



绕任意物体的无升力流动（下）

上篇主要对绕任意形状无升力流动公式进行了说明，但也引出了一个问题，那就是下式中的 $I_{i,j}$ 该如何计算

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} I_{i,j} + V_\infty \cos \beta_i = 0$$

我们先看看 $I_{i,j}$ 的积分形式

$$\int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j = \int_j \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial n_i} ds_j$$

由链式法则得

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial n_i} = \frac{1}{2r_{ij}} \left[2(x_i - x_j) \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_i} - \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) + 2(y_i - y_j) \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_i} - \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

由于下标不同，上述三项为 0，因此

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial n_i} = \frac{1}{2r_{ij}} [2(x_i - x_j)]$$

整理得

$$I_{i,j} = \int_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} ds_j$$

其中 r_{ij} 为

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$x_j = X_j + \cos \varphi_j$$

$$y_j = Y_j + \sin \varphi_j$$

X_j, Y_j 分别为 j 处控制点坐标，将 X_j, Y_j 代入 $I_{i,j}$ 表达式

$$x_i - x_j = x_i - X_j - \cos \varphi_j$$

$$y_i - y_j = y_i - Y_j - \sin \varphi_j$$

使

$$Cx = -\cos \varphi_j$$

$$Cy = -\sin \varphi_j$$

$$Dx = x_i - X_j$$

$$Dy = y_i - Y_j$$

则

$$I_{i,j} = \int_j \frac{Cx s_j + Dx}{s_j^2 + 2As_j + B}$$

其中 s_j 为面板长度。

对其进行积分

$$I_{i,j} = \frac{Cx}{2} \left[\ln\left(\frac{s_j^2 + 2As_j + B}{B}\right) \right] + \frac{Dx - ACx}{E} \left[\tan^{-1}\left(\frac{s_j + A}{E}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{A}{E}\right) \right]$$

其中

$$A = -(x_i - X_j) \cos \varphi_j - (y_i - Y_j) \sin \varphi_j$$

$$B = (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2$$

$$E = \sqrt{B - A^2}$$

至此，绕任意物体的无升力流动公式推导完毕。

对上述公式进行编程时基本可计算绕简单外形的流动，这是因为简单外形轮廓可轻易找到函数解析式。但对于翼型而言，有两种解决方案，第一种是直接读取现有的翼型坐标数据，将每个数据视为一个控制点，但这样做，面元数量是固定的。第二种是读取之后，采用多项式对翼型进行拟合，这样面元的数量便可以自行调整。

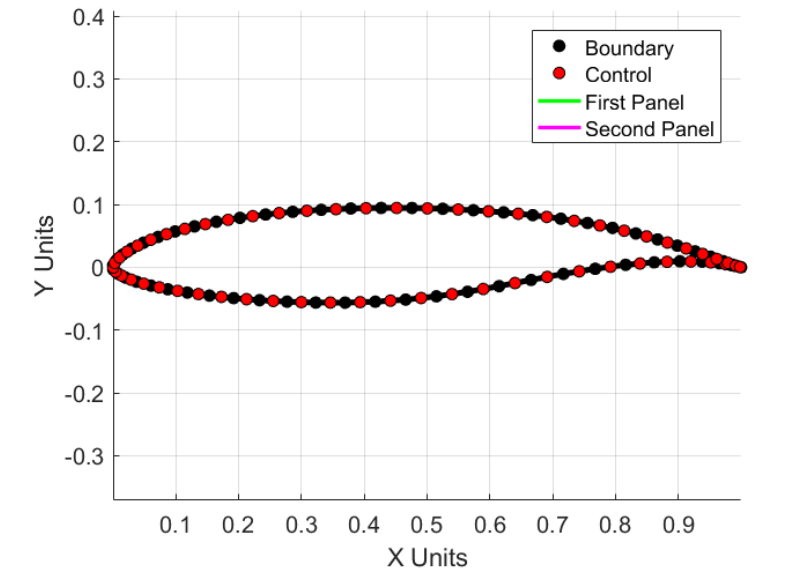


Figure 1 翼型边界条件

一般计算完后，我们还希望得到一些可视化的图形，让我们理解并优化目标翼型。这里介绍一种后处理方式，可以获得流线和各种云图。

1、首先在需要观察的区域生成网格点，如下图所示

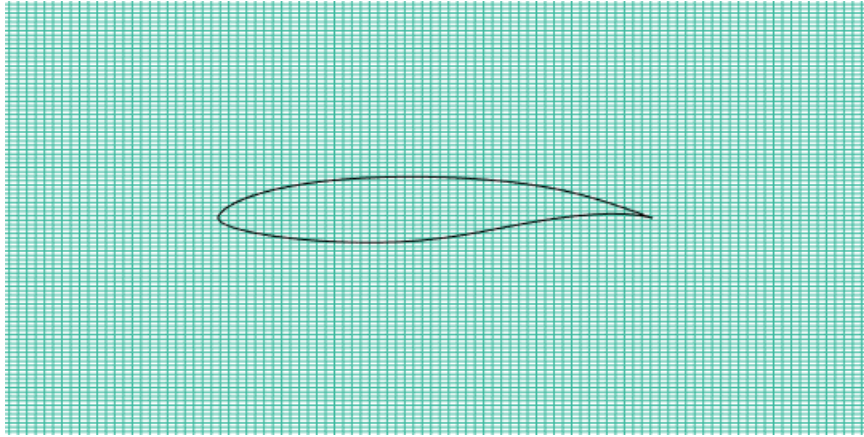


Figure 2 翼型周围网格节点

- 2、计算所有节点处的速度分量，压强值。
- 3、将翼型内部节点的速度分量、压强设置为 0。
- 4、显示流线图、云图。

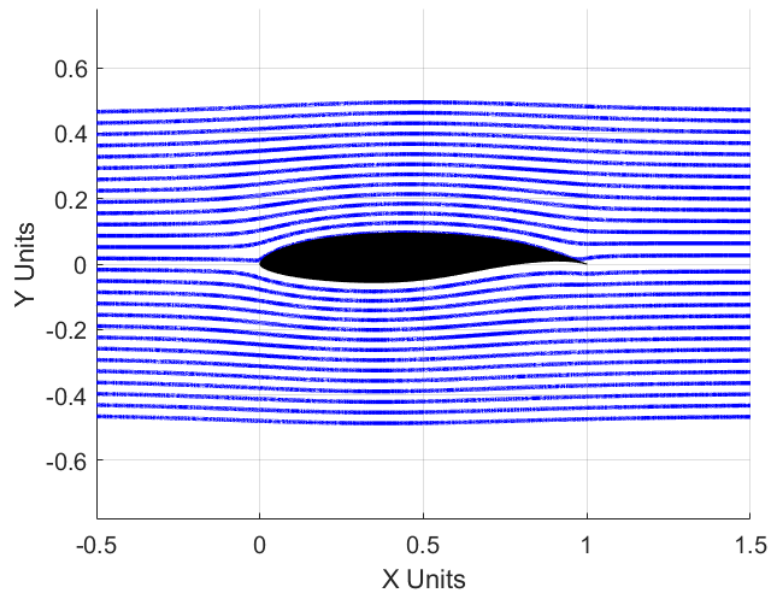


Figure 3 流线图

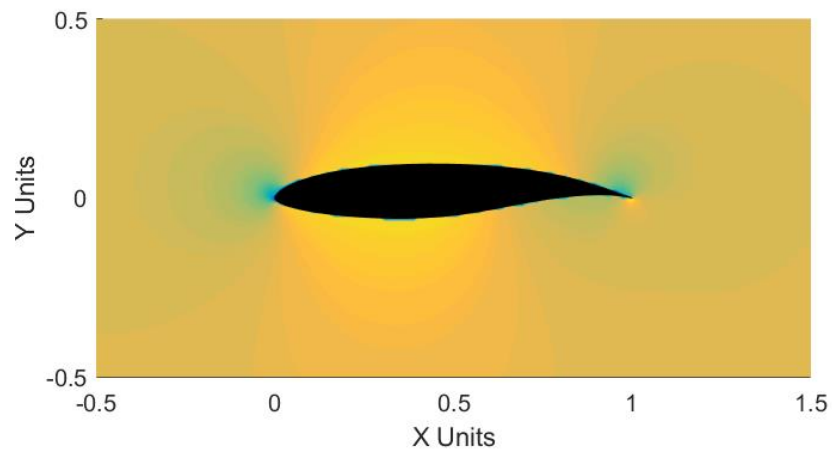


Figure 4 速度云图

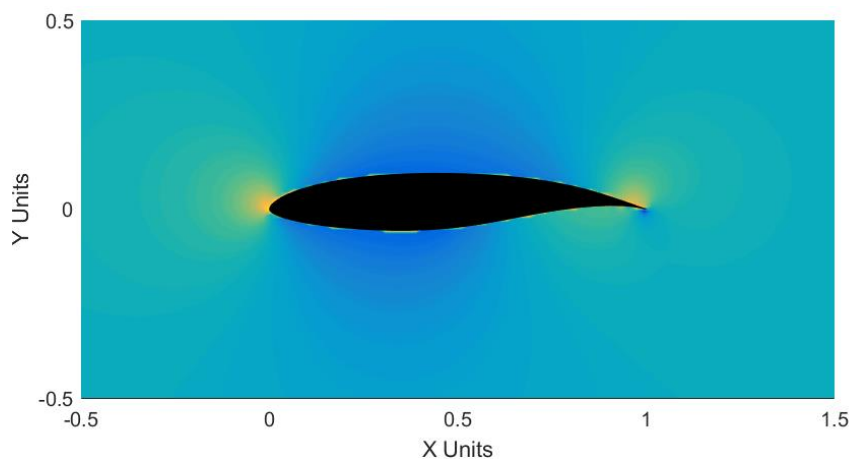


Figure 5 压力云图

附录：

边界点坐标	(x,y)
控制点坐标	(x_c,y_c)
来流迎角	α
面元法线与来流夹角	β
面元切线与来流夹角	φ
面元长度	s
控制点间距	r

1 变量名

相关 Matlab 代码可以在飞视科技官网下载。

特别鸣谢：

本文在编写时参考了 **Josh** 的教学视频，如有对他的视频感兴趣可以去访问它。

<https://www.youtube.com/user/JoshTheEngineer/featured>