Análisis Numérico

Trabajo Práctico 6

Segundo cuatrimestre 2025

Instrucciones:

- Fecha de presentación: 14/11/25.
- Los grupos se conforman de 4 o 5 personas.
- Utilice todas las herramientas informáticas, lenguajes o herramientas en línea que considere convenientes (Mathematica, Wolfram Alpha, Qucs, Xcos, Sympy, Scilab, Octave, Scipy, Matplotlib, ImageJ, etc).
- Elabore un informe lo mas detallado posible, mencionando los problemas con los que se encontró intentando obtener las respuestas a las consignas.
- Subir al campus en un archivo comprimido único, **el informe en formato .pdf** y cualquier otro archivo que considere útil, como códigos u otros.
- Elaborar un video de no más de 3 minutos de duración sobre los aspectos más importantes del proceso y las conclusiones del trabajo. Subir el video al grupo de TEAMS.

Flujo en medios porosos: la ecuación de Richards

El transporte de líquidos en sustratos porosos finos es fundamental en procesos de impresión, secado, reciclaje y análisis biomédicos portátiles. A diferencia de grandes acuíferos, en papel la escala espacial es pequeña, la gravedad suele ser despreciable frente a fuerzas capilares y el fenómeno dominante es la redistribución capilar y la difusión no lineal de humedad. Modelar estos fenómenos permite: (i) predecir la saturación localizada, (ii) optimizar procesos de secado y tratamientos superficiales, y (iii) validar técnicas numéricas aplicables a otros medios porosos.

La ecuación de Richards describe el movimiento de agua en medios porosos insaturados combinando la conservación de masa con una ley de Darcy dependiente de la saturación y de la presión capilar.

En notación usual, con θ siendo el contenido volumétrico de agua (saturación volumétrica), h la altura capilar (presión capilar expresada en unidades de longitud), y K la conductividad hidráulica (que depende de h y θ), la forma general (sin incluir la gravedad) es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \big(K(h)\, \nabla h\big). \tag{1}$$

Relacionando θ con h mediante la función retención $\theta(h)$ (modelo constitutivo), definimos la capacidad capilar

$$C(h) \equiv \frac{d\theta}{dh}. \tag{2}$$

Usando la regla de la cadena $\partial\theta/\partial t = C(h)\, \partial h/\partial t$, la ecuación en términos de h es

$$C(h)\, \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot \big(K(h)\, \nabla h\big). \tag{3}$$

Alternativamente, se puede escribir una formulación directa en la variable θ. Definiendo la difusividad efectiva

$$D(\theta) \equiv K(h(\theta))\, \frac{dh}{d\theta} = \frac{K(h)}{C(h)}, \tag{4}$$

se obtiene la forma de ecuación de difusión no lineal

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot \big(D(\theta)\, \nabla \theta\big). \tag{5}$$

Esta expresión es particularmente útil cuando se implementa en variables de saturación θ (la difusividad D puede depender no linealmente de θ).

Actividades

a) Suponga una difusividad constante $D(\theta) = D_0$ y verifique la implementación de diferencias finitas en 1D contra una solución analítica.

b) Resuelva en diferencias finitas 1D con algún modelo constitutivo de su elección (Brooks–Corey, van Genuchten, etc.) obteniendo los parámetros de la tabla proporcionada y valide con la transformación de Boltzmann que transforma el problema en una EDO. Para la EDO use un integrador Runge–Kutta de paso adaptativo. Comparar perfiles y, posiciones de frente.

c) Verifique una implementación de diferencias finitas en 2D con D constante contra una solución analítica (p. ej. solución en un rectángulo con condiciones de Dirichlet/Neumann conocidas). Mostrar convergencia en norma L^2 al refinar mallas 2D.

d) Resuelva en 2D una gota circular verifique la solución comparando con la solución 1D en coordenadas cilíndricas (suponiendo simetría radial). Trate el término singular en $r = 0$ con cuidado (condición de simetría $\partial\theta/\partial r|_{r=0} = 0$) y compare perfiles radiales.

e) Resuelva una gota elíptica (relación de ejes 2:1) usando la discretización completa en 2D y discuta las diferencias frente al caso circular.

f) En todos los casos aclare la discretización espacial y temporal utilizada. Informe el costo computacional en todos los casos.

Table 1: Parámetros estimados para papel comercial Whatman 1 para diferentes modelos de $D(\theta)$

Model	Parameters		χ^2_ν
Brooks and Corey	n	0.2837	691
	l	4.795	
	θ_r	2.378×10^{-5}	
	K_s/α	$3.983 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$	
Van Genuchten	n	8.093	1.7
	l	2.344	
	θ_r	0.004 943	
	K_s/α	$2.079 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$	
LETx + LETs	L_w	1.651	1.0
	E_w	230.5	
	T_w	0.9115	
	L_s	0.517	
	E_s	493.6	
	T_s	0.3806	
	S_{wir}	0.016 80	
	K_sP_{cir}/γ	$8.900 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$	
LETd	L	0.004 569	1.5
	E	12 930	
	T	1.505	
	S_{wir}	0.028 36	
	D_{wt}	$4.660 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$	