数学分析（甲）II（H）2023-2024春夏期末答案

by jayi0908

一、 定义：设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $\mathrm{U}(P_0)$ 上有定义，对 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in \mathrm{U}(P_0)$，
若 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 可表示为 $A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，
其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$A, B$ 为仅与 P_0 有关的常数，则称 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微。
证明：$f(x,0)=0$，$f'_x(x,0)=0$，$f(0,y)=y\arctan\dfrac{1}{|y|}$，$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\arctan\dfrac{1}{|y|}=\dfrac{\pi}{2}$
$\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) = \Delta y \arctan \dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \Delta y \arctan\dfrac{1}{\rho}$.

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad & \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta y(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2})}{\rho} \\
&= \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho\sin\theta}{\rho}\cdot\lim_{\rho\to 0}(\arctan\frac{1}{\rho}-\frac{\pi}{2}) = 0
\end{aligned}$$

从而 $\Delta z = f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y + o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微。

二、 1. 设 $x=r\cos\theta\cos\varphi$，$y=r\cos\theta\sin\varphi$，$z=r\sin\theta$，则

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = -r^2\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad & \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cdot r^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{8};
\end{aligned}$$

(2) $f(x)=\int_0^x\sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$，$f'(x)=\sqrt{\sin x}$，

$$\begin{aligned}
\text{故}\quad & \int_L x\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\pi x\cdot\sqrt{1+\sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi x\sqrt{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x \\
&= 4(x\sin x - x\cos x + \sin x + \cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi
\end{aligned}$$

(3) $P(x,y)=e^x\sin y-y^2$，$Q(x,y)=e^x\cos y$，设 $A(0,0)$，$B(\pi,0)$，$L':L+\overline{BA}$ 为闭合曲线，围成闭区域 D，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-2y$

由格林公式

$$\oint_{L'}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint_D 2y\mathrm{d}\sigma=-\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}2y\mathrm{d}y=-\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$$

在 AB 上 $P(x,y)=0$，$\mathrm{d}y=0$，故 $\oint_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$，故 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}$.

(4) 设 $x=r\cos\theta$，$y=\cos\theta$，$z=r$，$0\le r\le 1$

则 $\frac{\partial(z,x)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r\sin\theta$，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & -r\cos\theta\end{vmatrix}=r$，从而为负向。

$$\begin{aligned}\text{故}\quad &\iint_S y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=-\int_0^{2\pi}\int_0^1(r^2\sin^2\theta\cdot(-r\sin\theta)+(r+1)r)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta-\frac{5}{6}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\sin\theta(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta-\frac{5\pi}{3}=-\frac{5\pi}{3}.\end{aligned}$$

三、 $f(x-z,y-z)=0$，故 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1\cdot(1-\dfrac{\partial z}{\partial x})+f_2\cdot(-\dfrac{\partial z}{\partial x})=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_1\cdot(-\dfrac{\partial z}{\partial y})+f_2\cdot(1-\dfrac{\partial z}{\partial y})=0$，其中 f_1,f_2 分别为 f 两个分量的偏导数。

两式相加得：$(f_1+f_2)(1-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y})=0$，且由条件，$f_1+f_2\neq 0$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

四、 即求平面上一点 (x,y,z)，使得 $f(x,y,z)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ 取到最小值。

用拉格朗日乘数法，设 $F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}+\lambda(ax+by+cz+d)$，

有 $F_x=\dfrac{x-x_0}{f(x,y,z)}+\lambda a$，$F_y=\dfrac{y-y_0}{f(x,y,z)}+\lambda b$，$F_z=\dfrac{z-z_0}{f(x,y,z)}+\lambda c$，$F_\lambda=ax+by+cz+d$。

令 $F_x=0$，$F_y=0$，$F_z=0$，$F_\lambda=0$，则有 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}:=t$，

故 $x=x_0+at$，$y=y_0+bt$，$z=z_0+ct$。

代入 $F_\lambda=0$ 得 $a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$，即 $t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$。

故 $f(x,y,z)=\sqrt{(at)^2+(bt)^2+(ct)^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot|t|=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 为所求距离。

五、 Dirichlet 判别法：

(1) $\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致有界；

(2) $\forall x\in I$，$\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 单调；

(3) $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上一致收敛于 0.

满足这三点则有 $\sum a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛。

证明：$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}(\sin{(n+\frac{1}{2})x}-\sin\frac{x}{2})\le\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}-1.$

故 $\sum\cos kx$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致有界。

$\{\dfrac{n}{n^2+1}\}=\{\dfrac{1}{n+\frac{1}{n}}\}$ 单调趋于 0，且对于以 x 为变元的函数列相当于常数列，故一致收敛于 0.

故由 Dirichlet 判别法，$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n\cos kx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛。

六、 $T=2l=2\Rightarrow l=1$，故

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1x^2\cos n\pi x\mathrm{d}x\\&=(\frac{1}{n\pi}x^2\sin n\pi x+\frac{2}{n^2\pi^2}x\cos n\pi x-\frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x)|_0^1\\&=\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1x^2\sin n\pi x\mathrm{d}x\\&=(\frac{-1}{n\pi}x^2\cos n\pi x+\frac{2}{n^2\pi^2}x\sin n\pi x+\frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi x)|_0^1\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\frac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1).\end{aligned}$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\cos n\pi x+(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\pi}+\dfrac{2}{n^3\pi^3}((-1)^n-1))\sin n\pi x)$，

在 $x=\pm1$ 时收敛于 $\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

七、 Cauchy 收敛准则：对于常数项级数 $\sum x_k$，其收敛的充要条件为：对 $\forall\varepsilon>0$，存在 N，使得对 $\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$。

证明：由条件，$\forall\varepsilon_1>0,\exists N_1,\forall n>N_1,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon_1$；

$\forall\varepsilon_2>0,\exists N_2,\forall n>N_2,\forall p\in\mathbb{N}_+$，有 $|b_{n+p+1}-b_{n+p}|+|b_{n+p}-b_{n+p-1}|+\cdots+|b_{n+2}-b_{n+1}|<\varepsilon_2$。

则不难知存在 $M>0$ 与 N_3，使得对 $\forall n>N_3$，有 $|b_n|<M$。

对 $\forall\varepsilon>0$，取 ε_1、ε_2 使得 $\varepsilon_1(M+\varepsilon_2)=\varepsilon$，取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则对 $\forall n>N$，$\forall p\in\mathbb{N}_+$，

有：

$$
\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}| \\
\le\ & |b_{n+1}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})|+|(a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{n+p})(b_{n+2}-b_{n+1})| \\
&\quad +|(a_{n+3}+\cdots+a_{n+p})(b_{n+3}-b_{n+2})|+\cdots+|a_{n+p}(b_{n+p}-b_{n+p-1})| \\
<\ & \varepsilon_1(|b_{n+1}|+|b_{n+2}-b_{n+1}|+\cdots+|b_{n+p}-b_{n+p-1}|) \\
<\ & \varepsilon_1(M+\varepsilon_2)=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

由 Cauchy 收敛准则，$\sum a_nb_n$ 收敛。

八、

$$
\frac{\mathrm{d}g_\theta}{\mathrm{d}t}=f_1\cos\theta+f_2\sin\theta=0,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2g_\theta}{\mathrm{d}t^2}&=f_{11}\cos^2\theta+2f_{12}\cos\theta\sin\theta+f_{22}\sin^2\theta \\
&=\frac{f_{11}+f_{22}}{2}+\frac{f_{11}-f_{22}}{2}\cos 2\theta+f_{12}\sin 2\theta>0.
\end{aligned}
$$

上式对 $\forall\theta\in[0,2\pi)$ 成立，故 $f_1=f_2=0$，且由辅助角公式，$\dfrac{f_{11}+f_{22}}{2}-\sqrt{(\dfrac{f_{11}-f_{22}}{2})^2+f_{12}^2}>0$
即 $f_{11}\cdot f_{22}-f_{12}^2=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22}\end{vmatrix}>0$，且代入 $\theta=0$ 到 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\theta}{\mathrm{d}t^2}$ 中，得 $f_{11}>0$，
利用 Hesse 矩阵的正定性，得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处有极小值。