

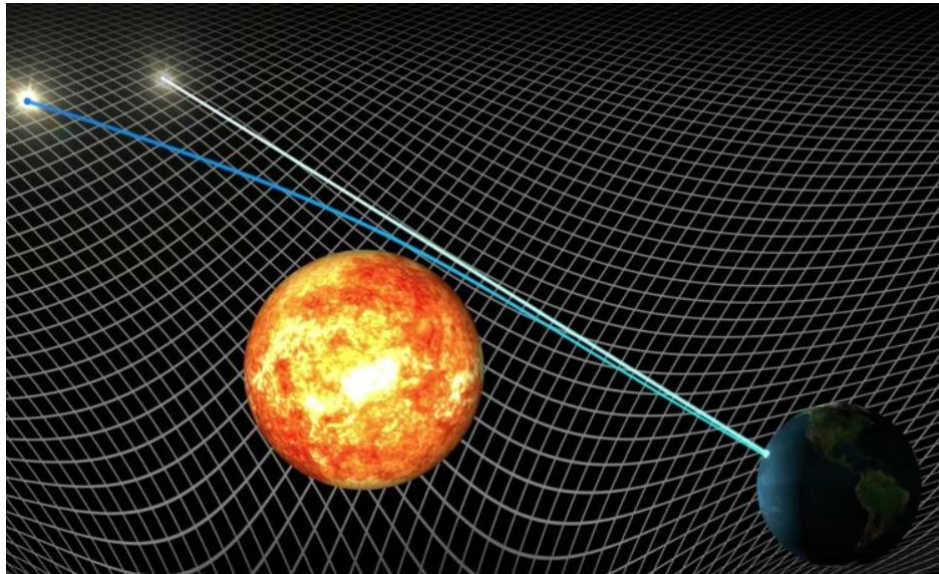


绕任意物体的无升力流动（上）

物质决定空间如何弯曲，空间决定物质如何运动。

---爱因斯坦

我们将时间轴移动到 1704 年，支持光粒说的牛顿认为：大质量的物体可能会弯曲光线，这个预言在爱因斯坦提出广义相对论后被理论验证，1976 年福马伦特和什拉梅克利用甚长基线干涉技术，以 1% 的精度证实了广义相对论的结果。



1 被质量弯曲后的光线

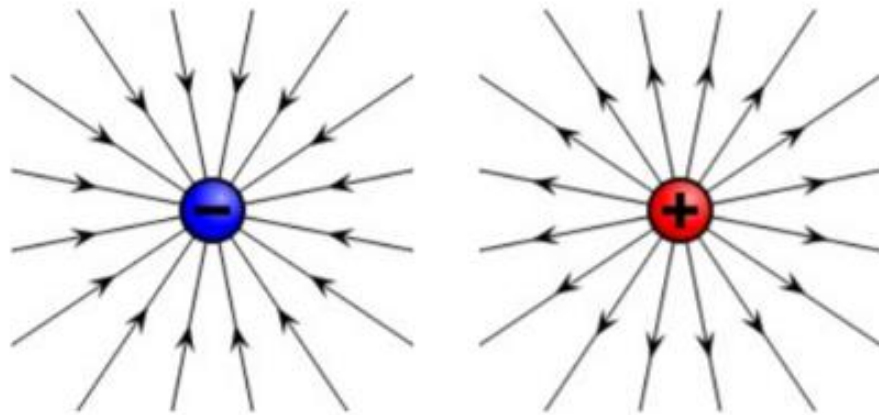
我之所以在流体力学的篇幅上添加这段小插曲，是因为大家都熟悉黑洞、白洞，且有质量的物体会弯曲光线已成事实。流体力学中引入点汇和点源完美的解决了无黏流问题，而它们恰好和黑洞、白洞有些相似之处。

概念预热

点源（汇）的概念：

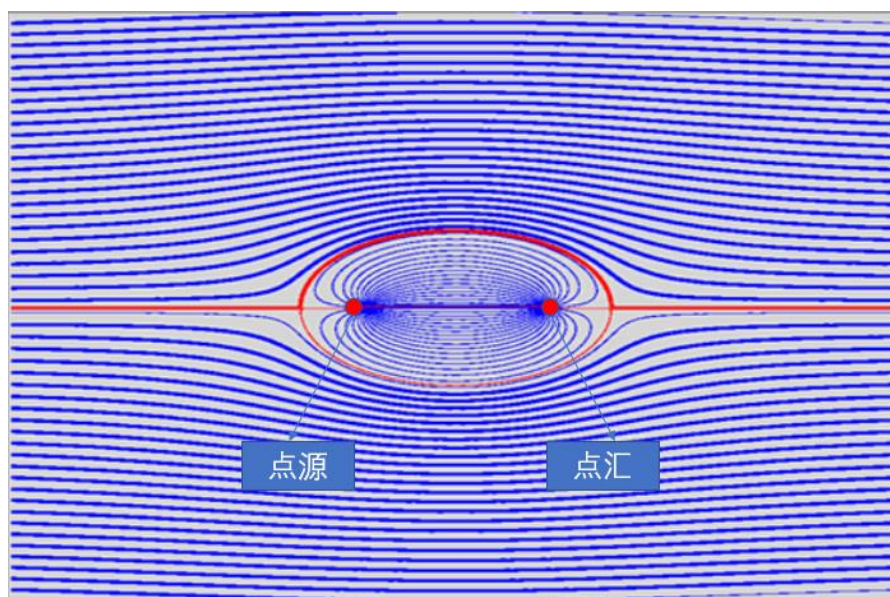
假设有一个二维的不可压缩流动，如下图所示，其流动的流线有四面八方散开，称为

点源流，这种流动只有径向流动，没有周向流动，其速度大小与距源点的径向距离成反比。因此离源点的距离相等处，速度就相等。点汇是一种负源流动。



2 点汇与点源

合理的放置源与汇，就可以得到流过椭圆型的流线图



3 流过兰金椭圆的流线

其实源和汇还与电场里面的正负带点粒子相似，它们也有“电势”。名为速度势 ϕ 。对于简单的形状或许只需要布置几个点源或点汇便可满足其流动，但对于复杂的形状而言，点源与点汇的位置就需要进行计算后确定。

在进行下一步之前，需要说明三条公理：

1、无旋、不可压缩流动的拉普拉斯方程是一个二阶线性偏微分方程，表达式为

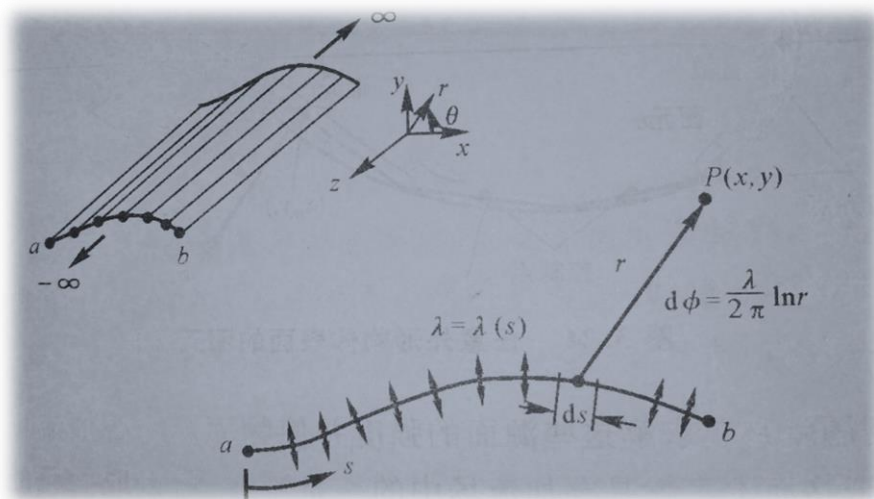
$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

根据已有的数学理论可以证明线性方程的解满足叠加原理，由速度分量与速度势函数的关系得知速度分量也满足线性叠加原理。

- 2、对于无黏流动，物面上的速度不为零，且物面上的气流不能进入内部，所以物面上的速度必须与物面相切。因此垂直于物面的法向速度为零

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{n} = 0$$

- 3、对点源（汇）进行拓展得到线源（汇）进一步推广为源面。（如不理解可参考解决悬链线问题时曾将铁链理想化为有密度的线）

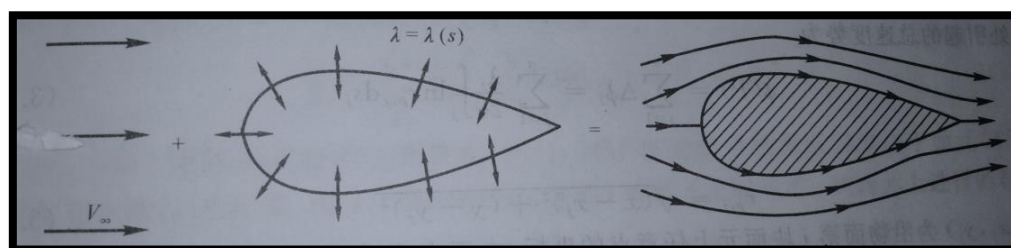


4 源面

步入正题

前面提到过，对于复杂的外形，很难事先知道利用哪些基本流动的叠加才能得到此复杂外形的流场，现在引出一种求得流场奇异点并结合均匀流动的方法，来描述任意形状物体扰流的流场，这里只限于无升力流动。

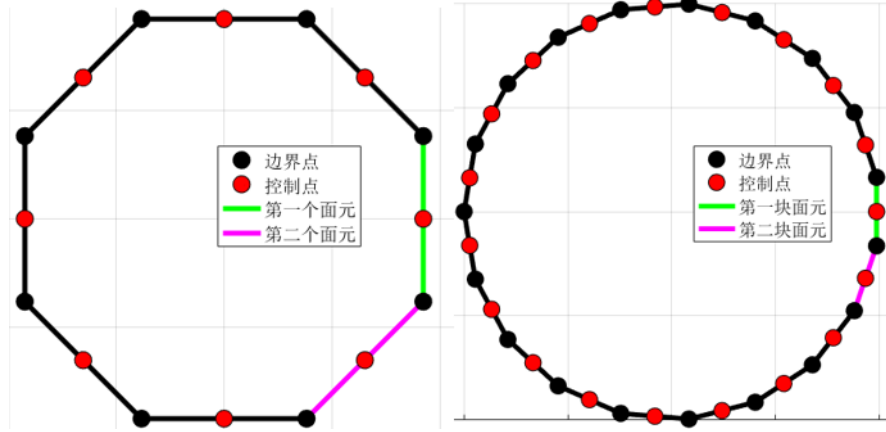
20 世纪 60 年代后期，基于高速计算机的数值计算方法的研究在空气动力学领域逐渐发展起来。尤其是基于点源和点涡面元技术的势流函数数值求解方法，已经在低速流动方面取得了比较成功的应用。本文将详细介绍数值面元法的基本思想，并用这种面元法讨论在任意形状的无升力扰流问题。



5 均匀流与源面叠加：给定外形的物体扰流

现在不妨假设，翼型表面布满了源线和汇线，当这些源面的强度合理时，会得到上图所示的流线。

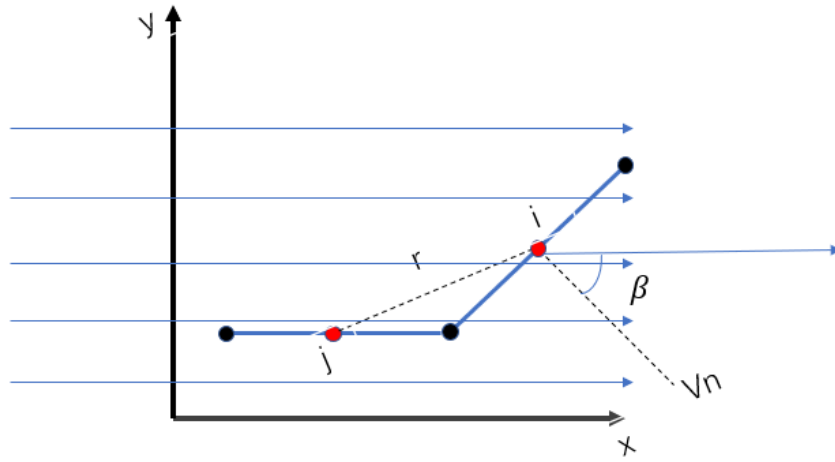
我们先尝试计算经过二维圆柱的扰流



6 不同面元数量的模型

第 i 个控制点 (x_c, y_c) 处由第 j 块面元引起的速度势 $\Delta\phi$ 为

$$\Delta\phi_i = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{i,j} ds_j$$



7 示意图

垂直于第 i 块面元的自由来流法向分量为

$$V_{\infty, n} = V_{\infty} \cdot n_i = V_{\infty} \cos \beta_i$$

第 i 块面元对第 i 个 (本身) 控制点的距离为 0, 因此导数值为 $\lambda_i/2$, 所有面元对某一控制点的法向速度分量为

$$V_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j$$

由流场边界条件得知, 某控制点处自由来流法向分量与所有面元对其产生的法向速度分量和为 0, 则有

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j + V_{\infty} \cos \beta_i = 0$$

如果用 $I_{i,j}$ 表示控制点在第 i 块面元上时在第 j 块面元上进行的积分, 所以上式可写为

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} I_{i,j} + V_\infty \cos \beta_i = 0$$

这便是关于 n 个未知量 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ 的线性代数方程。它表示控制点在第 i 块面元上的流场边界条件。令 $i=1, 2, \dots, n$ ，得到所有面元控制点处的流场边界条件，从而得到 n 个关于 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ 的线性方程组。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & \frac{1}{2} & a_{n+3} & \dots & a_{2n} \\ a_{2n+1} & a_{2n+2} & \frac{1}{2} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n^2+1} & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_\infty \cos \beta_1 \\ -V_\infty \cos \beta_2 \\ -V_\infty \cos \beta_3 \\ \dots \\ -V_\infty \cos \beta_n \end{pmatrix}$$

计算出各个面源的强度 λ_n 后，便可以用相同的方法计算出切向速度。

由压力系数与速度的关系表达式，可得到第 i 个面元控制点处的压力系数

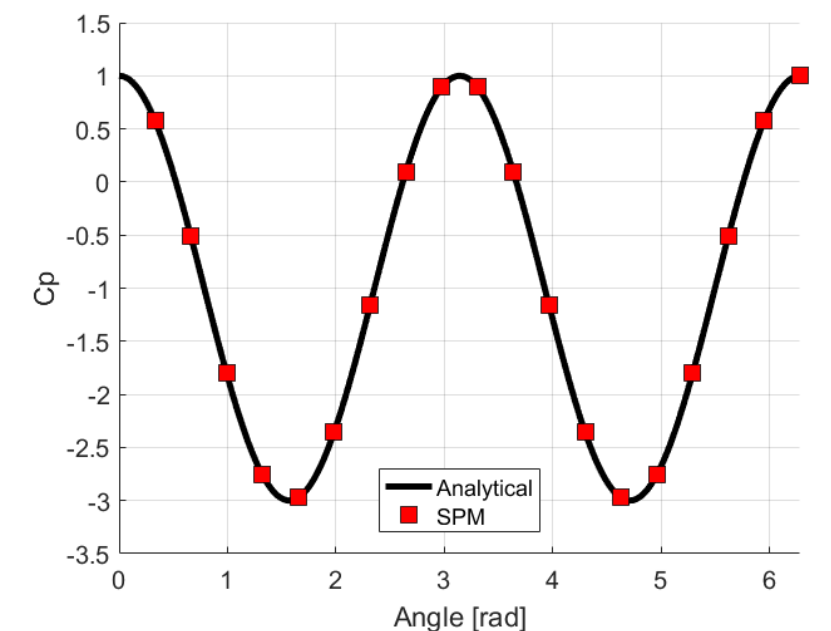
$$c_{p,i} = 1 - \left(\frac{V_i}{V_\infty}\right)^2$$

结果验证

不可压缩无黏流动绕二维圆柱流动表面压力系数理论解为

$$c_p = 1 - 4\sin^2\theta$$

采用 Matlab 编写计算程序得出的结果与其进行对比



8 对比结果

可见面元法适合求解此类问题

参考文献：

空气与气体动力学引论……………【李凤蔚】

附录：

边界点坐标	(x,y)
控制点坐标	(x_c,y_c)
来流迎角	α
面元法线与来流夹角	β
面元切线与来流夹角	φ
面元长度	s
控制点间距	r

9 变量名

特别鸣谢：

本文在编写时参考了 Josh 的教学视频，如有对他的视频感兴趣可以去访问它。

<https://www.youtube.com/user/JoshTheEngineer/featured>