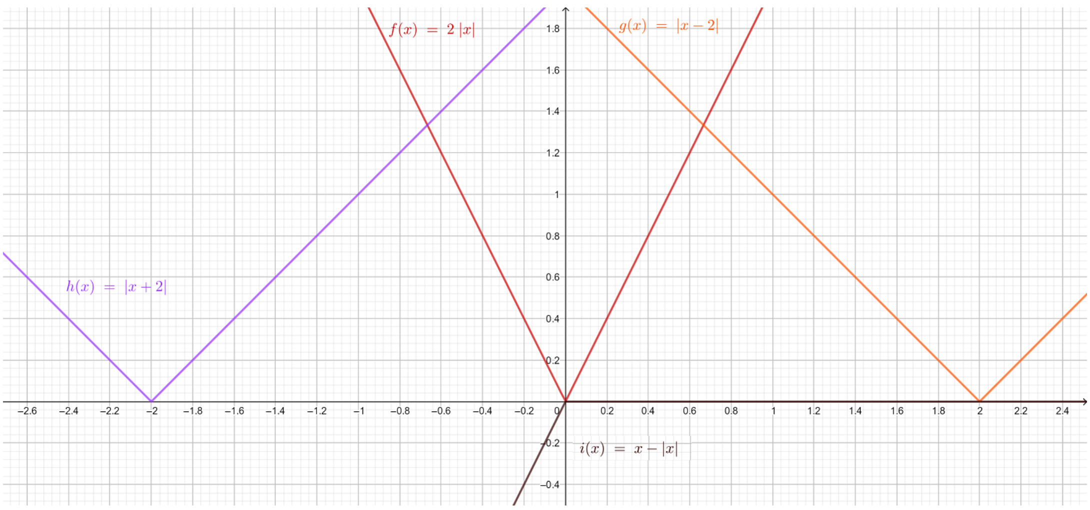
Stellen Sie die gegebenen Funktionen ohne Betragszeichen dar und zeichnen Sie den Graph:

$(a)\ f : x \mapsto 2 \cdot |x| \qquad (b)\ f : x \mapsto |2 - x| \qquad (c)\ f : x \mapsto |2 + x| \qquad (d)\ f : x \mapsto x - |x|$

Lösung:

$$(a)\ f : x \mapsto \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \quad (b)\ f : x \mapsto \begin{cases} 2 - x, & x \geq 2 \\ x - 2, & x < 2 \end{cases} \quad (c)\ f : x \mapsto \begin{cases} 2 + x, & x \geq -2 \\ -2 - x, & x < -2 \end{cases}$$

$$(d)\ f : x \mapsto \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$



Anwendung: Interpolation

Aufg. 6

Gegeben sind die Messpunkte $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, 3$, mit $(-1,5|2), (-0,25|3,5), (0,5|3,3), (1,2|2,8)$. Bestimmen Sie den linearen Spline und werten Sie ihn am Punkt $x = 0,2$ aus. Welchen Wert erhalten Sie?

Lösung:
Wegen $0,2 \in [-0,25; 0.5]$ gilt

$$s(0,2) = \frac{3,3 - 3,5}{0,5 - (-0,25)}(0,2 - (-0,25)) + 3,5 = 3,38\,.$$

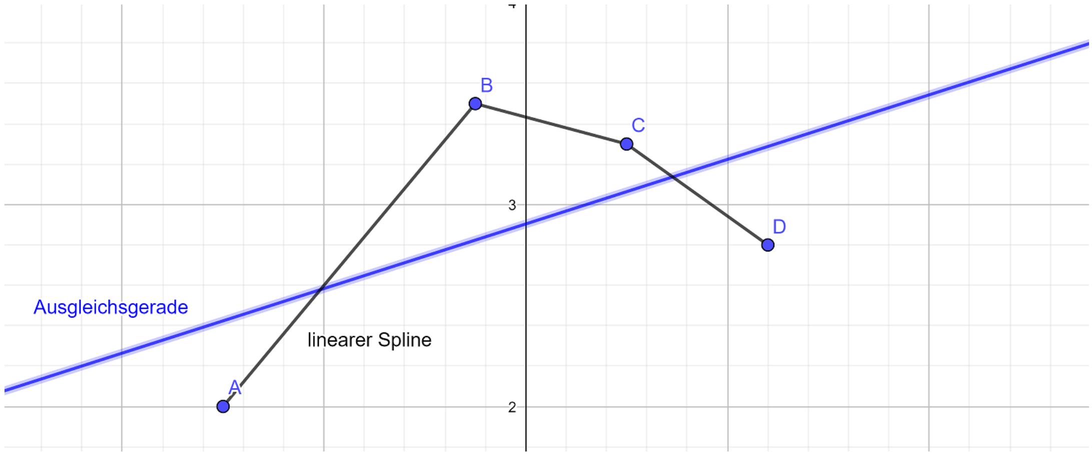
Anwendung: Ausgleichsgerade

Aufg. 7

Gegeben sind die Messpunkte $(x_i, y_i),\ i = 0, 1, 2, 3,$ mit $(-1,5|2), (-0,25|3,5), (0,5|3,3), (1,2|2,8)$.

Lösung:

$$r(x) = 0,32 \cdot x + 2,9 \Rightarrow r(0,2) = 2,946\,.$$



Anwendung: Dimensionierung Solarzellen

Aufg. 8

Sonnenkollektoren wandeln Lichtenergie in Wärme um, die an den Warmwasserspeicher abgeführt wird. Die benötigte Kollektorfläche hängt linear vom Volumen des Speichers ab. Bei einer Speichertemperatur von 45°C wird für 200 Liter eine Kollektorfläche von 3m^2 und für 500 Liter eine Kollektorfläche von 7m^2 empfohlen. Pro Person wird mit einem Verbrauch von 50 Liter Warmwasser am Tag gerechnet. Das Speichervolumen sollte 50% über dem Verbrauch liegen.

1. Bestimmen Sie die Funktion, die der Personenanzahl die Kollektorfläche zuordnet.
2. Wie groß sollte die Kollektorfläche bei einem 4-Personen Haushalt sein?
3. Für wie viele Personen reicht eine Kollektorfläche von 8m^2?

Lösung:
Wir müssen die Informationen aus der Textaufgabe in mathematische Formeln gießen und das machen wir jetzt - Stück für Stück:

- Das gewünschte Speichervolumen V hängt von der Personenanzahl x ab und zwar soll gelten, dass pro Person ein Speichervolumen von 50 Litern (effektiver Verbrauch) plus 25 Litern (Puffer) benötigt wird, also
$$s : x \mapsto 75 \cdot x\,.$$
- Die Kollektorfläche hängt **linear** vom Speichervolumen ab. Mit den angegebenen Informationen, nämlich $P_1\left(200[\text{l}], 3[\text{m}^2]\right)$ und $P_2\left(500[\text{l}], 7[\text{m}^2]\right)$ läßt sich die lineare Funktion berechnen (Zwei-Punkte-Formel):
$$K : V \mapsto \frac{3-7}{200-500}\left[\frac{1}{\text{m}^2}\right](V - 500)\,[\text{m}^2] + 7[\text{l}] = \frac{1}{75}V + \frac{1}{3}\,.$$
- Um nun die Kollektorfläche in Abhängigkeit der Personenanzahl anzugeben, müssen die ermittelten Abbildungen hintereinander ausgeführt werden und das ergibt die unter 1. gesuchte Funktion.[a]: Personenanzahl $x \mapsto$ Speichervolumen $V \mapsto$ Kollektoroberfläche K, also
$$f(x) = K\left(s(x)\right) = \frac{1}{75}\left(75 \cdot x\right) + \frac{1}{3} = x + \frac{1}{3}\,.$$

Nun zur Lösung der einzelnen Fragen:

1. $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{3}$.

2. $f(4) = 4 + \frac{1}{3} \Rightarrow$ Kollektorfläche ist $4,\bar{3}[\mathrm{m}^2]$.

3. $f(x) = 8 \Rightarrow$ 7-Personen-Haushalt.

[a] In Abschnitt 1.12 werden wir diese Hintereinanderausführung als Verknüpfung kennenlernen, also $f = K \circ s$.

Potenz- und Wurzelfunktionen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.7.

$f : x \mapsto 3 \cdot \sqrt{4-x^2}$ Aufg. 1

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 3\sqrt{4-x^2}$.

(a) Geben Sie die Funktionswerte an den Stellen -1 und $\sqrt{3}$ an.

(b) Berechnen Sie $f(0)$, $f(2)$, und $f(\frac{2}{3})$.

(c) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge von f.

(d) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $P(-\sqrt{2}|3\sqrt{2})$ auf dem Graphen von f liegt.

Lösung:

(a) $f(-1) = 3\sqrt{3}$, $f(\sqrt{3}) = 3$

(b) $f(0) = 6$, $f(2) = 0$, $f(3/2) = 3/2\sqrt{7}$

(c) $4 - x^2 \overset{!}{\geq} 0 \Rightarrow D_f = [-2, 2]$.

(d) $f(-\sqrt{2}) = 3 \cdot \sqrt{4-2} = 3 \cdot \sqrt{2} \ \Rightarrow P$ liegt auf dem Graphen von f liegt.

Symmetrie Aufg. 2

Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen in ihrem maximalen Definitionsbereich

$(a)\, f : x \mapsto 4 \cdot x^2 - 16$ $(b) f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $(c)\ f : x \mapsto |x^2 - 4|$

$(d)\ f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{1+x^2}$ $(e)\ f : x \mapsto \sqrt{x^2-25}$ $(f)\, f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$

Lösung:

(a) $y(-x) = 4 \cdot (-x)^2 - 16 = y(x)$, d.h. gerade

(b) $y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -y(x)$, d.h. ungerade

(c) $y(-x) = |(-x)^2 - 4| = y(x)$, d.h. gerade

(d) $y(-x) = \frac{(x-)^2-1}{1+(-x)^2} = y(x)$, d.h. gerade

(e) $y(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 25} = y(x)$, d.h. gerade

(f) $y(-x) = \frac{1}{-x-1}$ und damit $y(-x) \neq y(x) \wedge y(x) \neq -y(x)$, d.h. weder gerade noch ungerade

Monotonie Aufg. 3

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie

$(a)\, f : x \mapsto x^4$ $(b)\ f : x \mapsto \sqrt{x-1}$ $(c)\ f : x \mapsto x^3 + 2 \cdot x$ $(d)\ f : x \mapsto |x^2 - 2 \cdot x + 1|$

Lösung:

(a) streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton steigend auf $[0, \infty)$

(b) streng monoton steigend: die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ ist auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend, da aus $x_1 < x_2$ folgt, dass $(\sqrt{x_1})^2 < (\sqrt{x_2})^2$. Da beide Argumente nichtnegativ sind und die Funktion $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend ist, folgt damit auch $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Setzt man $x_1 = 1+h_1$ und

$x_2 = 1 + h_2$ mit $0 \leq h_1 < h_2$ ein, so folgt hiermit $\sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{1 + h_1 - 1} = \sqrt{h_1} < \sqrt{h_2} = \sqrt{x_2 + 1}$ und damit die Behauptung.

(c) Sowohl $y_1(x) = x^3$ als auch $y_2(x) = x$ sind streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. Da aus $x_1 < x_2$ auch $y_1(x_1) + 2 \cdot y_2(x_1) < y_1(x_2) + 2 \cdot y_2(x_2)$ folgt (Addieren Sie hier zwei Ungleichungen mit demselben Ungleichheitszeichen), dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wächst.

(d) Es gilt $y(x) = |(x-1)^2| = (x-1)^2$, da Quadrate immer nichtnegativ sind. Das bedeutet, dass die Funktion eine um eine Stelle nach rechts verschobene Normalparabel ist. Damit ist sie auf $(-\infty, 1]$ streng monoton fallend und auf $[1, \infty)$ streng monoton steigend.

Umkehrfunktion

Aufg. 4

(a) Welche der Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sind umkehrbar?

(b) Wie lauten die Umkehrfunktionen von folgenden Funktionen?

$$(a)\ f : x \mapsto \frac{1}{2 \cdot x} \qquad (b)\ g : x \mapsto \sqrt{3 \cdot x}$$

Lösung:

(a) Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten n sind umkehrbar auf $\mathbb{R}$.

(b) $(a)\ f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \mapsto \dfrac{1}{2 \cdot x} \qquad (b)\ g^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto \dfrac{x^2}{3}$

Gleichungen

Aufg. 5

Lösen Sie folgende Gleichungen

$(a)\ \sqrt{-3 + 2 \cdot x} = 2 \qquad (b)\ \sqrt{x^2 + 4} - x = -2 \qquad (c)\ \sqrt{x - 1} = \sqrt{x + 1} \qquad (d)\ \sqrt{2 \cdot x^2 - 1} + x = 0$

Lösung:

(a)

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{-3 + 2 \cdot x} & = & 2 & |(\cdot)^2 \\ \Rightarrow & -3 + 2 \cdot x & = & 4 & | + 3 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot x & = & 7 & | : 2 \\ \Leftrightarrow & x & = & 7/2 & \end{array}$$

Die Probe ergibt $\sqrt{-3 + 2 \cdot 7/2} = 2$ eine wahre Aussgae. Also ist $\mathbb{L} = \{7/2\}$.

(b)

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{x^2 + 4} - x & = & -2 & | + x \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + 4} & = & x - 2 & |(\cdot)^2 \\ \Rightarrow & x^2 + 4 & = & x^2 - 4 \cdot x + 4 & | - x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & -4 \cdot x & | : (-4) \\ \Leftrightarrow & x & = & 0 & \end{array}$$

Die Probe ergibt $\sqrt{0^2 + 4} = 0 - 2$ eine falsche Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

(c)

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{x - 1} & = & \sqrt{x + 1} |(\cdot)^2 & \\ \Rightarrow & x - 1 & = & x + 1 & | - x \\ \Leftrightarrow & -1 & = & 1 & \end{array}$$

Also ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

(d)

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{2\cdot x^2-1}+x & = & 0 & |-x \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2\cdot x^2-1} & = & -x & |(\cdot)^2 \\ \Rightarrow & 2\cdot x^2-1 & = & x^2 & |-x^2+1 \\ \Leftrightarrow & x^2 & = & 1 & \end{array}$$

also $x = \pm 1$. Die Probe ergibt für $x = 1$ $\sqrt{2\cdot 1^2-1}+1 = 0$ eine falsche Aussage und für $x = -1\sqrt{2(-1)^2-1}-1 = 0$ eine wahre Aussage. Also ist $\mathbb{L} = \{-1\}$.

Gleichungen

Aufg. 6

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$-2\cdot x^2+6 = 4\cdot x$$

(b) Für welchen Parameter p hat die folgende Gleichung genau eine Lösung?

$$x^2+p\cdot x+3\cdot p = 0$$

(c) Für welche Werte von c hat die folgende Gleichung keine reelle Lösung?

$$x^2+2\cdot c\cdot x+c = 0$$

Lösung:

(a) $\mathbb{L} = \{-3, 1\}$

(b) $p = 0$ oder $p = 12$

(c) Die Diskriminante ist

$$D = (2\cdot c)^2-4\cdot c = 4\cdot c^2-4\cdot c = 4\cdot c\cdot(c-1)\,.$$

Es existiert mindestens eine reelle Lösung falls $D \geq 0$, also für folgende Fälle:

- $c \geq 0 \wedge c-1 \geq 0 \;\Rightarrow c \geq 1$
- $c \leq 0 \wedge c-1 \leq 0 \;\Rightarrow c \leq 0$

Polynome Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.8.

Symmetrie — Aufg. 1

Zeigen Sie: Wenn der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion einen konstanten Summanden enthält, dann ist die Funktion nicht ungerade.

Lösung: Es ist

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0\,.$$

Für eine ungerade Funktion gilt insbesondere $f(0) = 0$. Dies ist hier nicht erfüllt, da $f(0) = a_0 \neq 0$. Also kann f nicht ungerade sein. f kann allerdings gerade sein, wenn n gerade ist und $a_{n-1} = a_{n-3} = \cdots = a_1 = 0$.

Umkehrfunktion — Aufg. 2

Die Funktion f mit $f(x) = ax^3+bx,\ a, b \in \mathbb{R}$, sei umkehrbar. Welche Bedingung erfüllen die Koeffizienten a und b?

Lösung:

- Für $a \neq 0$ gilt $f(x) = ax^3 + bx = a \cdot x \cdot (x^2 + b/a)$, das heißt, dass der Funktionsgraph in $x = 0$ die x-Achse schneidet. f ist bijektiv, wenn es bei der einen reellen Nullstelle bleibt, wenn also $b/a > 0$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn a und b haben gleiches Vorzeichen haben.
- Für $a = 0$ gilt $f(x) = bx$ ist invertierbar, falls $b \neq 0$.
- Für $b = 0$ gilt $f(x) = ax^3$ ist invertierbar, falls $a \neq 0$.

Polynom? — Aufg. 3

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen Polynome sind:

$(a)\ x \mapsto 1 + \sqrt{2}x$	$(b)\ x \mapsto 1 + 2\sqrt{x}$	$(c)\ x \mapsto (x-1)^2(x-7)$
$(d)\ x \mapsto x^2 - \frac{3}{x}$	$(e)\ x \mapsto x^2 - \frac{x}{3}$	$(f)\ x \mapsto x^2 + \sin(x)$

Lösung:

(a) f ist ganzrationoal mit $a_0 = 1$, $a_1 = \sqrt{2}$ und hat den Grad 1.

(b) f ist nicht ganzrational.

(c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$. Das heißt f ist ganzrationoal mit $a_0 = -7$, $a_1 = 15$, $a_2 = -9$, $a_3 = 1$ und hat den Grad 3.

(d) f ist nicht ganzrational.

(e) f ist ganzrationoal mit $a_0 = 1$, $a_1 = -\dfrac{1}{3}$, $a_2 = 1$ und hat den Grad 2.

(f) f ist nicht ganzrational.

Dartellungen von Parabeln — Aufg. 4

Bestimmen Sie von folgenden Parabeln die Linearfaktorzerlegung und die Scheitelpunktform.

$(a)\ x \mapsto -2x^2 - 4x + 3$	$(b)\ x \mapsto 5x^2 + 20x + 20$
$(c)\ x \mapsto 2x^2 + 10x$	$(d)\ x \mapsto 4x^2 + 8x - 60$

Lösung:

(a) Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Damit

$$y(x) = -2\left(x + 1 - \frac{\sqrt{10}}{0}2\right)\left(x + 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

Scheitelpunkt

$$x_S = \frac{-(-4)}{2 \cdot (-2)} = -1. \; y_S = y(-1) = 5\,.$$

Und damit

$$y(x) = -2(x+1)^2 + 5\,.$$

(b) $y(x) = 5(x+1)(x+2) = 5(x+2)^2$

(c) $y(x) = 2x(x+5) = 2(x+\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{2}$

(c) $y(x) = 4(x+5)(x-3) = 4(x+1)^2 - 64\,.$

Abbildungsvorschrift

Aufg. 5

(a) Wie müssen die Koeffizienten a, b, c lauten, wenn die Parabel $y(x) = ax^2 + bx + c$ an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$ verschwindet und der Funktionswert am Scheitelpunkt $y_S = 18$ beträgt?

(b) Bestimmen Sie ein Polynom p vierten Grades mit den folgenden Eigenschaften:

- p ist eine gerade Funktion.
- p besitzt die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = 6$.
- $p(0) = -3$

Lösung:

(a) Ansatz

$$y(x) = a \cdot (x-1)(x+5)$$

Der Scheitelpunkt ist durch $x_S = (x_1 + x_2)/2 = (1 + (-5))/2 = -2$ gegeben:

$$y(x_S) = a \cdot (-2-1) \cdot (-2+5) = -9a\,.$$

Es muss also $-9 \cdot a = 18$ sein und damit $a = -2$. Eingesetzt und ausmultipliziert folgt

$$y(x) = -2 \cdot (x-1)(x+5) = -2x^2 - 8x + 10\,.$$

(b) Da das Polynom gerade ist, sind auch $x_3 = -3$ und $x_4 = -6$ Nullstellen. Damit hat das Polynom die Form

$$p(x) = a \cdot (x+3)(x-3)(x+6)(x-6), \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}\,.$$

Es gilt

$$p(0) = a \cdot 3 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot (-6) = 324a$$

und wegen $p(0) = -3$ gilt

$$a = \frac{-3}{423} = -\frac{1}{108}\,.$$

Also gilt

$$p(x) = -\frac{1}{108} \cdot (x+3)(x-3)(x+6)(x-6)\,.$$

Polynomdivision

Aufg. 6

Zeigen Sie, dass $x_0 = -5$ eine Nullstelle von $p(x) = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$ ist. Berechnen Sie mit Hilfe der Polynomdivision das Polynom q, für das gilt $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$.

Lösung: Es gilt $p(-5) = 3(-5)^3 + 18(-5)^1 + 9(-5) - 30$. Die Polynomdivision ergibt

$$p(x) = (x + 5) \cdot (3x^2 + 3x - 6)\,.$$

Polynomdivision

Aufg. 7

Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden Polynome mit Hilfe einer Polynomdivision und stellen Sie die Polynome in Linearfaktorzerlegung dar. Die Polynome besitzen mindestens eine ganzzahlige Nullstelle.

$(a)\ h : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ $\quad$ $(b)\ f : t \mapsto -2t^4 - 2t^3 - 4t + 8$

$(c)\ g : x \mapsto x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ $\quad$ $(d)\ p : t \mapsto 2t^4 + 8t^3 - 12t^2 - 8t + 10$

Lösung:

(a) $h(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 2)$

(b) $f(t) = -2(t - 1)(t + 2)(t^2 + 2)$

(c) $g(x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$

(d) $p(t) = 2(t - 1)^2(t + 1)(t + 5)$

Algebraische Gleichungen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.9.

Gleichungen — Aufg. 1

(a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ die x-Achse nur im Punkt $S(-2|0)$ schneidet.

(b) Die Gerade g geht durch S und hat die Steigung 2. Berechnen Sie alle Schnittpunkte von g mit dem Graphen von f.

Lösung:

(a) Es gilt $f(-2) = 0$. Gibt es noch andere Nullstellen? Wir führen eine Polynomdivision durch und berechnen die Diskriminante der resultierenden quadratische Gleichung:

$$(x^3 - 2x^2 - 3x + 10) : (x + 2) = x^2 - 4x + 5 \quad \Rightarrow D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0\,.$$

Aus $D < 0$ folgt, dass es keine weiteren reellen Nullstellen gibt.

(b) Die Geradengleichung lautet $g : x \mapsto 2x + 4$. Die Schnittpunkte mit f sind die drei Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ und wir erhalten $S(-2|0),\ P(1|6),\ Q(3|10)\,.$

Gleichungen — Aufg. 2

Bestimmen Sie durch Probieren eine Nullstelle und berechnen Sie danach die weiteren Nullstellen.

(a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

(b) $f(x) = 4x^3 - 20x^2 - x + 110$

Lösung:

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, -2, 2\}$

(b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2\}$

Gleichungen — Aufg. 3

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen an:

$$(a)\ x^2 - 2x - 7 = 0 \qquad (b)\ x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$$
$$(c)\ 2x^3 - 5x^2 - 10x = 0 \qquad (d)\ x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

Lösung:

(a) $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = 1 \pm 2\sqrt{2}\,.$

(b) $x_1 = 3$ ist Nullstelle (raten und überprüfen!). Wir führen die Polynomdivision aus

$$(x^3 - 6x^2 - x + 30) : (x - 3) = x^2 - 3x - 10 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3 \pm 7)\,.$$

Also $x_2 = -2$, $x_3 = 5$ und damit $\mathbb{L} = \{-2, 3, 5\}$

(c) Ein x läßt sich ausklammern

$$2x^3 - 5x^2 - 10x = x \cdot (2x^2 - 5x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - 5x - 10 = 0\,.$$

Das Polynom links ist quadratisch und hat die Nullstellen $x_2 = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{105})$ und $x_3 = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{105})$ Also $\mathbb{L} = \{0, \frac{1}{4}(5 - \sqrt{105}), \frac{1}{4}(5 + \sqrt{105})\}$

(d) Wir substituieren $z := x^2$ und lösen die quadratische Gleichung in z, also

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \Rightarrow z_1 = 4,\ z_2 = 9\,.$$

Die Rücksubstitution liefert die vier Lösungen in x: $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -3$.

Anwendung: Newton-Verfahren

Aufg. 4

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$f : x \mapsto \sin(x) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{10}\,.$$

Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f für den Startwert $x_0 = \frac{1}{10}$. Führen Sie drei Iterationen durch. Hinweis: $f' : x \mapsto \cos(x) - \frac{1}{2}$.

(b) Bestimmen Sie eine Folge, die sich für große n an $\sqrt{5}$ annähert. Hinweis: Betrachten Sie $f : x \mapsto x^2 - 5$ mit $f' : x \mapsto 2x$.

(c) Berechnen Sie die ersten drei Iterierten des Newton-Verfahrens zur Funktion

$$f : x \mapsto x^3 - 2y + 2$$

mit Startwert $x_0 = 0$. Konvergiert das Newton-Verfahren? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a) Es gilt $f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$ und wir erhalten

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} = x_m - \frac{\sin(x_m) - \frac{1}{2}x_m - \frac{1}{10}}{\cos(x_m) - \frac{1}{2}}$$

Die ersten drei Iterierten lauten

$$x_1 \approx 0.202, \quad x_2 \approx 0.203, \quad x_3 \approx 0.202\,.$$

(b) Die Idee ist das Newton-Verfahren zu bemühen. Man wählt zum Beispiel $x_0 = \frac{1}{2}$ und iteriert wie folgt:

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} = x_m - \frac{x_m^2 - 5}{2x_m}\,.$$

(c) Die Newton-Iteration lautet

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} = x_m - \frac{x_m^2 - 2x_m + 2}{3x_m^2 - 2}\,.$$

Es gilt also

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0, \quad x_2 = 0 - \frac{2}{-2} = 1, \quad x_3 = 0\,.$$

Es werden abwechselnd die Werte 0 und 1 angenommen, so dass eine Konvergenz der Iterierten ausgeschlossen ist. Der Startwert $x_0 = 0$ war offenbar nicht nah genug an der Lösung dran.

Exponential- und Logarithmusfunktionen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.10.

Interpolation — Aufg. 1

Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktion

$$f : x \mapsto a \cdot e^{-bx}$$

so, dass die Punkt (0|8) und (5|3) auf der Kurve liegen. Runden Sie die Parameter auf drei Nachkommastellen.

Lösung:
Es muss gelten

$$a \cdot \underbrace{e^{-b\cdot 0}}_{=1} = 8 \wedge a \cdot e^{-b\cdot 5} = 3$$

Aus der ersten Bedingung folgt $a = 8$ und eingesetzt in die zweite Bedingung folgt

$$8 \cdot e^{-b\cdot 5} = 3 \Leftrightarrow -5 \cdot b = \ln(3/8) \Leftrightarrow b = \frac{\ln(8/3)}{5}\,.$$

Damit ergibt sich $b \approx 0,196165850 \approx 0,196$

$f : x \mapsto 2^x$ — Aufg. 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f : x \mapsto 2^x$

(a) Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich D und die Wertemenge W

(b) Berechnen Sie $f(-\frac{1}{4})$ auf 2 Dezimalen genau.

(c) Für welches $x \in D$ ist $f(x) = 8$?

(d) Für welche $x \in D$ ist $f(x) \leq 16$?

(e) Zeigen Sie $f(x) \cdot f(-x) = 1$ für alle $x \in D$

(f) Zeigen Sie $f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$ für alle $x \in D$

Lösung:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto 2^x$

(b) Mit dem Taschenrechner erhält man sofort $f(-\frac{1}{4}) = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} \approx 0.84.^{(*)}$

(c) $f(3) = 8$

(d) $f(x) = 2^x \leq 16 \Leftrightarrow x \leq 4$

(e) $f(x) \cdot f(-x) = 2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = 1$

(f) $f(x + 1) = 2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2 \cdot f(x)$

(∗) Man kann das auch mit einer Intervallschachtelung machen: hierzu konstruieren wir eine Folge $\{a_n\}$ rationaler Zahlen, $a_n \in \mathbb{Q}$, die die Zahl $2^{-\frac{1}{4}}$ von oben und von unten beschränkt. Die Intervallschachtelung basiert auf der Idee, dass die Anwendung einer Potenzfunktion auf positive Zahlen eine Äquivalenzrelation ist. Schauen wir uns ein paar Schritte beispielhaft an: es sei $x := 2^{\frac{1}{4}}$. Das einzige, was wir über x wissen, ist, dass $x^4 = 2$ ist.

$$\begin{array}{lll}
1.\text{Intervall}: & (1)^4 = 1 < x^4 = 2 < (2)^4 = 16 & \Rightarrow x \in [1, 2] \\
2.\text{Intervall}: & (1)^4 = 1 < x^4 = 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^4 \approx 5,06 & \Rightarrow x \in [1, \frac{3}{2}] \\
3.\text{Intervall}: & (1)^4 = 1 < x^4 = 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2,44 & \Rightarrow x \in [1, \frac{3}{2}] \\
4.\text{Intervall}: & \left(\frac{9}{8}\right)^4 = 1,6 < x^4 = 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4 \approx 2,44 & \Rightarrow x \in [\frac{9}{8}, \frac{5}{4}] \\
5.\text{Intervall}: & \ldots &
\end{array}$$

Eigentlich sollten wir den Kehrwert approximieren. Es gilt nach dem 4. Schritt entsprechend $\frac{1}{x} \in [\frac{4}{5}, \frac{8}{9}]$ mit $\frac{4}{5} = 0,8 < \frac{1}{x} < \frac{8}{9} = 0,\bar{8}$.

Rechenregeln — Aufg. 3

(a) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke ohne Taschenrechner:

$$\lg(4) + 2\lg(5),\ e^{5\ln(2)},\ \lg(3000) - \lg(3)\,.$$

(b) In folgender Umformung ist ein Fehler - finden Sie ihn?

$$e^{0.5(\ln x)^2} = \left(e^{(\ln x)^2}\right)^{0.5} = e^{(\ln x)^{2\cdot 0.5}} = e^{(\ln x)} = x\,.$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\lg(4) + 2\lg(5) &= \lg(4) + \lg(5^2) == \lg 4 + \lg(25) = \lg(4\cdot 25) = \lg(100) = 2 \\
e^{5\ln(2)} &= e^{\ln(2^5)} = 2^5 = 32 \\
\lg(3000) - \lg(3) &= \lg(3000/3) = \lg(1000) = 3
\end{aligned}$$

(b) $\left(e^{(\ln x)^2}\right)^{0.5} \neq e^{(\ln x)^{2\cdot 0.5}}$.

Gleichungen — Aufg. 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$(a)\ e^{x^2-2x} = 1$ $\qquad (b)\ e^x + 2\cdot e^{-x} = 3$

$(c)\ \ln(\sqrt{x}) + 1,5\cdot\ln(x) = \ln(2x)$ $\qquad (d)\ (\lg(x))^2 - \lg(x) = 2$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{array}{rrcll}
 & e^{x^2-2x} & = & 1 & |\ln \\
\Leftrightarrow & x^2 - 2x & = & 0 & |+1 \\
\Leftrightarrow & (x-1)^2 & = & 1 &
\end{array}$$

Damit ist $\mathbb{L} = \{2, 0\}$.

(b) Substituiere $u = e^x$. Dann gilt

$$\begin{array}{rrcll}
 & e^x + 2\cdot e^{-x} & = & 3 & ||\ln(\cdot) \\
\Leftrightarrow & u + 2/u & = & 3 & ||\cdot u,\ u \neq 0 \\
\Leftrightarrow & u^2 + 2 & = & 3u & ||-3u \\
\Leftrightarrow & u^2 - 3u + 2 & = & 0 &
\end{array}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Lösungsformel erhalten wir $u = 1 \vee u = 2$. Rücksubstitution ergibt als Lösungen für x: $x = \ln(1) = 0$ oder $x = \ln(2)$, also $\mathbb{L} = 0, \ln(2)$.

(c) Es gilt

$$\begin{array}{rrcll}
 & \ln(\sqrt{x}) + 1,5\cdot\ln(x) & = & \ln(2x) & \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\ln(x) + 1,5\ln(x) & = & \ln(2) + \ln(x) & \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{1}{2} + 1,5 - 1\right)\ln(x) & = & \ln(2) & \\
\Leftrightarrow & \ln(x) & = & \ln(2) & |e^{\cdot} \\
\Leftrightarrow & x & = & 2 &
\end{array}$$

(d) Substitution $u = \lg(x)$ fürht auf $u^2 - u = 2$ und diese quadratische Gleichung besitzt die Lösungen $u = 2$ oder $u = -1$ - also $x = 100$ oder $x = 0,1$.

Anwendung: Radioaktiver Zerfall

Aufg. 5

Eine radioaktive Substanz zerfällt nach dem Gesetz

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}\,.$$

mit $n_0, \lambda \in \mathbb{R}^+$. Die halbwertszeit τ ist definiert durch $n(\tau) = n(0)/2$.

(a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion mit Definitionsbereich, Wertebereich und Abbildungsvorschrift.

(b) Geben Sie eine allgemeine Formel für τ an.

(c) Berechnen Sie die Halbwertszeitfür Radon mit $\lambda = 2,0974 \cdot 10^{-6} s^{-1}$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \quad t \mapsto n_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Für die Umkehrfunktion löse

$$\begin{array}{llll} & n_0 \cdot e^{-\lambda t} & = & n & |: n_0,\ n_0 \neq 0 \\ \Leftrightarrow & e^{-\lambda t} & = & n/n_0 & |\ln(\cdot),\ n > 0 \\ \Leftrightarrow & -\lambda t & = & \ln(n/n_0)/\lambda & |:(-\lambda),\ \lambda \neq 0 \\ \Leftrightarrow & t = -\ln(n/n_0)/\lambda & & & \\ \Leftrightarrow & t & = & \ln(n_0/n)/\lambda & \end{array}$$

Die Funktion ist für $n > 0$ umkehrbar und die Umkehrfunktion lautet

$$n^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto \ln(n_0/n)/\lambda\,.$$

(b) Es gilt $\tau = n^{-1}\left(\dfrac{n_0}{n_0/2}\right)/\lambda = \ln(2/\lambda)$.

(c) Es gilt $\tau = \dfrac{\ln(2)}{2,0974 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}} \approx 330,479 \cdot 10^3\,\mathrm{s} \approx 3,824\,\mathrm{d}\,.$

Rationale Funktionen Aufgaben mit Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.11.

Abbildungsvorschrift — Aufg. 1

Geben Sie eine gebrochenrationale Funktion an mit

(a) Nullstelle 1 $\Rightarrow\ x \mapsto \dfrac{x-1}{x}$

(b) Polstelle 3 mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow\ x \mapsto \dfrac{1}{x-3}$

(c) Polstelle 3 ohne Vorzeichenwechsel $\Rightarrow\ x \mapsto \dfrac{1}{(x-3)^2}$

(d) Nullstelle 1 und Polstelle 3 ohne Vorzeichenwechsel $\Rightarrow\ x \mapsto \dfrac{x-1}{(x-3)^2}$

(e) Nullstellen 2 und 3, Polstelle 4 mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow\ x \mapsto \dfrac{(x-2)\cdot(x-3)}{x-4}$

(f) Nullstelle -1, Polstelle -3 mit Vorzeichenwechsel, Polstelle 4 ohne Vorzeichenwechsel $\Rightarrow\ x \mapsto \dfrac{(x+1)}{(x+3)\cdot(x-4)^2}$

Asymptoten für $|x| \to \infty$ — Aufg. 2

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$. Geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der waagerechten Asymptote an.

$(a)\ f(x) = \frac{7}{x}$	$(b)\ f(x) = \dfrac{-3x^3+4x+16}{4x^2}$	$(c)\ f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$
$(d)\ f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt{x}$	$(e)\ f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$	$(f)\ f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-2}}$

Lösung:

(a) $\dfrac{7}{x} \to 0$ für $x \to \pm\infty\ \Rightarrow\ y = 0$ ist waagerechte Asymptote,

(b) $\dfrac{-3x^3+4x+16}{4x^2} = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{4+x}{x^2} \to -\dfrac{3}{4}x$ für $x \to \pm\infty\ \Rightarrow\ y(x) = -\dfrac{3}{4}x$ ist die Asymptotengerade,

(c) $\dfrac{x^3+1}{x-1} = x^2+x+1+\dfrac{2}{x-1} \to x^2+x+1$ für $x \to \pm\infty\ \Rightarrow\ y(x) = x^2+x+1$ ist die asymptotische Kurve,

(d) $\dfrac{2}{x} + \sqrt{x} \to +\infty$ für $x \to +\infty\ \Rightarrow$ keine waagerechte Asymptote,

(e) $\dfrac{2}{(x-1)^2} \to 0$ für $x \to \pm\infty 0\ \Rightarrow\ y = 0$ ist waagerechte Asymptote.

(f) $\dfrac{4}{\sqrt{x-2}} \to 0$ für $x \to +\infty 0\ \Rightarrow\ y = 0$ ist waagerechte Asymptote.

Vertikale Asymptoten — Aufg. 3

Untersuchen Sie das Verhalten von f bei Annäherung an die Definitionslücke. Geben Sie die Geichung der senkrechten Asymptote an.

$(a)\ f(x) = \frac{2}{x}$	$(b)\ f(x) = -\frac{2}{x^2}$	$(c)\ f(x) = \frac{1}{x-4}$
$(d)\ f(x) = \frac{2}{4-x}$	$(e)\ f(x) = 1 - \frac{1}{x}$	$(f)\ f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$

Lösung:

(a) Für $x \to 0$ und $x > 0$ gilt: $\frac{2}{x} \to +\infty$, für $x \to 0$ und $x < 0$ gilt: $\frac{2}{x} \to -\infty$, $x = 0$ ist senkrechte Asymptote,

(b) Für $x \to 0$ und $x > 0$ gilt: $-\frac{2}{x^2} \to -\infty$, für $x \to 0$ und $x < 0$ gilt: $-\frac{2}{x^2} \to -\infty$, $x = 0$ ist senkrechte Asymptote,

(c) Für $x \to 4$ und $x > 4$ gilt: $\frac{1}{4-x} \to -\infty$, für $x \to 4$ und $x < 4$ gilt: $\frac{1}{4-x} \to +\infty$, $x = 4$ ist senkrechte Asymptote,

(d) Für $x \to 4$ und $x > 4$ gilt: $\frac{2}{4-x} \to -\infty$, für $x \to 4$ und $x < 4$ gilt: $\frac{2}{4-x} \to +\infty$, $x = 4$ ist senkrechte Asymptote,

(e) Für $x \to 0$ und $x > 0$ gilt: $1 - \frac{1}{x} \to -\infty$, für $x \to 0$ und $x < 0$ gilt: $1 - \frac{1}{x} \to +\infty$, $x = 0$ ist senkrechte Asymptote,

(f) Für $x \to 1$ und $x > 1$ gilt: $\frac{3}{(x-1)^2} \to +\infty$, für $x \to 1$ und $x < 1$ gilt: $\frac{3}{(x-1)^2} \to +\infty$, $x = 1$ ist senkrechte Asymptote,

Asymptoten

Aufg. 4

Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an

$(a)\ f(x) = \frac{4}{3x^2}$ $\quad (b)\ f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3x}$ $\quad (c)\ f(x) = \frac{x^4-x^2-1}{x^3-1}$

Lösung:

(a) vertikale Asymptote an der Stelle $x = 0$, horizontale Asymptotengerade $g : x \mapsto 0$

(b) vertikale Asymptoten an den Stllen $x = 0$ und $x = -3$, horizontale Asymptotengerade $g : x \mapsto 0$

(c) vertikale Asymptote an der Stelle $x = 1$, horizontale Asymptotengerade $g : x \mapsto x$

Qualitativer Graph

Aufg. 5

Ermitteln Sie von den folgenden Funktionen die

- die Definitionsmenge,
- die Achsenabschnitte,
- die Nullstellen,
- die Polstellen inklusive der Analyse des Verhaltens von f an jeder Polstelle und
- fertigen Sie mit diesen Informationen eine qualitative Skizze des jeweiligen Funktionsgraphen an.

$(a)\ f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$ $\quad (b)\ f(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ $\quad (c)\ f(x) = \frac{x^2-9}{(x-3)^2}$

Lösung:

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, Nullstelle $x_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow N(\frac{1}{3}|0)$, Polstelle: $x_2 = 1$ mit VZW, y-Achsenabschnitt für $y = 1$

(b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, Nullstelle $x_1 = 0 \Rightarrow N(0|0)$, $x = -1$ ist keine Polstelle, da der Linearfaktor $(x + 1)$ in Zähler und Nenner auftaucht, y-Achsenabschnitt für $y = 0$

(c) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, Nullstelle $x = -3$, Polstelle: $x_1 = -3$ mit VZW, y-Achsenabschnitt für $y = -1$

Komposition von Funktionen Aufgaben mit Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 1.12.

Verkettungen

Aufg. 1

Bestimmen Sie Funktionen u_1, u_2 so, dass $f = u_1 \circ v_1 = u_2 \circ v_2$ ist:

(a) $f(x) = (2x+6)^3, \quad v_1(x) = 2x+6, \quad v_2(x) = x+3$

(b) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}, \quad v_1(x) = x-1, \quad v_2(x) = (x-1)^2$

Lösung:

(a) $u_1(x) = x^3$, $u_2(x) = (2 \cdot x)^3$

(b) $u_1(x) = \frac{3}{x^2}$, $u_2(x) = \frac{3}{x}$

Definitionsbereich

Aufg. 2

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $u \circ v$ an

(a) $u(x) = \sqrt{x}, \quad v(x) = 3-x$

(b) $u(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = 4-x^2$

(c) $u(x) = \sqrt{1-x}, \quad v(x) = x^2$

Lösung:

(a) $(u \circ v)(x) = \sqrt{3-x} \;\Rightarrow\; D_{u \circ v} = (-\infty, 3]$

(b) $(u \circ v)(x) = \frac{1}{4-x^2} \;\Rightarrow\; D_{u \circ v} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

(c) $(u \circ v)(x) = \sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; D_{u \circ v} = [-1, 1]$

Definitionsbereich

Aufg. 3

Gegeben sind die Funktionen $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$ und $u : [0, 2\pi] \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$. Betrachten Sie die Funktion $f : u \circ v$. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.
Lösung: Da der Logarithmus nur positive Zahlen verarbeitet, darf der Definitionsbereich der Funktion f keine x enthalten, für die der Sinus ≤ 0 liefert. Es gilt $\sin(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \pi)$ und damit

$$v \circ u :\ (0, \pi) \to (-\infty, 0],\ x \mapsto \ln(\sin(x)) \ .$$

$g : x \mapsto 0,7 \cdot (x+2)^{-2} + 4$

Aufg. 4

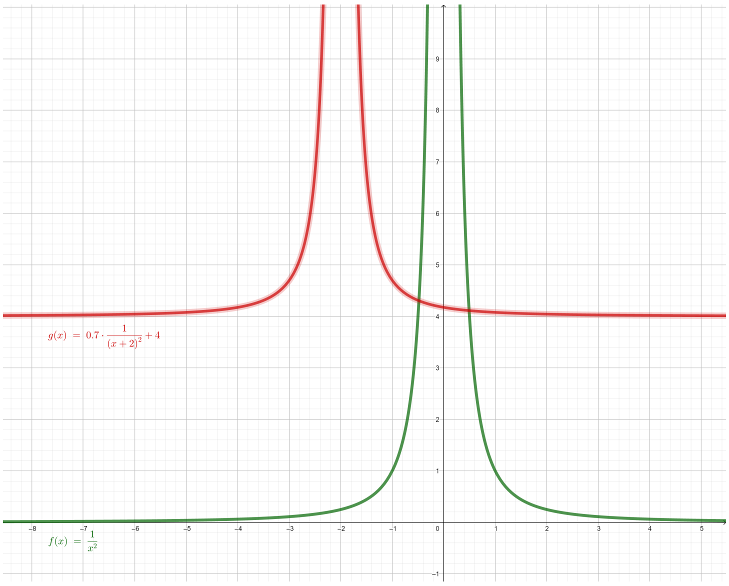
Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto x^{-2}$ und $g : x \mapsto 0,7 \cdot (x+2)^{-2} + 4$.

(a) Geben Sie den Definitions- und den Bildbereich der Funktionen f und g an.

(b) Beschreiben Sie, wie die Funktion g aus der Funktion f hervorgeht.

(c) Bestimmen Sie die Asymptoten der Funktionen f und g.

Lösung:



(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to (0, \infty)$, $g : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to (4, \infty)$,

(b) Der Funktionsgraph von f wird entlang der x-Achse um zwei Einheiten nach links verschoben und um den Faktor $0,7$ vertikal gestaucht und schließlich entlang der y-Achse um vier Einheiten nach oben verschoben.

(c) Horizontale Asymptoten: $w_f : x \mapsto 0$, $w_g : x \mapsto 4$; f hat eine vertikale Asymptote an der Stelle $x^* = 0$ und g entsprechend an der Stelle $x^* = -2$.

Manipulationen eines Graphen — Aufg. 5

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$. Geben Sie die Abbildungsvorschrift an, die man auswerten muss, um den Graphen von f ...

(a) um den Faktor 5 horizontal zu stauchen: $x \mapsto f(5 \cdot x)$,

(b) um den Faktor π vertikal zu strecken: $x \mapsto \pi \cdot f(x)$,

(c) um 2 Längeneinheiten horizontal nach links zu verschieben: $x \mapsto f(x + 2)$,

(d) um $3\sqrt{7}$ Längeneinheiten vertikal nach oben zu verschieben: $x \mapsto f(x) + 3\sqrt{7}$

(e) um den Graphen an der x-Achse zu spiegeln: $x \mapsto -f(x)$.

Anwendung: Temperaturskalen — Aufg. 6

Temperaturangaben der Kelvin Skala rechnet man in solche der Celsius Skala um nach der Vorschrift $x \mapsto x - 273$, solche der Celsius Skala in die Fahrenheit Skala durch $x \mapsto 1,8x + 32$. Wie lautet die Vorschrift, um von der Kelvin Skala direkt in die Fahrenheit Skala umzurechnen?

Lösung: Es ist $T_{\mathrm{K}\to\mathrm{C}} : x \mapsto x - 273$ und $T_{\mathrm{C}\to\mathrm{F}} : x \mapsto 1,8 \cdot x - 32$. Also $T_{\mathrm{K}\to\mathrm{F}} = T_{\mathrm{C}\to\mathrm{F}} \circ T_{\mathrm{K}\to\mathrm{C}} : x \mapsto 1,8 \cdot (x - 273) - 32 = 1,8 \cdot x - 523,4$.

Trigonometrische Funktionen Aufgaben mit Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.13.

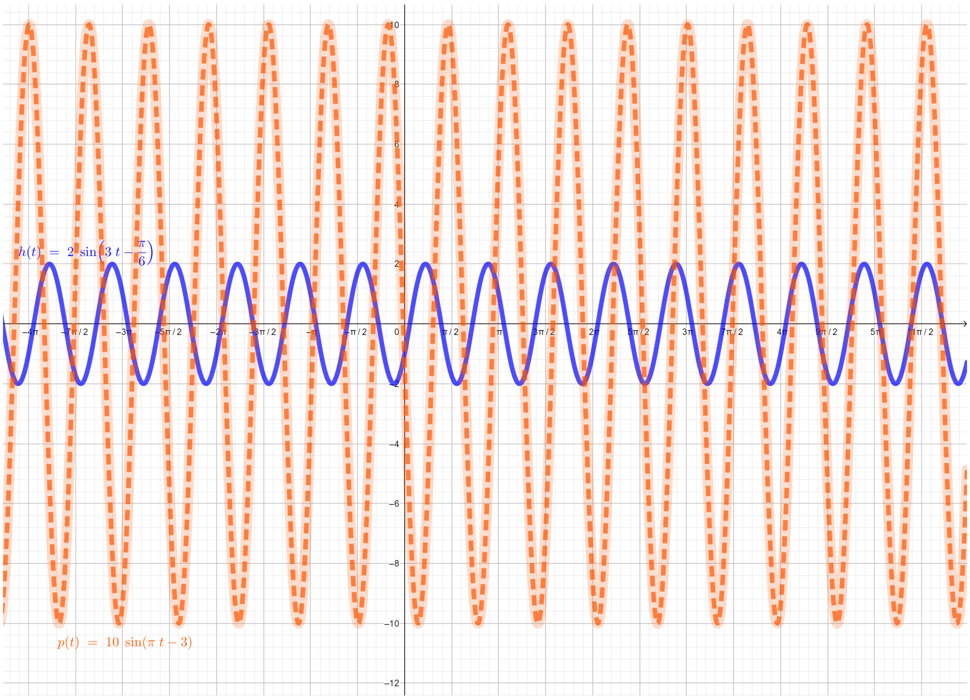
Harmonische Schwingungen

Aufg. 1

Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Nullphase der folgenden harmonischen Schwingungen und skizzieren Sie den Funktionsverlauf.

$$(a)\ t \mapsto 2 \cdot \sin\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad\qquad (b)\ t \mapsto 10 \cdot \sin(\pi t - 3\pi)$$

Lösung:



(a) Die Amplitude A, die Periode T und die Nullphase ϕ sind

$$A = 2, \quad T = \frac{2\pi}{3}, \quad \phi = -\frac{\pi}{6}$$

(b) Die Amplitude A, die Periode T und die Nullphase ϕ sind

$$A = 10, \quad T = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad \phi = -3\pi$$

Interpolation

Aufg. 2

Eine Funktion der Form

$$f : x \mapsto \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$$

soll durch die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ mit

$$(0|1), (\pi/6| - 1), (\pi/2| - 3)$$

gelegt werden. Bestimmen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, a_1, b_1 und lösen Sie es.

Lösung: Allgemein muss gelten

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \cos x_1 & \sin x_1 \\ 1/2 & \cos x_2 & \sin x_2 \\ 1/2 & \cos x_3 & \sin x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Im speziellen Fall ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet $a_0 = 2,\ a_1 = 0,\ a_2 = -4$ und für die Funktion $f(x) = 1 - 4\sin(x)$.

Gleichungen

Aufg. 3

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $\sin(2x+5) = 0,4$ $\qquad$ (b) $\tan(2(x+1)) = 1$

(c) $\sqrt{\cos(x-1)} = 2^{-1/4}$ $\qquad$ (d) $\sin(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$

Lösung:

(a) Substituiere $u = 2x+5$. Dann gilt $\sin(u) = 0,4$ falls

$$u = \arcsin(0,4) + 2k\pi \text{ oder } u = \pi - \arcsin(0,4) + 2k\pi,$$

$k \in \mathbb{Z}$. Wegen $x = (u-5)/2$ lösen

$$x = (\arcsin(0,4) + 2k\pi - 5)/2 \text{ oder } x = (\pi - \arcsin(0,4) + 2k\pi - 5)/2$$

die Gleichung.

(b) $u = 2(x+1)$. Dann gilt $\tan(u) = 1$ falls

$$u = \pi/4 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $x = u/2 - 1$ folgt

$$x = \pi/8 + k\pi/2 - 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos(x-1)} &= 2^{-1/4} \quad |\cdot^2 \\ \Rightarrow \quad \cos(x-1) &= 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Setze $u = x-1$. Dann gilt $\cos(u) = 1/\sqrt{2}$ falls

$$u = \pi/4 + 2k\pi \quad \text{oder} \quad u = -\pi/4 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mit $x = u+1$ folgt

$$x = \pi/4 + 1 + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = 1 - \pi/4 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sqrt{1-(\sin(x))^2} \quad |\cdot^2 \\ \Rightarrow \quad (\sin(x))^2 &= 1-(\sin(x))^2 \\ \Leftrightarrow \quad (\sin(x))^2 &= 1/2 \quad |\sqrt{\cdot} \\ \Leftrightarrow \quad \sin(x) &= \pm 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Wegen der ersten Gleichung muss $\sin(x)$ nichtnegativ sein, da die Wurzel auf der rechen Seite immer nichtnegativ ist. Daher muss $\sin(x) = 1/\sqrt{2}$ gelten. Die Lösungen sind

$$x = \pi/4 + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x = 3\pi/4 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Probe ergibt

$$\begin{aligned} \sin(\pi/4 + 2k\pi) &= \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{1-(\sin(\pi/4+2k\pi))^2} &= \sqrt{1-1/2} = 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \sin(3\pi/4 + 2k\pi) &= \sin(3\pi/4) = 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{1 - (\sin(3\pi/4 + 2k\pi))^2} &= \sqrt{1 - 1/2} = 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Demnach sind alle Lösungen durch

$$x = \pi/4 + 2k\pi \quad \text{oder} \quad 3\pi/4 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

gegeben.

Kreisgleichung

Aufg. 4

Bestimmen Sie die Schnittpunkte der angegebenen Geraden g mit dem Kreis $k := \{(x, y) : \ x^2 + y^2 = 4\}$:

$(a)\ g_1 : x \mapsto x - 2 \qquad (b)\ g_2 : x \mapsto x - 4 \qquad (c)\ g_3 : x \mapsto 2$

Lösung:

(a) Zu lösen ist die quadratische Gleichung $x^2 - 2x = 0$. Für $x_1 = 0$ erhält man den ersten Schnittpunkt $S_1 = (0, -2)$ und für $x_2 = 2$ erhälte man den zweiten Schnittpunkt $S_2 = (2|0)$.

(b) Zu lösen ist die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 6 = 0$. Diese hat keine reellen Lösungen, also schneiden sich Kreis und Gerade nicht.

(c) Zu lösen ist die quadratische Gleichung $x^2 = 0$. Die Lösung $x = 0$ führt auf den Schnittpunkt $(0, 2)$.

Kreisgleichung

Aufg. 5

Welche der Gleichungen beschreiben einen Kreis? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Mittelpunkte und die Radien.

$(a)\ (x + 2)^2 + y^2 = 64 \qquad (b)\ (x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0 \qquad (c)\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

$(d)\ x^2 + y^2 - 2x + 2y + 14 = 0 \qquad (e)\ x^2 + y^2 + y = 0$

Lösung:

(a) $(x + 2)^2 + y^2 = 64$ Kreis mit Radius 8 und Mittelpunkt $M(-2|0)$

(b) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0$ Diese Gleichung bestimmt einen einzigen Punkt, nämlich $P(5| - 2)$

(c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$ Kreis mit Radius $\sqrt{20}$ und Mittelpunkt $M(1| - 2)$

(d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 14 = 0$ Diese Gleichung bestimmt weder Kurve noch Punkt

(e) $x^2 + y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $M(0| - \frac{1}{2})$

Qualitativer Graph

Aufg. 6

(a) Zeichnen Sie die Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2}) - 2$ auf dem Intervall $[-\pi, 3\pi]$ und lesen Sie aus dem Graphen den Bildbereich, die Nullstellen und die Extremstellen von f ab.

(b) Zeichnen Sie die Funktion $f : x \mapsto -\sin(x - \pi)$ auf dem Intervall $[0, \frac{5\pi}{2}]$ und lesen Sie aus dem Graphen den Bildbereich, die Nullstellen und die Extremstellen von f ab.

Lösung:

(a) Die Sinuskurve ist entlang der x-Achse um $\pi/2$ nach rechts und entlang der y-Achse um 2 nach oben verschoben und hat die Amplitude 2. Der Wertebereich ist $[-4, 0]$, die Nullstellen sind $\{-\pi, \pi, 3\pi\}$

und die Extremstellen sind $\{-\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$.

(b) Die Sinuskurve ist entlang der x-Achse um π nach rechts und an y-Achse gespiegelt. Der Wertebereich ist $[-1, 1]$, die Nullstellen sind $\{0, \pi, 2\pi\}$ und die Extremstellen sind $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$.

Komplexe Zahlen I

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.14.

Rechenregeln

Aufg. 1

Gegeben sinde die komplexen Zahlen $z_1 := -2 + 4i$ und $z_2 := 1 - 3i$.

(a) Berechnen Sie $i \cdot z_1 - 2 \cdot z_2, \quad z_1 \cdot z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{2z_1z_2}{z_1^2 + z_2^2}.$

(b) Bestimmen Sie $|z_1|, \quad |z_2|, \quad |z_1 \cdot z_2|.$

(c) Bestimmen Sie $\overline{z_1}, \quad \overline{z_2}, \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$

(d) Stellen Sie die folgenden Zahlen in der kartesischen Form dar $(a, b \in \mathbb{R})$:

$$\frac{3 - 21i}{4 - 3i} + 3(i - 8), \quad (2 - 4i)^2 + \frac{|1 - \sqrt{3}i|}{i}, \quad \left|\frac{a + bi}{a - bi} + \frac{a - bi}{a + bi}\right|$$

Lösung:

(a) $-6 + 4i, \quad 10 + 2i, \quad -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i, \quad \frac{2z_1z_2}{z_1^2 + z_2^2} = \frac{-132 + 90i}{221}$

(b) $\sqrt{20}, \quad \sqrt{10}, \quad \sqrt{200}$

(c) $\overline{z_1} = -2 - 4i, \quad \overline{z_2} = 1 + 3i, \quad \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = 10 - 10i$

(d) $-21, \quad -12 + 18i, \quad 2\left|\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right|$

Ungleichungen

Aufg. 2

Bestimmen Sie die Punkte $z \in \mathbb{C}$, die folgende Eigenschaften besitzen:

(a) $0 < |z + i| < 2$

(b) $|z - z_1| = |z - z_2|$

(c) $|z^2 - \overline{z}^2| \geq 4$

Lösung:

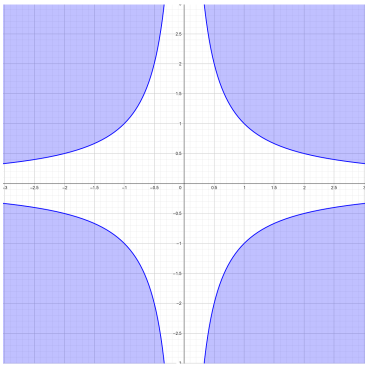
(a) Die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z + i| < 2$ entspricht einer Kreisscheibe mit Radius 2, deren Mittelpunkt $M(0| - i)$ ist. Der Mittelpunkt selbst ist in der Menge nicht enthalten.

$$0^2 = 0 < (z + i)\overline{(z + i)} = (x + i(y + 1)) \cdot (x - i(y + 1)) = x^2 + (y + 1)^2 < 2^2 = 4$$

(b) Die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_1| = |z - z_2|$ sind die Punkte, deren Abstand zu dem gegebenen Punkt z_1 gleich groß ist wie zu dem gegebenen Punkt z_2. Also die Mittelsenkrechte zwischen den gegebenen Punkten z_1 und z_2.

(c) $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z^2 - \overline{z}^2| \geq 4\}$

$$|z^2 - \overline{z}^2| \geq 4 \Leftrightarrow |\underbrace{(z - \overline{z})}_{2 \cdot y} \cdot \underbrace{(z + \overline{z})}_{2 \cdot x}| \geq 4 \Leftrightarrow |4 \cdot x \cdot y| \geq 4 \Leftrightarrow |x \cdot y| \geq 1$$



Fallunterscheidung:

$$\begin{cases} x>0, y>0: & |x\cdot y| = x\cdot y \geq 1 & \Leftrightarrow y \geq \dfrac{1}{x} \\ x>0, y<0: & |x\cdot y| = -x\cdot y \geq 1 & \Leftrightarrow y \leq -\dfrac{1}{x} \\ x<0, y>0: & |x\cdot y| = -x\cdot y \geq 1 & \Leftrightarrow y \geq -\dfrac{1}{x} \\ x<0, y<0: & |x\cdot y| = x\cdot y \geq 1 & \Leftrightarrow y \leq \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Die imaginäre Einheit

Aufg. 3

Berechnen Sie i^{172} und i^{175}.

Lösung:

$$\begin{aligned} i^{4m} &= 1,\ m\in\mathbb{N}_0 \\ i^{4m+1} &= i,\ m\in\mathbb{N}_0 \\ i^{4m+2} &= -1,\ m\in\mathbb{N}_0 \\ i^{4m+3} &= -i,\ m\in\mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\qquad i^{172} = \left(i^4\right)^{43} = 1 \\ \Rightarrow &\qquad i^{175} = \left(i^4\right)^{43}\cdot i^3 = -i \end{aligned}$$

Kartesische und Polarkoordinaten

Aufg. 4

(a) Bestimmen Sie von folgenden komplexen Zahlen die Polarkoordinaten:

$$z_1 = i, \quad z_2 = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = -1 - i, \quad z_4 = x - \sqrt{3}x\,i\ (x>0)$$

(b) Bestimmen Sie von folgenden komplexen Zahlen die kartesische Form:

$$z_1 \mathrel{\widehat{=}} (1, -4\pi/3)\,, \quad z_2 \mathrel{\widehat{=}} \left(\sqrt{2}a, -\pi/4\right)$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} z_1 &\mathrel{\widehat{=}} (1, \pi/2) \\ z_2 &\mathrel{\widehat{=}} \left(2, \operatorname{atan2}(-1,\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}\right) \\ z_3 &\mathrel{\widehat{=}} \left(\sqrt{2}, \operatorname{atan2}(-1,-1) = -\frac{3}{4}\pi\right) \\ z_4 &\mathrel{\widehat{=}} \left(2x, \operatorname{atan2}(-\sqrt{3}x, x) = -\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

(b) Nach Pythagoras gilt $a = |z|\cos(\varphi)$ und $b = |z|\sin(\varphi)$

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(-4\pi/3) + i\sin(-4\pi/3) = -\frac{e}{2} + i\frac{\sqrt{3}e}{2} \\ z_2 &= \sqrt{2}a\cdot(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = 2a - 2ai\,. \end{aligned}$$

Kartesische und Polarkoordinaten

Aufg. 5

Bestimmen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten die kartesische Form der folgenden komplexen Zahl:

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{60} .$$

Lösung:

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow \tilde{z} \mathrel{\widehat{=}} (1, \pi/3) \Rightarrow z = \tilde{z}^{60} \mathrel{\widehat{=}} \left(1^{60}, 60 \cdot \pi/4\right) = \left(1^{60}, 20 \cdot \pi\right) \Rightarrow z = 1 .$$

Gleichungssystem

Aufg. 6

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} (3-4i)\cdot z_1 & + & (2-i)\cdot z_2 & = & 4-7i \\ (1-2i)\cdot z_1 & + & 4i\cdot z_2 & = & -11-15i \end{array}$$

Lösung: Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$\begin{array}{cc} & \left(\begin{array}{cc|c} 3-4i & 2-i & 4-7i \\ 1-2i & 4i & -11-15i \end{array}\right) \\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} & \left(\begin{array}{cc|c} 3-4i & 2-i & 4-7i \\ 0 & -0.8+4.6i & 12.2-11.6i \end{array}\right) \end{array}$$

wobei $(*)$ die folgende Äquivalenzumformung meint: Addiere das $-(1-2i)/(3-4i)$-fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile. Die zweite Zeile liefert eine lineare Gleichung für z_2:

$$\begin{array}{rlcll} & (-0.8+4.6i)z_2 & = & 12.2-11.6i & \mid : (-0.8+4.6i) \\ \Leftrightarrow & z_2 & = & -2+3i & \end{array}$$

Setzt man z_2 in die erste Zeile ein, so erhält man eine lineare Gleichung für z_1:

$$\begin{array}{rlcll} & (3-4i)z_1 + (-1+8i) & = & 4-7i & \mid -(-1+8i) \\ \Leftrightarrow & (3-4i)z_1 & = & 5-15i & \mid : (3-4i) \\ \Leftrightarrow & z_1 & = & 3-i & \end{array}$$

Die Lösung lautet $z-1 = 3-i,\ z_2 = -2+3j$.

Komplexe Zahlen II Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.15.

Radizieren

Aufg. 1

Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen

$$(a)\ z^3 = -8 \qquad (b)\ z^2 = i \qquad (c)\ z^4 = -16$$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} -8 = 8 \cdot e^{i\pi} \Rightarrow z_k &= \sqrt[3]{8} \cdot e^{i(\pi+2\pi\,k)/3}, \quad k = 0,1,2 \\ z_0 &= 2 \cdot e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i\,, \\ z_1 &= 2 \cdot e^{i\pi} = -2\,, \\ z_2 &= 2 \cdot e^{5/3\pi\,i} = 1 - \sqrt{3}i\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} i = e^{i\pi/2} \Rightarrow z_k &= e^{i(\pi/2+2\pi\,k)/2}, \quad k = 0,1 \\ z_0 &= e^{i\,\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\,, \\ z_1 &= e^{i\,5\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} -16 = 16 \cdot e^{i\pi} \Rightarrow z_k &= \sqrt[4]{16}\, e^{i(\pi+2\pi\,k)/4}, \quad k = 0,1,2,3 \\ z_0 &= 2e^{\pi/4\,i} = 2e^{\pi/4\,i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\,, \\ z_1 &= 2e^{3/4\pi\,i} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,, \\ z_2 &= 2e^{5/4\pi\,i} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\,, \\ z_3 &= 2e^{7/4\pi\,i} = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Eulersche Identität

Aufg. 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Darstellungen für sin und cos gelten

$$(a)\ \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad (b)\ \cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x) \\ \Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} &= \cos(x) + i\sin(-x) + \cos(x) - i\sin(-x) = 2\cos(x) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x) \\ \Rightarrow e^{ix} - e^{-ix} &= \cos(x) + i\sin(-x) - \cos(x) + i\sin(-x) = 2i\sin(x) \Rightarrow \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin(x) \end{aligned}$$

Fundamentalsatz

Aufg. 3

Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots a_1 z + a_0$$

mit reellen Koeffizenten $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.

(a) Zeigen Sie: wenn $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p ist, dann ist auch $\overline{z_0}$ eine Nullstelle von p.

(b) Wenden Sie obigen Satz an, um alle Nullstellen des Polynoma

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) = z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 10z + 25$$

zu bestimmen. Zeigen Sie zu erst, dass $z_1 = 2 + j$ eine Nullstelle ist.

Lösung:

(a) Sei z_0 eine Nullstelle. Zu zeigen ist $p(z_0) = 0 \ \Rightarrow\ p(\overline{z_0}) = 0$:

$$\begin{aligned} p(\overline{z_0}) &= a_n \left(\overline{z_0}\right)^n + a_{n-1} \left(\overline{z_0}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\ &= a_n \left(\overline{z_0^{\,n}}\right) + a_{n-1} \left(\overline{z_0^{\,n-1}}\right) + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\ &= \overline{\left(a_n z_0^n\right)} + \overline{\left(a_{n-1} z_0^{n-1}\right)} + \cdots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} \qquad (*) \\ &= \underbrace{\overline{\left(a_n z_0^n\right) + \left(a_{n-1} z_0^{n-1}\right) + \cdots + a_1 z_0 + a_0}}_{= p(z_0) = 0} \\ &= \overline{0} = 0\,. \end{aligned}$$

Die Umformung $(*)$ ist gültig, weil alle Koeffizienten reell sind, also $\overline{a_i} = a_i$ für alle $i = 0, \cdots, n$.

(b) Wegen Aufgabenteil (a) wissen wir, dass z_1 und $z_2 = \overline{z_1}$ Nullstellen sind und das gegebene Polynom ohne Rest durch die entsprechenden Linearfaktoren teilbar ist. Man kann nacheinander mit je einem Linearfaktoren dividieren oder gleich das quadratische Polynom betrachten:

$$(z - z_1) \cdot (z - \overline{z_1}) = (z - (2 + i)) \cdot (z - (2 - i)) = z^2 - 4z + 5$$

Die Polynomdivision mit dem quadratische Polynom führt auf

$$(z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 10z + 25) : (z^2 - 4z + 5) = z^2 + 2z + 5$$

Wir erhalten zwei weitere Nullstellen durch die allgemeine Lösungsformel zu $z_3 = -1 + 2i$ und $z_4 = -1 - 2i$. Die Linearfaktorzerlegung von p lautet

$$p(z) = (z - (2 + i)) \cdot (z - (2 - i)) \cdot (z - (-1 + 2i)) \cdot (z - (-1 - 2i))\,.$$

Fundamentalsatz

Aufg. 4

(a) Lösen Sie die Gleichung: $4z^2 + (8 + 12i)z - 5 + 11i = 0$.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen des komplexen Polynoms $p : z \mapsto z^2 + \left(2\sqrt{2}i\right) \cdot z - 2\sqrt{3}i$.

Lösung:

(a) Diese Aufgabe löst man mit Hilfe einer quadratischen Ergänzung:

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \underbrace{4}_{a_2} z^2 + \underbrace{(8+12i)}_{a_1} z \underbrace{-5+11i}_{a_0} \\
&= (2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot (2+3i) + (2+3i)^2 - (2+3i)^2 - 5 + 11i \\
&= (2z+2+3i)^2 - i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & (2z+2+3i)^2 = i = e^{i\pi/2} \\
\Rightarrow \qquad & (2z+2+3i)^2 = \begin{cases} e^{i\pi/4} \\ 2z_1 + 2 + 3i = e^{i5/4\pi} = e^{-i3/4\pi} \end{cases} \\
\Rightarrow \qquad & z = \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 + i(\frac{1}{\sqrt{2}} - 3)) \\ \frac{1}{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2 - i(\frac{1}{\sqrt{2}} + 3)) \end{cases}
\end{aligned}
$$

(b) Mit der allgemeinen Lösungsformel erhalten wir

$$
z = \frac{-2\sqrt{2}i + \omega}{2},
$$

wobei ω die Lösungen der folgenden Gleichung sind

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= = (2\sqrt{2}i)^2 - 4 \cdot (-2\sqrt{3}i) \\
&= -8 + 8\sqrt{3}i = 16 \cdot e^{i2/3\pi} \mathrel{\widehat{=}} \left(16, \frac{2}{3}\pi\right).
\end{aligned}
$$

Die komplexen Wurzeln lauten:

$$
\omega_0 = 8 \cdot e^{i\pi/3} = 4 + 4\sqrt{3}i \quad \vee \quad \omega_1 = 8 \cdot e^{i8/3\pi} = 8 \cdot e^{-i2/3\pi} = -4 - 4\sqrt{3}i
$$

Setzen wir die Lösungen $\omega_{0,1}$ ein, so erhalten wir

$$
z_1 = \left(-\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) i - 1 \quad \vee \quad z_2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})i + 1 .
$$

Anwendungen: Additionstheoreme

Aufg. 5

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

(a) $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$, $\qquad (b)$ $\cos(3x) = 4(\cos(x))^3 - 3\cos(x)$

Lösung:
Verwenden wir im Folgenden die Abkürzungen $c_x := \cos(x)$ und $s_x := \sin(x)$.

(a)

$$
\begin{aligned}
z := e^{i(x \pm y)} &= e^{ix} \cdot e^{\pm iy} == (c_x + is_x) \cdot (c_y \pm is_y) \\
&= c_x c_y \pm ic_x s_y + is_x c_y \mp s_x s_y = c_x c_y + \mp s_x s_y + i(s_x c_y \pm c_x s_y) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos(x \pm y) = \mathrm{Re}(z) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x \pm y) = \mathrm{Im}(z) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \end{cases}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
z := e^{i(3x)} &= \left(e^{ix}\right)^3 == (c_x + is_x)^3 \\
&= c_x^3 + 3ic_x^2 s_x + i^2 3c_x s_x^2 + i^3 s_x^3 \\
&= c_x^3 - 3c_x s_x^2 + i(3c_x^2 s_x - s_x^3) \\
&= c_x^3 - 3c_x(1 - c_x^2) + i(3(1 - s_x^2)s_x - s_x^3) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos(3x) = \mathrm{Re}(z) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \sin(3x) = \mathrm{Im}(z) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x) . \end{cases}
\end{aligned}
$$

Gegeben seien die harmonischen Schwingungen

$$s_1(t) = \sqrt{2} \cdot \sin(10t + \pi/4), \quad s_2(t) = 2\cos(10t + \pi/6)\,.$$

(a) Berechnen Sie die Überlagerung von s_1 und s_2.
Hinweis: $s_1(t) = \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}e^{i\,(10t+\pi/4)}\right)$, $s_2(t) = 2\sin(10t + \pi/6 + \pi/2) = \operatorname{Im}\left(2e^{i\,(10t+2/3\pi)}\right)$.

(b) Wie muss eine harmonische Schwingung

$$s_3(t) = A_3 \sin(\omega_3 t + \varphi_3)$$

gewählt werden, dass die Überlagerung von s_1 und s_3 eine Amplitude von 1 und eine Nullphase von $\pi/2$ besitzt?

Lösung (Direkte Anwendung der Formeln möglich, siehe Unterabschnitt "Harmonische Schwingungen")

(a)

$$\begin{aligned}
s_1(t) + s_2(t) &= \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}e^{i\,(10t+\frac{1}{4}\pi)} + 2e^{i\,(10t+\frac{2}{3}\pi)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi\,i}e^{10t\,i} + 2e^{\frac{2}{3}\pi\,i}e^{10t\,i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi\,i} + 2e^{\frac{2}{3}\pi\,i}\right)e^{i\,10t}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(\sqrt{2}\left((\frac{1}{\sqrt{2}} + i + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)e^{i\,10t}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(1 + i - 1\sqrt{3}i\right)e^{i\,10t}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(i\left(1 + \sqrt{3}\right)e^{i\,10t}\right), \quad i = e^{i\pi/2} \\
&= \operatorname{Im}\left(\left(1 + \sqrt{3}\right)e^{i\,(10t+\pi/2)}\right) \\
&= \left(1 + \sqrt{3}\right)\sin(10t + \pi/2)
\end{aligned}$$

(b) Für die komplexe Amplitude der Überlagerung gilt

$$A = 1 \cdot e^{i\pi/2} = i$$

Suche A_3 so, dass

$$A_1 + A_3 = i \Leftrightarrow A_3 = i + A_1\,.$$

Das heißt

$$A_3 = i - (1 + i) = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}\,.$$

Also muss gelten $s_3(t) = \sin(10t + \pi)$.

Vektoren Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.16.

Rechenregeln

Aufg. 1

Gegeben seien die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

$$-\boldsymbol{a} + 3 \cdot \boldsymbol{b}, \quad (2 \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + 3 \cdot \boldsymbol{c}, \quad (3 \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) + 2 \cdot \boldsymbol{a}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Beträge (Längen, Normen):

$$|\boldsymbol{a}|, \quad |\boldsymbol{b}|, \quad |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|, \quad |-\boldsymbol{a} + 3 \cdot \boldsymbol{b}|$$

(c) Bestimmen Sie einen Vektor der Länge 10, der in die gleiche Richtung wie der Gegenvektor von $\boldsymbol{a}$ zeigt.

(d) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{a} \bullet (4 \cdot \boldsymbol{c}), \quad \boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c}), \quad (\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{c}$$

(e) Bestimmen Sie die Winkel im Bogenmaß zwischen folgenden Vektoren

$$\boldsymbol{a} \text{ und } \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a} \text{ und } \boldsymbol{c}$$

(f) Bestimmen Sie alle orthogonalen Vektoren zu $\boldsymbol{a}$.

(g) Bestimmen Sie einen Vektor der Form $\boldsymbol{b} + \lambda \cdot \boldsymbol{c}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, der senkrecht zu $\boldsymbol{a}$ ist.

(h) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\boldsymbol{b}$ auf $\boldsymbol{a}$, das heißt die Vektoren $\boldsymbol{b}_{\|}$ und $\boldsymbol{b}_{\perp}$.

Lösung:

(a) Die Lösungen lauten

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Die Lösungen lauten $5, 3, 4$ und $4\sqrt{10}$.

(c) Gesucht ist ein Vektor $\boldsymbol{b}$, der in Richtung $-\boldsymbol{a}$ zeigt und dessen Länge 10 ist:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} |\boldsymbol{b}| & = & 10 \\ \boldsymbol{b} & \| & -\boldsymbol{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{b} \stackrel{!}{=} \lambda(-a) \wedge |\boldsymbol{b}| = |\lambda(-a)| = 10.$$

Der gesuchte Vektor $\boldsymbol{b}$ ist also ein skalares Vielfaches des Vektors $-\boldsymbol{a}$. λ ist durch die Bedingung an die Länge von $\boldsymbol{b}$ eindeutig festgelegt, denn es gilt:

$$|\boldsymbol{b}| = |\lambda \cdot (-\boldsymbol{a})| = \lambda^2 \cdot (-\boldsymbol{a})| = 10 \Leftrightarrow |\lambda| = 10/|-\boldsymbol{a}| = 10/|\boldsymbol{a}| = 10/5 = 2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b} = 2 \cdot (-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Das Sklarprodukt ist bilinear, das heißt für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$(\lambda \cdot \boldsymbol{a}) \bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \bullet (\lambda \cdot \boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \bullet \cdot \boldsymbol{b}) \Rightarrow \; |\lambda \cdot \boldsymbol{a}| = \sqrt{(\lambda \cdot \boldsymbol{a}) \bullet (\lambda \cdot \boldsymbol{a})} = \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{a}} = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|.$$

(d) Die ersten drei Ausdrücke ergeben $-9, 2$ und 8. Es gilt

$$(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Die Reihenfolge der Verknüpfungen ist also entscheidend!

(e) Die Winkel ergeben sich zu

$$\pi - \arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 2.2142974, \quad \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \approx 1.42889927$$

(f) Die Vektoren, die zu $\boldsymbol{a}$ orthogonal sind, ist die folgende Menge:

$$M_{\boldsymbol{a}_\perp} := \left\{ \boldsymbol{a}_\perp = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(g) Suche $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(\boldsymbol{b} + \lambda \cdot \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = 0 \Leftrightarrow \ \lambda = \frac{9}{2}$$

Der Vektor lautet

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

(h) Es gilt

$$\boldsymbol{b}_\parallel = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ -27 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_\perp = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -36 \\ -48 \end{pmatrix}.$$

Rechenregeln

Aufg. 2

Gegeben sind die Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $-3 \cdot (-2 \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Beträge (Längen, Normen): $|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, |-3 \cdot (-2 \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{c}|$.

(c) Berechnen Sie den Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{a}$.

(d) Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ und $(-3 \cdot \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$.

(e) Berechenn Sie den Winkel φ im Bogenmaß zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ (Skalarprodukt!).

(f) Berechnen Sie $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(g) Berechnen Sie die Fläche des durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Lösung:

(a) $(-5, -4, -18))^\intercal$

(b) $2\sqrt{5}, 3, \sqrt{365}$

(c) $\left(-1/\sqrt{5}, 0, -2/\sqrt{5}\right)^\intercal$

(d) $12, -144$

(e) $\arccos(2/\sqrt{5}) \approx 0.4636476$

(f) $(4, 4, -2)^\intercal$, $(-2, -2, -8)^\intercal$

(g) 6

Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ -i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3-i \\ 2i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1+2i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} -i \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $-i\boldsymbol{a} + (2-i)\boldsymbol{b}$.

(b) Berechnen Sie $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$.

(c) Berechnen Sie $|\boldsymbol{a}|$.

(d) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

$$|\boldsymbol{c}|, \quad \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c} \rangle$$

(e) Bestimmen Sie eine Zerlegung von $\boldsymbol{d}$ der folgenden Art

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_\perp + \boldsymbol{d}_\|, \quad \boldsymbol{d}_\perp \perp \boldsymbol{c}.$$

Lösung:

(a) $(-5, 1+4i, 0, -1-5i)^\mathsf{T}$

(b) $-7+2i$

(c) $\sqrt{15}$

(d) $\sqrt{10}$, $-8+i, -8-i$

(e) Es gilt

$$\boldsymbol{b}_\| = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{|\boldsymbol{a}|^2} \cdot \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}_\perp = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}_\|.$$

Damit folgt

$$\boldsymbol{b}_\| = \begin{pmatrix} 3/2 - i \\ -1 - 3/2i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_\perp = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/2i \end{pmatrix}.$$

Vektorräume Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.17.

Körperaxiome — Aufg. 1

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

" Das Skalarprodukt ist eine Multiplikation von Vektoren."

Lösung:
Diese Aussage ist falsch. Wäre es eine Multiplikation von Vektoren, dann müsste das Ergebnis wieder ein Vektor sein.

Vektorraum — Aufg. 2

Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind oder nicht, geben Sie ggf die Dimension und eine Basis an.

(a) $M = \{(a,\ 0,\ b)^\intercal\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

(b) $M = \{(x,\ y)^\intercal\ :\ 2x - 3y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$

(c) $M = \{\left(a,\ a^2\right)^\intercal\ ,\ a \in \mathbb{R}\}$

Lösung:

(a) M ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, weil

– die Summe zweier beliebiger Vektoren aus M wieder in M liegt:

$$\forall\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} \in M : \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in M\,.$$

$M = \{(a,\ 0,\ b)^\intercal\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

– jedes skalare Vielfache eines Vektors aus M wieder in M liegt:

$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R} :\ \lambda \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ 0\lambda b \end{pmatrix} \in M\,.$$

Jeder Vektor aus M ist als lineare Kombination der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_3$ darstellbar:

$$\forall\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \in M : \quad \boldsymbol{v} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit spannt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3\}$ den Vektorraum M auf und M ist von der Dimension zwei.

(b) M ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, weil

– die Summe zweier beliebiger Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ aus M wieder in M liegt: $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in M$? Zwei beliebige Vektoren aus M sehen so aus

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

und erfüllen

$$2x_1 - 3y_1 = 0\ \wedge 2x_2 - 3y_1 = 0\,.$$

Die Koeffizienten der Summe der Vektoren,

$$\boldsymbol{v}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

erfüllen also

$$2x_s - 3y_s = 2\,(x_1 + x_2) - 3\,(y_1 + y_2) = (2x_1 - 3y_1) + (2x_2 - 3y_2) = 0 + 0 = 0$$

und ist damit Element der Menge M.

– jedes skalare Vielfache eines Vektors aus M wieder in M liegt:

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \; \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \in M \text{mit } 2(\lambda x) - 3(\lambda y) = \lambda(2x - 3y) = \lambda \cdot 0 = 0\,.$$

Die Bedingung, die die Vektoren aus M erfüllen bedeutet aber, dass die Komponenten der Vektoren linear voneinander abhängen und zwar so:

$$2x - 3y = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} y\,.$$

Im anderen Worten: jeder Vektor, der in M liegt sieht so aus

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Der Vektorraum $M \subsetneq \mathbb{R}^2$ wird also von dem Vektor $\boldsymbol{e} = \left(\frac{3}{2},\, 1\right)^{\mathsf{T}}$ aufgespannt (erzeugt) und M ist von der Dimension eins: $\dim(M) = 1$.

(c) M ist kein Vektorraum und das zeigt man am schnellsten, indem man zwei konkrete Vektoren wählt und zeigt, dass deren Summe nicht wieder in M liegt. Beispielsweise für $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \notin M\,,$$

da $3^2 \neq 5$.

Vektorraum

Aufg. 3

Es seien $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{n}$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$.

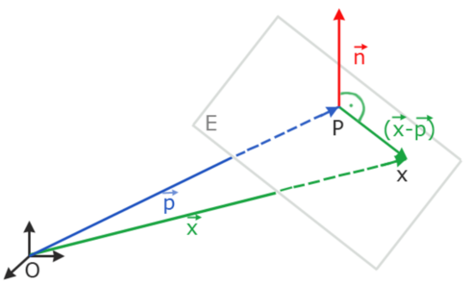
(a) Welches geometrische Objekt stellt die Lösungsmenge E der folgenden Gleichung(en) dar?

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3: \; \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\,, \boldsymbol{n} \rangle = 0$$

(b) Ist E ein reeller Vektorraum? Falls ja, geben Sie die Dimension und eine Basis an.

Lösung:

(a)



$\langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p})\,, \boldsymbol{n} \rangle = 0$ bedeutet geometrisch,

– dass alle Vektoren $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ senkrecht zu dem Vektor $\boldsymbol{n}$ liegen.

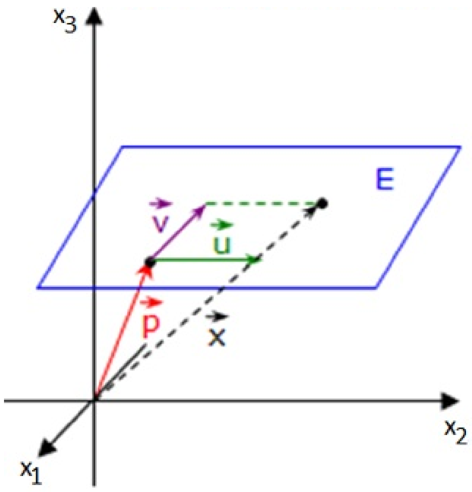
– dass alle Vektoren der Form $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ komplett in einer Ebene liegen ($\boldsymbol{p}$ ist der Aufhängepunkt der Ebene).

– dass die Vektoren $\boldsymbol{x}$ gerade die Raumpunkte sind, die zu der Ebene gehören.

Eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist also die Angabe eines Aufhängepunkts und eines Normalenvektors eindeutig bestimmt.

$$E = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3: \quad \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n} \rangle = 0 \right\}\,.$$

(b)



- Eine Ebene ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Dimension zwei.
- Zwei beliebige linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$, die in der Ebene liegen (also senkrecht zu $\boldsymbol{n}$ stehen), sind eine Basis der Ebene.
- $E = \mathrm{LH}\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$.

Basis

Aufg. 4

Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{a}^\intercal = \left(\sqrt{3}, 1\right)^\intercal$. Bestimmen Sie zwei Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$, die eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ sind und $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{a}$. **Lösung:**

Merken Sie sich: zu gegebenen Vektor in $\mathbb{R}^2$ ist ein senkrechter Vektor einfach zu bestimmen: man dreht einfach die Koeffizienten um und fügt zu einem ein Minuszeichen hinzu:

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Und damit lösen wir die Aufgabe in zwei Schritten:

1. Normierung des Vektors $\boldsymbol{a}$ liefert den ersten Basisvektor:

$$\hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Bestimmung eines normierten Vektors, der zu $\boldsymbol{a}$ senkrecht ist:

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Dimension

Aufg. 5

Welche Dimension haben die folgenden reellen Vektorräume?

(a) $\mathbb{V}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}\}$

(b) $\mathbb{V}_2 = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0\right\}$

Lösung:

(a) Die Menge $M_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}\}$ beschreibt eine Gerade im Raum, die durch den Ursprung verläuft. Es gibt einen frei wählbaren Parameter, also gilt $\dim M = 1$.

(b) Die Menge $M_2 := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}\,,\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0\right\}$ beschreibt dieselbe Gerade wie die Menge M_1 und hat damit auch Dimension eins. Da die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel zueinander sind, gilt

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta(\lambda \boldsymbol{a}) = \underbrace{(\alpha + \beta \cdot \lambda)}_{=t} \boldsymbol{a}$$

Bemerkung: wären die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ linear unabhängig, dann wäre M_2 eine Ebene im Raum mit Dimension zwei.

(a) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ mit } r \in [0, \infty), \ \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ sind.

(c) Skizzieren Sie für $r = 1$ und $\varphi = \pi/4$ die Orthonormalbasen $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ und $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

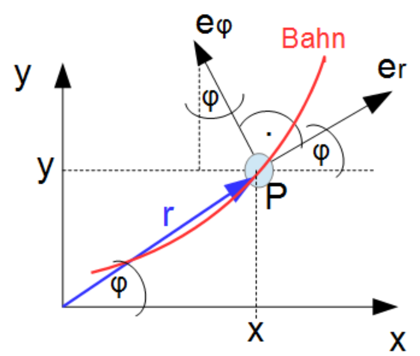
Lösung:

(a) Die kartesischen Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ seien x_1 und x_2, also $\boldsymbol{x} \widehat{=} (x_1, x_2$. Die Polarkoordinaten (r, φ) lauten

$$(r, \varphi) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \operatorname{atan2}(x_2, x_1))$$

(b) Zu zeigen ist, dass die Vektoren aufeinander senkrecht stehen (Skalarprodukt!) und jeweils die Norm eins besitzten, also

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_r \rangle &= -\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = 0\,, \\ |\boldsymbol{e}_\varphi| &= \sqrt{(-\sin(\varphi))^2 + (\cos(\varphi))^2} = \sqrt{1} = 1\,, \\ |\boldsymbol{e}_r| &= \sqrt{(\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2} = \sqrt{1} = 1\,. \end{aligned}$$

(c) 

– Der Vektor $\boldsymbol{e}_r$ ist parallel zum Ortsvektor $\boldsymbol{P}$.

– Der Vektor $\boldsymbol{e}_\varphi$ ist senkrecht zum Ortsvektor $\boldsymbol{P}$.

Bemerkung: In der Praxis geht man oft über zu einem mitbewegenden Dreibein. Das Dreibein bewegt sich entlang der Bahnkurve und $\boldsymbol{e}_r$ ist tangential und $\boldsymbol{e}_\varphi$ senkrecht zur Bahnkurve. Beide Vektoren ändern sich in jedem Punkt.

Matrizen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.18.

Rechenregeln — Aufg. 1

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $(A^\mathsf{T} C - 2 \cdot B)(-3 \cdot C^\mathsf{T})$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} -15 & -27 \\ 105 & -3 \\ -180 & -36 \end{pmatrix}.$$

Rang und Bild — Aufg. 2

Es sei $A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\mathsf{T}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Wie ist der Rang der Matrix A? Wie sieht das Bild der Matrix aus?

Lösung:
Der Rang der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ entspricht der Dimension des Bildes der linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m : A\boldsymbol{y} \quad = \quad (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\mathsf{T})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \underbrace{(\boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{y})}_{=:\, \lambda \in \mathbb{R}!} = \lambda \boldsymbol{a},$$

wobei wir das Assoziativgesetz der Matrixmultiplikation, $(AB)C = A(BC)$, ausgenutzt haben. Die Multiplikation eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor gleicher Größe ist eine reelle Zahl[a] Damit umfasst das Bild der linearen Abbildung A alle skalaren Vielfachen des Vektors $\boldsymbol{a}$ und damit

$$\mathrm{rk}(A) = \dim(\mathrm{im} A) = \dim\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a}\} = 1.$$

[a] im Grunde ist diese Zahl das Skalarprodukt der beiden Vektoren: $\boldsymbol{b}^\mathsf{T}\boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y} \rangle =: \lambda \in \mathbb{R}$.

Basis — Aufg. 3

(a) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ bilden die vier Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

$$\boldsymbol{x}_1 = (3, 1, 4, 0)^\mathsf{T}, \; \boldsymbol{x}_2 = (1, 1, 0, 6)^\mathsf{T}, \; \boldsymbol{x}_3 = (-4, 0, 5, a)^\mathsf{T}, \; \boldsymbol{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^\mathsf{T}.$$

(b) Überprüfen Sie, ob die Polynome $1, 1+x, 1-x, x^2$ eine Basis des $\mathcal{P}_2$ bilden.

Lösung:

(a) Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn die Matrix

$$A_a := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & a & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

deren Spalten $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ und $\boldsymbol{x}_4$ sind, vollen Rang hat. Wir bringen A_a auf Dreiecksform und bestimmen den Rang in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Es ist geschickt die zwei letzten Spalten zu vertauschen, so dass der Parameter a rechts unten landet und so in möglichst wenig Rechenoperationen mitgeschleppt wird:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & a & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -31 \\ 0 & 6 & 2 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & 2 & -12+a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & -114-3a \end{pmatrix}.$$

Für $a = 38$ hat die Matrix A_{38} also Rang $3 < 4$ beliebig und damit sind die Vektoren für $a = 38$ linear abhängig. Für $a \neq 38$ hat die Matrix vollen Rang und das heißt die Vektoren sind linear unabhängig.

(b) Zwei Lösungsvarianten:

- Die drei Polynome $\{p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + x, P_2(x) = 1 - x\}$ sind linear abhängig, weil

$$p_0(x) = \frac{1}{2}p_1(x) + \frac{1}{2}p_2(x)\,.$$

  Also kann es sich nicht um eine Basis handeln.

- Der systematische Weg zu prüfen, ob die gegebenen Polynome linear abhängig sind ist folgender: man zeige, dass die Nullabbildung $x \mapsto 0$ auf nichttriviale Weise darstellbar ist, dass also die Gleichung

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (1 + x) + \alpha_3 \cdot (1 - x) + \alpha_4 \cdot x^2 = 0 \quad (*)\,,$$

  mindestens eine nichttriviale Lösung besitzt. Nichttriviale Lösung heißt, dass für mindestens einen Koeffizienten $\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, gilt $\alpha_i \neq 0$. Aus $(*)$ folgt durch Ausklammern und Zusammenfassen

$$1 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) + \alpha_4 x^2 = 0\,,$$

  und hieraus folgt für die unbekannten Koeffizienten $\alpha_i,\ i = 1, 2, 3, 4$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

  Dieses Gleichungssystem ist unterbestimmt und hat unendlich viele Lösungen:

$$\Rightarrow \begin{cases} r\alpha_1 = -2t \\ \alpha_2 = \alpha_3 = t \in \mathbb{R} \\ \alpha_4 = 0\,. \end{cases}$$

  Die Polynome $1, 1+x, 1-x, x^2$ bilden also kein minimales Erzeugendensystem, sind also keine Basis des $\mathcal{P}_2$. Zum Beispiel erhalten wir für $t = 1$ die Koeffizienten $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0$, die eine nichttriviale Linearkombination bilden.

Lineare Abbildungen

Aufg. 4

Gegeben sind die linearen Abbildungen

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3x_1 - x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen A und B der linearen Abbildungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(b) Gegeben ist eine Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Bestimmen SIe die von C induzierte lineare Abbildung $\mathcal{C}$.

(c) Wie lautet die darstellende Matrix der linearen Abbildung $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$?

Lösung:

(a) Die darstellenden Matrizen sind

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildung ist durch

$$\mathcal{C} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(c) Es gilt

$$M_{\mathcal{C}\circ\mathcal{B}} = CB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lineare Abbildungen

Aufg. 5

Gegeben sei der reelle Vektorraum

$$\mathcal{P}_3 := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p \text{ Polynome vom Grad } 3\}$$

und die Abbildung

$$f : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto \begin{pmatrix} p(2) \\ p(3) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist und berechnen Sie f für die Monome $p_i : x \mapsto x^i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(b) Berechnen Sie $f(p)$ für ein allgemeines Polynom $p \in \mathcal{P}_4$.

(d) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \mapsto f(a_3 \cdot p_3 + a_2 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_1 + a_0 \cdot p_0)$$

linear ist und berechnen Sie die darstellende Matrix von g.

Lösung:

(a) Es gilt für $p, q \in \Pi_3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(p+q) &= \begin{pmatrix} (p+q)(2) \\ (p+q)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(2)+q(2) \\ p(3)+q(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(2) \\ p(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(2) \\ q(3) \end{pmatrix} = f(p) + f(q), \\ f(\lambda \cdot p) &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot p(2) \\ \lambda \cdot p(3) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} p(2) \\ p(3) \end{pmatrix} = \lambda \cdot f(p). \end{aligned}$$

Es gilt

$$f(p_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f(p_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; f(p_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \; f(p_3) = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

(b) Durch die Linearität folgt

$$\begin{aligned} f(p) &= f(a_3 \cdot p_3 + a_2 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_1 + a_0 \cdot p_0) \\ &= a_3 f(p_3) + a_2 f(p_2) + a_1 f(p_1) + a_0 f(p_0) \\ &\overset{(b)}{=} \begin{pmatrix} 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 \\ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die darstellende Matrix durch

$$M_g = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt

$$g(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}\,.$$

Lineare Gleichungssysteme Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.19.

Rechenregeln

Aufg. 1

Wie muss $\boldsymbol{b}$ gewählt werden, dass gilt $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = (-1, 2, -2, 3, 5)^\intercal .$$

Lösung: Zu berechnen ist die Matrix-Vektor Multiplikation

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Lösbarkeitsanalyse

Aufg. 2

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ \beta \end{pmatrix}$$

mit Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von α.

(b) Bestimmen Sie den Rang der erweiterten Matrix $(A|b)$ in Abhängigkeit von α und β.

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit der beiden Parameter, wann das lineare Gleichugnssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist und wann es genau eine Lösung gibt.

Lösung: Für die Bestimmung von $\mathrm{rk}(A)$ und $\mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}$ bringen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix $\mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}})$ auf Dreiecksform und lesen die gesuchten Größen ab:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 2 & \alpha & \beta \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \alpha - 2 & \beta + 4 \end{array}\right) .$$

(a) $\mathrm{rk}(A) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \alpha = 2\,, \\ 2 \Leftrightarrow \alpha \neq 2\,. \end{cases}$

(b) $\mathrm{rk}(A_{\boldsymbol{b}}) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \alpha = 2 \wedge \beta = -4\,, \\ 2 \Leftrightarrow \alpha \neq 2 \vee \beta \neq -4\,. \end{cases}$

(c) Um zu sehen für welche Werte von α und β das Gleichungssystem lösbar ist, bestimmen wir den Fall, für den das Gleichungssystem nicht lösbar ist und negieren dann die Aussage:

$$\begin{aligned} \text{Gleichungssystem nicht lösbar} \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha = 2 \wedge \beta \neq -4 \\ \Rightarrow \; \text{Gleichungssystem lösbar} \quad &\Leftrightarrow \quad \neg\,(\alpha = 2 \wedge \beta \neq -4) \Leftrightarrow \alpha \neq 2 \vee \beta = -4 \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A_b) = 2$, also falls $\alpha \neq 2$ und $\beta \neq -4$.

Analysieren Sie die Lösbarkeit der folgenden Gleichungssysteme und bestimmen Sie die Lösungsmenge:

$$(a)\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 3 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_5 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + px_3 &= 3 \\ x_1 + px_2 + 3x_3 &= 2 \end{cases}$$

$$(d)\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_3 + x_4 &= 1 \\ 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{cases} \quad (e)\begin{cases} (2+i)\cdot z_1 + i \cdot z_3 &= -4+3i \\ (1+3i)\cdot z_1 + (-1-i)\cdot z_2 - z_3 &= -6-2i \\ (4+2i)\cdot z_2 + (3+3i)\cdot z_3 &= -2+4i \end{cases}$$

Lösung:

(a) Das Gleichungssystem besteht aus vier Gleichungen für drei Unbekannte. Hat man mehr Gleichungen als Unbekannte, so spricht man von einem überbestimmten Gleichungssystem. Das vorliegende überbestimmte Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung und das liegt daran, dass die Gleichungen linear abhängig sind. Bringt man die Matrix auf Trapezform, so pssiert folgendes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile ist eine Nullzeile und da diese Zeile der Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$$

entspricht, ist sie für alle möglichen Werte von x_1, x_2 und x_3 bedingungslos erfüllt! Es genügt die übrigen drei Gleichungen zur Bestimmung der Lösung heranzuziehen und das sieht gut aus: die vierte Gleichung führt auf eine eindeutige Lösung für x_3

$$(-1) \cdot x_3 = -1 \Leftrightarrow x_3 = 1$$

Setzt man $x_3 = 1$ in die zweite Gleichung ein, so erhält man eine eindeutige Lösung für x_2:

$$\begin{array}{rrcll} & 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 & = & 2 & \\ \overset{x_3=1}{\Leftrightarrow} & x_2 + 2 \cdot 1 & = & 2 & \| -2 \\ \Leftrightarrow & x_2 & = & 0 & \end{array}$$

Im letzten Schritt des Rückwärtseinsetzens, setzt man nun die Lösungen für x_3 und x_2 in die erste Gleichugn ein und erhält die eindeutige Lösung für x_1:

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ \overset{x_3=1, x_2=0}{\Leftrightarrow} & x_1 - 0 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & 1 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssystems lautet also $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Überbestimmte Gleichungssysteme sind im allgemeinen nicht lösbar. In diesem Fall sind die Zeilen linear abhängig und das bedeutet, dass die Bedingung, die in einer Zeile drinsteckt durch die anderen schon abgedeckt ist. Eine Zeile kann man aus dem System herausnehmen. Beim Lösen mit dem Gauß-Algorithmus wird diese Information dadurch transparent, dass eine Nullzeile entsteht.

(b) $x_1 = 2 - \lambda, x_2 = 1 + 2\lambda,\ x_3 = \lambda, x_4 = -1, x_5 = 1$

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & p & 3 \\ 1 & p & 3 & 2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+p & 1 \\ 0 & p-1 & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{p\neq 1}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+p & 1 \\ 0 & 0 & 4+(1-p)(2+p) & 2-p \end{array}\right),$$

wobei die faktorisierte Form des Eintrags an Position mit Index 33 lautet:

$$4 + (1-p)(2+p) = -p^2 - p + 6 = -(x-2)(x+3)\,.$$

Das heißt, dass die Fälle $p = 1$, $p = 2$, $p = -3$ und $p \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, -3\}$ separat zu untersuchen sind:

1. Für $p = 1$ lautet die Lösung $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \dfrac{1}{4}$.
2. Für $p = -3$ ist das System nicht lösbar.
3. Für $p = 2$ hat das System unendlich viele Lösungen: $x_1 5\lambda,\ x_2 = 1 - 4\lambda,\ x_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.
4. Für $p \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3, 2\}$ lautet die eindeutige Lösung $x_1 = 1, x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3+p}$.

(d)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 37 & 58 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 41 \\ -41 \\ 2 \\ 58 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2+i & 0 & j & -4+3i \\ 1+3i & -1-i & -1 & -6-2i \\ 0 & 4+2i & 3+3i & -2+4i \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2+i & 0 & j & -4+3i \\ 0 & -1-i & -i & -61-i \\ 0 & 4+2i & 3+3i & -2+4i \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2+i & 0 & j & -4+3i \\ 0 & -1-i & -i & -61-i \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Lösen wir die Gleichungen von unten nach oben auf, dann erhälten wir

$$z_1 = -1 + 2i,\ z_2 = i,\ z_3 = 0\,.$$

Gleichungssysteme

Aufg. 4

Gesucht ist eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass

$$AX + XA^\intercal = C, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten $x_{ij},\ i, j = 1, 2$ der Matrix X und lösen Sie es.

Lösung: Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} -x_{12} - x_{21} + 2x_{11} & -x_{22} + 3x_{12} + 2x_{11} \\ -x_{22} + 3x_{21} + 2x_{11} & 4x_{22} + 2x_{12} + 2x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Dieses System lösen wir mittels Gauß-Verfahren und erhalten

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow x_{22} = 1, x_{21} = -1, x_{12} = 1, x_{11} = 2\,.$$

Determinante, inverse Matrix Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.20.

Determinante — Aufg. 1

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Man kann die Determinante auf unterschiedliche Weisen berechnen:

(a) Entwicklungssatz nach der ersten Spalte (Entwicklungssatz nach Laplace)

$$\det(A) = 2 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 0 \cdot (-6 \cdot 1 - 2 \cdot 2) + (-1) \cdot (-6 \cdot 2 - 0 \cdot 2) = 4\,.$$

(b) Regel von Sarrus

$$\det(A) = +2 \cdot 0 \cdot 1 + (-6) \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot (-6) = 12 - 8 = 4\,.$$

Bemerkung: Hat eine Matrix Dreiecksgestalt, dann ist die Determinante gerade das Produkt der Diagonalelemente. Also könnte man die Determinante der gegebenen Matrix auch berechnen, indem man die Matrix auf Dreiecksgestalt bringt. Aber Vorsicht: Vertauschen von Zeilen und skalare Vielfache verändern den Wert der Determinante und müssen berücksichtigt werden!

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot (1 \cdot (-1) \cdot 1) = 4\,. \end{aligned}$$

Determinante — Aufg. 2

Betrachten Sie die Schar der Matrizen

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A_a.

(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A_a regulär?

(c) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die inversen Matrizen A_a^{-1} für alle regulären Matrizen A_a.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die erste Spalte der inversen Matrizen A_a^{-1} für alle regulären Matrizen A_a. Hinweis: Lösen Sie $A_a\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^\intercal$.

Lösung:

(a) $\det(A_a) = 1 \cdot (a \cdot a - a \cdot 1) - 1 \cdot (1 \cdot a - a \cdot a) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - a \cdot a) = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2\,.$

(b) $\det(A_a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1 \;\Rightarrow A_a$ ist regulär für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) Für $a \neq 1$ läßt sich die Inverse zu A_a bestimmen durch

$$(A_a | I_3) \overset{\text{ÄZU}}{\Rightarrow} (I_3 | A_a^{-1})\,.$$

Das heißt man betrachtet das um die Einheitsmatrix erweiterte System $(A_a|I_3)$ und transformiert die linke Seite A_a durch äquivalente Zeilenumformungen (ÄZU) zu I_3. Aus der rechten Seite I_3 wird dann simultan die inverse Matrix A_a^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{a\notin\{1,0\}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a-1 & a-1 & 0 & a-1 & a & -a \\ 0 & 1-a & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} a-1 & 0 & 0 & a & a & -a-1 \\ 0 & 1-a & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{a-1} & \frac{a}{a-1} & \frac{-a-1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} & 0 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{-1}{1-a} \end{array}\right)$$

Die zu A_a inverse Matrix für $a \in \mathbb{R} \setminus \{1,0\}$ lautet

$$A_a^{-1} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} -a & -a & 1+a \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Dass die Matrix für $a = 1$ nicht invertierbar ist, wissen wir. Allerdings sollten wir eine inverse Matrix bestimmen können für $a = 0$. Die soeben berechnete Matrix A_a^{-1} ist auch für $a = 0$ wohldefiniert und das legt die Vermutung nah, dass A_0^{-1} die inverse zu A_0 ist.Überprüfen wir das:

$$A_0^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also ist A_a^{-1} die inverse zu A für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(c) Die Cramersche Regel kann angewand werden, um eine Lösungskomponente x_i eines Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zu berechnen, es gilt

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\boldsymbol{a}_1 \vdots \boldsymbol{a}_2 \vdots \boldsymbol{a}_3 \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{a}_{i-1} \vdots \boldsymbol{b} \vdots \boldsymbol{a}_{i+1} \vdots \cdots \vdots \boldsymbol{a}_n\right) .$$

Das heißt im konkreten Fall

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{(a-1)^2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & a & a \end{pmatrix} = \frac{1}{(a-1)^2} (1 \cdot (a \cdot a - a \cdot 1)) = \frac{a}{a-1} , \\ v_2 &= \frac{1}{(a-1)^2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{(a-1)^2} (-(1 \cdot a - 1 \cdot 1)) = \frac{1}{1-a} , \\ v_3 &= \frac{1}{(a-1)^2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(a-1)^2} (1 \cdot (1 \cdot a - 1 \cdot a)) = 0 , \end{aligned}$$

also die erste Spalte der inversen Matrix A_a^{-1} für $a \neq 1$.

Basis

Aufg. 3

Überprüfen Sie mit Hilfe der Determinante, ob die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, 0)^\intercal, \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 2)^\intercal, \quad \boldsymbol{v}_3 = (-5, 1, -2)^\intercal$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind.

Lösung:
Die Vektoren sind genau dann eine Basis, wenn jeder Vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig als eine lineare Kombination der Vektoren $\boldsymbol{v}_i,\ i = 1, 2, 3$

$$\boldsymbol{w} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3$$

geschrieben werden kann, d.h. wenn das lineare Gleichungssystem

$$V\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{w} \quad \text{mit } V = \left(\boldsymbol{v}_1 \vdots \boldsymbol{v}_2 \vdots \boldsymbol{v}_3\right), \quad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^\intercal\,,$$

für jede rechte Seite $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar ist. Das ist genau dann der Fall, wenn die Matrix $V \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Spaltenvektoren $\boldsymbol{v}_i,\ i = 1, 2, 3$ regulär ist. Also berechnen wir die Determinante

$$\det(V) = 2\cdot(1\cdot(-2) - 2\cdot 1) - (-1)\cdot(1\cdot(-2) - 2\cdot(-5)) + 0\cdot(1\cdot 1 - 1\cdot(-5)) = -8 + 8 = 0\,,$$

und stellen fest, dass Matrix nicht regulär ist und die Vektoren damit keine Basis bilden.

Gleichungssysteme

Aufg. 4

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

regulär.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & & = & x \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & y \\ 3x_1 & + & 13x_2 & + & 4x_3 & = & z \end{array}$$

(c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem für $x = 3, y = 8, z = 0$

Lösung:

(a) $\det(A) = -4\cdot(1\dot{1}3 - 3\cdot 2) + 4\cdot(1\dot{7} - 1\cdot 2) = -4\cdot 7 + 4\cdot 5 = -8 \neq 0 \Rightarrow A$ ist regulär.

(b) Ist die Matrix A einer linearen Abbildung $\mathcal{A}$ regulär, dann läßt sich die Abbildung invertieren und die inverse Abbildung $\mathcal{A}^{-1}$ ist wieder eine lineare Abbildung. Die Matrix, die $\mathcal{A}^{-1}$ darstellt ist die zu A inverse Matrix A^{-1}. Wenn man ein Gleichungssystem für beliebige rechte Seiten lösen soll, dann bietet es sich an A^{-1} einmal zu berechnen. Für eine gegebene rechte Seite $\boldsymbol{b}$ berechnet sich dann die Lösung des entsprechenden Gleichungssystems durch die Matrix-Vektor-Multiplikation $A^{-1}\boldsymbol{b}$.

$$(A\,|\,I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 & \\ 1 & 7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 & \\ 0 & 5 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 & \\ 0 & 5 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -7 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 & \\ 0 & 10 & 0 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -7 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 0 & 0 & -15 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & -7 & 5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

(c) Wir setzen $\boldsymbol{b} = (x, y, z)^\intercal$ und berechnen $A^{-1}\boldsymbol{b} = (11, -7, 10)^\intercal$.

Berechnen Sie alle $\lambda \in \mathbb{C}$, für die die Matrix $A - \lambda I_2$ nicht regulär ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}$$

.

Lösung:
Zu bestimmen sind die sogenannten Eigenwerte der Matrix A. Sie sind Lösungen der Gleichung

$$\det(A - \lambda I_2) = 0\,.$$

Also berechnen wir die Determinante in Abhängigkeit von λ und lösen die resultierende quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} -11-\lambda & 12 \\ -9 & 10-\lambda \end{pmatrix} &= (-11-\lambda)\cdot(10-\lambda) - 12\cdot(-9) = \lambda^2 + \lambda - 2 \\ &\Rightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Folgen und Grenzwerte Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.21.

Folgen — Aufg. 1

Betrachten Sie einen Kreis und zeichnen Sie die Fläche A_3 des durch den Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks ein, dann die Fläche A_6 eines regelmäßiges Sechsecks, A_{12} eines regelmäßigen Zwölfecks usw.

- Konvergiert die Folge der Flächeninhalte?
- Wenn ja, wie lautet der Grenzwert?

Lösung: Die Folge ist monoton wachsend und nach oben beschränkt. Die Folge konvergiert gegen den Flächeninhalt des Kreises. Vorausgesetzt der Kreis hat Radius $r > 0$, dann gilt also $A_m \to \pi r^2$.
Man kann zeigen, dass ein regelmäßiges Vieleck mit $m = 3 \cdot n^2$ Ecken den Flächenhinhalt

$$A_m = \frac{m}{2} r^2 \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)$$

besitzt.

Grenzwerte — Aufg. 2

(a) Übersetzen Sie die folgende Aussage:
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ und es gelte: $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\varepsilon\ |a_n - a| < \varepsilon \quad (*)$

(b) Erfüllt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{2n}{n+4}$$

die Eigenschaft $(*)$? Wie lautet n_ε bei gegebenem $\varepsilon > 0$?

Lösung:

(a) Sie bedeutet, dass es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, gegen die die Folge konvergiert, denn zu jeder noch so kleinen, positive Zahl ε findet man einen Folgenindex n_ϵ so, dass der Abstand aller Folgeglieder, die nach a_{n_ε} kommen nur maximal ε von a entfernt sind.

(b) Die gegebene Folge ist streng monoton steigend und nach oben durch den Wert 2 beschränkt, also muss sie gegen 2 konvergieren. Für gegebenes ε suchen wir also ein n_ε, so dass gilt

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \left|\frac{2n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 4} - 2\right| < \varepsilon$$

Gilt diese Ungleichung für ein n_ε, dann ist sie wegen der Monotonie auch gültig für alle $n > n_\epsilon$. Also versuchen wir die Ungleichung nach n_ε aufzulösen.

$$\left|\frac{2n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 4} - 2\right| < \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad 2 - \frac{2n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 4} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 4} > 2 - \varepsilon \Leftrightarrow 2n_\varepsilon > (2-\varepsilon)\cdot(n_\varepsilon + 4)$$
$$\Leftrightarrow\quad \varepsilon \cdot n_\varepsilon > 4\cdot(2-\varepsilon) \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{4\cdot(2-\varepsilon)}{\varepsilon} > \frac{8}{\varepsilon}\,.$$

Grenzwertsätze — Aufg. 3

Geben Sie für $c = 0,\ c = 1,\ c = \infty$ jeweils Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = c \quad \text{mit } a_n \to \infty, b_n \to 0 \text{ für } n \to \infty\,,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \quad \text{mit } a_n \to 0, b_n \to 0 \text{ für } n \to \infty\,,$$

Lösung:

Für die Multiplikation:

- $c = 0: \quad a_n = n\,, b_n = 1/n^2$
- $c = 1: \quad a_n = n\,, b_n = 1/n$
- $c = \infty: \quad a_n = n^2\,, b_n = 1/n$

Für die Division:

- $c = 0: \quad a_n = n\,, b_n = n^2$
- $c = 1: \quad a_n = n\,, b_n = n$
- $c = \infty: \quad a_n = n^2\,, b_n = n$

Grenzwerte von Folgen

Aufg. 4

Bestimmen Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls. Hinweis zu (c): es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

$$(a) \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n} \quad (b) \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+n+2}{3n^3+1} (c) \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} (d) \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Lösung:

(a) Folge ist konvergent mit Grenzwert 2.

(b) Folge ist konvergent mit Grenzwert 0.

(c) Folge ist konvergent mit Grenzwert 1/2.

(d) Folge ist konvergent mit Grenzwert 0. Wenn Sie Differenzen von Quadatwurzeln sehen, dann hilft die 3. Binomische Formel:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = 0$$

Grenzwerte von Folgen

Aufg. 5

Überprüfen Sie, ob die Zahlenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ konvergiert und berechnen Sie ggf. den Grenzwert:

$$f_1 = 0,\ f_{n+1} = \frac{1}{3}(f_n + 1)\,.$$

Lösung:
Eine Folge konvergiert gegen $\frac{1}{2}$, denn sie monoton wachsend und nach oben beschränkt durch $\frac{1}{2}$.

1. Monotonie. Um Monotonie zu zeigen kann man entweder die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgeglieder betrachten oder den Quotienten.

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{1}{3}(f_n+1)}{f_n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3f_n} > \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \quad \Rightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monoton wachsend}\,.$$

2. Beschränktheit. Wenn man eine Vermutung hat, was die Schranke ist, dann bietet es sich an die

Beschränktheit mit einer vollständigen Induktion zu beweisen. Es gilt $f_n < \frac{1}{2}$ für alle Folgenglieder.

$$\begin{aligned} \text{Induktionsanfang:} \quad & n = 1: \ f_1 = 0 < \frac{1}{2} \\ \text{Induktionsannahme:} \quad & n \in \mathbb{N}: \ f_n < \frac{1}{2} \quad (*) \\ \text{Induktionsshritt:} \quad & n \to n+1: \ f_{n+1} = \frac{1}{3}(f_n + 1) \overset{(*)}{<} \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Grenzwerte von Funktionen

Aufg. 6

Bestimmen Sie ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2+1}{x^3+2x^2+x}$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-(x+1)^2}{2x^2-x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x^2-x}{-x^2+4}$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(2^{-x} \cdot x^4\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2}$ (f) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln(x)}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x}$

Lösung:

(a) Grenzwert null, da der Grad des Nennerpolynoms größer als der des Zählerpolynoms ist.

(b) Grenzwert $-\frac{1}{2}$, da der Grad des Nennerpolynoms gleich dem des Zählerpolynoms ist und der führende Koeffizient $-\frac{1}{2}$ ist.

(c) Bestimmte Divergenz gegen $+\infty$, da der Grad des Zählerpolynoms größer als der des Nennerpolynoms ist und der führende Koeffizient größer null ist.

$$\frac{2x^3 + x^2 - x}{-x^2 + 4} = x \cdot \underbrace{\frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{4}{x}}}_{\to -2} \to \infty \quad \text{für } x \to -\infty\,.$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{2^x} = 0$$

(e) Mit Stetigkeit der Wurzel und Potenzfunktion folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^3 = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^3 = 0^3 = 0$$

(f) Den Grenzwert berechnet man am besten, indem man an geeigneter Stelle substituiert $t = 1/x$:

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{2^{\frac{1}{x}}}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^t}{\ln(1/t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{2^t}{-\ln(t)} = -\lim_{t\to\infty} \left(\frac{2^t}{t} \cdot \frac{t}{\ln(t)}\right) = -\infty$$

(g) Der Grenzwert existiert nicht, da

$$\begin{aligned} \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{|x|} &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\uparrow 0} \frac{x}{|x|} &= \lim_{x\uparrow 0} \frac{x}{-x} = -1 \end{aligned}$$

(h) Es gilt

$$\left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|\,.$$

Damit gilt wegen der Stetigkeit des Betrages

$$\left|\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x}\right| = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \lim_{x\to\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0\,.$$

Stetigkeit Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.22.

Stetigkeit

Aufg. 1

(a) Es sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Was bedeutet die folgende Aussage:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,.$$

(b) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x$. Gibt es eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, an der die Bedingung unter (a) erfüllt ist?

Lösung:

(a) Die Aussage definert die Unstetigkeit der Funktion f an der Stelle x_0. Es ist die Negation der Stetigkeits-Definition und lautet: Es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ gibt.

(b) Es kann keine Stelle geben, an der die Bedingung erfüllt ist, weil $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{3}x$ stetig ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Unsere Aufgabe liegt jetzt darin, ein hinreichend kleines $\delta > 0$ zu finden, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle Argumente x mit $|x - x_0| < \delta$ ist.

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < 3\varepsilon \Rightarrow \delta := 3\varepsilon\,.$$

Stetigkeit

Aufg. 2

Untersuchen Sie die Funktion f mit

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

auf Stetigkeit an einer beliebigen Stelle x_0.

Lösung:
f ist in jeder Stelle unstetig und das zeigen wir mit dem Folgenkriterium. Wäre f stetig, dann müßte $f(x_n)$ für jede Folge (x_n), die gegen x_0 konvergiert, einen eindeutigen Grenzwert haben. Wir wählen beispielsweise die Stelle $x_0 = 2$ und betrachten eine Folge mit echt irrationalen Werten und eine mit rationalen Werten, dann nimmt f zwei unterschiedliche Grenzwerte an:

$$\begin{cases} x_n = 2 - \pi/n,\ x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0\,, \\ \tilde{x}_n = 2 - 1/n,\ \tilde{x}_n \in \mathbb{Q},\ \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 2 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = 1\,. \end{cases}$$

f kann also nicht stetig sein. Anders gesagt: in jeder noch so kleinen Umgebung von $x_0 = 2$ nimmt f die Funktionswerte 0 und 1 an und hat f in x_0 keinen Grenzwert.

Stetigkeit

Aufg. 3

Für welche $x \in [0, \infty)$ ist f stetig?

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 1 \\ \frac{1}{|x|} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 1} f(x) &= 1 = f(1) = \frac{1}{|1|}\\ \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty \neq f(0) = 0\end{aligned}$$

Die Funktion ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Stetigkeit

Aufg. 4

Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f an der Stelle x_0 stetig ist.

(a) Es sei $x_0 = 1$ und $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ x^2 + t & x > 1 \end{cases}$

(b) Es sei $x_0 = t$ und $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2tx & x \geq t \\ 2x - t & x < t \end{cases}$

Lösung:

(a) Für $t = 1$ ist f stetig auf $\mathbb{R}$. Das folgt aus

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1}(x^2 + t) = 1 + t \overset{!}{=} f(1) = 2 \Rightarrow t = 1\,.$$

(b) Die Funktion ist für $t = 0 \vee t = -1$ stetig. Das folgt aus

$$\lim_{x\uparrow t} f(x) = \lim_{x\uparrow t}(2x - t) = t \overset{!}{=} f(t) = -t^2 \Leftrightarrow t \cdot (1 + t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -1\,.$$

Stetigkeit

Aufg. 5

Bestimmen Sie für f den Parameter a so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \geq 1 \\ 2 \cdot \exp(a \cdot x), & x < 1\,. \end{cases}$$

Lösung: $a = -\ln(4)\,.$

Stetige Fortsetzung

Aufg. 6

Vervollständigen Sie f so, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$f : x \mapsto \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 2\,. \end{cases}$$

Lösung:
Um die Funnktion auf eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion zu erweitern, muss für das Intervall $(1, 2]$ eine Funktion g gefunden werden mit

$$\lim_{x\downarrow 1} g(x) = f(1), \quad \lim_{x\uparrow 2} g(x) = \lim_{x\downarrow 2} f(x)\,.$$

Als Ansatz wird g als lineare Funktion gewählt, die stetig ist. Da auch f auf den jeweiligen Intervallen stetig ist, muss gelten

$$g(1) = 2, \quad g(2) = 4\,.$$

Die lineare Funktion $g : x \mapsto 2 \cdot (x - 1) + 2 = 2x$ erfüllt diese Bedingungen. Eine stetige Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}$ ist damit

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 2 \\ x^2, & x > 2\,. \end{cases}$$

Differentiation Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.23.

Differenzierbarkeit

Aufg. 1

(a) Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 1\,, \\ x^2 - 1, & x > 1\,. \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} a \cdot x^2, & x \geq 1\,, \\ x + b, & x < 1\,. \end{cases}$$

Lösung:

(a) f ist an der Stelle $x_0 = 1$ stetig aber nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1} x^2 - 1 = 0 = f(1), \quad \lim_{x\downarrow 1} f'(x) = \lim_{x\downarrow 1} 2 \cdot x = 2 \neq f'(1) = -2\,.$$

(b) Es gibt zwei Bedingungen, die g an der Stelle $x_0 = 1$ erfüllen muss:

1. Stetigkeit von g: $\lim_{x\uparrow 1} g(x) = \lim_{x\downarrow 1} g(x) \overset{!}{=} g(1)$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x + b, & x < 1\,, \\ a \cdot x^2, & x \geq 1\,. \end{cases}$
2. Stetigkeit von g': $\lim_{x\uparrow 1} g'(x) = \lim_{x\downarrow 1} g'(x)$, wobei $g' : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x < 1\,, \\ 2 \cdot a \cdot x, & x > 1\,. \end{cases}$

Es folgen zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der Parameter a und b:

$$\begin{array}{lcrcl}
\text{1. Stetigkeit von } g: \quad \lim_{x\uparrow 1} \underbrace{g(x)}_{x+b} \overset{!}{=} \underbrace{g(1)}_{a \cdot 1^2} & \Rightarrow & 1 + b & \overset{!}{=} & a \\
 & \Leftrightarrow & b & = & a - 1 \\
\text{2. Stetigkeit von } g': \quad \lim_{x\uparrow 1} \underbrace{g'(x)}_{=1} = \lim_{x\downarrow 1} \underbrace{g'(x)}_{2 \cdot a \cdot x} & \Rightarrow & 1 & \overset{!}{=} & 2 \cdot a \\
 & \Leftrightarrow & a & = & \dfrac{1}{2}\,.
\end{array}$$

Also zusammen $a = \frac{1}{2} = -b$.

Differenzierbarkeit

Aufg. 2

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f : x \mapsto \sqrt{x}$ mit Hilfe des Differenzenquotienten.

Lösung:

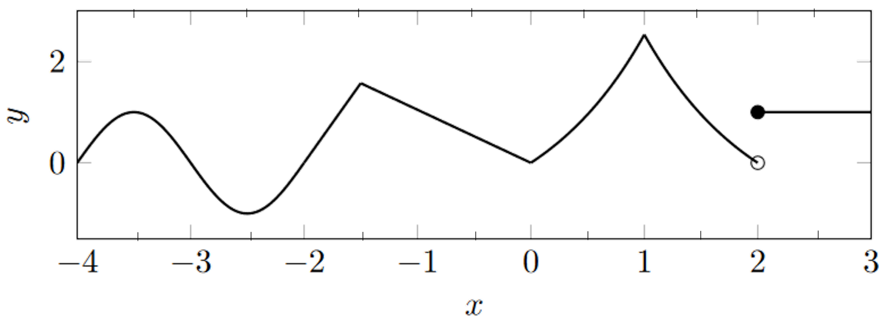
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{(x+h)-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \overset{(*)}{=} \frac{\lim\limits_{h\to 0} h}{\sqrt{x+\lim\limits_{h\to 0} h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x)\,.
\end{aligned}$$

$(*)$ $\sqrt{\cdot}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ist stetig.

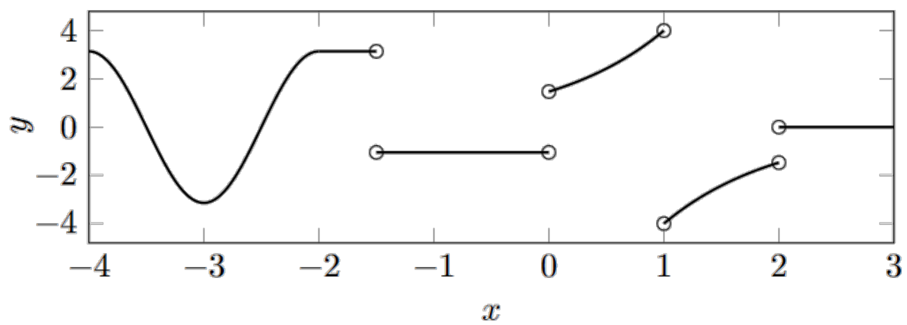
Bedeutung der Ableitung

Aufg. 3

Skizzieren Sie die Ableitung für Funktion.



Lösung:



Differenzieren

Aufg. 4

Berechnen Sie von den folgenden Funktionen die Ableitungen. Es ist $a\in\mathbb{R}$ ein Parameter.

$$(a)\ f(x)=\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad (b)\ g(u)=\frac{u^2}{u^2+a^2}$$

$$(c)\ h(p)=\exp\left(-p^2/(2a)^2\right) \qquad (d)\ i(x)=\frac{(2x+3)^2-2}{\sqrt{x-1}}$$

Lösung:

(a) $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh(x)$

(b) $g'(u) = \dfrac{2a^2u}{(u^2+a^2)^2}$

(c) $h'(p) = -\dfrac{p}{2\cdot a^2} \cdot \exp\left(-p^2/(2\cdot a)^2\right)$

(d) $i'(x) = \dfrac{4(2x+3)}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{(2x+3)^2-2}{2(x-1)^{3/2}}$

Anwendungen: Monotonie-Satz

Aufg. 5

Angenommen Sie wissen über eine Funktion f, dass ihre Ableitung auf einem Intervall I negativ ist, also $f'(x) \leq 0$. Was können Sie dann über das Monotonie-Verhalten aussagen?

Lösung:
f ist auf I monoton fallend. Es gelten die folgenden Monotoniesätze:

1. $\forall x \in I: \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ ist konstant.
2. $\forall x \in I: \; f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend.
3. $\forall x \in I: \; f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ monoton fallend.
4. $\forall x \in I: \; f'(x) > 0 \Rightarrow f$ streng mononton wachsend.
5. $\forall x \in I: \; f'(x) < 0 \Rightarrow f$ streng mononton fallend.

Anwendungen: Lineare Näherung

Aufg. 6

Die Mittellinie einer Rennstrecke der Breite 2 m wird durch Funktion $x \mapsto 4 - \frac{1}{2}x^2$ beschrieben. Wir beobachten einen Rennwagen der die Bahnkurve im Uhrzeigersinn entlang rast. Bei spiegelglatter Fahrbahn rutscht das Fahrzeug und landet im Punkt $Y(0|6)$ in den Strohballen. Wo hat das Fahrzeug die Straße verlassen?

Lösung:
er Rennwagen verlässt seine Bahn in einem bestimmten Punkt in tangentialer Richtung. Er bewegt sich anschließend in etwa geradlinig fort und landet im Punkt $Y(0|6)$ in den Strohballen. Eine Zeichnung lässt vermuten, dass $Y(0|6)$ auf der Tangente liegt, die die Bahnkurve im Punkt $B(-2|2)$ schneidet. Diese Tangente hat die Gleichung

$$y = mx + b \text{ mit } m = f'(-2) = \frac{6-2}{0-(-2)} \wedge b = 6\,.$$

Der Punkt, in dem der Rennwagen die Straße verlässt ist also der Schnittpunkt der Randkurve der Straße mit der Tangente am Punkt $B(-2|2)$. Die Gleichung der Randkurve ist

$$y = 5 - \frac{1}{2}x^2$$

und damit erhält man

$$5 - \frac{1}{2}x^2 = 2x + 6 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}\,.$$

Gesucht ist der Punkt $(\frac{-4+\sqrt{8}}{2}|2+\sqrt{8})$.

Extrema, Wendepunkte und Anwendungen Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.24.

Grenzwerte mit L'Hospital

Aufg. 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von L'Hospital.

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} \qquad (b)\ \lim_{x\to\infty} x^2 \cdot 2^{-x} \qquad (c)\ \lim_{x\downarrow 0} x\cdot\ln(x)$$

Lösung:

(a) Die Regel ist anwendbar, da

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \sin(\sin(x)) = \sin(\sin(0)) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x = 0\,. \end{cases}$$

Die Ableitungen von Zähler und Nenner lauten

$$\begin{cases} (\sin(\sin(x)))' = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x) \\ (x)' = 1\,. \end{cases}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)}{1} = \frac{\cos(\sin(0))}{1} = 1$$

existiert und mit L'Hospital folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} = 1\,.$$

(b) Die Regel ist anwendbar, da

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot 2^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x} \text{ mit } \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty \\ \lim\limits_{x\to\infty} 2^x = \infty\,. \end{cases}$$

Die Ableitungen von Zähler und Nenner lauten

$$\begin{cases} \left(x^2\right)' = 2x \\ (2^x)' = (\exp(x\cdot\ln(2))' = \ln(2)\cdot 2^x\,. \end{cases}$$

Es zeigt sich, dass auch der Grenzwert der ersten Ableitungen vom Typ "∞/∞ïst. Deswegen betrachten wir die zweiten Ableitungen.

$$\begin{cases} \left(x^2\right)'' = 2 \\ (2^x)'' = \ln(2)^2 \cdot 2^x\,. \end{cases}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{(\ln(2)^2 \cdot 2^x} = 0$$

existiert und mit L'Hospital folgt

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot 2^{-x} = 0\,.$$

(c) Der Grenzwert ist äquivalent zu

$$\lim_{x\downarrow 0} x\cdot\ln(x) = -\lim_{x\downarrow 0} \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

mit den Grenzwerten

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \downarrow 0}(-\ln(x)) = \infty \\ \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1}{x} = \infty \,. \end{cases}$$

Die Regel ist anwendbar und wir berechnen die Ableitungen von Zähler und Nenner

$$\begin{cases} (-\ln(x))' = -\dfrac{1}{x} \\ \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \,. \end{cases}$$

Der Grenzwert

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{-1/x}{-1/x^2} = 0$$

existiert und mit L'Hospital folgt

$$\lim_{x \downarrow 0} x \cdot \ln(x) = 0 \,.$$

Extremwerte

Aufg. 2

Zerlegen Sie die Zahl 12 so in zwei Summanden, dass ihr Produkt möglichst groß wird.

Lösung:
Gesucht sind Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, so dass $x + y = 12$ und gleichzeitig $x \cdot y = \min$. Aus der ersten Gleichung folgt $y = 12 - x$ und damit suchen wir ein Minimum der Funktion $f : x \mapsto x \cdot (1 - x)$:

$$f(x) = x \cdot (12 - x) \Rightarrow f'(x_0) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow = 12 - 2 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 6 \wedge f''(6) = 12 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum}$$

Die Antwort ist $x = y = 6$.

Abbildungsvorschrift

Aufg. 3

Begründen Sie, warum es keine ganzrationale Funktion f gibt mit folgenden Eigenschaften: f hat Grad 2, f hat Nullstellen für $x = 2$ und $x = 4$ und ein Maximum für $x = 0$.

Lösung:

$$f : x \mapsto c \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) \Rightarrow f(x) = c(x^2 - 6 \cdot x + 8) \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot c \cdot (x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \wedge f''(3) \neq 0$$

Das heißt, dass f eine Extremstelle nur an der STelle $x = 3$ haben kann und nicht für $x = 0$.

Extrema

Aufg. 4

Es sei $f = u \circ v$ und die Funktionen u, v und f seien auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage:

(a) Ist x_0 eine Extremstelle von f, dann ist x_0 auch eine Extremstelle von v

(b) Ist x_0 eine Extremstelle von v, dann ist x_0 auch eine Extremstelle von f

Lösung:
Für die Ableitung der verketteten Funktion gilt $f' : x \mapsto u'(v(x)) \cdot v'(x)$

(a) $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow u'(v(x_0)) = 0 \vee v'(x_0) \quad \Rightarrow$ die Aussage unter (a) ist falsch (Bsp. $f(x) = (\sin(x))^2$).

(b) $v'(x_0) = 0 \Rightarrow u'(v(x_0)) \cdot v'(x_0) = f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow x_0$ ist ein kritischer Punkt von f. Zusätzlich wissen wir, dass v' an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel hat. Also hat auch f' an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel und damit ist x_0 auch eine Extremstelle von f. Die Aussage unter (b) ist wahr.

Wendepunkte

Aufg. 5

Bei einer Funktion f gelte für alle $x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0$. f ist differenzierbar udn $f'(x) = x \cdot f(x)$.

(a) Stellen Sie $f''(x)$ und $f'''(x)$ durch $f(x)$ dar.

(b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 ein lokales Extremum hat. Welche Bedingung muss f erfüllen, dass es sich um ein Maximum handelt?

(c) Begründen Sie, dass f keine Wendestelle besitzt.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} f''(x) &= f(x) + x \cdot f'(x) = f(x) \cdot (1 + x^2) \\ f'''(x) &= x \cdot f(x) \cdot (3 + x^2) \end{aligned}$$

(b) $x_0 = 0$ ist ein kritischer Punkt von f, da $f'(0) = 0 \cdot f(0) = 0$. Außerdem gilt $f''(0) = f(0) \neq 0$ laut Voraussetzung, also liegt an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Extremmum vor. Es handelt sich um ein Maximum, wenn $f(0) < 0$ ist.

(c) Die notwendige Bedingung luatet $f''(x) = 0$. Da $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, hat f keine Wendestelle.

Kurvendiskussion

Aufg. 6

Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch:

$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Lösung:
Die ersten zwei Ableitungen von f lauten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^4 - 3 \cdot x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ f''(x) &= \frac{2\,x \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \end{aligned}$$

1. (Definitionsbereich) f ist überall definiert, wo der Nenner null wird, also
$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\,.$$
2. (Symmetrie) f ist ungerade, denn
$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x)\,.$$
3. (Nullstellen) f hat eine dreifache Nullstelle für $x = 0$, denn
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$
4. (Polstellen) f hat in $x = \pm 1$ jeweils eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, denn
$$\lim_{x \downarrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty \wedge \lim_{x \uparrow 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty\,,$$
$$\lim_{x \downarrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \wedge \lim_{x \uparrow -1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty\,.$$
5. (Waagerechte Asymptoten) Die Grenzwerte für $|x| \to \infty$ ergeben sich zu
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} x \frac{1}{1 - 1/x^2} = \infty \wedge \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty\,.$$

6. (Extremstellen) f hat ein lokales Minium bei $(\sqrt{3}|3\sqrt{3}/2)$ und ein lokales Maximum bei $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2)$, denn

   (a) Kandidaten für Extremstellen

   $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}.$$

   (b) Analyse der Kandidaten mit Hilfe der zweiten Ableitung

   $$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \Rightarrow \text{ keine Entscheidung möglich}, \\ f''(-\sqrt{3}) &= -3\sqrt{3}/2 \Rightarrow \text{ lokales Minimum}, \\ f''(\sqrt{3}) &= 3\sqrt{3}/2 \Rightarrow \text{ lokales Maximum}. \end{aligned}$$

   Für $x = 0$ kann man entweder die dritte Ableitung anschauen oder prüfen, ob die zweite Ableitung einen Vorzeichenwechsel hat beim Übergang von $x = -h$ zu $x = h$. f'' hat keinen Vorzeichenwechsel an der Stelle $x = 0$, denn

   $$f''(x) = \frac{x^2 \cdot (x^2-3)}{(x^2-1)^2} < 0 \quad x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \setminus \{0\}$$

   und damit ist $x = 0$ keine Extremstelle.

7. (Wendestellen) Kandidaten für Wendestellen sind die kritischen Puntke der zweiten Ableitung, also

   $$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^2} = 0,$$

   das heißt im Definitionsbereich nur für $x = 0$. Die zweite Ableitung ändert dort ihr Vorzeichen, also liegt in $(0|0)$ ein Wendepunkt vor.

8. (Bildbereich) Der Bildbereich ist $\mathbb{R}$.

Anwendungen: Newton-Verfahren

Aufg. 7

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = e^{-x} - \sin(x)$$

und $x_0 = 0$. Gesucht ist eine Nullstelle $\tilde{x}$ der Funktion f.

(a) Bestimmen Sie die lineare Approximation $t(x) = mx + b$ an der Stelle x_0.

(b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren auf.

(c) Berechnen Sie die ersten Iterierten des Newton-Verfahrens und geben Sie eine Schätzung für die Lösung an.

Lösung:

(a) Es ist

$$f'(x) = -e^{-x} - \cos(x),\ f'(x_0) = f'(0) = -2$$

und damit lautet die Tangentengleichung

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = (-2)x(x-0) + 1 = 1 - 2x.$$

(b) Es gilt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} - \sin(x_k)}{-e^{-x_k} - \cos(x_k)}.$$

(c) Eine Näherung für die Nullstelle ist $\tilde{x} \approx 0.58853274398$.

Numerische Näherung Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 1.25.

Zentrale Differenz und zweite Differenz

Aufg. 1

(a) Zeigen Sie, dass sich die erste Ableitung von Polynomen vom Grad 2 mit der zentralen Differenz exakt berechnen läßt.

(b) Zeigen Sie, dass sich die zweite Ableitung von Polynomen vom Grad 4 mit der zweiten Differenz exakt berechnen läßt.

Lösung:

(a) Ein Polynom zweiten Grades mit Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ gilt

$$p(x) = ax^2 + bx + c \ \Rightarrow p'(x) = 2ax + b\,.$$

Zu zeigen ist, dass die zentrale Differenz die erste Ableitung exakt approximiert. Betrachten wir beispielsweise die Ableitung an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Es gilt für jedes $h > 0$

$$\begin{aligned}\frac{p(x_0+h) - p(x_0-h)}{2h} &= \frac{a(x_0+h)^2 + b(x_0+h) + c - \big(a(x_0-h)^2 + b(x_0-h) + c\big)}{2h} \\ &= \frac{4ahx_0 + 2hb}{2h} = ax + b = p'(x_0)\,.\end{aligned}$$

(b) Ein Polynom dritten Grades mit Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ gilt

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \Rightarrow p''(x) = 6ax + 2b\,.$$

Zu zeigen ist, dass die zweite Differenz die zweite Ableitung exakt approximiert. Betrachten wir beispielsweise die zweite Ableitung an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$. Es gilt für jedes $h > 0$

$$\begin{aligned}&\frac{p(x_0+h) - 2p(x_0) + p(x_0-h)}{h^2} \\ = \ &= \frac{a(x_0+h)^3 + b(x_0+h)^2 + c(x_0+h) + d}{h^2} \\ &-2\frac{\big(ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d\big)}{h^2} + \frac{a(x_0-h)^3 + b(x_0-h)^2 + c(x_0-h) + d}{h^2} \\ = \ &a\frac{(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) - 2x^3 + (x^3 - 3hx^2 + 3h^2x - h^3)}{h^2} \\ &+b\frac{(x^2 + 2h + h^2) - bx^2 + (x^2 - 2h + h^2)}{h^2} \\ = \ &\frac{6ah^2x + 2bh^2}{h^2} = 6ax + 2b\,.\end{aligned}$$

Bestapproximation

Aufg. 2

Gegeben seien Messungen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ einer Größe $x \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Approximation $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, deren Abstand zu allen Messwerten gleichzeitig minimal ist, also

$$\sum_{k=1}^{n} |x - x_k|^2 \overset{!}{=} \min\,.$$

Bestimmen Sie eine Formel für $\tilde{x}$.

Lösung: Fassen wir den Term auf der rechten Seite als Funktion von x auf, dann ist das Minimum dieser Funktion gesucht. Um das Minimum zu bestimmen, suchen wir zunächst kritische Punkte und überprüfen diese mittels der zweiten Ableitung. Bei der Berechnung der ersten Ableitung muss man sich darüber Klarheit verschaffen, wie die Ableitung der Betragsfunktion funktioniert: Damit gilt

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot (x - x_k)\,.$$

$$Q''(x) = \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Nun bestimmen wir die Nullstellen der ersten Ableitung:

$$Q'(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} -2 \cdot (x - x_k) = 0 \Leftrightarrow 2nx = -2 \sum_{k=1}^{n} x_k\,.$$

Also ist die beste Approximation an alle Messpunkte gerade ihr arithmetisches Mittel:

$$\tilde{x} = -\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=^n} x_k\,.$$

Taylorentwicklung

Aufg. 3

Gegeben sei die Funktion $f : x \mapsto \cos(x)$. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung T_7 von f an der Stelle $x_0 = 0$ und schätzen Sie den Betrag des Lagrangeschen Restglieds R_8 im Intervall $x \in I = [-\pi/6, \pi/6]$ ab.

Lösung: Es gilt

$$\begin{array}{rclrcl}
f(x) & = & \cos(x), & f(0) & = & 1 \\
f'(x) & = & -\sin(x), & f'(0) & = & 0 \\
f''(x) & = & -\cos(x), & f''(0) & = & -1 \\
f''(x) & = & \sin(x), & f''(0) & = & 0 \\
f^{(4)}(x) & = & \cos(x), & f^{(4)}(0) & = & 1 \\
f^{(5)}(x) & = & -\sin(x), & f^{(5)}(0) & = & 0 \\
f^{(6)}(x) & = & -\cos(x), & f^{(6)}(0) & = & -1 \\
f^{(7)}(x) & = & \sin(x), & f^{(7)}(0) & = & 1 \\
f^{(8)}(x) & = & \cos(x), & |f^{(8)}(x)| & = & \leq 1
\end{array}$$

Damit folgt

$$T_7(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \quad \text{und} \quad |R_8(x)| \leq \frac{|\cos(\xi)|}{8!}\,(\pi/6)^8 = \frac{\pi^8}{6^8 \cdot 8!} \approx 1.4 \cdot 10^{-7}\,.$$

Interpolation (Wiederholung)

Aufg. 4

Gegeben sind die Punkte

i	0	1	2	3
x_i	-3	-1	0	2
y_i	-3	1	0	82

(a) Bestimmen Sie den Grad n des Interpolationspolynoms.

(b) Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten des Interpolationspolynoms in der Darstellung

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

und lösen Sie es.

Lösung:

(a) Da vier Punkte zu interpolieren sind, hat das Polynom den Grad drei

$$p : x \mapsto a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_2 x^1 + a_0\,.$$

(b) Die Bedingungen $p(x_i) = y_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ führen auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -27 & 9 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 82 \end{pmatrix} .$$

Die Lösung lautet $a_3 = 3$, $a_2 = 11$, $a_1 = 7$, $a_0 = 0$ und damit

$$p : x \mapsto 3x^3 + 11x^2 + 7x\,, .$$

Interpolation (Wiederholung)

Aufg. 5

Eine Funktion der Form

$$f : x \mapsto \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)\,,$$

soll durch die Punkte $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ mit

$$(0|1),\ (\pi/6| - 1),\ (\pi/2| - 3)$$

gelegt werden. Bestimmen Sie ein Gleichungssystem für die Koeffizienten a_0, a_1, b_1 und lösen Sie es.

Lösung: Allgmein muss gelten

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cos(x_1) & \sin(x_1) \\ \frac{1}{2} & \cos(x_2) & \sin(x_2) \\ \frac{1}{2} & \cos(x_3) & \sin(x_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Für die gegebenen Punkte lautet das Gleichungssystem also konkret

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet $a_0 = 2$, $a_1 = 0$, $b_1 = -4$. und damit $f : x \mapsto 1 - 4\sin(x)$.

Partialbruchzerlegung Aufgaben mit Lösungen

Regeln und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.1.

Faktorisierung — Aufg. 1

Zerlegen Sie die folgenden Polynome weitestgehend in Linearfaktoren.

$$(a)\ 4y^3 - 8y^2 - 3y + 9 \quad (b)\ a^4 + 3a^2 - 10 \quad (c)\ x^4 + 2x^3 - 35x^2 \quad (d)\ -64 + b^2$$

Lösung:
Erinnern Sie sich an die Standard-Tricks zum Lösen algebraischer Gleichungen:

1. bei einem linearen Polynom ist die Vorgehensweise klar: Gleichung auflösen.
2. bei einem quadratischen Polynom ist die Vorgehensweise klar: Gleichung auflösen (allgemeine Lösungsformel).
3. machmal lassen sich gemeinsame Potenz von der Variable ausklammern und der Rest ist ein quadratisches Polynom, was mit der allgemeinen Lösungsformel zu behandeln ist.
4. bei Polynomen, die nur gerade Potenzen von x aufweisen, bietet sich eine Substitution der Form $x^2 = y$, damit wird der Polynomgrad um zwei reduziert und Sie erhälten im besten Fall ein quadratisches Polynom in y - hier ist die Rücksubstitution nicht zu vergessen!
5. Binomische Formeln sollten Sie erkennen können.
6. Wenn all das nicht hilft, hilft nur noch eine Nullstelle zu raten und da beginnen Sie mit $x = 1$, dann $x = -1$ vielleicht noch $x = 2$ und $x = -2$ und wenn da nichts zum Erfolg führt, dann prüfen Sie, ob Sie einen Abschreibfehler drin haben :)

So, jetzt geht es los:

(a) Fall 6 und $y_1 = -1$ ist eine Nullstelle! Also ist die Strategie: erst eine Polynomdivision (die muss ohne Rest aufgehen, sonst haben Sie einen Fehler gemacht!) und dann die allgemeine Lösungsformel für das Restpolnyom durchführen...

$$\left(4y^3 - 8y^2 - 3y + 9\right) : (y+1) = 4y^2 - 12y + 9 \Rightarrow y_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{3}{2}$$

Die Linearfaktorzerlegung des Polnyoms lautet also

$$4y^3 - 8y^2 - 3y + 9 = 4 \cdot \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot (y+1)$$

Vorsicht: denken Sie daran, dass die allgemeine Lösungsformel Ihnen die Nullstellen des Polynoms liefert - an den Faktor vor der höchsten Potenz, im Beispiel 4, müssen Sie selbst denken, wenn eine äquivalente Darstellung des Polynoms gesucht ist!

(b) Fall 4: setzen wir $a^2 = x$, dann erhalten wir ein quadratisches Polynom in x, dessen Nullstellen wir mit der allgemeinen Lösungsformel berechnen können:

$$\begin{aligned} a^4 + 3a^2 - 10 \Leftrightarrow a^2 = x \wedge x^2 + 3x - 10 &= (x+5)\cdot(x-2), \\ \text{denn} \quad x_{1,2} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \begin{cases} -5 \\ 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Die Rücksubstitution liefert

$$a^4 + 3a^2 - 10 = (a^2+5)\cdot(a^2-2) = (a - \sqrt{2})\cdot(a+\sqrt{2})\cdot(a^2+5)\,,$$

wobei der Faktor $(a^2 - 2)$ in die Linearfaktoren $(a - \sqrt{2})$ und $(a + \sqrt{2})$ zerlegt werden kann und der andere Faktor als quadratischer Term ohne reelle Nullstellen stehen bleiben muss.

(c) Fall 3 tritt ein und wir erhalten

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 35x^2 = x^2 \cdot (x^2 + 2x - 35) &= x^2 \cdot (x-5)\cdot(x+7), \\ \text{denn } x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = \begin{cases} -7 \\ 5\,. \end{cases} \end{aligned}$$

(d) Fall 5 (3. Binomische Formel): $-64 + b^2 = (b+8)\cdot(b-8)$

Polynomdivision

Aufg. 2

Führen Sie folgende Polynomdivisionen aus.

$(a)\ (x^2+x):(x-1)$ $\qquad$ $(b)\ (x^3-x^2-x+1):(x-1)$

$(c)\ (x^3+x^2-5x+3):(x-1)^2$ $\qquad$ $(d)\ (x^4+x^3-2x):(x-1)$

Lösung:

(a) $(x^2+x):(x-1)=x+2+\dfrac{2}{x-1}$

(b) $(x^3-x^2-x+1):(x-1)=x^2-1$

(c) $(x^3+x^2-5x+1):(x-1)^2=x+3$

(d) $(x^4+x^3-2x):(x-1)=x^3+2x^2+2x$

Gauß-Algorithmus

Aufg. 3

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$(a)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} A_1 & & & + & B_2 & = & 0 \\ 4A_1 & + & 4A_2 & + & 2B_2 & = & -2 \\ 4A_1 & - & 2A_2 & + & 8B_2 & = & -38 \end{array}\right. \qquad (b)\ \left\{\begin{array}{rrcrcrcr} - & x & + & y & + & z & = & 0 \\ & x & - & 3y & - & 2z & = & 5 \\ & 5x & + & y & + & z & = & -6 \end{array}\right.$$

Lösung:

Lösung durch Anwendung des Gauß-Algorthmus, das heißt die erweiterte Matrix wird auf Trapezform gebracht und das Gleichungssystem wird von unten nach oben gelöst:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 8 & -38 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -19 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -39 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} A_1 & = 13 \\ A_2 & = -7 \\ B_2 & = -13 \end{cases}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x & = -1 \\ y & = -4 \\ z & = 3 \end{cases}$$

Partialbruchzerlegung

Aufg. 4

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

$$(a)\ \frac{2x^3-x^2-6x+2}{(x-5)^2(x^2+3x+4)} \qquad (b)\ \frac{x+1}{x(x^2+1)^2} \qquad (d)\ \frac{x^2-5x}{(x-2)^3}$$

Lösung:

Die Nennerpolynome der gebrochenrationalen Ausdrücke liegen schon in faktorisierter Form vor und der Quotient ist vollständig gekürzt. Die Partialbruchzerlegung startet also mit dem Ansatz für die Zerlegung.

(a) Der Ansatz lautet:

$$\frac{2x^3 - x^2 - 6x + 2}{(x-5)^2(x^2+3x+4)} = \frac{A}{(x-5)^2} + \frac{B}{x-5} + \frac{Cx+D}{x^2+3x+4}\,.$$

Um die vier Konstanten A bis D zu bestimmen, fasst man das wieder zu einem Bruch zusammen:

$$\frac{2x^3 - x^2 - 6x + 2}{(x-5)^2(x^2+3x+4)} = \frac{A(x^2+3x+4) + B(x-5)(x^2+3x+4) + (Cx+D)(x-5)^2}{(x-5)^2(x^2+3x+4)}$$

Also muss für die Zähler gelten:

$$2x^3 - x^2 - 6x + 2 \stackrel{!}{=} A(x^2+3x+4) + B(x-5)(x^2+3x+4) + (Cx+D)(x-5)^2\,.$$

Das muss für alle reellen Zahlen x gelten. Daraus muss man nun vier Gleichungen für die vier Konstanten A bis D basteln. Dafür gibt es zwei Wege:

- Verschiedene Werte für x einsetzen: Zum Beispiel findet man für $x = 5$

$$2 \cdot 125 - 25 - 30 + 2 \stackrel{!}{=} A(25 + 15 + 4)\,.$$

- Links und rechts Potenzen von x zusammenfassen und einen Koeffizientenvergleich machen: Zum Beispiel steht links $2x^3$ und rechts

$$2x^3 \stackrel{!}{=} (B+C)x^3 \Rightarrow B + C \stackrel{!}{=} 2\,.$$

(b) Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1x + C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2+1)^2}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssystem zur Bestimmung des Vektors $(A_1, B_1, B_2, C_1, C_2)^\intercal$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A_1 = C_2 = 1, B_1 = B_2 = -1, C_1 = 0$$

Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,.$$

(c) Der Ansatz lautet:

$$\frac{x^2 - 5x}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

Die Partialbruchzerlegung ist:

$$\frac{x^2 - 5x}{(x-2)^3} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{6}{(x-2)^3}$$

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch. Hinweis: Die Nennerpolynome haben mindestens eine ganzzahlige Nullstellen.

(a) $\dfrac{1}{x^3+x}$ (b) $\dfrac{(4x^5-6x+13)(x-1)(x^2-1)}{x^3-x^2-x+1}$ (c) $\dfrac{2x^2+x+1}{x^3+x^2-5x+3}$

(d) $\dfrac{-x^4-2x^3+7x^2-5x+3}{x^2+3x-4}$ (e) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}$

Lösung:

(a) Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$x^3+x = x(x^2+1)$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

(b) Die Faktorisierung des Nenners lautet $(x-1)(x^2-1)$, das Nennerpolynom läßt sich also komplett wegkürzen und es ist nichts weiter zu tun:

$$\frac{(4x^5-6x+13)(x-1)(x^2-1)}{x^3-x^2-x+1} = \frac{(4x^5-6x+13)(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x-1)} = 4x^5-6x+13\,.$$

(c)
- Die Faktorisierung des Nennerpolynoms lautet

$$x^3+x^2-5x+3 = (x-1)^2\cdot(x+3)$$

- Der Nenner besitzt also eine zweifache Nullstelle in $x=1$ und eine einfache Nullstelle in $x=-3$. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet also

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)^2\cdot(x+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+3}$$

- Ein Koeffizientenvergleich zwischen den Zählern beider Seiten führt auf das folgende lineare Gleichungssystem für den Vektor $(A_1, A_2, B_1)^\intercal$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow A_1 = A_2 = B_1 = 1\,.$$

- Die Partialbruchzerlegung gemäß unseres Ansatzes lautet

$$\frac{2x^2+x+1}{x^3+x^2-5x+3} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+3}$$

(d) Polynomdivision

$$\frac{-x^4-2x^3+7x^2-5x+3}{x^2+3x-4} = \frac{3-x}{x^2+3x-4} - x^2 + x$$

Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{3-x}{x^2+3x-4} = \frac{2}{5(x-1)} - \frac{7}{5(x+4)}$$

(e) Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{1}{3(x+2)} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

Partialbruchzerlegung

Aufg. 6

Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch.

$(a)\ \dfrac{1}{x^2-a^2},\ a>0 \qquad (b)\ \dfrac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2} \qquad (c)\ \dfrac{3z}{z^3-3z^2-4}$

$(d)\ \dfrac{4x-2}{x^2-2x-63} \qquad (e)\ \dfrac{2x+1}{x^3-6x^2+9x}$

Lösung:
Detaillierte Lösungen zu dieser Aufgabe finden Sie in Papula, Band 1. Die Partialbruchzerlegungen sind Teil der Aufgabe 7 auf Seite 563 im Abschnitt V.8. Den Lösungsweg finden Sie auf den Seiten $793-794$.

Integral Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.2 des Skripts.

Flächeninhalt — Aufg. 1

Berechnen mit Hilfe geometrischer Überlegungen den Flächeninhalt zwischen Graphen und x-Achse

$$(a)\int_0^4 (2x-1)\mathrm{d}x \qquad (b)\int_0^2 (x-1)^3\mathrm{d}x \qquad (c)\int_0^1 |\sin(2\pi x)|\mathrm{d}x$$

Lösung:

(a) $f : x \mapsto 2x-1, \quad f(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 7\cdot(4-\frac{1}{2}) = 12\,.$

(b) $\forall x \in [0,1]: \quad f(x) = -f(x+1) \Rightarrow A = 0$

(c) $A = \frac{1}{2}1\cdot 1 = \frac{1}{2}$

Flächeninhalt (Trapezformel) — Aufg. 2

(a) A sei der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r. Zeigen Sie: $2r^2 < A < 4r^2$.

(b) Überlegen Sie sich, wie Sie den Flächenhinhalt A näherhungsweise mit einer numerischen Integration berechnen können.

(c) Was ist der Unterschied zur Flächeninhaltsberechnung von Vielecken?

Lösung:

(a) Einbeschriebenes Quadrat hat die Fläche $(\sqrt{2}r)^2$ und das umschreibende Quadrat die Fläche $(\sqrt{4}r)^2$.

(b) Eine Idee ist die Fläche unter einem Halbkreis zu berechnen. Der Halbkreis ist nämlich als Funktion darstellbar und durch $f : x \mapsto \sqrt{r^2-x^2}$ zu parametrisieren. Den Flächeninhalt kann man durch eine Zerlegungssumme approximieren, beispielsweise durch die Trapezformel. Dazu unterteilen wir das Intervall $[-r,r]$ in $n \in \mathbb{N}$ Teilintervalle mit Schrittweite $h = 2r/n$ also $x_k = -r + k\cdot h$ und berechnen sie Zerlegungssumme S_n:[a]

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}\cdot h \Rightarrow A \approx \lim_{n\to\infty} 2\cdot S_n = \pi r^2\,.$$

(c) Anders als bei Vielecken, kann der Flächeninhalt nicht exakt bestimmt werden (die Krümmung des Funktionsgraphen ist nie konstant!). Um die Flächenberechnung zu berechnen muss ein Grenzwert gebildet werden.

[a] Später lernen wir die numerische Integration mit Zufallszahlen kennen, die sogenannte Monte-Carlo Methode

Eigenschaften des Integrals — Aufg. 3

Begründen Sie, dass jede Integralfunktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ mindestens eine Nullstelle hat.

Lösung: Das ist eine Anwendung der Eigenschaften des Riemann-Integrals, denn es gilt $\int\limits_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Aufg. 4

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen folgender Funktionen:

$$(a)\ x \mapsto 4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5 \quad (b)\ x \mapsto e^x + x^2 - 2x + \sin(x) \quad (c)\ x \mapsto \frac{\tan(x)}{\sin(2x)}$$

Lösung:
Die hier gestellten Aufgaben (und viele mehr :)) finden Sie in Papula, Band 1, Abschnitt V.1-7. Aufgaben ab Seite 559 und die Lösungen auf Seite 787

(a) Papula Aufg. 1.a) $F(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$

(b) Papula Aufg. 2.a) $F(x) = e^x + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \cos(x) + C$

(c) Papula Aufg. 2.j) $F(x) = \frac{1}{2}\tan(x) + C$

Bestimmte und uneigentliche Integrale

Aufg. 5

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Integrale, vorausgesetzt sie existieren:

$$(a) \int_0^4 \left(x^3 - 5x^2 + \frac{3}{2}x - 10\right) \mathrm{d}x \quad (b) \int_1^4 \frac{1 - z^2}{z}\,\mathrm{d}z \quad (c) \int_0^{0,5} \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x \quad (d) \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2(x)}{2\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$(e) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x \quad (f) \int_0^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad (g) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad (h) \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Lösung:
Die hier gestellten Aufgabenteile $(a) - (d)$ finden Sie in Papula, Band 1, V.1-7, ab Seite 560 und die Lösungen auf Seite 787

(a) Papula Aufg. 3.a) $-212/3$

(b) Papula Aufg. 3.c) $\ln(4) - 15/2$

(c) Papula Aufg. 3.i) $\pi/2$

(d) Papula Aufg. 3.j) $(1 - \pi/4)/2$

(e)

$$\int\limits_1^a \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{3x^3}\Big]_1^a = -\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{3a^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,.$$

(f)

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + C \Rightarrow \lim_{a\to 0}\int\limits_a^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Keines der beiden uneigentlichen Integrale existiert: $\lim\limits_{a\to 0}\ln(a) = -\infty$ und $\lim\limits_{b\to\infty}\ln(b) = \infty$

(g)

$$\int\limits_a^0 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_a^0 = -1 + e^{-a} \Rightarrow \lim_{a\to-\infty}\left(-1 + e^{-a}\right) = \lim_{a\to\infty}\left(-1 + e^{a}\right) \text{ existiert nicht}\,.$$

(h)

$$\int_a^4 \frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \Big[4\sqrt{t}\Big]_a^4 = 8 - 4\sqrt{a} \Rightarrow \lim_{a\to 0}\left(8 - 4\sqrt{a}\right) = 8\,.$$

Numerische Integration

Aufg. 6

Das folgende bestimmte Integral soll näherungsweise bestimmt werden:

$$\int_1^3 x^3\,\mathrm{d}x = 20\,.$$

(a) Bestimmen Sie eine Zerlegung des Intervalls $[1, 3]$ in 4 gleich große Intervalle.

(b) Wenden Sie eine Rechteckregel an.

(c) Wenden Sie die Trapezregel an.

(d) Wenden Sie die Simpson-Formel an.

Lösung:

(a) $x_0 = 1, x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{2}, x_4 = 3$

(b) $A = \frac{1}{2}\cdot(1^3 + (\frac{3}{2})^3 + 2^3 + (\frac{5}{2})^3) = 14$

(c) $A = \frac{1}{4}\cdot 1^3 + \frac{1}{2}((\frac{3}{2})^3 + 2^3) + \frac{1}{4}(\frac{5}{2})^3) = 20.5$

(d) Zur Anwendung der Simpson-Formel brauchen wir noch alle Zwischenstellen:

$$x_0 = 0, x_{01} = \frac{5}{4}, x_1 = \frac{3}{2}, x_{12} = \frac{7}{4}, x_2 = 2, x_{23} = \frac{9}{4}, x_3 = \frac{5}{2}, x_{34} = \frac{11}{4}, x_4 = 3\,.$$

Die Simpson-Formel ergibt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{12}\left(1^3 + 4\left(\frac{5}{4}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{7}{4}\right)^3 + 2\,(2)^3 + 4\left(\frac{9}{4}\right)^3 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{11}{4}\right)^3 + 3^3\right) \\ &= \cdots = 20\,. \end{aligned}$$

Das Ergebnis hätten wir auch ohne Rechnung sofort angeben können, denn die Simpson-Formel ist exakt für Polynome dritten Grades. Dieses Ergebnis läßt sich sofort der Fehler-Abschätzung ablesen - warum?

Simpson-Regel

Aufg. 7

Bestimmen Sie den relativen Fehler, den Sie bei einer Approximation des Intgrals

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Simpson-Regel auf drei äquidistanten Teilintervallen machen.

Lösung: Auszuwerten ist die Simpsonregel für $h = \dfrac{1}{3}$. Zusätzlich zu den Stützpunkten in Intervallrändern kommen Stützpunkte in jeder Intervallmitte. Insgesamt sind das also 7 Stützpunkte

$$\begin{cases} x_k &= 0 + k\cdot\dfrac{1}{2}h = k\cdot\dfrac{1}{6}\,, \\ y_k &= f(x_k) = x_k\cdot\cos\left(x_k^2\right)\,. \end{cases}$$

Mit dieser Notation lautet die Simpsonregel also

$$S_3(f) = h\left(\frac{1}{6}y_0 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4 + \frac{2}{3}y_5 + \frac{1}{6}y_6\right) = \sum_{k=0}^{6} w_k y_k,$$

k	0	1	2	3	4	5	6
x_k	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$
y_k	$\frac{1}{6}\cos\left(\frac{1}{36}\right)$	$\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{9}\right)$	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{2}{3}\cos\left(\frac{4}{9}\right)$	$\frac{2}{3}\cos\left(\frac{4}{9}\right)$	$\frac{5}{6}\cos\left(\frac{25}{36}\right)$	$\cos(1)$
w_k	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$

Damit

$$S_3(f) = \sum_{k=0}^{6} w_k \cdot y_k = 0.420681\,.$$

Analytische Integration liefert

$$I = \int_0^1 x \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin(x^2)\right]_0^1 = 0.420736\,.$$

Damit ergibt sich für den relativen Fehler:

$$e = \frac{|I - S_3|}{I} = 1.31 \cdot 10^{-4}\,.$$

Integrationsregeln Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.3.

Stückweise stetige Funktionen

Aufg. 1

Gegeben seien die folgenden stückweise definierten Funktionen

$$f : x \mapsto \begin{cases} x, & x < 1\,, \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} x, & x < 1\,, \\ 2, & x = 1\,, \\ \cos(x), & x > 1 \end{cases}$$

(a) Integrieren Sie diese Funktionen stückweise.

(b) Sind die Funktionen, die Sie unter (a) entwickelt haben Stammfunktionen?

Lösung:

(a) Wir integrieren stückweise und erhalten

$$F(x) = \begin{cases} \int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + c_1, & x < 1\,, \\ \int x - 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + c_1, & x < 1\,, \\ \int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

(b) Achtung! Die Funktionen F und G, die unter (a) durch eine stückweise Integration ermittelt worden sind, sind keine Stammfunktionen - denn sie sind nicht stetig geschweige denn differenzierbar.

Bemerkung: man kann für diesen Fall sogenannte verallgemeinerte Stammfunktionen definieren, aber diese benötigen wir nicht.

Partielle Integration

Aufg. 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int x \ln(x) \,\mathrm{d}x \quad (b) \int_1^5 \ln(t) \,\mathrm{d}t \quad (c) \int_0^{0{,}8} x e^x \,\mathrm{d}x \quad (d) \int e^x \cos(x) \,\mathrm{d}x$$

Finden Sie eine Rekursionsformel zur Berechnung von

$$\int x^n \cdot e^x \,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}^+\,.$$

Lösung:
Diese Aufgaben finden Sie in Papula, Band 1, Abschnitt V.8 auf Seite 562 und detaillierte Lösungswege auf Seite 792ff.

(a) Papula Aufg. 5.a) $\frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1) + C$

(b) Den Logarithmus kann man integrieren mit Hilfe einer partiellen Integration. Wähle

$$\begin{cases} \ln(t) & \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} \frac{1}{t} \\ 1 & \xrightarrow{\int \cdot \mathrm{d}t} t \end{cases} \Rightarrow \int 1 \cdot \ln(t) \,\mathrm{d}t = \ln(t) \cdot t - t + c \Rightarrow \int_1^5 \ln(t) \,\mathrm{d}t = 5\ln(5) - 4\,.$$

(c) Papula Aufg. 5.e) $-0{,}2 \cdot e^{0{,}8} + 1$

(d) Papula Aufg. 6.a) $\frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$

Zur Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x \\ n \geq 1: \quad I_n &= \int x^n \cdot e^x \, \mathrm{d}x \,, \quad \text{P.I. mit} \begin{cases} \frac{\mathrm{d}\,\cdot}{\mathrm{d}x} & x^n \longrightarrow n\, x^{n-1} \\ \int \cdot \, \mathrm{d}x & e^x \longrightarrow e^x \end{cases} \\ &= x^n \cdot e^x - \int n\, x^{n-1} \cdot e^x \, \mathrm{d}x \\ &= x^n \cdot e^x - n \cdot \int x^{n-1} \cdot e^x \, \mathrm{d}x = x^n \cdot e^x - n \cdot I_{n-1} \,. \end{aligned}$$

Integrationsregeln

Aufg. 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int x \sin(x^2) \, \mathrm{d}x \quad (b) \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, \mathrm{d}t \quad (c) \int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x} \, \mathrm{d}x \quad (d) \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Lösung:
Diese Aufgaben finden Sie in Papula, Band 1, Abschnitt V.8 auf Seite 562 und detaillierte Lösungswege auf Seite 790ff.

(a) Führen wir eine Intgration durch Substitution durch: $u = x^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$

$$\int x \cdot \sin(x^2) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) \cdot 2 \cdot x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sin(u) \, \mathrm{d}u = -\frac{1}{2} \cos(u) = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c \,.$$

(b) Der Integrand enthält einen Bruch, und es ist wichtig mögliche Polstellen im Integrationsgebiet zu identifizieren bevor wir integrieren. Da der Nenner für alle $t \in \mathbb{R}$ größer null ist, liegt hier kein Pol vor und wir können loslegen. Die Substitution $u = 1 + t^2$ führt auf das Differential $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$ und die neuen Integrationsgrenzen $u(-1) = u(1) = 2$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot 2\, t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{2}^{2} \frac{1}{\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u = 0 \,.$$

(c) Der Integrand ist eine gebrochenrationale Funktion, die noch nicht vollständig gekürzt ist. Die Polynomdivision zerlegt den Integranden in seinen granzrationalen und echtgebrochenrationalen Anteil:

$$(x+5) : (-x+5) = -1 + \frac{10}{5-x} \,.$$

Und damit

$$\int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x} \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(-1 + \frac{10}{5-x} \right) \mathrm{d}x = \Big[-x + 10 \cdot \ln|5-x| \cdot (-1) \Big]_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} = 10 \cdot \ln(3/2) - 2 \,.$$

Die blau hervorgehobene -1 darf nicht fehlen: sie gleicht die innere Ableitung des Arguments im Logarithmus aus!

Ein Integral läßt sich unter Umständen auf viele verschiedene Arten lösen. Im vorliegenden Fall führt auch die Formel der partiellen Integration zum Erfolg: für $x \in [-1, 1]$ gilt

$$\begin{cases} (5+x) & \overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}{\to} +1 \\ \dfrac{1}{5-x} & \overset{\int \cdot \mathrm{d}x}{\to} -\ln(5-x) \quad \text{da } (5-x) > 0 \,. \end{cases}$$

Mit Aufgabe 2.b folgt

$$\int_{-1}^{1} \ln(5-x) \, \mathrm{d}x = \Big[\left(\ln(5-x) \cdot (5-x) - (5-x)\right) (-1) \Big]_{-1}^{1} = -4\ln(4) + 6\ln(6) - 2 \,.$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{5+x}{5-x} \, \mathrm{d}x &= \Big[-\ln(5-x) \Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \ln(5-x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\ln(4) + \ln(6) - 4\ln(4) + 6\ln(6) - 2 = 10(\ln(3) - \ln(2)) - 2 \,. \end{aligned}$$

(d) Bei Wurzelausdrücken der Form $\sqrt{a^2-x^2}$ ist es klug sich an die Kreisgleichung zu erinnern:

$$x^2+y^2=a^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x &= a\cos(\alpha)\,, \\ y &= a\sin(\alpha) \end{cases}$$

Sieht man diesen Zusammenhang, dann liegt die folgende Substitution nah:

$$x = 2\cos(\alpha) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = -2\sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha$$

Das Differential wird einen weiteren Faktor im Integranden erzeugen und das mag auf den ersten Blick ein no-go sein, aber auf den zweiten Blick ist es ein Glücksgriff, denn

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{4\sin^2(\alpha)}}{4\cdot\cos^2(\alpha)}\,(-2\cdot\sin(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha = \int \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}\,(-\sin(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha = -\int \tan^2(\alpha))\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Und nun? Wir haben das Integral jetzt transformiert auf ein neues Integral - wie lösen wir es? Anstatt den Integranden als $\tan^2(\alpha)$ zu identifizieren, möchte ich hier eine partielle Integration zur Integration des blau leuchtenden Integrals zeigen. Die Idee zur Wahl von f' und g resultiert aus

$$\left(\frac{1}{\cos(\alpha)}\right)' = -\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\cdot(-\sin(\alpha)) \Rightarrow \int -\frac{1}{\cos^2(\alpha)}\cdot(-\sin(\alpha))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos(\alpha)} + c\,.$$

Also

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}_{=:f'}\,\underbrace{(-\sin(\alpha))}_{=:g}\,\mathrm{d}\alpha &= -\sin(\alpha)\cdot\frac{1}{\cos(\alpha)} + \int(-\cos(\alpha))\cdot\frac{1}{\cos(\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \alpha + c \end{aligned}\,.$$

Um die gesuchte Stammfunktion in Termen von x anzugeben, muss rücksubstituiert $x = \arccos(x)$.

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\tan\left(\arccos(x)\right) + \arccos(x) + c\,.$$

Formal läßt sich die Rücksubstitution natürlich leicht durchführen, aber bei bestimmten Integralen muss man an der Stelle immer aufpassen. Die Arkusfunktionen kehren die trigonometrischen Funktionen nur in eingeschränkten Intervallen um!

Integrationsregeln

Aufg. 4

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{array}{llllll} (a) & \int\cot(x)\,\mathrm{d}x & (b) & \int x\cosh(x)\,\mathrm{d}x & (c) & \int\frac{(\ln(x))^3}{x}\,\mathrm{d}x \\ (d) & \int\frac{12x^2}{2x^3-1}\,\mathrm{d}x & (e) & \int\sqrt{x^2-2x}\,\mathrm{d}x & (f) & \int\arctan(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Lösung:

Diese Aufgaben finden Sie in Papula, Band 1, Abschnitt V.8 auf Seite 563 und detaillierte Lösungswege auf Seite 795ff.

(a) Papula Aufg. 10.b) $F(x) = \ln|\sin(x)| + C$

(b) Papula Aufg. 10.c) $F(x) = x\sinh(x) - \cosh(x) + C$

(c) Papula Aufg. 10.g) $F(x) = \frac{1}{4}(\ln(x))^4 + C$

(d) Papula Aufg. 10.h) $F(x) = 2\ln|2x^3-1| + C$

(e) Papula Aufg. 10.j) $F(x) = \frac{1}{2}(x-1)\cdot\sqrt{x^2-2x} - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh}(x-1) + C$

(f) Papula Aufg. 10.l) $F(x) = x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$(a)\quad \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad y=\frac{1}{x}+1 \qquad (b)\quad \int_0^{1/b} \frac{ax}{bx+c}\,\mathrm{d}x, \quad b\neq 0, c>0, x=\frac{t-c}{b}$

$(c)\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x \qquad (d)\quad \int \sqrt{18+2x^2}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}y^{3/2}+c = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{3/2}+c \\
\Rightarrow \int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{3/2}\right]_{1/2}^{1} = 2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Alternativ - direkt durch Transformation der Grenzen:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_2^3 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_2^3 = 2\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{ax}{bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{a\frac{t-c}{b}}{b\frac{t-c}{b}+c}\cdot\frac{1}{b}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{b^2}\int \frac{t-c}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{a}{b^2}\int (1-\frac{c}{t})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{b^2}\cdot(t-c\ln(|t|)+C\frac{a}{b}x-\frac{ac}{b^2}\ln|bx+c|+C \\
\Rightarrow \int \frac{ax}{bx+c}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{a}{b}x-\frac{ac}{b^2}\ln|bx+c|+C\right]_0^{1/b} = \frac{a}{b^2}\left(1-c\ln\frac{c}{1+c}\right)
\end{aligned}$$

Alternativ - direkt durch Transformation der Grenzen:

$$\int_0^{1/b} \frac{ax}{bx+c}\,\mathrm{d}x = \int_c^{1+c} \frac{a\frac{1-c}{b}}{b\frac{t-c}{b}+b}\cdot\frac{1}{b}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{a}{b^2}\left(t-c\ln|t|\right)\right]_c^{1+c} = \frac{a}{b^2}\left(1-c\cdot\ln\frac{c}{1+c}\right)$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{4\cosh^2(t)-4}}\cdot 2\cdot\sinh(t)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sinh(t)}\sinh(t)\,\mathrm{d}t \\
&= t+c = \operatorname{arcosh}(x/2)+c
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{18+2x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{9+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{9+9\sinh^2(t)}\cdot 3\cosh(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \cosh(t)\cdot\cosh(t)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \int \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int \left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{\sinh(2t)}{4}+\frac{1}{2}t+c = \frac{1}{2}(\cosh(t)\sinh(t)+t)+c \\
\Rightarrow \int \sqrt{18+2x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cosh\left(\operatorname{arsinh}(x/2)\right)/2-\operatorname{arsinh}(x/2)\right)+c
\end{aligned}$$

Berechnen Sie folgende Integrale. Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnsise auf Blatt 1.

$(a)\ \int \frac{-x^4-2x^3+7x^2-5x+3}{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$ $\quad (b)\ \int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}\,\mathrm{d}x$ $\quad (c)\ \int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$

$(d)\ \int \frac{x^2-5x}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$ $\quad (e)\ \int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x,\ a>0$ $\quad (f)\ \int \frac{4x^3}{x^3+2x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

$(g)\ \int \frac{3z}{z^3-3z^2-4}\,\mathrm{d}x$ $\quad (h)\ \int \frac{4x-2}{x^2-2x-63}\,\mathrm{d}x$ $\quad (i)\ \int \frac{2x+1}{x^3-6x^2+9x}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

Detaillierte Lösungen zu den Aufgabenteilen $(e)-(i)$ finden Sie in Papula, Band 1 auf Seite 793ff.

(a) $F(x) = -\frac{7}{5}\ln|x+4| - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{5}\ln|x-1| + c$

(b) $F(x) = \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\ln|x-1| + c$

(c) $F(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \ln|x| + c$

(d) $F(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \ln|x-2|c$

(e) $F(x) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(f) $F(x) = \frac{2}{3}\ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \frac{32}{3}\ln|x+2| + 4x + c$

(g) $F(x) = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-1}{z+2}\right| - 2\frac{2}{z+2} + c$

(h) $F(x) = \frac{17}{8}\ln|x-9| + \frac{15}{8}\ln|x+7| + c$

(i) $F(x) = \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x}{x-3}\right| - \frac{7}{3(x-3)} + c$

Funktionenräume und Bestapproximation Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt des Skripts.

Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Aufg. 1

Gegeben sind drei linear unabhängige Vektoren. Bestimmen Sie ein Orthonormalsystem.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Erinnerung: Das Skalarprodukt und die Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$ ist anders als das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$. Beispielsweise haben lautet das Skalarprodukt zwischen $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ bzw. die Norm von $\boldsymbol{v}_1$:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle &= \boldsymbol{v}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{v}_2} = 1 \cdot (-i) + i \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-i) = -i \\ ||\boldsymbol{v}_1|| = \sqrt{\boldsymbol{v}_1 \cdot \overline{\boldsymbol{v}}_1} &= \sqrt{1 \cdot 1 + i \cdot (-i) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe besteht also darin basierend auf den drei gegebenen Vektoren drei Einheitsvektoren zu konstruieren, für die gilt

$$\langle \hat{\boldsymbol{e}}_i, \hat{\boldsymbol{e}}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Das Orthonormalsystem bestimmen wir in drei Schritten:

1. Wir bestimmen zu $\boldsymbol{v}_1$ einen Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ mit $\hat{\boldsymbol{e}}_1 \parallel \boldsymbol{v}_1 \;\wedge\; ||\hat{\boldsymbol{e}}_1|| = 1$:

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{||\boldsymbol{v}_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Wir bestimmen zu $\boldsymbol{v}_2$ in zwei Schritten einen Einheitsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}_2$ mit $\hat{\boldsymbol{e}}_2 \perp \hat{\boldsymbol{e}}_1 \;\wedge\; \|\hat{\boldsymbol{e}}_2\| = 1$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{v}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_1 \rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \hat{\boldsymbol{e}}_2 &= \frac{\boldsymbol{e}_2}{||\boldsymbol{e}_2||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Wir bestimmen zu $\boldsymbol{v}_3$ einen Vektor $\boldsymbol{e}_3$ mit $\hat{\boldsymbol{e}}_3 \perp \hat{\boldsymbol{e}}_i,\; i = 1, 2 \;\wedge\; \|\hat{\boldsymbol{e}}_3\| = 1$:

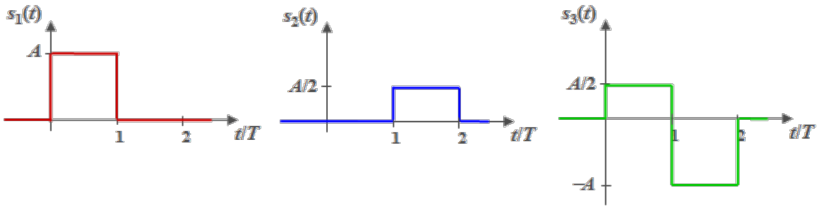
$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{v}_3 - \langle \boldsymbol{v}_3, \hat{\boldsymbol{e}}_1 \rangle \hat{\boldsymbol{e}}_1 - \langle \boldsymbol{v}_3, \hat{\boldsymbol{e}}_2 \rangle \hat{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-i)}{6} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \hat{\boldsymbol{e}}_3 &= \frac{\boldsymbol{e}_3}{||\boldsymbol{e}_3||} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Das System aus den Vektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3$ ist orthonormiert. Um eine Basis des $\mathbb{C}^4$ zu erhalten, müsste man das System noch um einen vierten Vektor ergänzen, der zu den anderen orthogonal ist und Länge eins hat.

Bei der Digitalsignalübertragung werden energiebegrenzte Signale betrachtet. Das Skalarprodukt zweier Signale bzw. die Norm eines Signals sind hierbei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\langle s_i, s_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) \cdot s_k(t)\, \mathrm{d}t\,,\\ \|s\| &= \sqrt{\langle s, s\rangle}\,.\end{aligned}$$

Betrachten Sie die folgenden drei energiebegrenzten Signale:



(a) Wie lauten die Abbildungsvorschriften der Signale s_1, s_2 und s_3?

(b) Berechnen Sie die Normen der Signale s_1 und s_2.

(c) Konstruieren Sie aus den Signalen s_1 und s_2 ein Orthonormalsystem.

(d) Zerlegen Sie das Signal s_3 bezüglich des Orthonormalsystems und bestimmen Sie die vektoriellen Repräsentanten der Ausgangssignale bezüglich des Orthonormalsystems.

Lösung:

(a)

$$s_1 : \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & t \le 0\,,\\ A, & 0 < t \le 1\,,\\ 0, & t > 1\,,\end{cases}$$

$$s_2 : \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & t \le 1\,,\\ A/2, & 1 < t \le 2\,,\\ 0, & t > 2\,,\end{cases}$$

$$s_3 : \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & t \le 0\,,\\ A/2, & 0 < t \le 1\,,\\ -A, & 1 < t \le 2\,,\\ 0, & t > 2\,.\end{cases}$$

(b) Wir berechnen die Länge der Signale mit dem angegebenen Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}|s_1|^2 &= \langle s_1, s_1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\cdot s_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 A^2 \mathrm{d}t = A^2 \;\Rightarrow |s_1| = |A|\,,\\ |s_2|^2 &= \langle s_2, s_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)\cdot s_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(\frac{A}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{A^2}{4} \;\Rightarrow |s_2| = \left|\frac{A}{2}\right|\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: hieran sehen, wir dass die Signale s_1 und s_2 nicht normiert sind.

(c) Wir überprüfen, ob die Signale bezüglich des gegebenen Skalarprodukts orthogonal zueinander sind, indem wir das Skalarprodukt berechnen:

$$\langle s_1, s_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)\cdot s_2(t)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

Die Intervalle, auf denen die Signale von Null verschieden sind, überplappen sich nicht und damit ist das Integral null. Die Signale sind orthogonal. Um eine Orthonormalbasis aus s_1 und s_2 zu konstruieren, müssen die Signale nur noch normiert werden:

$$\begin{cases} \hat{s}_1(t) = \dfrac{s_1(t)}{|s_1|} = \dfrac{s_1(t)}{A}\,, \\ \hat{s}_2(t) = \dfrac{s_2(t)}{|s_2|} = \dfrac{s_2(t)}{A/2}\,. \end{cases}$$

(d) Das Signal s_3 kann in eine lineare Kombination aus $\hat{s}_1$ und $\hat{s}_2$ zerlegt werden

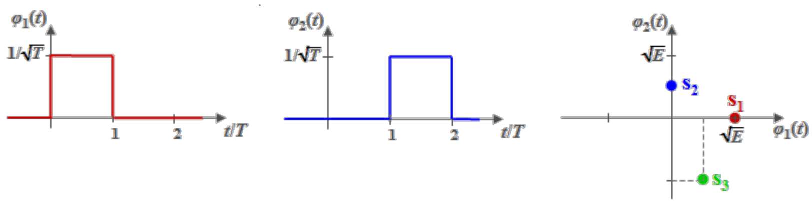
$$s_3(t) = \lambda_1 \cdot \hat{s}_1(t) + \lambda_2 \cdot \hat{s}_2(t)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \langle s_3, \hat{s}_1 \rangle = A/2 \\ \lambda_2 &= \langle s_3, \hat{s}_2 \rangle = -A \end{aligned}$$

Die vektoriellen Repräsentanten der Signale in dem zweidimensionalen Vektorraum, der von den Funktionen $\hat{s}_1$ und $\hat{s}_2$ aufgespannt wird, lauten

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ A/2 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} A/2 \\ -A/2 \end{pmatrix}.$$



Bestapproximation

Aufg. 3

Gegeben seien die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ mit

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \cos(x), \quad f_3 : x \mapsto \sin(x)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen paarweise orthogonal sind bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

(b) Berechnen Sie die Bestapproximation $\tilde{f} \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ von $f : x \mapsto x^2$ bezüglich f_i, $i = 1, 2, 3$ und zeichnen Sie f und $\tilde{f}$.

(c) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen orthogonal sind

$$\cos(k \cdot x),\ k \in \mathbb{N}_0, \quad \sin(k \cdot x),\ k \in \mathbb{N}\,.$$

Lösung:

(a) Die Funktionen sind zueinander orthogonal, denn

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \big[\sin(x)\big]_{-\pi}^{\pi} = 0\,, \\ \langle f_1, f_3 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \big[-\cos(x)\big]_{-\pi}^{\pi} = 0\,, \\ \langle f_2, f_3 \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \big[\tfrac{1}{2}\sin^2(x)\big]_{-\pi}^{\pi} = 0\,. \end{aligned}$$

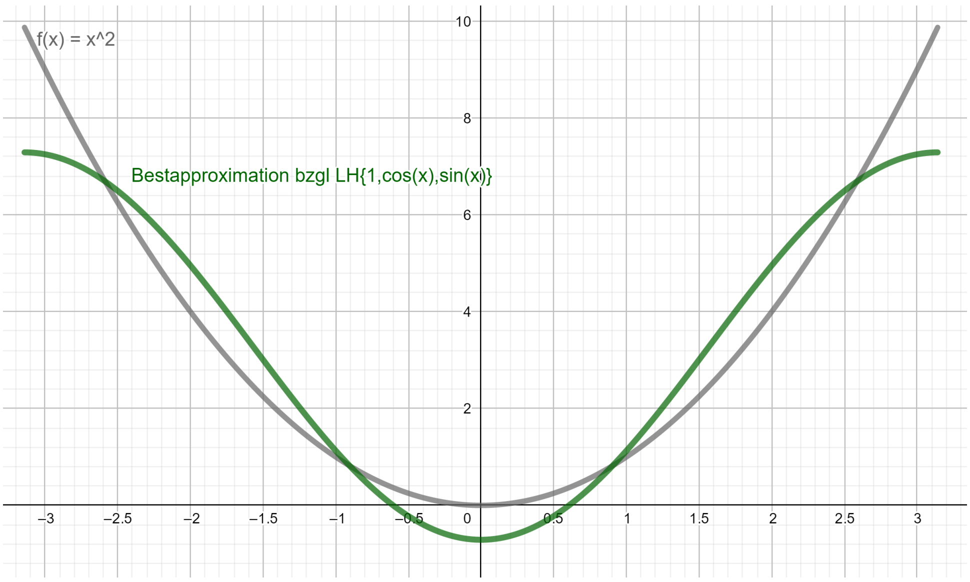
Leicht können wir sie auch normieren:

$$\begin{aligned}||f_1||^2 &= 2\pi \Rightarrow \hat{f}_1 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\\ ||f_2||^2 &= \pi \Rightarrow \hat{f}_2 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(x)\,,\\ ||f_3||^2 &= \pi \Rightarrow \hat{f}_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x)\,.\end{aligned}$$

(b) Die Bestapproximation von f bezüglich des Unterraums, der von den Funktionen $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3\}$ aufgespannt wird lautet:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \langle f, \hat{f}_1\rangle \hat{f}_1 + \langle f, \hat{f}_2\rangle \hat{f}_2 + \langle f, \hat{f}_3\rangle \hat{f}_3\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x\right)\cos(x) + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x\right)\sin(x)\\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(x)\,.\end{aligned}$$

Denken Sie daran, dass sich Integrale deren Integrand ein Produkt aus Polynom und trigonometrischer Funktion ist mit mehrfacher partieller Integration lösen läßt.



(c) Man verwendet die Formeln

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)\\ \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\ \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)\end{aligned}$$

Anwendungen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 2.4.

Kegelvolumen

Aufg. 1

Wie läßt sich ohne Integration beweisen, dass das Volumen eines Kegels mit Grundfläche A und Höhe h gerade $V = \frac{1}{3}A \cdot h$ beträgt? Hinweis: Benutzen Sie, was Sie über das Volumen einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche wissen!

Lösung:
Das Volumen einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche a^2 und Höhe $a/2$ beträgt $V_\mathrm{P} = 1/6a^3$. Hat ein Kegel die Grundfläche A, dann entspricht das der Grundfläche einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit Seitenlänge $a = \sqrt{A}$. Zieht man an der Kegelspitze, dann vergrößert sich das Kegelvolumen. Es gilt offenbar

$$\frac{V_\mathrm{K}}{h} = \frac{V_\mathrm{P}}{\frac{a}{2}} \Rightarrow V_\mathrm{K} = V_\mathrm{P}\frac{2 \cdot h}{a} \Rightarrow V_\mathrm{K} = \frac{\sqrt{A}^3}{6}\frac{2 \cdot h}{\sqrt{A}} = \frac{1}{3}A \cdot h\,.$$

Bogenlänge

Aufg. 2

(a) Geben Sie das Integral an, das die Bogenlänge der Kurve $y = \ln(x^3)$ für $1 \le x \le e$ beschreibt.

(b) Geben Sie das Integral an, das die Bogenlänge der Kurve $y = \sqrt{x^3}$ für $1 \le x \le 3$ beschreibt.

Lösung:
Diese Aufgaben mit anderen Konstanten bzw. Integrationsgrenzen finden Sie in Papula, Band 1, Abschnitt V.10 auf Seite 566 und detaillierte Lösungswege auf Seite $802f$.

(a) entspricht Papula Aufg. 15)

$$y(x) = 3 \cdot \ln(x) \Rightarrow y'(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow L = \int_1^e \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{\sqrt{9 + x^2}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

(b) entspricht Papula Aufg. 16)

$$y(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow y'(x) = \frac{3}{2}x \Rightarrow L = \int_1^3 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{9x + 4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Flächeninhalt zwischen Graphen

Aufg. 3

(a) Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f : x \mapsto x^2 - 2x - 1, \quad g : x \mapsto -x + 5$$

den Flächeninhalt zwischen den Graphen und ihren Schnittpunkten.

(b) Bestimmen Sie die Fläche A (!) zwischen der Funktion

$$f : x \mapsto \frac{1}{5}x(x^2 - 4)$$

und der x-Achse im Intervall $x \in [-3, 3]$.

Lösung:
Diese Aufgaben finden Sie in Papula, Band 1, Abschnitt V.10 auf Seite $565f$ und detaillierte Lösungswege auf Seite $800f$.

(a) Papula Aufg. 7) Durch Gleichsetzen der Funktionsabbildungen erhält man die Schnittpunkte zu

$(-2|7)$ und $(3|2)$, also

$$A = \int\limits_{-2}^{3} \big((-x+5) - (x^2 - 2x + 1)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{125}{6}\,.$$

(b) Papula Aufg. 5) Die Funktion f ist punktsymmetrisch und wir haben in einem um den Nullpunkt symmetrischen Intervall zu integrieren: es genügt also die Fläche auf einer Seite der x-Achse zu berechnen und dann zu verdoppeln: $A = 2 \cdot \tilde{A}$, wobei $\tilde{A}$ bzgl $x \in [0,3]$ ist. Der Funktionsgraph schneidet an der Stelle $x_1 = 2$ die x-Achse: um die Fläche zu berechnen muss das Integral an der Stelle x_1 aufgespalten werden - denn eine Fläche ist immer etwas Positives:

$$\tilde{A} = \left|\frac{1}{5}\int\limits_{0}^{2}(x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\frac{1}{5}\int\limits_{2}^{3}(x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x\right| = 0,8 + 1,25 = 2,05 \Rightarrow A = 4,1\,.$$

Rotationsvolumen

Aufg. 4

Bestimmen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch Drehung des Kurvenstücks $y = \sqrt{x^2 - 9}$ für $3 \leq x \leq 5$

(a) um die x-Achse entsteht.

(b) um die y-Achse entsteht.

Lösung:
Das ist Aufgabe 13 in Papula, Band 1, Abschnitt V.10 auf Seite 566. Eine detaillierten Lösungsweg finden Sie auf Seite 802.

(a) $$V_x = \pi \int\limits_{3}^{5} (x^2 - 9)\,\mathrm{d}x = \frac{44}{3}\pi\,.$$

(b) $$x^2 = y^2 + 9, \quad 0 \leq y \leq 4 \;\Rightarrow V_y = \pi \int\limits_{0}^{4} (y^2 + 9)\,\mathrm{d}y = \frac{172}{3}\pi\,.$$

Lineare Abbildungen

Aufg. 5

Auf einem Schrottplatz werden Autofracks mit einer Presse zusammengestampft. Jede Karosserie wird dabei in jede Richtung gleichmäßig umgeformt und das Volumen, das es ursprünglich einnahm, wird durch die Presse um 80% verringert. Geben Sie eine lineare Abbildung an, die den Effekt der Presse simulieren kann (keine eindeutige Lösung).

Lösung:
Es sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Matrix, die der linearen Abbildung zugeordnet ist. Es gilt

$$\det(A) \stackrel{!}{=} \left(1 - \frac{8}{10}\right) = \frac{1}{5} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3 \Rightarrow A = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Differentialgleichungen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 2.6.

Typeneinteilung — Aufg. 1

Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $\dot{p}(t) = a \cdot p(t) - b \cdot p^2(t)$

(b) $M\ddot{s}(t) = As(t), \quad M, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, s : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$.

(c) $y' = xy^2$.

(d) $y \cdot y^{(4)} + xy'' + \ln(y) = 0$.

(e) $\Delta u(x, y) = 0\,, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Lösung:

(a) Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, explizit, nicht-linear. (biologische Population)

(b) System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung: linear (zwei Linearschwinger)

(c) Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, explizit, nicht-linear (Trennbare Variablen)

(d) Gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung, implizit, nicht-linear.

(e) Partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, linear (Laplace-Operator)

Differentialgleichungen — Aufg. 2

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $y : x \mapsto c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-x}$ für jede Wahl von $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die folgende Differentialgleichung löst:

$$y'' - 4y' - 5y = 0\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass $y : x \mapsto \dfrac{c \cdot x}{1 + x}$ für jede Wahl von $c \in \mathbb{R}$ die folgende Differentialgleichung löst

$$x(1 + x)y' - y = 0,\ x \in (-1, 1)$$

und bestimmen Sie c so, dass auch $y(1) = 8$ gilt.

Lösung:
Diese Aufgaben finden Sie in Papula Band 2, Abschnitt IV.1 auf Seite 519 und detaillierte Lösungen auf Seite 725.

(a) Papula Aufgabe IV.1.2) Differenzieren und Einsetzen.

(b) Papula Aufgabe IV.1.1) $c = 16 \Rightarrow y : x \mapsto 16x/(1 + x)$

Asymptotik — Aufg. 3

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} s(0) = 0, & t_0 = 0\,, \\ \dot{s}(t) = 1 + s^2(t)\,, & t > t_0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $s : t \mapsto \tan(t)$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist.

(b) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der angegebenen Lösung für $t \to \pi/2$

Lösung:

(a) Differenzieren und Einsetzen.

(b) Wächst die Geschwindigkeit mit dem Quadrat des Abstands vom Ursprung, so gelangt man nach endlicher Zeit ins Unendliche:

$$\lim_{t \to \pi/2} s(t) = \infty \,.$$

Lösung ist übrigens eindeutig. Warum?

Eindeutige Lösbarkeit

Aufg. 4

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(1) = 1, & x_0 = 1\,, \\ (y')^2 - 4xy' + 4y = 0\,, & x > x_0\,. \end{cases}$$

(a) Klassifizieren Sie die Differentialgleichung.

(b) Zeigen Sie, dass $y : x \mapsto 2cx - c^2$ die Differentialgleichung löst und skizzieren Sie die Geradenschar.

(c) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass y das Anfangswertproblem löst.

(d) Ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig?

Lösung:

(a) Implizite, nicht-lineare, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

(b) Differenzieren und Einsetzen. Schauen Sie sich die Geradenschar an, zum Beispiel mit folgender interaktiven GeoGebra-App, in die Sie die Geradenschar als Input eintippen können - anstatt c schreiben Sie k: https://www.geogebra.org/m/DTNqPW52

(c) $c = 1 \Rightarrow y : x \mapsto 2x - 1$.

(d) $y : x \mapsto x^2$ löst auch das Anfangswertproblem! Es ist eine sogenannte singuläre Lösung und man kann Sie als Einhüllende der Geradenschar $y_c : x \mapsto 2cx - c^2$ der Skizze entnehmen.

Lineare Differentialgleichungen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in den Abschnitten 2.6 und 2.7.

Lösungskurve — Aufg. 1

Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen und zeichnen Sie eine Lösungskurve für den gegebenen Anfangswert ein.

$$(a)\ y' = y,\ y(0) = 2 \quad (b)\ y' = \frac{y}{2x}, \quad x \in (0, \infty),\ y(1) = 1\,.$$

Lösung:

Diese Aufgaben finden Sie in Papula Band 2, Abschnitt IV.2 auf Seite 520 und detaillierte Lösungen ab Seite 725f.

(a) Aufgabe 1b) $y(x) = 2e^x$

(b) Aufgabe 1a) $y(x) = \sqrt{x}$

Lipschitz-Stetigkeit — Aufg. 2

Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen auf $D_f := [0,0] \times [1,1]$ Lipschitz-stetig sind, ob also gilt

$$\exists\, L \leq 0 :\ \forall y_1, y_2 \in D_f : \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|\,,$$

und geben Sie gegebenenfalls die Lipschitz-Konstante an.

$$(a)\ f : (x,y) \mapsto y^2 \quad (b)\ f : (x,y) \mapsto 2\sqrt{y}\,.$$

Lösung:

(a) $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 - y_2| \cdot |y_1 + y_2| \;\Rightarrow$ da D_f beschränkt mit $|y_1 + y_2| \leq 2$ gilt $L := 2$.

(b) Das Problem ist der Nullpunkt $(0,0) \in D_f$:

$$|f(0,0) - f(0,y_2)| = 2\sqrt{|0 - y_2|} = \frac{2}{\sqrt{|0 - y_2|}} \cdot |0 - y_2|$$

Allerdings ist f im Nullpunkt unbeschränkt,

$$\lim_{y_2 \downarrow 0} \frac{2}{\sqrt{|0 - y_2|}} = \infty\,,$$

und damit erfüllt f keine Lipschitz-Bedinung.

Inhomogenität — Aufg. 3

Lösen Sie die folgende inhomogene Differentialgleichung

$$y' - 3y = x \cdot e^x$$

durch (a) Variation der Konstanten und (b) Ansatz vom Typ der rechten Seite.

Lösung:
Diese Aufgaben entspricht Aufgabe 18$a) - b)$ in Papula Band 2, Abschnitt IV.1 auf Seite 523. Lösungen finden Sie ab Seite 729.

(a) Sie bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und dann eine partikuläre

Lösung durch Variation der Integrationskonstante:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C \cdot e^{3x} \\ \Rightarrow y_p(x) &= C(x) \cdot e^{3x} \Rightarrow C'(x) \overset{!}{=} x \cdot e^{-2x} \Rightarrow C(x) = \int x \cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x \overset{P.I.}{=} -\frac{1}{4}\,(2x+1)\,e^{x} \\ \Rightarrow y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} - \frac{1}{4}(2x+1) \cdot e^{x} \end{aligned}$$

(b) Sie bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und dann eine partikuläre Lösung durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C \cdot e^{3x} \\ \text{r.S } x \cdot e^{x} \Rightarrow y_p(x) &= (ax+b) \cdot e^{x} \Rightarrow (a - 2b - 2ax) \cdot e^{x} \overset{!}{=} x \cdot e^{x} \Rightarrow \begin{cases} a & = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \\ \Rightarrow y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} - \frac{1}{4}(2x+1) \cdot e^{x} \end{aligned}$$

Inhomogenität

Aufg. 4

Lösen Sie folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe des Ansatz vom Typ der rechten Seite

$(a)\ y' = 2x - y$ $(b)\ y' + 2y = 4 \cdot e^{5x}$ $(c)\ y' + y = e^{-x}$
$(d)\ y' - 4y = 5\sin(x)$ $(e)\ y' - 5y = \cos(x) + 4\sin(x)$ $(f)\ y' - 6y = 3e^{6x}$

Lösung:

Diese Aufgaben entsprechen Aufgabe $19a) - f)$ in Papula Band 2, Abschnitt IV.1 auf Seite 523. Detaillierte Lösungen finden Sie ab Seite 729.

(a) $y(x) = C \cdot e^{-x} + 2x - 2$

(b) $y(x) = C \cdot e^{-2x} + \frac{4}{7} \cdot e^{5x}$

(c) $y(x) = (x + C) \cdot e^{-x}$

(d) $y(x) = C \cdot e^{4x} - \frac{20}{17}\sin(x) - \frac{5}{17}\cos(x)$

(e) $y(x) = C \cdot e^{5x} - \frac{19}{26}\sin(x) - \frac{9}{26}\cos(x)$

(f) $y(x) = (3x + C) \cdot e^{6x}$

Inhomogenität

Aufg. 5

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mit Hilfe des Ansatz vom Typ der rechten Seite

$(a)\ y' + 4y = x^3 - x \wedge y(1) = 2$ $(b)\ y' - y = e^{x} \wedge y(0) = 1$ $(c)\ y' + 3y = -\cos(x) \wedge y(0) = 5$

Lösung:

Diese Aufgaben entspricht Aufgabe 21 in Papula Band 2, Abschnitt IV.1 auf Seite 524. Detaillierte Lösungen finden Sie ab Seite 730.

Aufg. 6

Geben Sie für folgende Differentialgleichungen jeweils die allgemeine Lösung an und lösen Sie anschließend das zugehörige Anfangswertproblem

$(a)\quad \ddot{x} + 4\dot{x} + 29x = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = -2$

$(b)\quad \ddot{x} + 6\dot{x} + 10x = \cos(t) \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 4$

$(c)\quad y'' + 2y' + 3y = e^{-2x} \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

$(d)\quad \ddot{x} + \dot{x} + \frac{1}{4}x = 0 \quad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = -1$

$(e)\quad \ddot{x} + 2\dot{x} + 17x = 2\sin(5t) \quad x(\pi) = 0 \quad \dot{x}(\pi) = 1$

$(f)\quad y''' + 9y' = 18x,\ y(\pi) = \pi^2 \quad y'(\pi) = 2\pi \quad y''(\pi) = 10$

$(g)\quad y''' + 8y'' + 17y' + 10y = 34\sin(x) + 12\cos(x) \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -3,\ y''(0) = 8$

$(h)\quad \ddot{x} + 7\dot{x} + 12x = 0 \quad x(0) = 5 \quad \dot{x}(0) = 0$

Lösung:

Diese Aufgaben finden Sie in Papula Band 2, Abschnitt IV. Detaillierte Lösungen finden Sie ab Seite 730.

(a) Papula 2 Abschnitt IV.4. Aufg. 4 a) Seite 529 Lösung Seite 737

(b) Papula 2 Abschnitt IV.3. Aufg. 12 a) Seite 528 Lösung Seite 735

(c) Papula 2 Abschnitt IV.3. Aufg. 12 b) Seite 528 Lösung Seite 735

(d) Papula 2 Abschnitt IV.4. Aufg. 6 b) Seite 529 Lösung Seite 737

(e) Papula 2 Abschnitt IV.3. Aufg. 12 c) Seite 528 Lösung Seite 735

(f) Papula 2 Abschnitt IV.5. Aufg. 11 a) Seite 534 Lösung Seite 744

(g) Papula 2 Abschnitt IV.5. Aufg. 11 b) Seite 534 Lösung Seite 744

(h) Papula 2 Abschnitt IV.4. Aufg. 8 c) Seite 530 Lösung Seite 738

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.8.

Trennung der Variablen

Aufg. 1

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen:

$$
\begin{array}{ll}
(a)\ y' = \dfrac{y^2}{x^2},\ x \in (0, \infty) & (b)\ y' = \dfrac{x \cdot y}{1 + x^2} \\
(c)\ y' = (1 - y)^2 & (d)\ y' \cdot \sin(y) = -x,\ y \in (0, \pi)
\end{array}
$$

Lösung:

Diese Aufgabe entspricht Aufg. 4 in dem Lehrbuch Papula Band 2, Abschnitt IV.2 zu finden auf Seite 520 und die Lösungen zu den Teilaufgaben finden Sie auf Seite 726.

(a) $y(x) = \dfrac{x}{1 + cx}$

(b) $y(x) = c \cdot \sqrt{1 + x^2}$

(c) $y(x) = \dfrac{x + c - 1}{x + c}$

(d) $y(x) = \arccos(x^2/2 + c)$

Inhomogenität

Aufg. 2

Lösen Sie folgenden Anfangswertprobleme durch Variation der Konstanten:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & xy' - y = x^2 \cdot \cos(x) & \wedge & y(\pi) = 2\pi \\
(b) & xy' + y = \ln(x) & \wedge & y(1) = 1 \\
(c) & y' - \tan(x) \cdot y = 5 \cdot \sin(2x) & \wedge & y(3\pi) = 2
\end{array}
$$

Lösung:

Diese Aufgabe entspricht bis auf Aufgabenteil (c) Aufg. 16 in dem Lehrbuch Papula Band 2, Abschnitt IV.2 zu finden auf Seite 523. Detaillierte Lösungen finden Sie ab Seite 729.

(a) $y(x) = 2x + x \cdot \sin(x)$

(b) Papula $y(x) = 2/x + \ln(x) - 1$ (c)

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung mit Trennung der Variablen:

$$y' - \tan(x)y = 0 \overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} \frac{y'}{y} = \tan(x) \ \Rightarrow \ \ln|y| = \ln\left(\left|\frac{1}{\cos(x)}\right|\right) + c \Rightarrow y_h(x) = \frac{\tilde{c}}{\cos(x)}\,.$$

2. Bestimmung einer partikulären Lösung durch Variation der Konstante:

$$\begin{cases} y_p(x) & = c(x)\dfrac{1}{\cos(x)}\,, \\ y_p'(x) & = c'(x)\dfrac{1}{\cos(x)} + c(x)\tan(x)\dfrac{1}{\cos(x)}\,, \end{cases}$$

$$\overset{(A+E)}{\Rightarrow} \qquad c(x) = 5\int \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{=} -\frac{10}{3}\cos^3(x)\,,$$

wobei das Integral $(*)$ mit Hilfe des Additionstheorems $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ gelöst wurde - im Detail

$$\int \sin(2x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\int \sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\cos^3(x) + C\,.$$

3. Bestimmung der allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung durch Superposition:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c\frac{1}{\cos(x)} - \frac{10}{3}\cos^3(x)\,.$$

4. Bestimmung der speziellen Lösung des Anfangswertproblems durch Bestimmung der Konstante c:

$$\cos(3\pi) = -1 \Rightarrow y(3\pi) = c\frac{1}{\cos(3\pi)} - \frac{10}{3}\cos^2(3\pi) = -c - \frac{10}{3} \overset{!}{=} 2 \Rightarrow c = -\frac{16}{3}\,.$$

Substitution

Aufg. 3

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem: $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(1) = \sqrt{2}\,.$

Lösung:
Diese Aufgabe entspricht Aufg. 3 in dem Lehrbuch Papula Band 2, Abschnitt IV.2 zu finden auf Seite 520 und die Lösung finden Sie auf Seite 726.

Die Differentialgleichung hat die Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

Die Idee ist die Substitution $u = y/x$ durchzuführen und eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen bzgl. u herzuleiten:

1. Die Substitution führt auf den folgenden Ausdruck für y'

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = u \cdot x \Rightarrow y' = u' \cdot x + u$$

2. Damit lautet die Differentialgleichung bzgl. u

$$u' \cdot x + u = u + \frac{1}{u} \Rightarrow u \cdot u' = \frac{1}{u}$$

3. Dies ist eine Differentialgleichung bzgl. u, die sich durch Trennung der Variablen lösen läßt:

$$\int u\,\mathrm{d}u \overset{!}{=}\in \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}u^2(x) = \ln|x| + c \Rightarrow u(x) = \pm\sqrt{2\cdot\ln|x| + 2c} \Rightarrow y(x) = x \cdot u(x) = \pm x\sqrt{2\ln|x| + 2c}\,.$$

4. Die Integrationskonstante c ist durch die Bedingung $y(1) = \sqrt{2}$ bestimmbar:

$$y(1) = 1 \cdot \sqrt{2\ln|1| + 2c} = \sqrt{2c} \overset{!}{=} \sqrt{2} \Rightarrow c = 1\,..$$

5. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblem lautet:

$$y(x) = x\sqrt{2(\ln|x| + 1)} = x\sqrt{2(\ln|x| + \ln(e))} = x\sqrt{2\ln|ex|}$$

Substitution

Aufg. 4

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution. Schlagen Sie die auftretenden Integrale gegebenenfalls in einer Formelsammlung nach:

$(a)\ y' = \frac{y}{x} + 4,\ x \in (0,\infty)$ $\qquad$ $(b)\ y' = (x + y + 1)^2$

$(c)\ y' = \frac{1}{4} + \frac{y^2}{x^2}, x \in (0,\infty)$ $\qquad$ $(d)\ y' = \sin(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x},\ x \in (0,\infty)$

Lösung:
Diese Aufgabe entspricht Aufg. 2 in dem Lehrbuch Papula Band 2, Abschnitt IV.2 zu finden auf Seite 520 und die Lösungen finden Sie auf Seite 726.

(a) Substitution $u = y/x \ \Rightarrow y(x) = cx + 4x\ln(x)$

(b) Substitution $u = x + y + 1 \ \Rightarrow y(x) = \tan(x + c) - x - 1$

(c) Substitution $u = y/x \ \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{x}{\ln|x| + \tilde{c}} = \frac{1}{2}x - \frac{x}{\ln|\tilde{c}x|}$ (ln bijektiv auf $\mathbb{R}$)

(d) Substitution $u = y/x \ \Rightarrow y(x) = 2\,x \cdot \arctan(cx)$

Logistisches Wachstum

Aufg. 5

Die Anzahl der von einem Virus infizierten Personen $x(t)$ zum Zeitpunkt t in einer Bevölkerung der Größe N kann folgendermaßen modelliert werden: Pro Tag habe jede Person $k > 0$ zufällige Kontakte, wobei der Virus bei jedem Kontakt übertragen wird. Stellen Sie eine Differentialgleichung auf und ermitteln Sie die Lösung. Wie lautet die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblemes wenn $x(0) = 1$ war? Gehen Sie Schritt für Schritt vor:

(a) Wie viele nicht infizierte Personen gibt es in Abhängigkeit von $x(t)$ zum Zeitpunkt t? Wie groß ist der Anteil der nicht infizierten Personen zum Zeitpunkt t?

(b) Wie viele Personen trifft eine infizierte Person in einer kleinen Zeitpanne $[t, t + \Delta t]$? Wieviele nicht infizierte Personen trifft eine infizierte Person in $[t, t + \Delta t]$?

(c) Wie viele Kontakte von infizierten Personen mit nicht infizierten Personen gibt es insgesamt in $[t, t + \Delta t]$? Wie viele Personen werden daher in $[t, t + \Delta t]$ neu angesteckt?

(d) Drücken Sie $x(t + \Delta t)$ durch $x(t)$ und die Anzahl der neu infizierten Personen in $[t, t + \Delta t]$ aus.

(e) Führen Sie den Grenzwert $\Delta t \to 0$ aus, um eine Differentialgleichung zu erhalten.

Lösung:

(a) $N - x(t),\ (N - x(t))/N$

(b) $k \cdot \Delta t,\ k \cdot (N - x(t))/N \cdot \Delta t$

(c) $x(t) \cdot k \cdot (N - x(t))/N \cdot \Delta t$

(d) $x(t + \Delta t) = x(t) + x(t) \cdot k \cdot (N - x(t))/N \cdot \Delta t$

(e)

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x(t) \cdot k \cdot (N - x(t))/N \overset{\Delta t \to 0}{\to} \dot{x} = k \cdot x(N - x)/N$$

Lösung durch Trennung der Variablen

$$\int \frac{1}{x(N - x)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{k}{N} \,\mathrm{d}t$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{1}{x(N - x)} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{N \cdot x} - \frac{1}{N \cdot (N - x)} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{N} \left(\log(x) - \log(N - x)\right) = \frac{1}{N} \log \left(\frac{x}{N - x} \right)$$

Also

$$\log \left(\frac{x}{N - x} \right) = k \cdot t + c \Leftrightarrow \frac{x}{N - x} = c \cdot e^{kt} \Leftrightarrow x(t) = N \cdot \frac{c \cdot e^{kt}}{1 + c \cdot e^{kt}}$$

Lösung des Anfangswertproblems x mit $c = \frac{1}{n-1}$.

Differentialgleichungen erster Ordnung

Aufg. 6

Lösen Sie folgenden Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Methode:

$(a)\ y' = x(y^2 + 1)$ $\quad (b)\ y' = y \cdot \sin(x)$ $\quad (c)\ y' = xy$

$(d)\ xy' + y = 2\ln(x)$ $\quad (e)\ y' = 5x^4(y + 1)$ $\quad (f)\ y' - 5y = 2\cos(x) - \sin(3x)$

Lösung:

Diese Aufgabe entspricht Aufg. 20 in dem Lehrbuch Papula Band 2, Abschnitt IV.2 zu finden auf Seite 523 und Lösungen finden Sie auf Seite 730.

(a) Trennung der Variablen: $y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)$

(b) Trennung der Variablen: $y = c \cdot e^{-\cos(x)}$

(c) Trennung der Variablen: $y = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

(d) Variation der Konstanten: $y = 2(\ln(x) - 1) + \frac{c}{2}$

(e) Trennung der Variablen: $y = c \cdot e^{x^5} - 1$

(f) Ansatz vom Typ der rechten Seite: $y = c \cdot e^{5x} + \frac{1}{13}\sin(x) - \frac{5}{13}\cos(x) + \frac{5}{34}\sin(3x) + \frac{3}{34}\cos(3x)$

Numerische Verfahren Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 2.9.

Explizites Euler Verfahren

Aufg. 1

Berechnen Sie für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = 1\,, & x = 0\,, \\ y' = x^2 + y\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

eine Näherungslösung für $y(2)$. Die Näherungslösung soll mit Hifle des Eulerschen Polygonzugverfahrens zur Schrittweite $h = 1/4$ hergeleitet werden. Lösen Sie das Anfangswertproblem exakt und bestimmen Sie den relativen Fehler der Approximation für $x = 2$.

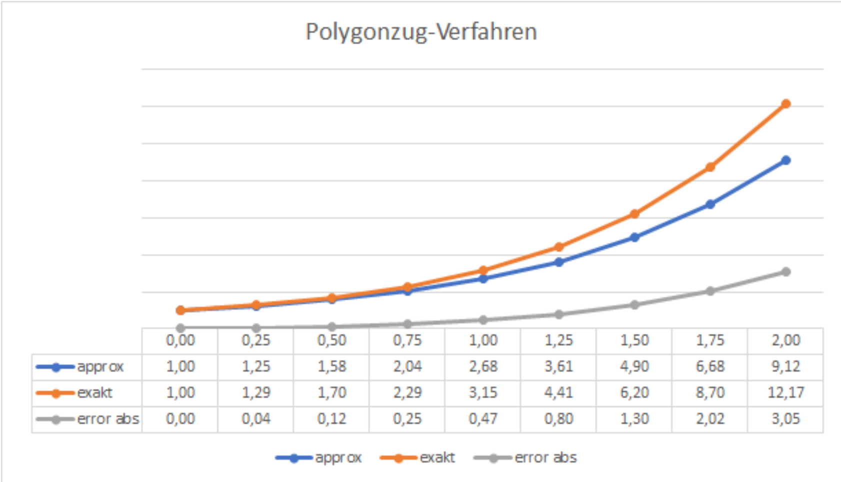
Lösung:
Bestimmung der exakten Lösung:

1. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:
$$y' - y = 0 \Rightarrow y_h(x) = ce^x\,.$$
2. Partikuläre Lösung mit Variation der Konstanten
$$y_p(x) = c(x)e^x \Rightarrow y_p'(x) = c'(x)e^x + c(x)e^x \Rightarrow c'(x) = x^2e^{-x} \Rightarrow c(x) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + ee^{-x}\,.$$
3. Damit lautet die allgemeine Lösung:
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -x^2 - 3x - 2 + ce^x\,.$$
4. Bestimmung der Integrationskonstante:
$$y(0) \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow yy : x \mapsto 3e^x - x^2 - 2x - 2\,.$$

Bestimmung der Näherungslösung für $x = 2$ mit Polygonzugverfahren mit Schrittweite $h = 1/4$:

1. Stützstellen $x_k = k \cdot h, \quad k = 0, \cdots, 8$:
$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1, x_5 = \frac{5}{4}, x_6 = \frac{3}{2}, x_7 = \frac{7}{4}, x_8 = 2$$
2. Stützwerte $y_k = y_{k-1} + 1/2 f(x_{k-1}, y_{k-1})k \cdot h, \quad k = 0, \cdots, 8$
$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \\ y_1 &= \frac{5}{4} \\ y_2 &= \frac{101}{64} \\ y_3 &= \frac{521}{256} \\ y_4 &= \frac{2749}{1024} \\ y_5 &= \frac{14769}{4096} \\ y_6 &\approx 4.90 \\ y_7 &\approx 6.68 \\ y_8 &\approx 9.12 \end{aligned}$$
3. Der relative Fehler ist
$$r_{\text{rel}} = \frac{|y(2) - y_2|}{|y(2)|} = 0.25\,.$$

Und so sehen Sie auf einen Blick, wie sich die Approximation von der exakten Lösung wegbewegt:



Verbessertes Euler Verfahren

Aufg. 2

Eine Verbesserung des expliziten Euler Verfahrens lautet

$$\begin{cases} k_1 = f(x_k, y_k)\,, \\ k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1)\,, \\ y_{k+1} = y_k + hk_2\,. \end{cases}$$

(a) Verdeutlichen Sie graphisch die Funktionsweise des Verfahrens.

(b) Bestimmen Sie für das Anfangswertproblem aus der ersten Aufgabe die Approximation für $x = 2$ zur Schrittweite $h = 1/4$ und bestimmen Sie den relativen Fehler zur exakten Lösung.

(c) Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = y_0\,, & x = 0\,, \\ y' = -2at\,, & x \neq 0\,. \end{cases}$$

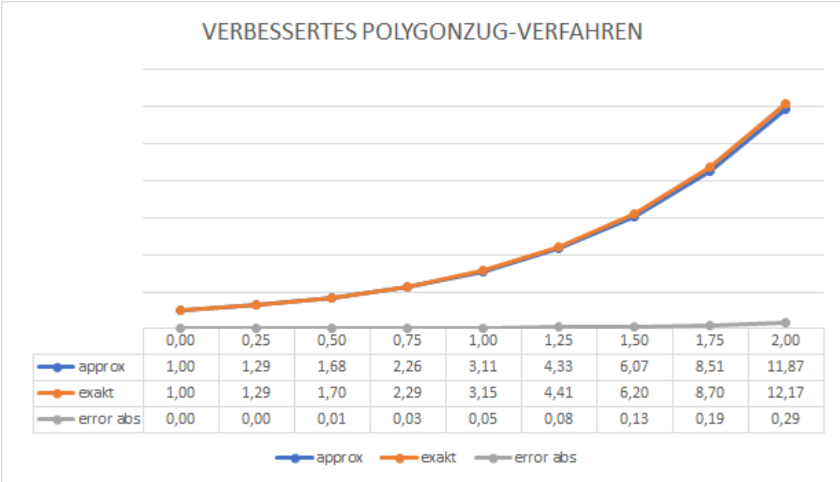
Überzeugen Sie sich davon, dass die verbesserte Polygonzugmethode das Anfangswertproblem zu unterschiedlichen Werten von a und Anfangswerten y_0 exakt löst. Was können Sie daraus schließen?

Lösung:

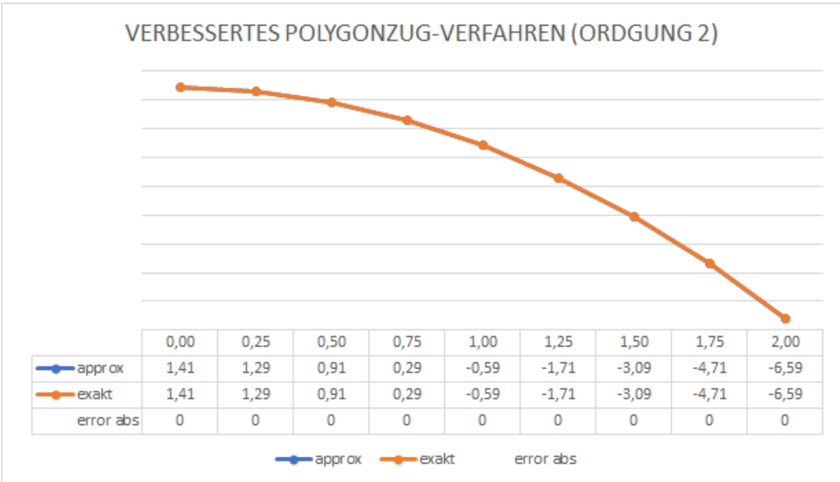
(a)

(b) Die exakte Lösung ist $y : x \mapsto 3e^x - x^2 - 2x - 2$. Sie merken schon, dass es keinen Spaß macht ein numerisches Verfahren per Hand hinzuschreiben - selbst wenn man das Intervall nur in 8 Teilintervalle zerteilt. Man sollte ein numerisches Verfahren programmieren. Da wir nicht an Effizienz oder Post-Prozessing interessiert sind, kann man das auch ganz einfach gestalten und zum Beispiel ein Programm zur Tabellenkalkulation benutzen.

Der numerische Fehler des verbesserten Polygonzugverfahrens für die gestellte Aufgabe beträgt nunmehr $e_{\text{rel}} = 0.02$, der Wert für $x = 2$ lautet $y_8 = 11.87$, die exakte Lösung lautet $y(2) = 12.17$. Und so sehen Sie auf einen Blick, wie sich die Approximation von der exakten Lösung unterscheidet:



	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
approx	1,00	1,29	1,68	2,26	3,11	4,33	6,07	8,51	11,87
exakt	1,00	1,29	1,70	2,29	3,15	4,41	6,20	8,70	12,17
error abs	0,00	0,00	0,01	0,03	0,05	0,08	0,13	0,19	0,29



	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
approx	1,41	1,29	0,91	0,29	-0,59	-1,71	-3,09	-4,71	-6,59
exakt	1,41	1,29	0,91	0,29	-0,59	-1,71	-3,09	-4,71	-6,59
error abs	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(c)

Das Verfahren scheint von der Ordnung zwei zu sein, das heißt exakte Lösungen maximalem polynomialem Grad zwei werden exakt reproduziert!

Explizites Euler Verfahren

Aufg. 3

Betrachten Sie ein explizites Euler-Verfahren für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, & x = 0\,, \\ y' = 4x^2 - 7x + 3\,, & x \neq 0\,. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die exakte Lösung Φ des Anfangswertproblems.

(b) Berechnen Sie bei vorgegebener Schrittweite h mit dem Euler-Verfahren Näherungswerte y_k für $\Phi(x_k)$ und explizit die Fehler $\epsilon(x_k, h) = y_k - \Phi(x_k)$ mit $x_k = kh$.

(c) Zeigen Sie, dass der Fehler $\epsilon(x_k, h) = y_k - \Phi(x_k)$ bei festem x für $h \to 0$ gegen Null konvergiert.

Lösung:

(a) Die exakte Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$\Phi(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x$$

(b) Um einen Ausdruck für den Fehler zu berechnen, ermitteln wir die Stützstelle y_k. Am effizientesten ist es die Stützstellen für $k = 1, 2, 3$ explizit auszurechnen und dann eine Formel für beliebiges

k herzuleiten (mathematisch präzise ist diese Formel dann mit einer vollständigen Induktion zu beweisen - darauf verzichten wir hier).

$$\begin{aligned}
y_0 &= \; = 3h \\
y_1 &= \; = 3h + h(4h^2 - 7h + 3) = 4h^3 - 7h^2 + 6h \\
\cdots &= \; \cdots \\
y_k &= y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}) = 3(k+1)h + 4h^3 \sum_{i=0}^{k} i^2 - 7h^2 \sum_{i=0}^{k} i
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Fehler

$$\begin{aligned}
\epsilon(x_k, h) &= y_k - \Phi(x_k) \\
&= 3(k+1)h + 4h^3 \sum_{i=0}^{k} i^2 - 7h^2 \sum_{i=0}^{k} i - \frac{4}{3}k^3h^3 - \frac{7}{2}k^2h^2 + 3kh \\
&= 3h + 2h^3k^2 + \frac{2}{3}h^3k - \frac{7}{2}kh^2 \,.
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\lim_{h \to 0} \left(3h + 2h^3k^2 + \frac{2}{3}h^3k - \frac{7}{2}kh^2 \right) = 0 \,.$$

Implizites Euler Verfahren

Aufg. 4

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \,, & x = 0 \,, \\ y' = -2at \,, & x \neq 0 \,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für das implizite Eulerverfahren den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\tau(t, h) := \frac{1}{h} \left(y(t_{k+1}) - y_{k+1} \right)$$

Lösung:

1. Exakte Lösung des Anfangswertproblems: $y(t) = -at^2 + y_0$.
2. Implizites Eulerverfahren: $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1})$
3. Also

$$\begin{aligned}
\tau(t, h) &= \frac{1}{h} \left(-a(t_k + h)^2 + y_0 - y_k - h(2a(t_k + h) \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(-ah^2 + 2h^2a \right) = a \cdot h \,.
\end{aligned}$$

Reihen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 2.10.

Reihen

Aufg. 1

Geben sind die folgenden Reihen

$$(a) \quad 1+1+1+1+\dots$$
$$(b) \quad 1-1+1-1+\dots$$

Schreiben Sie die Reihen in der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und bestimmen Sie die Partialsummen S_n für $n \in \mathbb{N}$ und gegebenenfalls den Wert der Reihe.

Lösung:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1, \quad S_n = n, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$ divergent.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}, \quad S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}$ divergent.

Reihen

Aufg. 2

Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \qquad (b) \sum_{k=1}^{\infty} 0,3^{k-1} \qquad (c) \sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

Lösung:
Diese Aufgabe finden Sie in Papula, Band 1, Abschnitt VI.1 auf Seite 633 und detaillierte Lösungswege auf Seite 807. Bemerkung: um den Wert der Reihen anzugeben, müssen Sie wissen, wie der Wert der geometrische Reihe lautet:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1\,.$$

(a) 8/7

(b) 10/7

(c) 12/5

Reihen

Aufg. 3

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \qquad (b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{3^k} \qquad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$$

Lösung:

(a) Gemäß Quotientenkriterium konvergiert diese Reihe, denn

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} = \frac{1}{e}\,, \end{aligned}$$

wobei benutzt worden ist, dass gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e\,.$$

(b) Gemäß Quotientenkriterium konvergiert diese Reihe, denn

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^4 3^k}{3^{k+1}k^4} = \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^4 = \frac{1}{3}\,.$$

(c) Gemäß Leibnitz-Kriterium konvergiert diese Reihe, denn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\,, a_k = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^k}$ ist eine monoton fallende Nullfolge:

Nullfolge: $$a_k = \frac{1}{k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k-1} = \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k-1} \leq \frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leq \frac{e}{k}\,.$$

Monotonie: $$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)^{k-1}(k+1)^{k+1}}{k^k(k+1)^k} = \left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)^k = \left(\underbrace{\frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}}_{>1}\right)^k > 1\,.$$

Rechenregeln

Aufg. 4

Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen

$$(a)\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{9}{19}\right)^k \quad (b)\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{3^k}{4^{k+1}} \quad (c)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{121}+5^{2k-1}}{29^{k+1}}$$

Lösung:

(a) Der Wert der Reihe ist 10/19 (geometrische Reihe mit $q = -9/10$)

(b) Der Wert der Reihe ist $\dfrac{9}{16}$ (1/4 ausklammern führt auf geometrische Reihe mit $q = 3/4$ und Startwert $k = 2$)

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{121}+5^{2k-1}}{29^{k+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{11+5^{2k-1}}{29^{k+1}} = 11\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{29}\right)^{k+1} + \frac{1}{5\cdot 29}\left(\frac{25}{29}\right)^k \\ &= \frac{11}{29}\frac{1}{1-\frac{1}{29}} + \frac{1}{5\cdot 29}\cdot\frac{1}{1-\frac{25}{29}} = \frac{11}{29}\frac{29}{28} + \frac{1}{5\cdot 29}\cdot\frac{29}{4} \\ &= \frac{11\cdot 5}{140} + \frac{7}{140} = \frac{31}{70}\end{aligned}$$

Konvergenz

Aufg. 5

(a) Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die unendliche Reihe

$$S(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(1-4|x|)^{k-1}}?$$

Hinweis: Klammern Sie eine geeignete Potenz von x^k aus und lösen Sie die Ungleichung mit GeoGebra o.ä..

(b) Bestimmen Sie für diejenigen $x\in\mathbb{R}$, für welche die Reihe $S(x)$ konvergiert, den Reihenwert.

Lösung:

(a) Es sei $x \neq \pm\frac{1}{4}$. Wir folgen dem Hinweis und versuchen eine Potenz von x auszuklammern. So ohne weiteres funktioniert das nicht: es muss offensichtlich erstmal so umgeformt werden, dass eine Potenz von x aus der Summe rausgezogen werden kann:

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(1-4|x|)^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{\left(x^2(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{|x|})\right)^{n-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{x^{2k-2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{|x|}\right)^{k-1}} \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{|x|}}\right)^k = x^2 \tilde{S}(x), \quad \tilde{S}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{|x|}}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{1-4|x|}\right)^k \end{aligned}$$

Offensichtlich läuft wir die Frage nach der Konvergenz der ursprünglichen Reihe $s(x)$ auf die Analyse der Reihe $\tilde{S}(x)$ heraus. Gemäß dem Wurzelkriterium, wissen wir: die Reihe $\tilde{s}(x)$ konvergiert sicherlich für solche x, für die gilt

$$\tilde{s}(x) < \infty \quad \text{für alle } x, \text{ für die gilt: } \left|\sqrt[n]{|a_n|}\right| < 1, \text{ mit } a_n = \left(\frac{1}{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{|x|}}\right)^n \Rightarrow \left|\frac{x^2}{1-4|x|}\right| \overset{!}{<} 1$$

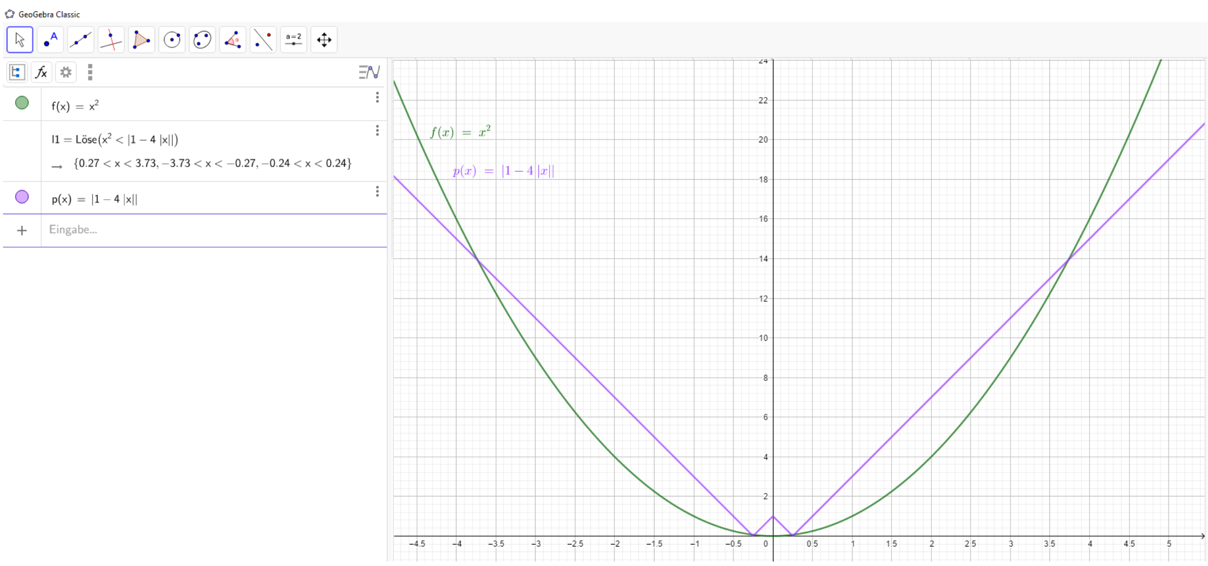
Also müssen wir eine Ungleichung lösen und zwar folgende

$$\left|\frac{x^2}{1-4|x|}\right| < 1 \Leftrightarrow x^2 < |1-4|x||\,.$$

Die Ungleichung kann man nun mit etlichen Fallunterscheidungen per Hand lösen - die Lösungsintervalle lauten

$$\mathbb{L} := (2-\sqrt{3}, \sqrt{3}+2) \cup (-\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-2) \cup (2-\sqrt{5}, \sqrt{5}-2)$$

Hier lohnt es sich eine Software zur Lösung zu benutzen - nicht nur für die Skizze.



(b) Für jedes $x \in \mathbb{L}$ konvergiert die Reihe mit $s(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$.

Taylorreihen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.11.

Taylorpolynom und Restgliedabschätzung — Aufg. 1

Bestimmen Sie für die Funktion $f : x \mapsto \ln\left(x \cdot e^{-2x}\right)$ das Taylorpolynom 3. Grades in $x_0 = 1$ und berechnen SIe damit näherungsweise $f(6/5)$. Geben Sie anschließend eine Restgliedabschätzung an.

Lösung:
Das Taylorpolynom dritten Grades lautet

$$T_{3,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^3}{3!}\,.$$

Durch Potenzregeln läßt sich die Funktionsabbildung vereinfachen und in der Form fällt das Ableiten wahrscheinlich leichter

$$f(x) = \ln\left(x\cdot e^{-2x}\right) = \ln(x) + (-2x) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = x^{-1} - 2 & \Rightarrow f'(1) = -1\,, \\ f''(x) = -x^{-2} & \Rightarrow f''(1) = -1\,, \\ f'''(x) = 2x^{-3} & \Rightarrow f'''(1) = 2\,, \\ f^{(4)}(x) = -3!\,x^{-4} & \Rightarrow f^{(4)}(1) = -3! \end{cases}$$

Das gesuchte Taylorpolynom für $x_0 = 1$

$$T_{3,1}(x) = -2 + (-1)\cdot(x-1) + (-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + 2\cdot\frac{1}{3!}(x-1)^3 = -2 - (x-1) - 1\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3\,.$$

Die Approximation an der Stelle $x = 6/5$ ist

$$T_{3,1}\left(\frac{6}{5}\right) = -2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\frac{1}{25} + \frac{1}{3}\frac{1}{125} = \frac{-1500 - 150 - 15 + 2}{6\cdot 125} = -\frac{1664}{2\cdot 3\cdot 125} = -\frac{1663}{750}\,.$$

Das Restglied nach Lagrange R_3 lautet

$$\exists \xi \in I = (1, 6/5): \quad R_3(6/5) = f^{(4)}(\xi)\cdot\frac{(1/5)^4}{4!}\,.$$

Da die vierte Ableitung von f auf dem Intervall I monoton wächst (denken Sie an die Funktion $x \mapsto -ax^{-4},\ a > 0$) gilt:

$$R_3(6/5) \le \left|f^{(4)}(1)\cdot\frac{(1/5)^4}{4!}\right| = \left|-6\cdot 1\cdot\frac{(1/5)^4}{4!}\right| = 4\cdot 10^{-4}\,.$$

Der exakte Fehler ist kleiner und so muss es auch sein:

$$\left|f\left(\frac{6}{5}\right) - T_{3,1}\left(\frac{6}{5}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{6}{5}\right) - 2\frac{6}{5} + \frac{1663}{750}\right| = 3.45\cdot 10^{-4} < 4\cdot 10^{-4}\,.$$

Taylor-Entwicklung — Aufg. 2

Geben Sie die ersten vier Glieder der Taylorreihe folgender Funktionen mit Entwicklungspunkt x_0 an:

$(a)\ f : x \mapsto \cos(x),\ x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $(b)\ f : x \mapsto \sqrt{x},\ x_0 = 1$ $\quad$ $(c)\ f : x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x},\ x_0 = 1$

Lösung:

Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 5 in Papula Band 1, Abschnitt VI.3. Die Aufgabenstellungen sind auf

Seite 520 und detaillierte Lösungen auf Seite 813 zu finden.

$$\begin{array}{llcl}
(a) & \cos(x) & = & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/3) - \frac{1}{4}(x-\pi/3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x-\pi/3)^3 + \ldots \\
(b) & \sqrt{x} & = & 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + \ldots \\
(c) & \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} & = & -1 + (x-1)^2 - 2(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + \ldots
\end{array}$$

Taylor-Entwicklung

Aufg. 3

Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes und berechnen Sie die ersten vier Glieder explizit. **Lösung:**

Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 3 in Papula Band 1, Abschnitt VI.3. Papulas Aufgabenstellung ist auf Seite 635 und die detaillierte Lösung auf Seite 813 zu finden. Der Trick ist sich die Binomische Reihe zur Hilfe zu nehmen. Sie lautet:

$$(*) \quad (1+z)^{-1/2} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{3z^2}{8} - \frac{5z^3}{16} + \ldots$$

Das gesuchte Taylorpolynom für f ergibt sich gerade aus $(*)$ mit der Substitution $z = -x^3$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 + \frac{5}{16}x^9 + \ldots$$

Taylor-Entwicklung

Aufg. 4

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : x \mapsto \cosh(x)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Untersuchen Sie mit Hilfe des Restglieds R_{n-1} für welche Werte x die Potenzreihe gegen $\cosh(x)$ konvergiert. Schätzen Sie dazu R_{n-1} geeignet ab und stellen Sie fest für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n-1} = 0$.

(c) Lösen Sie die Gleichung

$$\cosh(x) = 4 - x^2$$

näherungsweise mit Hilfe der nach der vierten Potenz abgebrochenen Potenzreihenentwicklung von $\cosh(x)$. Geben Sie die Lösung mit vier Nachkommastellen an.

Lösung:
Diese Aufgaben finden Sie in Papula Band 1, Abschnitt VI.3. ab Seite 635 und die detaillierten Lösungen finden Sie zum Nacharbeiten ab Seite 813.

(a) (Papula Aufg. 2) Es gilt

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

das heißt die Taylorreihe lautet

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k = \begin{cases} 1/k!, & k \text{ gerade}, \\ 0, & k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

(b) Es gilt

$$|R_{2n-2}(x)| = |R_{2n-1}(x)| = \left| \frac{\cosh^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} x^{2n} \right| = |\cosh(\xi)| \cdot \frac{|x|^{2n}}{(2n)!},$$

mit $\xi \in (0, x)$. Also

$$|\cosh(\xi) = \left| \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} \right| \le \left| \frac{e^{|\xi|} + e^{|\xi|}}{2} \right| \le e^{|x|},$$

da $|\xi| < |x|$. Damit

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n-2}(x)| = \lim_{n\to\infty} |R_{2n-1}(x)| = \leq e^{|x|} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} = 0 \quad (*)$$

Damit konvergiert die Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen $\cosh(x)$.

Bemerkung zu dem Grenzwert in $(*)$: Zu jedem beliebigen, aber fixierten $x \in \mathbb{R}$, läßt sich ein $m \in \mathbb{N}_0$ finden, für das gilt $|x| < m$, und damit folgt für alle $n \geq m$

$$\begin{aligned} \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} &= \underbrace{\frac{|x| \cdot |x| \cdot |x| \cdot \dots \cdot |x|^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}}_{= M < \infty} \cdot \frac{|x|}{m+1} \cdot \frac{|x|}{m+2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{2n} \\ &\leq M \underbrace{\left(\frac{m}{m+1}\right)^n}_{q^m,\ q<1} \to 0 \text{ für } n \to \infty\,. \end{aligned}$$

(c) (Papula Aufg. 10) Es ist $x^4 + 36x^2 - 72 = 0 \Rightarrow x_{1,2} \approx \pm 1.3783$

Taylor-Entwicklung Anwendung

Aufg. 5

Berechnen Sie einen Näherungswert der folgenden Integrale. Bestimmen Sie dazu das Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ bis zur angegebenen Ordnung n und integrieren Sie dieses. Geben Sie das Ergebnis mit 4 Nachkommmastellen an.

$$(a) \int_0^{1/2} \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x,\ n = 3 \qquad (b) \int_0^{2/10} \frac{e^x}{x+1}\,\mathrm{d}x,\ n = 3 \qquad (c) \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x,\ n = 4$$

Lösung:

Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 12 in Papula Band 1, Abschnitt VI.3. Die Aufgabenstellung finden Sie auf Seite 637 und die detaillierten Lösungen ab Seite 815.

Kennt man Taylorreihen von Standardfunktionen, so kann man diese benutzen, um Taylorpolynome von komplizierten Funktionen ganz ohne das Berechnen von Ableitungen und Grenzwerten zu bestimmen. Hier drei Beispiele in dieser Richtung:

(a) Die Taylorentwicklung der Kosinusfunktion an der Stelle $\tilde{x}_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{0} = 0$ lautet

$$\tilde{x} = \sqrt{x}: \quad \cos(\tilde{x}) = 1 - \frac{1}{2!}\tilde{x}^2 + \frac{1}{4!}\tilde{x}^4 - \frac{1}{6!}\tilde{x}^6 \pm \cdots.$$

Im Intervall $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ läßt sich der Integrand

$$f: \left(0, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

durch das folgende Polynom darstellen:

$$\cos\left(\sqrt{x}\right) \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\sqrt{x}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\sqrt{x}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\sqrt{x}\right)^4 = 1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^3\,.$$

Und damit erhalten wir als Näherung des Integrals

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x \approx \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^3\right)\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3\cdot 4!}x^3 - \frac{1}{4\cdot 6!}x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} \approx 0,4392\,.$$

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung des Integranden läßt sich formal eigentlich nicht entwickeln, denn die Ableitungen $f^{(k)}$ für $k \geq 1$ sind an der Stelle $x_0 = 0$ gar nicht definiert. Die Ableitungen lassen sich für $x \downarrow 0$ rechtsseitig stetig fortsetzen und betrachtet man diese Fortsetzungen, so gelangt man zu derselben polynomialen Approximation des Integranden in der Nähe von $x_0 = 0$. Im aufgeführten Lösungsweg tritt die Problematik nicht auf, weil allein eine Entwicklung der Kosinusfunktion und die rechtsseitige Stetigkeit der Wurzelfunktion benutzt werden.

(b) Die Taylorentwicklung der Exponentialfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ lautet

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots .$$

Im Intervall $x \in \left(0, \frac{2}{10}\right)$ läßt sich der Integrand

$$f : \left(0, \frac{2}{10}\right) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$$

durch das folgende Polynom darstellen:

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{x+1} \quad &\approx \quad \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \frac{1}{24}x^4}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 \frac{1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}x^2}{1+x} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \frac{-2 + \frac{1}{4}x}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{48}\frac{x^3}{1+x} .\end{aligned}$$

Und damit erhalten wir als Näherung des Integrals

$$\int_0^{\frac{2}{10}} \frac{e^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^{\frac{2}{10}} \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}x = \left[x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^3\right]_0^{\frac{2}{10}} \approx 0.2012 .$$

Das Taylorpolynom dritter Ordnung läßt sich auch gemäß Definition bestimmen. Die Ableitungen sind aufwendig und die vorgeschlagene Lösung ist eleganter.

(c) Die Taylorentwicklung der Sinusfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ lautet

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \pm \cdots .$$

Im Intervall $x \in (0, 1)$ läßt sich der Integrand

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$$

durch das folgende Polynom darstellen:

$$\frac{\sin(x)}{x} \quad \approx \quad 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 .$$

Und damit erhalten wir als Näherung des Integrals

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \approx \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4\right)\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{600}x^5\right]_0^1 \approx 0.9460 .$$

Taylor-Entwicklung Anwendung

Aufg. 6

Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f : x \mapsto \ln(1 - x)$ mit $x_0 = 0$ und differenzieren Sie diese gliedweise. Welche Potenzreihe erhalten Sie?

Lösung:

Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 13 in Papula Band 1, Abschnitt VI.3. Die Aufgabenstellung finden Sie auf Seite 637 und die detaillierten Lösungen ab Seite 817.

Die Idee dieser Aufgabe ist zu vermitteln, dass man Taylorreihen gliedweise differenzieren kann und die Potenzreihe, die durch diese Differentiation entsteht, kann ihrerseits bzgl. Konvergenz diskutiert werden.

Die Taylorreihe der Funktion $f : x \mapsto \ln(1-x)$ lautet:

$$\begin{aligned} T_{f,0}(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T_{f,0}(x) &= -\sum_{k=0}^{\infty} x^k = -\frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1\,. \end{aligned}$$

Potenzreihen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 2.12.

Konvergenz — Aufg. 1

Bestimmen Sie den Konvergenzradius und geben Sie den Konvergenzbereich der folgenden Reihen an. Untersuchen Sie dabei auch die Ränder des Konvergenzbereichs.

$$(a)\ P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k \qquad (b)\ P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^k}{k} \qquad (c)\ P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

$$(d)\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k} \qquad (e)\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^{k+1} \qquad (f)\ P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k$$

Lösung: Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 1 in Papula Band 1, Abschnitt VI.2. Die Aufgabenstellung finden Sie auf Seite 635 und die detaillierten Lösungen ab Seite 810.

(a) $R = 1$ und Ränder $x = \pm 1$ divergent: Konvergenzbereich $(-1, 1)$

(b) $R = 1$ und Ränder $x = -1$ divergent (harmonische Reihe) und $x = 1$ konvergent (Leibnitz) Konvergenzbereich $(-1, 1]$

(c) $R = 1$ und Ränder $x = \pm 1$ konvergnt: Konvergenzbereich $[-1, 1]$

(d) $R = 2$ und Ränder $x = \pm 2$ divergent: Konvergenzbereich $(-2, 2)$

(e) $R = 1$ und Ränder $x = \pm 1$ divergent, weil notwendiges Kriterium für Konvergenz $(a_k)_k$ Nullfolge nicht erfüllt ist: Konvergenzbereich $(-1, 1)$

(f) $R = \infty$: Konvergenzbereich $\mathbb{R}$

Konvergenz — Aufg. 2

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen.

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k!}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)} \right)^2 x^k \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^4 - 4k^3\right) x^k$$

Lösung: Konvergenz einer Potenzreihe liegt oft nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ vor[a]. Es stellt sich also die Frage: für welche x konvergiert eine Potenzreihe. Innerhalb des Konvergenzgebietes stellt die Potenzreihe eine Funktion dar!!! Das ist doch erstaunlich, oder? Wie auch immer: es gibt zwei wichtige Kriterien, um das Konverengzgebiet, den sogenannten Konvergenzradius R einer Potenzreihe zu bestimmen: das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\text{Quotientenkriterium}: \quad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a < \infty \Rightarrow R = \frac{1}{a},$$

$$\text{Wurzelkriterium}: \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < \infty \Rightarrow R = \frac{1}{a}.$$

(a) Wir bestimmen den Konvergenzradius mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \left| \frac{((n+1)!)^2}{(3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1) \cdot (2(n+1)+1))^2} \cdot \frac{(3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1))^2}{(n!)^2} \right| \\ = & \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{4n^2+12n+9} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+2/n+1/n^2}{4+12/n+9/n^2} \right| \\ = & \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4 \end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen den Konvergenzradius mit Hilfe des Wurzelkriteriums.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

(c) Wir bestimmen den Konvergenzradius mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3(n+1-4)}{(n^4-4n^3)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3\cdot(1+2/n-\cdots)}{n^3\cdot(1-4/n)}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$$

[a] richtig klar wird das erst, wenn man Funktionen im Komplexen diskutiert. Dies ist Teil der mathematischen Disziplin Funktionentheorie, der wir uns leider nicht widmen werden

Analytische Funktionen

Aufg. 3

Begründen Sie, warum die folgende Funktion nicht analytisch ist

$$f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0\,, \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Lösung: Diese Funktion schmiegt sich bei $x = 0$ extrem stark an die x-Achse: Der Funktionswert und alle Ableitungen sind dort 0. Die Taylor-Reihe dieser Funktion f für $x_0 = 0$ ist deshalb für alle x gleich null - also nicht gleich f.

Leibnitz-Kriterium

Aufg. 4

Der Weg eines Teilchens in Abhängigkeit der Beschleunigung $x < 0$ sei durch die unendliche Reihe

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k^2\cdot 3^k}$$

gegeben. Untersuchen Sie mit Hilfe des Leibnizkriteriums für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $S(x)$ sinnvoll gegeben ist.

Lösung: $S(x)$ ist sinnvoll definiert, falls die Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k^2\cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{|x|^{k-1}}{n^2\cdot 3^k}$$

Das heißt, dass wir das Leibnitz-Kriterium anwenden können. Eine Reihe über eine alternierende, monoton fallende Nullfolge ist nach Leibnitz konvergent. Die Frage ist also: für welche x ist die Folge $a_k := \dfrac{|x|^{k-1}}{k^2\cdot 3^k}$ monton fallend?

- offensichtlich ist Null eine untere Schranke für a_k: $0 < a_k,\ k \in \mathbb{N}^+$
- die Folge fällt monoton, wenn der Quotient aus zwei Folgegliedern kleiner als eins ist, also

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \frac{|x|^k\cdot k^2\cdot 3^k}{(k+1)^2\cdot 3^{k+1}\cdot|x|^{k+1}} \\ &= \frac{|x|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \overset{!}{\leq} 1 \Leftrightarrow |x| \leq 3\end{aligned}$$

Also ist $S(x)$ wohldefiniert für $-3 \leq x < 0$.

Potenzreihen und Differentialgleichungen

Aufg. 5

Ein Körper mit der Masse m bewege sich auf einer geradlinigen Bahn. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 1$. Durch eine Kraft F, die der Geschwindigkeit proportional ist, wird der Körper abgebremst.

(a) Stellen Sie Bewegungsgleichung für den Körper auf.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

Lösung:

(a) In dieser Aufgabe ist eine Bewegungsgleichung zu entwickeln, wie Sie sie aus der Physik kennen. Zu jeder Zeit gilt $F_c(t) = F_a(t)$ mit

$$\begin{aligned} F_c(t) &= -c \cdot v(t) \quad \text{(Bremskraft)} \\ F_m(t) &= m \cdot a(t) \quad \text{(Newton)}\,. \end{aligned}$$

Mit

$$a(t) = \dot{v}(t)\,,$$

folgt ein sogenanntes Anfangswertproblem für v, das ist eine Differentialgleichung für v mit gegebener Angfangsgeschwindigkeit v_0:

$$\begin{cases} \dot{v}(t) & = -\frac{c}{m} v(t) \quad t > 0\,, \quad (*) \\ v(0) = v_0 & = 1\,. \end{cases}$$

(b) Die Idee ist diese Differentialgleichung mit einem Potenzreihenansatz zu lösen. Wir nehmen an

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow \dot{v}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} t^n\,.$$

Setzen wir nun die Reihenentwicklungen für v und $\dot{v}$ in $(*)$ ein, dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} t^n &= -\frac{c}{m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ \Rightarrow & \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) \cdot a_{n+1} + \frac{c}{m} a_n \right) t^n = 0 \quad t > 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = 1 \Rightarrow a_0 = 1\,.$$

Das heißt, dass die unbekannten Koeffizienten $a_n, n \geq 2$ rekursiv miteinander verknüpft sind:

$$a_0 = 1$$

$$a_{n+1} = -\frac{c}{m} \frac{1}{n+1} a_n \Rightarrow a_1 = -\frac{c}{m},\ a_2 = \left(-\frac{c}{m}\right)^2 \frac{1}{2},\ a_3 = \left(-\frac{c}{m}\right)^3 \frac{1}{2 \cdot 3} \cdots$$

Mit vollständiger Induktion beweist man

$$a_n = \left(-\frac{m}{c}\right)^n \frac{1}{n!}\,.$$

Das heißt wir haben die Lösung in Form einer Potenzreihe gefunden (deren Wert kennen wir auch schon!):

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{c}{m} t\right)^n \frac{1}{n!} \Rightarrow v(t) = e^{-m/ct}\,.$$

Fourierreihen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in 2.13.

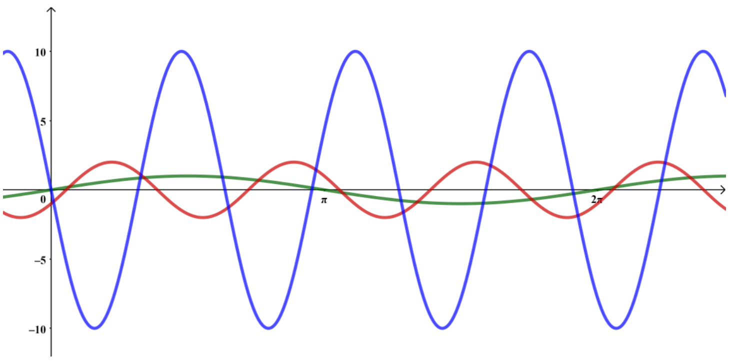
Harmonische Schwingungen

Aufg. 1

Bestimmen Sie die Amplitude, die Periode und die Nullphase der folgenden harmonischen Schwingungen und skizzieren sie den Funktionsverlauf

$$(a)\ y(t) = 2\,\sin\left(3\,t - \frac{\pi}{6}\right) \qquad (b)\ y(t) = 10\,\sin\left(\pi\,t - 3\,\pi\right).$$

Lösung:



(a) $A = 2,\ T = \frac{2\pi}{3},\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$

(b) $A = 10,\ T = 2,\ \varphi_0 = -3\pi$

(c) $A = 1,\ T = 2\pi,\ \varphi_0 = 0$
(Sinus-Funktion zum Vergleich)

komplexes Fourier-Polynom vs. reelles Fourier-Polynom

Aufg. 2

(a) Man kann die komplexwertigen Koffizienten c_k eines komplexen Fourier Polynoms

$$p_{N,f}(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \cdot e^{i\,k\,\omega_0\,t},$$

in die reell-wertigen Koeffizienten a_n und b_n des entsprechenden reellen Fourier-Polynom umrechnen und das funktioniert wie folgt:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 2\,c_0, \\ a_n & = & c_n + c_{-n}, \\ b_n & = & i\,\left(c_{-n} + c_n\right). \end{array}\right. \tag{3}$$

(b) Man kann die reellen Koffizienten eines Fourier Polynoms

$$p_{N,f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cdot \cos(n\,\omega_0\,t) + b_n \cdot \sin(n\,\omega_0\,t)\right),$$

in die komplex-wertigen Koeffizienten c_k des entsprechend komplex-wertigen Fourier-Polynoms umrechnen und das funktioniert wie folgt:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{1}{2}\,a_0, \\ c_n = \frac{1}{2}\,\left(a_n - i\,b_n\right), \quad n \in \mathbb{N}^+, \\ c_{-n} = \frac{1}{2}\,\left(a_n + i\,b_n\right), \quad , \quad n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Fourier-Reihen

Aufg. 3

Skizzieren Sie zunächst die Funktionen und berechnen Sie anschließend die Fourier-Reihen.

(a) Periode $T = 2$ und

$$f(t) = t, \quad t \in [0, 2].$$

(b) Periode $T = 1$ und

$$f(t) = |t|, \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

(c) Periode $T > 0$ und

$$f(t) = t \cdot (T - t), \quad t \in [0, T].$$

(d) Periode $T = 2\pi$ und

$$f(t) = \max(\sin(t), 0), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Lösung:

(a) Eine Skizze des Signals zeigt, dass f um die horizontale Gerade $x \mapsto 1$ schwingt. Aus dieser Beobachtung folgt, dass der konstante Anteil der Fourierreihe, also der Summand $a_0/2$ bzw. c_0, den Zahlenwert eins hat. Bezüglich des Punkts $(1|0)$ ist f punktsymmetrisch und damit ein ungerades Signal. Die Fourierkoeffizienten lauten

$$\begin{cases} a_0 = 2, & \\ a_k = 0, & k > 0, \\ b_k = -\dfrac{2}{\pi k}, & k > 0. \end{cases}$$

Die Periode T definiert die Grundfreqzenz $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ und damit erhalten wir

$$\mathrm{FR}_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\,\omega_0\,t) + b_k \cdot \sin(k\,\omega_0\,t) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\,\pi} \cdot \sin(k\,\pi\,t).$$

Bemerkung: Entwickelt man anstatt der reellen Fourierreihe die komplexe Fourierreihe, dann kann es sein, dass die Fourierreihen auf den ersten Blick nicht dieselbe Form haben. Entweder kann man die Reihen auf Gleichheit überprüfen, indem man überprüft, ob die Umrechnungsformel (3) wahr sind. Eine Alternative ist die komplexe Reihe in eine reelle Reihe umzuformen. Letzteres klappt wie folgt

- Komplexe Reihe in drei Teile aufspalten

$$\mathrm{FR}_f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\,k\,\omega_0\,t} = \sum_{k=-\infty}^{k=-1} c_k \cdot e^{i\,k\,\omega_0\,t} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{i\,k\,\omega_0\,t}$$

- Summanden der Reihe umsortieren:

$$\mathrm{FR}_f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cdot e^{i\,k\,\pi\,t} + c_{-k} \cdot e^{-i\,k\,\pi\,t}\right)$$

- Komplex konjugierte Zahlen identifizieren

$$\mathrm{FR}_f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cdot e^{i\,k\,\pi\,t} + \overline{c_k \cdot e^{i\,k\,\pi\,t}} + \right),$$

wobei

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \overline{c_k}, \\ e^{-i\,k\,\omega_0\,t} &= \overline{e^{i\,k\omega_0\,t}}, \\ \Rightarrow c_{-k} \cdot e^{-i\,k\,\omega_0\,t} &= \overline{c_k \cdot e^{i\,k\,\omega_0\,t}}. \end{aligned}$$

- Reelle und imaginäre Anteile trennen und Eulersche Identitäten

$$\begin{aligned} \cos(k\,\omega_0\,t) &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^{i\,k\,\omega_0\,t} + e^{-i\,k\,\omega_0\,t}\right), \\ \sin(k\,\omega_0\,t) &= -\frac{i}{2}\left(e^{i\,k\,\omega_0\,t} - e^{-i\,k\,\omega_0\,t}\right). \end{aligned}$$

anwenden.

(b) f ist achsensymmetrisch (gerade) mit Periode $T = 1$, also Grundschwingung $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi$. Die Fourierkoeffizienten sind

$$\begin{cases} a_0 &= \dfrac{1}{2}\,, \\ a_k &= \dfrac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade}, \\ \dfrac{-2}{\pi^2 k^2}, & k \text{ ungerade}\,, \end{cases} \\ b_k &= 0\,, \quad \text{für alle } k \geq 1\,. \end{cases}$$

Die Funktion läßt sich also allein durch Kosinus-Schwingungen rekonstruieren, alle b_k sind null. Weiterhin tauchen nur Frequenzen auf mit ungeradem Index:

$$a_{2k-1} = -\frac{2}{\pi^2(2k-1)^2}, \quad k = 1, \cdots .$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{FR}_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\,\omega_0\,t) + b_k \cdot \sin(k\,\omega_0\,t) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2\,(2\,k-1)^2} \cdot \cos(2\pi\,(2\,k-1)\,t) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\cos(2\pi\,t)}{1^2} + \frac{\cos(3\cdot 2\pi\,t)}{3^2} + \frac{\cos(5\cdot 2\pi\,t)}{5^2} + \ldots\right) \end{aligned}$$

(c) f ist achsensymmetrisch (gerade) mit Periode T und Grundschwingung $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$. Die Fourierkoeffizienten lauten

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{T^2}{3}, \\ a_k = -\dfrac{T^2}{\pi^2 k^2}, & k > 0, \\ b_k = 0, & k > 0\,. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{FR}_f(t) &= \frac{T^2}{6} - \frac{T^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(k\,\omega_0\,t) \\ &= \frac{T^2}{6} - \frac{T^2}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\cos(\omega_0\,t)}{1^2} + \frac{\cos(2\cdot\omega_0\,t)}{2^2} + \frac{\cos(3\cdot\omega_0\,t)}{3^2} + \ldots\right) \end{aligned}$$

(d) f ist π-periodisch und weder gerade noch ungerade. Die Fourierkoeffizienten lauten

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi}, \\ a_k = -\dfrac{(-1)^k + 1}{\pi k^2 - \pi}, & k > 0, \\ b_1 = \dfrac{1}{2}\,, \\ b_k = 0\,, & k > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 = 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{FR}_f(t) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2-1}\cdot\cos(2\,k\,t) \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\sin(t) + \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\cos(2\,t)}{2^2-1} + \frac{\cos(4\,t)}{4^2-1} + \frac{\cos(6\,t)}{6^2-1} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Fouriertransformation Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.14.

Fourier-Transformation

Aufg. 1

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der folgenden Funktionen.

(a) $\delta > 0$

$$f : t \mapsto \begin{cases} e^{-\delta t}, & t \geq 0\,, \\ 0 & t < 0\,. \end{cases}$$

(b)

$$f : t \mapsto \begin{cases} \cos^2(t), & |t| \leq \pi/2\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) $f : t \mapsto t \cdot e^{-|t|}$

Lösung:

Es kann hilfreich sein Symmetrieeigenschaften der Funktion zu untersuchen bevor man die Fourier-Transformierte berechnet, denn es gilt

$$\begin{aligned} \text{gerade Funktionen } f(-t) &= f(t) \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) \cdot \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \\ \text{ungerade Funktionen } f(-t) &= -f(t) \Rightarrow \quad \hat{f}(\omega) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) \cdot \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\delta - i\omega}{\omega^2 + \delta^2} \\ \Rightarrow |\hat{f}(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 + \delta^2} \quad \text{Betrag}\,, \\ \Rightarrow \varphi(\omega) &= -\arctan\frac{\omega}{\delta} \quad \text{Phase}\,. \end{aligned}$$

(b) Die Fouriertransformierte von f lautet:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega\,(4-\omega^2)} \sin\left(\omega \frac{\pi}{2}\right)$$

Da f eine gerade Funktion ist, läßt sich $\hat{f}$ wie folgt berechnen

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) \cdot \cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \cdot \cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Folgen wir dem Hinweis und schauen nach einem passenden Addtionstheorem zur Vereinfachung des Integranden. Es gilt

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2\,t))\;, \tag{4}$$

und damit

$$\hat{f}(\omega) \overset{(4)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\,t)) \cdot \cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,t) \cdot \cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t \right)\;. \tag{5}$$

Betrachten wir zu allererst den Fall $\omega \neq 0$ und lösen die beiden Integrale rechts getrennt. Das erste Integral rechts ist nicht schwer - es gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega\, t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega\, t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega\,\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Zum Lösen des zweiten Integrals wenden wir zweimal eine partielle Integration an und das liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\,t)\cdot\cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t &\overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\left[\cos(2\,t)\cdot\frac{1}{\omega}\sin(\omega\,t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{-\frac{1}{\omega}\sin(\omega\,\frac{\pi}{2})} + \frac{2}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\,t)\cdot\sin(\omega\,t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} -\frac{1}{\omega}\sin(\omega\,\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{\omega}\left(\underbrace{\left[-\sin(2\,t)\cdot\frac{1}{\omega}\cos(\omega\,t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{2}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\,t)\cdot\cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{1}{\omega}\sin(\omega\,\frac{\pi}{2}) + \frac{4}{\omega^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\,t)\cdot\cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Wir haben eine algebraische Gleichung erhalten, die sich nach unserem unbekannten Integral auflösen läßt!

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2\,t)\cdot\cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{1-\frac{4}{\omega^2}}\frac{1}{\omega}\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\omega}{4-\omega^2}\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)\,.$$

Setzten wir die Integrale in (5) ein, so erhalten wir für $\omega \neq 0$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega}\sin\left(\omega\,\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega}{4-\omega^2}\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{\omega\,(4-\omega^2)}\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)$$

Betrachten wir jetzt $\omega = 0$:

$$\hat{f}(0) \overset{(4)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2\,t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Mit der Regel von L'Hospital ist

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4}{\omega\,(4-\omega^2)}\sin\left(\omega\frac{\pi}{2}\right)$$

(c) f ist eine ungerade Funktion

$$\hat{f}(\omega) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} te^{-t}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{4i\omega}{\omega^4+2\omega^2+1}$$

Fourier-Transformation der Gaußschen Funktion

Aufg. 2

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Gaußschen Glockenkurve $f: t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. Benutzen Sie ohne Beweis die folgende Identität $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}$ wobei $z \in \mathbb{C}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+i\omega)^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{(**)}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}\omega^2}\,,\end{aligned}$$

wobei

- der Exponent in $(*)$ durch die quadratische Ergänzung umgeformt worden ist

$$-\frac{1}{2}t^2 - i\omega t = -\frac{1}{2}\left(t^2 + 2i\omega t + (i\omega t)^2\right) + \frac{1}{2}(i\omega)^2 = -\frac{1}{2}\left(t+i\omega\right)^2 + \frac{1}{2}(i\omega)^2\,.$$

- das Integral durch die Substitution $z = \frac{1}{2}(t+i\omega)$ in ein Integral über die komplexen Variable z übergeht.

Wichtig ist die Interpretation dieses Ergebnisses: Die Fourier-Transformierte einer Gaußschen Glockenkurve ist wieder die Gaußsche Glockenkurve!

Fourier-Transformation

Aufg. 3

Im Skript wurde die Idee verfolgt die Fourier-Transformation mathematisch als Grenzprozess aus der Fourier-Reihe zu entwickeln. Den Grenzprozess schauen wir uns an einem konkreten Beispiel jetzt an.

(a) Zeigen Sie, dass gilt

$$c_k = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}}\cdot\tilde{c}_k, \quad \tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot e^{-i\,\omega_k\,t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{mit Kreisfrequenz } \omega_k = \frac{2\pi k}{T}\,.$$

(b) Betrachten Sie nun die T-periodische Funktion f mit $f|_T : [-T/2, T/2) \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-|t|}$ und bestimmen Sie eine Formel für die Fourierkoeffizienten $\tilde{c}_k$.

(c) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{g}$ von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto e^{-|t|}$.

(d) Setzen Sie $T = 50$ und bestimmen Sie mit Hilfe einer Software die Punkte $(\omega_k, \tilde{c}_k)$, $1 \le k \le 50$. Erzeugen Sie ein Bild, das die Punkte und die den Graph von $\hat{g}$ zeigt und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a)

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \;\Rightarrow\; c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-i\,\omega_k\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cdot e^{-i\,\omega_k\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}}\cdot\tilde{c}_k\,.$$

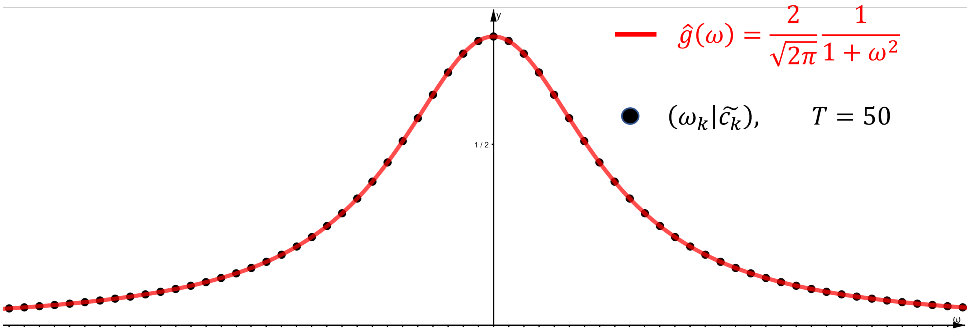
(b)

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-|t|}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{T}\left(1-e^{-\frac{T}{2}}\right)\\
c_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-|t|}\cdot e^{-i\,\omega_k\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+\omega_k^2}\\
&= \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+\omega_k^2}\left(1-(-1)^k\,e^{-\frac{T}{2}}\right)\\
\Rightarrow\ \tilde{c}_k &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+\omega_k^2}\left(1-(-1)^k\,e^{-\frac{T}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\cdot e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{t}\cdot e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} e^{-t}\cdot e^{-i\,\omega\,t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[\frac{1}{1-i\,\omega}e^{(1-i\,\omega)\,t}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{1}{1+i\,\omega}e^{-(1+i\,\omega)t}\right]_0^{\infty}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1-i\,\omega}+\frac{1}{1+i\,\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1+i\,\omega}{1+\omega^2}+\frac{1-i\,\omega}{1+\omega^2}\right)\\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}\,.
\end{aligned}
$$

(d) Bild erzeugt mit Geogebra:



(e) Das Spektrum von f sind diskrete Punkte im Frequenzraum $(\omega_k\,|\,\tilde{c}_k)$ $k\in\mathbb{Z}$. Die Punkte liege auf dem Graphen von $\hat{g}$ und das sieht man auch analytisch:

$$
\lim_{T\to\infty}\tilde{c}_k = \lim_{T\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+\omega_k^2}\left(1-(-1)^k\,e^{-\frac{T}{2}}\right) = \frac{1}{1+\omega_k^2} = g(\omega_k)\,.
$$

Wichtig: der Grenzübergang wird bezüglich der Variable T unternommen und zwar für eine fixierte Diskretisierung in ω!

Laplace Transformation Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.15.

Uneigentliche Integrale — Aufg. 1

Bestimmen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale, falls er existiert.

$$(a)\ \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (b)\ \int_0^\infty x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (c)\ \int_{-\infty}^2 e^x\,\mathrm{d}x \quad (d)\ \int_0^\infty x^2\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

Diese Aufgaben entsprechen den Aufgaben 1 und 2 zu Abschnitt V.9 in Papula Band 1. Die Aufgabenstellungen finden Sie auf Seite 564 und detaillierte Lösungswege auf Seite 798.

(a) Papula 1.V.9, Aufg. 1.a) 1

(b) Papula 1.V.9, Aufg. 1.b) 1

(c) Papula 1.V.9, Aufg. 1.c) e^2

(d) Papula 1.V.9, Aufg. 2) 1/4

Uneigentliche Integrale — Aufg. 2

Bestimmen Sie den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale, falls er existiert.

$$(a)\ \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \quad (b)\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad (c)\ \int_0^{10} \frac{e^x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$$

Lösung:

Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 4 zu Abschnitt V.9 in Papula Band 1. Die Aufgabenstellungen finden Sie auf Seite 565 und detaillierte Lösungswege auf Seite 799.

(a) 2

(b) divergent

(c) divergent

Laplace-Transformation — Aufg. 3

Aufgabe war es zu den gegebenen Funktionen die Laplace-Transformierte durch explizite Berechnung zu bestimmen. Die Aufgaben finden Sie im Lehrbuch von Papula Band II, Abschnitt VI.1 auf Seite 676 und detaillierte Lösungswege auf Seite 766:

(a) Papula, Aufg. 1.b) $f(t) = 2t\cdot e^{-4t}$

(b) Papula, Aufg. 1.c) $f(t) = e^{-\delta t}\cdot\sin(\omega t),\ \delta,\omega > 0$

(c) Papula, Aufg. 1.d) $f(t) = \sinh(at),\ a > 0$

(d) Papula, Aufg. 1.f) $f(t) = \sin^2(t)$

(e) Papula, Aufg. 3.a) (Rechteckimpuls) Für $a > 0$

$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < a\,, \\ -A, & a < t < 2a\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(f) Papula, Aufg. 3.b) (Sinusimpuls) Für $a > 0$

$$f(t) = \begin{cases} A\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot t}{a}\right), & 0 \le t \le a\,, \\ 0, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi),\ \omega, \varphi > 0\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \sin(\omega t + \varphi) e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\sin(\varphi) + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \cos(\omega t + \varphi) e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s}\sin(\varphi) + \frac{\omega}{s^2}\cos(\varphi) - \frac{\omega^2}{s^2} I \\
&\Rightarrow\ I\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right) = \frac{1}{s}\sin(\varphi) - \frac{\omega}{s^2}\cos(\varphi)
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\Rightarrow I = \mathcal{L}(f) = \frac{1}{s^2}\left(s\sin(\varphi) - \omega\cos(\varphi)\right)\frac{s^2}{s^2+\omega^2} = \frac{s\sin(\varphi) - \omega\cos(\varphi)}{s^2+\omega^2}\,.$$

Einen alternativen Lösungsweg, der von den Sätzen über die Laplace-Transformierte bei "Manipulationen vom Argument "(Beschleunigung und Verschiebung des Signals) Gebrauch macht, finden Sie im Lehrbuch von Papula Band II, Abschnitt VI.2 finden Sie auf Seite $767f$. Die Aufgabe ist Aufgabe 4 auf Seite 678.

Laplace Transformation Anwendungen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt **??**.

Laplace-Transformation Rechenregeln

Aufg. 1

Die Aufgaben finden Sie in Papula 2.VI.2 ab Seite 677 und die Lösungen ab Seite 767.

(a) Papula, Aufg. 1a) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{24}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}$

(b) Papula, Aufg. 1.b) $\mathcal{L}_f(s) = C\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\lambda}\right)$

(c) Papula, Aufg. 2.a) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{29160}{s^6}$

(d) Papula, Aufg. 2.b) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{s}{s^2+16}$

(e) Papula, Aufg. 2.d) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$

(f) Papula, Aufg. 3.b) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{2\cdot e^{-4s}}{s^3}$

(g) Papula, Aufg. 3.c) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{e^{-bs}}{s-1}$

(h) Papula, Aufg. 3.a) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{s}{s^2+1}$ (Achtung: Verschiebungsformel nicht anwendbar, weil keine Verschiebung nach rechts vorliegt!)

(i) Papula, Aufg. 5.a) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$

(j) Papula, Aufg. 5.b) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{A\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$

(k) Papula, Aufg. 5.c) $\mathcal{L}_f(s) = \frac{1}{s-3\ln(2)}$

Laplace-Transformation und Differentialgleichungen

Aufg. 2

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' + \omega^2 y = 0,\ \omega > 0$ mit den beiden Anfangswerten

1. $y(0) = 1 \wedge y'(0) = 0$
2. $y(0) = 0 \wedge y'(0) = 1$

(a) Berechnen Sie die Lösung der beiden Anfangswertprobleme.

(b) Berechnen Sie die Laplace-Transformierte $Y(s)$ der Differentialgleichung $y'' + \omega^2\, y = 0$. Nutzen Sie dabei die Ableitungsregeln.

(c) Bestimmen Sie, ausgehend von den speziellen Lösungen der Anfangswertprobleme im Bildbereich, die Lösungen im Zeitbereich. Verwenden Sie für die Rücktransformationen eine Tabelle.

Lösung:

(a) Die Lösungen lauten

$$y_1(t) = \cos(\omega t),\ y_2(t) = 1/\omega \cdot \sin(\omega t)$$

(b) Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(y'' + \omega^2 y\right)(s) &= \mathcal{L}\left(y''\right)(s) + \omega^2 \mathcal{L}\left(y\right)(s)\\ &= s^2\mathcal{L}\left(y\right)(s) - sy(0) + \omega^2\mathcal{L}\left(y\right)(s)\\ &= s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + \omega^2 Y(s) \stackrel{!}{=} 0\,.\end{aligned}$$

(c) Erstes Anfangswertproblem

$$s^2 Y_1(s) - s + \omega^2 Y_1(s) = 0 \Leftrightarrow Y_1(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \Rightarrow y_1(t) = \cos(\omega t)\,.$$

Zweites Anfangswertproblem

$$s^2 Y_2(s) - 1 + \omega^2 Y_2(s) = 0 \Leftrightarrow Y_2(s) = \frac{1}{s^2+\omega^2} \Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{\omega} \cdot \sin(\omega t)\,.$$

Lösen Sie die folgenden Systeme mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$(a)\ \begin{cases} x(0)=y(0)=0, & t=0\,,\\ \dot{x}+2y=e^{t}, & t>0\,,\\ \dot{y}+2x=e^{-t}, & t>0\,. \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} x(0)=y(0)=0, & t=0\,,\\ \dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0, & t=0\,,\\ \ddot{x}+\dot{y}+3y=1, & t>0\,,\\ \ddot{y}-4\dot{x}+3y=0, & t>0\,. \end{cases}$$

Lösung:

(a) Anwendung der Laplace-Transformation und Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt:

$$\begin{cases} sX(s)+2Y(s)=\dfrac{1}{s-1}\,,\\ 2X(s)+sY(s)=\dfrac{1}{s+1}\,. \end{cases}$$

Auflösen[a] und Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{s^2-s+2}{(s^2-1)(s^2-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s-1}-\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{1}{s-2}\right)\,,\\ Y(s)=\dfrac{s^2-3s-2}{(s^2-1)(s^2-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s-1}-\dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s-2}\right)\,. \end{cases}$$

Rücktransformation liefert die Lösung des Systems:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{3}\left(2e^{-t}-e^{t}-2e^{-2t}+e^{2t}\right)\,,\\ y(t)=\dfrac{1}{3}\left(e^{-t}+2e^{t}-2e^{-2t}-e^{2t}\right)\,. \end{cases}$$

(b) Laplace-Transformation des Systems unter Bereücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} \left(s^2+3\right)X(s)+sY(s)=\dfrac{1}{s}\,,\\ -4sX(s)+\left(s^2+3\right)Y(s)=0\,. \end{cases}$$

Auflösen und Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{cases} X(s)=\dfrac{s^2+3}{s(s^2+9)(s^2+1)}=\dfrac{1}{3s}-\dfrac{1}{12(s^2+9)}-\dfrac{s}{4(s^2+1)}\,,\\ Y(s)=\dfrac{4}{(s^2+9)(s^2+1)}=-\dfrac{1}{2(s^2+9)}+\dfrac{1}{2(s^2+1)}\,. \end{cases}$$

Rücktransformation liefert die Lösung des Systems:

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}\cos(3t)-\dfrac{1}{4}\cos(t)\,,\\ y(t)=-\dfrac{1}{6}\sin(3t)+\dfrac{1}{2}\sin(t)\,. \end{cases}$$

[a] Entweder durch Einsetzen der Gleichungen ineinander oder durch Anwendung der inversen Matrix!

Wahrscheinlichkeit Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.17.

Ereignismenge — Aufg. 1

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, die man aus den Ziffern...

(a) $7, 8$ und 9 bilden kann,

(b) $7, 8$ und 9 bilden kann, wenn jede Ziffer nur einmal auftreten darf.

Lösung:

(a) Gesucht ist die Anzahl an Variationen mit $n = 3$ und $k = 3$. Es gibt insgesamt 27 verschiedene Variationen (Ziehen mit Zürücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge).

(b) Gesucht ist die Anzahl an Kombinationen mit $n = 3$ und $k = 3$. Es gibt insgesamt 6 verschiedene Kombinationen (Ziehen ohne Zurücklegen unter Berücksichtigung der Reihenfolge).

Ereignismenge — Aufg. 2

Die Handy-Pin ist gerade, vierstellig und genau die Ziffern $1, 23, 4$ und 5. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Lösung:
Die letzte Ziffer muss die 4 sein, also verbleiben noch $3! = 6$ Möglichkeiten: $1354, 1534, 3154, 3514, 5134$ und 5314.

Ereignismenge — Aufg. 3

Geben Sie für die Zufallsexperimente die Mächtigkeit der Ergenbismenge und alle möglichen Ergebnisse an:

(a) Ein Würfel wird dreimal geworfen und die Augenzahlen festgestellt.

(b) Eine Münze soll so lange geworfen, bis zum ersten Mal Wappen oben liegt. Die maximale Anzahl an Würfen ist vier.

Lösung:

(a) $|\Omega| = 6^3,\ \Omega = \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

(b) $|\Omega| = 5,\ \Omega = \{W, (Z, W), (Z, Z, W), (Z, Z, Z, W), (Z, Z, Z, Z)\}$

Zufallsexperiment — Aufg. 4

Es wird folgendes Zufallsexperiment betrachtet: Dreimaliges Werfen einer Münze und Feststellen, ob Wappen oder Zahl oben liegt. Formulieren Sie die Ereignisse in Worten.

(a) $\{WWZ, WZW, ZWW\}$

(b) $\{WWW, WWZ, ZWW, ZWZ\}$

(c) $\{WZZ, ZWZ, ZZW, ZZZ\}$

(d) $\{WZW, ZWZ\}$

Lösung:

(a) Genau zweimal wird Wappen geworfen. Äquivalent dazu ist: Genau einmal wird Zahl geworfen.

(b) Beim zweiten Wurf erscheint Wappen.

(c) Wappen erscheint maximal bei einem Wurf.

(d) Wappen und Zahl werden abwechelnd geworfen.

Wahrscheinlichkeiten

Aufg. 5

Man hat einen Topf mit 10 Kugeln, davon sind 6 aus Silber und 4 aus Gold. Man zieht zufällig zwei Kugeln (ohne Zurückzulegen). Wir nennen

A: Ziehen einer Goldkugel beim ersten Mal

B: Ziehen einer Goldkugel beim zweiten Mal

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse an:

$$P(A),\ P(B|A),\ P(A \cap B),\ P(B),\ P(A|B)\,.$$

Lösung:

- Es ist $P(A) = 2/5$.
- Wenn schon eine Goldkugel gezogen wurde, hat sich das Verhältnis von Silber zu Gold auf $6 : 3$ geändert, daher ist $P(B|A) = 1/3$.
- $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 2/15$ - überprüfen durch Abzählen aller Möglichkeiten.
- $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = 2/5$.
- Wenn man weiß, dass beim zweiten Mal Gold gezogen worden ist, mit welcher Wahrscheinlichkiet hat man dann auch beim ersten Mal Gold gezogen? $P(A|B) = 1/3$.

Wahrscheinlichkeiten

Aufg. 6

Ein Computerchip wird zweimal unabhängig voneinander auf Produktionsfehler untersucht. Sowohl im ersten Test A als auch im zweiten Test B werden c Fehler festgestellt. Zusätzlich werden beim Test A a Fehler und beim Test B b Fehler festgestellt. Wir nehmen an, dass die verschiedenen Fehler mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gefunden werden. Geben Sie eine Schätzung an für die Gesamtanzahl der Produktionsfehler des getesteten Chips.

Lösung:
Wir nennen $P(A)$ und $P(B)$ die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler beim Test A oder B zu finden. Gesucht ist eine Schätzung der Gesamtanzahl N aller möglichen Fehler im Chip. Aufgrund der Beobachtung schätzen wir

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx \frac{c}{b+c}\,.$$

Diese Schätzung ist aber gleichzeitig ein Schätzwert für $P(A)$, da wegen der Unabhängigkeit der Tests A und B gilt

$$P(A|B) = P(A) \approx \frac{c}{b+c}\,.$$

Die vermutete Gesamtzahl N aller vorhandenen Fehler ist in der Schätzung von $P(A)$ versteckt, da ja $P(A) \approx (a+c)/N$ und damit erhalten wir

$$N = \frac{1}{c}(a+c)(b+c)$$

als geschätzte Gesamtanzahl der Fehler im Chip.

Zufallsvariablen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.18.

Median und Perzentile

Aufg. 1

Es werden 20 Probanden gebeten, den Geschmack einer neuen Eissorte auf einer Skala von 1 (hervorragend) bis 5 (scheußlich) zu bewerten. Der Test erbringt die folgenden Daten:

1	2	3	4	5
5	6	2	1	6

Bestimmen Sie den Median und den Abstand zwischen dem 25%-Perzentil und dem 75%-Perzentil.

Lösung:

(a) Die geordnete Verteilung sieht wie folgt aus

$$1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5$$

Bei einer geraden Anzahl von Werten wird das arithmetische Mittel der beiden mittigen Werte gebildet:

$$x_{\text{med}} = \frac{1}{2}\left(x_{10} + x_{11}\right) = 2\,.$$

(b) Zur Bestimmung der Perzentilen, muss zunächst der Index bestimmt werden

$$\begin{aligned} 0.25 \cdot 20 &= 5 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow p_{0.25} = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) = 1,5 \\ 0.75 \cdot 20 &= 15 \Rightarrow k = 15 \Rightarrow p_{0.75} = \frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) = 5 \end{aligned}$$

Der Interquartilsabstand beträgt also 3.5.

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable

Aufg. 2

Gegeben seien drei Glühlampen mit paarweise unabhängigen Asfallwahrscheinlichkeiten $0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1$ einmal in Reihe und einmal parallel geschaltet. Wir betrachten die folgenden Ereignisse

A_i: Die i-te Glühlampe brennt durch.

B: Der Stromkreis wird unterbrochen.

(a) Beschreiben Sie das Ereignis B mit Hilfe der Ereignisse A_i für beide Schaltungen.

(b) Beschreiben Sie $P(B)$ für beide Schaltungen.

(c) Welche Bedeutung haben die Ereignisse $A_1 \cup A_2$ und $A_2 \cup A_3$?.

Lösung:
Diese Aufgabe entspricht Aufgabe 3 in dem Lehrbuch von Lothar Papula, Band 3, Abschnitt II.2. Aufgabenstellung siehe Seite 453 und Lösung Seiten 787.

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariable

Aufg. 3

Ein gezinkter Würfel wird geworfen und es wird jeweils die Augenzahl festgestellt. Mittels langer Serien ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\{x_i\})$	0,25	0,35	0,18	0,15	0,05	0,02

(a) Bestätigen Sie, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben ist.

(b) Tim und Tom machen aus dem Zufallsexperiment ein Glücksspiel: Tim gewinnt 10e, falls eine ungerade Augenzahl gewürfelt wird, andernfalls gewinnt Tom 10e. Ist das Spiel fair?

Lösung:

(a) $P(\Omega) = \sum P(\omega) = 0,25 + 0,35ß0,18 + 0,15 + 0,05 + 0,02 = 1.$

(b) Das Spiel ist nicht fair, weil $P(2,4,6) = 0,52 < P(1,3,5) = 0,52$

Erwartungswert und Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen

Aufg. 4

Berechnen Sie für folgende Zufallsvariablen jeweils die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert.

(a) Diskrete Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsverteilung

x_i	-2	-1	1	2	sonst
$P(\{x_i\})$	$1/8$	$3/8$	$1/4$	$1/4$	0

(b) Stetige Zufallsvariable mit der Dichte $p : x \mapsto ax^2(1-x)$

Lösung:
Diese Aufgaben entsprechen den Aufgaben 3 und 11 in dem Lehrbuch von Lothar Papula, Band 3, Abschnitt II.5. Aufgabenstellungen sind auf Seite 460 bzw. 461 und Lösungen auf den Seiten 792 und 794.

Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

Aufg. 5

(a) Eine Firma stellt Solarzellen her, von denen 2% Ausschuss sind. Bei welcher Anzahl an produzierten Solarzellen, ist mit 90%-iger Sicherheit mindestens eine dabei, die defekt ist?

(b) Ein Butterbrot fällt in 60% aller Fälle auf die geschmierte Seite. Wieviele von drei Broten fallen erwartungsgemäß auf die belegte Seite?

Lösung:

(a) Definiere die Ereignisse:

A Mindestens eine Solarzelle ist defekt.

B Keine Solarzelle ist defekt.

Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten lauten:

$$\begin{aligned} P(A) &\overset{!}{=} 0.9\,. \\ P(B) &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0.02^0 \cdot (1-0.02)^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0.98^n\,. \end{aligned}$$

Es gilt

$$P(A) = 1 - P(B)\,,$$

und damit haben wir eine Gleichung zur Bestimmung von n:

$$1 - 0.98^n = 0.9 \Leftrightarrow 0.98^n = 0.1 \Leftrightarrow n = \frac{\ln(0.1)}{\ln(0.98)} \approx 114\,.$$

(b)

x_i	0	1	2	3
$P(\{x_i\})$	0.064	0.288	0.432	0.216

$E[X] = 0 \cdot (0.4)^3 + 1 \cdot 0.6(0.4)^2 + 2 \cdot (0.6)^2 0.4 + 3 \cdot (0.6)^3 = 1.8$ Alternative Lösung: Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette. Der Erwartungswert einer Bernoulli-Kette beträgt $n \cdot p$. Hier ist $n = 3$ und $p = 0.6$ Also $E(X) = 1.8$.

Erwartungswert und Varianz Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.19.

Varianz — Aufg. 1

Warum betrachtet man zur Definition der Varianz nicht $E[X - E[X]]$? **Lösung:** $E[X - E[X]] = 0$

Beschreibende Statistik — Aufg. 2

Bei einem zehnmaligen Wurf mit einem Würfel ergaben sich folgende Augenzahlen:

$$1, 2, 4, 6, 3, 6, 4, 4, 3, 5\,.$$

(a) Bestimmen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten der Augenzahlen aufgrund des Experiments.

(b) Erstellen Sie ein Stabdiagramm der relativen Häufigkeiten.

(c) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und zeichnen Sie diese.

(d) Erstellen Sie einen Box-Plot.

(e) Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Standardabweichung.

Lösung: Diese Aufgabe entspricht Aufgabe III.1.1 im Lehrbuch Papula 3, zu finden auf Seite 639 und Lösung auf Seite 803.

Diskrete Zufallsvariablen — Aufg. 3

Berechnen Sie für die diskrete Wahrscheinlichkeitsdichten Erwartungswert und Varianz.

$$(a)\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n}\,, & x \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (b)\ x \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(-p)^{n-k}\,, & x = k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(c)\ p : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}\,, & x = k \in \mathbb{N}_0 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lll} (a) & E[X] = \dfrac{n+1}{2}, \quad \sigma^2 = \dfrac{n^2-1}{12}\,, & \text{(diskrete Gleichverteilung)} \\ (b) & E[X] = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)\,, & \text{(Binomialverteilung)} \\ (c) & E[X] = \mu, \quad \sigma^2 = \mu\,, & \text{(Poisson-Verteilung)} \end{array}$$

Stetige Zufallsvariablen — Aufg. 4

Skizieren Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

$$(a)\, p : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (b)\, p : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (c)\, p : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda}, & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{array}{ll}
(a) & E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}\,, \text{(Stetige Gleichverteilung)} \\
(b) & E[X] = \mu, \quad \sigma^2 = \sigma^2\,, \text{(Normal-Verteilung)} \\
(c) & E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,, \text{(Exponential-Verteilung)}
\end{array}$$

Varianz einer Summe

Aufg. 5

Eine Firma stellt Platten her, die in der Höhe um einen Sollwert μ schwanken. Die Stardabweichung beträgt unabhängig vom Sollwert σ. Es werden jeweils 10 Platten auf einen Stapel gelegt, einmal (1) Platten gleicher Höhe und danach (2) Platten unterschiedlicher Höhe. Wie ist die jeweilige Standardabweichung?

Lösung:

(1) 10 gleich dicke Platten werden aufeinandergestapelt. Die Zufallsgröße Y_1 deren Standardabweichung wir bestimmen sollen ist in Worten: "10 Pflastersteine mit fixierter Höhe μ", wobei jeder dieser Pflastersteine eine Realisierung derselben Zufallsgröße X. X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Damit:

$$\begin{aligned} Y_1 &:= 10 \cdot X\,, \\ \sigma_{Y_1} &= 10 \cdot \sigma\,. \end{aligned}$$

(2) 10 Pflastersteine mit unterschiedlicher Höhe. Die Zufallsgröße Y_2 deren Standardabweichung wir bestimmen sollen ist in Worten: "10 Pflastersteine mit unterschiedlicher Höhe μ_i", wobei jeder dieser Platten eine Realisierung einer im Allgemeinen unterschiedlichen Zufallsgröße X_i. Alle X_i sind normalverteilt mit Erwartungswert μ_i und Standardabweichung σ. Damit:

$$\begin{aligned} Y_2 &:= \sum_{i=1}^{10} X_i\,, \\ \sigma_{Y_2} &= \sqrt{10} \cdot \sigma\,. \end{aligned}$$

Die im Vergleich zu (1) geringere Standardabweichung liegt anschaulich gesprochen darin, dass sich die Abweichungen bei (2) statistisch gesehen eher ausgleich, wohingegen sich die Abweichungen bei (1) summieren.

Buffons Nadel

Aufg. 6

Unser Zufallsexperiment sei folgendes: wir lassen eine Nadel der Länge L auf ein liniertes Blatt mit Linienabstand a fallen. Die Zufallsvariable sei die Richtung der Nadel, gemessen als Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$. Keine Richtung soll bevorzugt angenommen werden, damit handelt es sich um eine stetige Gleichverteilung von α mit

$$p : \alpha \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0\,, \\ \frac{1}{2\pi}\,, & 0 \leq x < \pi\,, \\ 0\,, & 2\pi \leq x\,. \end{cases}$$

Wie viele Linien wird die Nadel im Mittel schneiden? Hinweis: berechnen Sie den Erwartungswert der Schnitthäufigkeit $s = L|\sin(\alpha)|/a$.

Lösung:

- Wenn $L < a$, dann ist $s < 1$, da die nadel die Linien höchstens einmal schneiden kann.
- Wenn $L \geq a$ ergibt sich der Mittelwert von s[a]

$$\langle s \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{L}{a} |\sin(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = \frac{L}{a\pi} \int_0^{\pi} \sin(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha = \frac{2L}{a\pi}\,.$$

Bemerkungen:

- Wenn man also $L = a$ wählt und die Nadel 100 mal fallen lässt, dann sollte sie im Mittel 64 mal eine Linie berühren.
- Das ist auch eine Methode, den Wert von π zu ermitteln - man braucht aber gute Augen und viel Zeit!

[a] $\alpha \in [0, 2\pi)$ gleichverteilt

Grundlagen der Statistik und Anwendungen Aufgaben mit Lösungen

Erklärungen und Beispiele, die zum Verständnis der Lösungswege hilfreich sind, finden Sie in Abschnitt 2.20.

Erwartungstreue von Schätzfunktionen

Aufg. 1

(a) Es seien X und Y Zufallsvariablen, die nicht unabhängig sind. Es gelte $E[XY] = \mu$, $10 < E[X] < \infty$ und $10 < E[X] < \infty$. Ist die Schätzfunktion

$$\hat{\mu} = \left(X - \frac{1}{n}\right)\left(Y - \frac{1}{n}\right)$$

erwartungstreu für μ?

(b) Das gewichtete arithmetische Mittel ist gegeben durch $\mu_g = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$. Die Größen ω_i sind die Gewichte. Es gelte $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$. Ist μ_g eine erwartungstreue Schätzfunktion für das Mittel μ der Grundgesamtheit?

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} E[\hat{\mu}] &= E\left[\left(X - \frac{1}{n}\right)\left(Y - \frac{1}{n}\right)\right] = E\left[XY - \frac{1}{n}\cdot Y - \frac{1}{n}\cdot X + \frac{1}{n^2}\right] \\ &= E\left[XY\right] - \frac{E[X] + E[Y]}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &= \mu - \frac{E[X] + E[Y]}{n} + \frac{1}{n^2} \neq \mu \end{aligned}$$

(b)

$$E[\mu_g] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \underbrace{E[x_i]}\,(*) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu = \mu \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \mu\,.$$

zu $(*)$: alle Stichproben x_i die zufällig aus der Grundgesamtheit herausgezogen werden, besitzen den Erwartungswert $E[x_i] = \mu$.

Schätzung von Erwartungswert und Varianz einer Stichprobe

Aufg. 2

Eine Stichprobe hat die Zahlen

$$(2.43, 2.37, 2.06, 2.71, 2.49, 1.91)$$

Schätzen Sie den Erwartungswert der Stichprobe (Stichprobenmittel) und die Stichprobenvarianz, die Varianz des Stichprobenmittels und die Standardabweichung des Stichprobenmittels.

Lösung:

Erwartungswert der Stichprobe	$\hat{X} = 2.33$
Stichprobenvarianz	$S^2 = 0.08618$
Varianz des Stichprobenmittels	$\sigma^2_{\hat{X}} = \frac{S^2}{6} = 0.01436$
Standardabweichung des Stichprobenmittels	$\sigma_{\hat{X}} = 0.12$

Anwendung: Schätzung der Erwartungswerts

Aufg. 3

Betrachten Sie ein Einheitsquadrat $Q = \{(x,y)|0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le 1\}$ und den Einheitskreis $K = \{(x,y)|x^2+y^2 = 1\}$. Approximieren Sie mit Hilfe einer Monte-Carlo-Integration den Wert des Integrals

$$\int_Q \frac{1}{(1+x^2+y^2)} \chi_K \, \mathrm{d}A \,.$$

Lösung: Exakter Wert ist $\pi \ln(2)$.

Anwendung: Binomialverteilung

Aufg. 4

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein AKW einen Supergau erlebt, ist nach Berechnungen der Reaktorsicherheitskommission 1 Mal in 10000 Jahren. Es werde angenommen, dass ein Supergau jederzeit passieren kann (zum Beispiel in Folge einer Naturkatastrophe) und damit liegt eine Gleichverteilung vor. Es laufen weltweit 400 Atomreaktoren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb von 25 Jahren mindestens eines dieser AKWs einen Supergau hat?

Lösung:
Körrekt müsste die Wahrscheinlichkeit mit der Poissionverteilung berechnet werden. Allerdings führt die Binomialverteilung zu demselben Ergebnis, weil die Poisson-Verteilung die Grenzverteilung der Binomialverteilung für große n und kleine p ist.
Interessiert sind wir an der Eintrittswahrscheinlichkeit des Ereignis I und das lautet: Mindestens ein AKW explodiert in den kommenden 25 Jahren.
Um $P(I)$ zu bestimmen, benötigen wir noch weitere Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten. Die Ereignisse lauten:

A_i AKW erlebt einen Supergau innerhalb 10000 Jahren.

B_i AKW erlebt einen Supergau innerhalb 1es Jahres.

C_i AKW erlebt einen Supergau innerhalb von 25 Jahren.

D_i AKW erlebt keinen Supergau innerhalb von 25 Jahren.

Nehmen wir also eine Binomialverteilung an. Für ein AKW gilt

- $\langle A_i \rangle = 1$
- $P(B_i) = \langle A_i \rangle / 100000 = 1/10000$
- $P(C_i) = 25 \cdot P(B_i) = 1/400$
- $P(D_i) = 1 - P(C_i) = 399/400$

Wir nehmen an die 400 AKWs sind unabhängig voneinander. Es gilt

$$P(D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_{400}) = \left(\frac{399}{400}\right)^{400} = 0,3674 \,.$$

Für das komplementäre Ereignis, dass mindestens ein AKW explodiert, gilt dann

$$P(I) = 1 - 0,3674 = 0,6326 \approx 63,26\%$$

Anwendung: Minimierung der Varianz

Aufg. 5

(a) Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $g : x \mapsto a$ so, dass gilt

$$\langle (Y - g(X))^2 \rangle \to \text{Minimum}$$

(b) Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion $g : x \mapsto a - bx$ so, dass gilt

$$\langle (Y - g(X))^2 \rangle \to \text{Minimum}$$

Lösung:

(a) Wir erwarten, dass g die konstante Funktion $g : x \mapsto \langle Y \rangle$ ist. Notwendige Bedingung für ein Minimum ist, dass die erste Ableitung des Ausdrucks $\langle (Y-a)^2 \rangle$ bezüglich seiner freien Variable a verschwindet, also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\langle (Y-a)^2 \rangle = 2\langle Y-a \rangle \overset{!}{0} \Rightarrow a = \langle Y \rangle$$

(b) Wir erwarten, dass g die lineare Regression sein wird. Um den Ausdruck der zwei Variablen a, b zu minimieren müssen beide partiellen Ableitungen verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}\langle (Y-a-bX)^2 \rangle = -2\langle Y-a-bX \rangle &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b}\langle (Y-a-bX)^2 \rangle = -2\langle YX-aX-bX^2 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen ergeben die Gleichungen

$$\begin{aligned} a + b\langle X \rangle &= \langle Y \rangle \,, \\ a\langle X \rangle + b\langle X^2 \rangle &= \langle XY \rangle \,. \end{aligned}$$

Und damit

$$b = \frac{\langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle}{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}, \quad a = \langle Y \rangle - b\langle X \rangle \,.$$