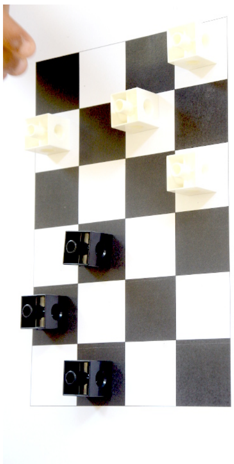
Tâche complexe dans le champ additif en CE 2 : calcul de score

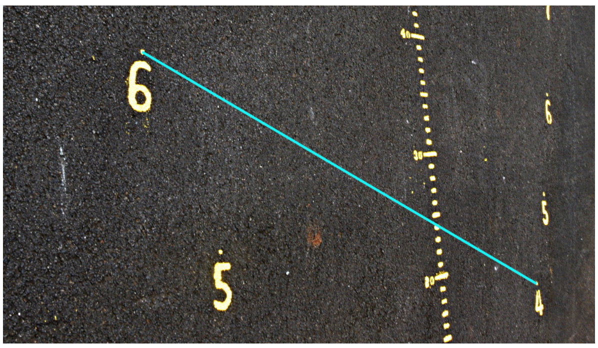
Le jeudi 2 février 2023, une expérience a été menée en CE2 b à l'école Aristide Briand du Tampon : les élèves, après avoir appris les règles du jeu *alquerkonane*, ont découvert une manière de départager des joueurs nombreux ayant joué plusieurs parties.

Présentation du jeu

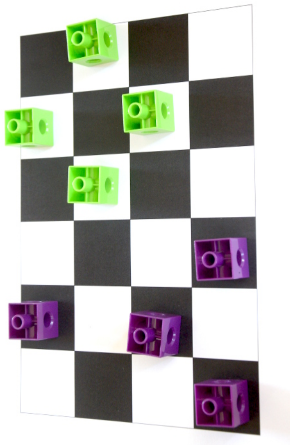
Le jeu alquerkonane se joue sur un damier comme celui-ci (un pion noir a déjà été mangé) :



Le damier a une forme rectangulaire ce qui permet de mettre en acte une multiplication : combien y a-t-il de cases en tout ? Certains élèves comptent jusqu'à 24, d'autres comptent les 6 cases d'une des colonnes puis multiplient par le nombre 4 de colonnes. La plupart n'essayent pas de répondre, ou n'ont pas le temps (ou n'osent pas). D'ailleurs la vérification a pu être faite lors de la récréation, sur le nomogramme qui a été inauguré à cette occasion :



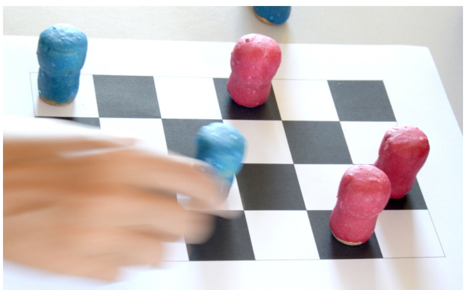
Même la division est mise en œuvre puisqu'une fois qu'on sait qu'il y a 24 cases en tout, on cherche combien (la moitié) sont noires. C'est également l'occasion de réactiver les coordonnées, les colonnes étant nommées A, B, C et D et les lignes, numérotées de bas en haut (de 1 à 6). Par exemple ci-dessous les pions verts sont sur les cases C1, B2, D2 et C3, alors que les pions mauves sont sur les cases A4, B5, D5 et A6 (dans la suite, en général, la case en bas à gauche est la A1, ce qui veut dire que les noirs sont en bas) :



Voici la disposition des cases avec leurs coordonnées :

A6	B6	C6	D6
A5	B5	C5	D5
A4	B4	C4	D4
A3	B3	C3	D3
A2	B2	C2	D2
A1	B1	C1	D1

On a évité cette fois-ci de faire manipuler des pions trop plats. La hauteur facilite la préhensibilité du pion, comme aux échecs. Une table de jeu a même eu droit à des pions galbés en porcelaine froide :



Une fois rappelée la notation algébrique du jeu d'échecs, il a été possible de dialoguer sur les mouvements possibles. Des questions de ce genre ont été posées (on suppose que les pions noirs sont initialement en A2, B1, C2 et D1 et vont donc vers le haut, et que les pions blancs sont initialement en A5, B6, C5 et D6 et vont vers le bas du tableau) :

- Un pion noir est en B3, où peut-il aller ? (réponse : en A4 ou C4)
- Un pion noir est en A4, où peut-il aller ? (réponse : en B5)
- Un pion blanc est en B4, où peut-il aller ? (réponse : en A3 ou en C3)
- Un pion blanc est en D4, où peut-il aller ? (réponse : en C3)
- Un pion noir est en A3, où peut-il aller ? (réponse : nulle part, un pion noir ne peut être sur une case blanche et la A3 est blanche)
- Un pion noir est en B3, il y a un pion blanc en C3, où va le pion noir s'il prend le pion blanc ? (réponse : en D3 sauf si elle est occupée, dans ce cas la prise est impossible)
- Un pion noir est en B3, il y a un pion blanc en B2, où va le pion noir s'il prend le pion blanc ? (réponse : en B1 si elle est inoccupée)

Les pions sont initialement placés sur les deux rangées les plus proches du joueur. Comme les pions doivent être sur des cases de leur propre couleur, et que le damier comporte 4 colonnes, il y a de ce fait 4 pions par joueur.

Rappel des règles du jeu alquerkonane :

> Chacun son tour, les joueurs déplacent un de leurs pions, soit en avançant en diagonale (d'une case) soit en prenant un pion adverse en sautant par-dessus celui-ci, et à condition que la case d'arrivée soit libre. La prise n'est pas obligatoire. La prise multiple n'est pas autorisée. Lorsqu'un pion arrive au bout, il n'est pas promu (il reste juste bloqué là). Le premier qui ne peut plus bouger aucun de ses pions (par exemple, parce qu'il n'a plus de pion) a perdu.

Remarque : pour prendre un pion adverse, on commence par vérifier que le pion adverse est juste à côté (ou devant ou derrière ; voir *Questionner l'espace et le temps* dans le programme de cycle 2), et ensuite on regarde la case qui est symétrique du pion par rapport au pion adverse. Si cette case est vide, on y déplace le pion, et ensuite on n'omet pas de retirer le pion adverse (ancien centre de symétrie) du plateau. La notion de symétrie centrale n'étant pas au programme de cycle 2, il est concevable que des élèves éprouvent des difficultés à prendre un pion sans s'y être entraînés auparavant. La pratique du jeu de dames traditionnel, du solitaire ou de « saute-mouton » peuvent aider à concevoir ce geste complexe, mais aucun des élèves questionnés ne semble connaître ces jeux.

Avant la récréation, les élèves ont joué les uns contre les autres pour mieux connaître le jeu. Cela leur a permis de constater que

- il y a un gagnant à la fin du jeu (les parties nulles n'existent pas),
- ce n'est pas forcément celui qui joue en premier qui gagne,

- on peut gagner sans avoir pris tous les pions adverses (il suffit qu'ils soient bloqués),
- le jeu est l'éloge de la lenteur (aller trop vite au bout, peut faire perdre)
- il n'est pas toujours avantageux de prendre un pion adverse,
- un pion qui est au bord du damier (colonne A ou D) n'est pas menacé par son voisin qui est sur la même ligne (colonne B ou D),
- un pion n'est pas menacé directement s'il est entre deux pions adverses (par exemple un pion noir en C4, entre 2 pions blancs en C3 et C5),
- lorsque deux pions sont à distance de cavalier, le premier qui s'approche de l'autre est menacé.

Mais la pratique du jeu, surtout avec ce damier rectangulaire, a permis de constater que parfois lorsqu'un joueur a gagné, c'est de beaucoup : l'autre joueur est bloqué, alors que lui aurait pu bouger encore plusieurs de ses pions, et plusieurs fois.

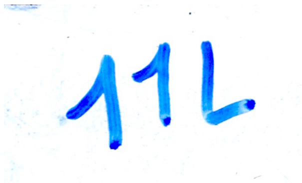
Par exemple ici :

Les blancs ont gagné puisqu'ils ont mangé tous les pions noirs, mais les blancs pouvaient encore bouger 10 fois :

- le pion qui est en D2 va en C1 (1 mouvement)
- le pion qui est en A3 va en B2 puis en A1 (2 mouvements)
- le pion qui est en A5 va en B4, puis A3, puis B2 (3 mouvements)
- le pion qui est en B6 va en C5 puis D4 puis C3 puis D2 (4 mouvements)

On considère donc que les blancs avaient 1+2+3+4=10 mouvements d'avance sur les noirs. Ils ne gagnent pas de justesse mais avec en plus cette avance de 10 points.

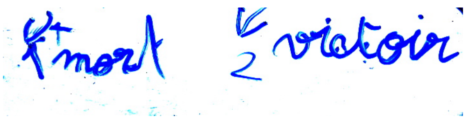
Dans ce cas on propose l'algorithme d'arbitrage suivant, proche de celui de Borda : la gagnante a déjà gagné un point puisqu'elle est gagnante, et elle y ajoute les 10 mouvements d'avance, ce qui fait qu'elle marque 11 points sur cette victoire :



Notion de score

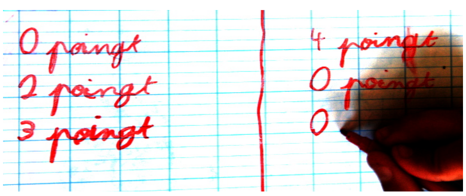
Score pour une partie

Après la récréation, a été débuté un tournoi entre tous les élèves de la classe, avec décompte des points selon cette méthode. Ceci dit certains élèves préféraient compter le nombre de victoires de chacun dans une répétition d'un grand nombre de parties :



Leur algorithme est chronophage et ne départage pas bien car la situation décrite ci-dessus avec 10 mouvements d'avance n'est pas bien valorisée : la championne qui a réussi, ne serait-ce qu'une fois, à gagner de 10 mouvements d'avance, a du mérite ! De plus, le but inavoué de l'activité était de faire pratiquer des additions d'entiers relatifs, et pas seulement du dénombrement de victoires.

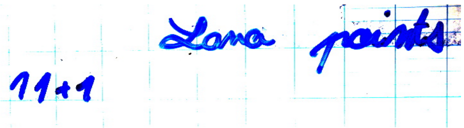
D'autres joueurs ont compté à chaque victoire, le nombre de pions qu'ils avaient pris à l'adversaire :



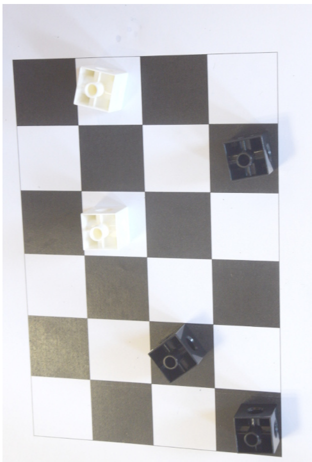
Dans l'exemple ci-dessus, la championne n'aurait gagné que 5 points (1 parce qu'elle a gagné, plus 4 parce qu'elle a pris les pions de l'adversaire). Cet algorithme n'a pas été retenu. On lui a préféré le suivant :

Le gagnant remporte un point parce qu'il est gagnant, plus le nombre de mouvements qu'il aurait encore pu effectuer.

On a parlé de commencer par compter les mouvements, et ensuite ajouter un point de bonus parce qu'on a gagné, mais cela a eu pour effet que certains élèves rajoutent le bonus à chaque fois qu'un pion est arrivé au bout (cela aurait donné 14 points à la championne ci-dessus), ou que chaque joueur remporte autant de points qu'il lui restait de mouvements, plus un bonus d'un point pour le gagnant (ce qui est essentiellement la définition « maths modernes » des entiers relatifs, voir plus bas). Le total des points a donc parfois prudemment été noté sans ajouter le point bonus (du moins, sur le moment) :



Plusieurs fois, des élèves ont décidé de ne pas attendre le blocage de l'un d'eux pour arrêter le jeu et compter les points. Par exemple ici :

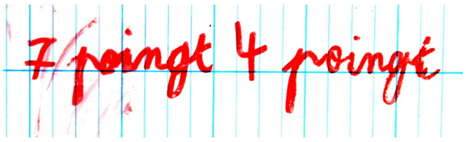


Il est possible que le jeu continue sans qu'aucun pion ne soit pris (les deux joueuses semblent s'être tacitement - ou oralement - s'être mises d'accord sur ce point ; probablement parce qu'elles ont compris que ce pacte de non agression était à leur avantage à toutes les deux). Dans ce cas

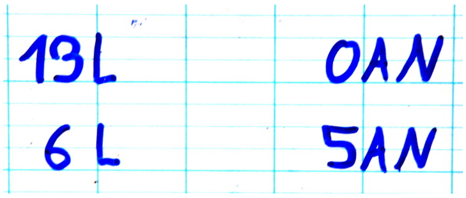
- le pion blanc qui est en B4 peut avancer 3 fois (A3, B2 puis A1)
- le pion blanc qui est en B6 peut avancer 5 fois (A5, B4, A3, B2 puis C1)
- le pion noir qui est en D5 peut avancer 1 fois (vers C6)
- le pion noir qui est en C2 peut avancer 4 fois (D3, C4, B5 puis A6)
- le pion noir qui est en D1 peut avancer 4 fois (C2, D3, C4 puis B5)

Donc les noirs peuvent jouer encore 9 fois alors que les blancs ne peuvent jouer que 8 fois. Les noirs gagneront donc, et avec 1 point d'avance sur les blancs : score 2 points pour les noirs. Mais certains binômes de joueurs ont imaginé, plutôt que d'ajouter 2 points au score des noirs, d'en ajouter 10 (les 9 plus le bonus du gagnant) aux noirs, et 8 aux blancs.

Ce qui donne lieu à des notes plus complexes pour une seule partie, comme ici :



(un joueur pouvait bouger 6 fois, l'autre 4 fois, donc le premier surpasse le second de 3 points à savoir 6-4, plus le point de bonus parce qu'il a gagné ; or 7-4=3). Ou ici (deuxième ligne) :

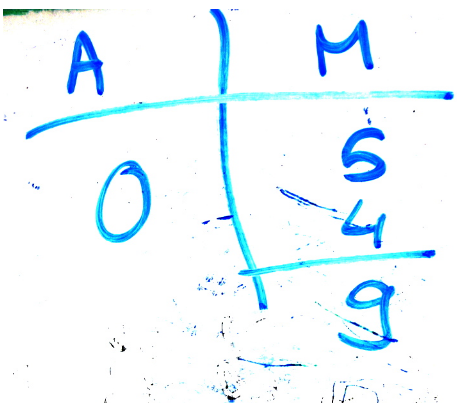


Dans la première ligne, la joueuse L a gagné largement, avec 12 mouvements possibles pour ses pions, et a donc marqué 13 points. Mais lors de leur seconde partie, les joueuses ne sont pas allées au bout du match, et L a de nouveau gagné parce que chacune des joueuses avait 5 mouvements possibles mais comme c'était à AN de jouer, L aurait effectué le dernier de ces 5 mouvements pour chaque joueuse. Donc si le jeu avait été mené à son terme (funeste pour AN), L aurait gagné de justesse et aurait marqué seulement 1 point. Mais les deux joueuses ont décidé d'attribuer les 5 points à la perdante AN et 6 points (un de plus que 5) à L. Comme 6-5=1=1-0, l'avantage de L sur AN reste le même, que l'on compte les 5 points pour chaque joueuse ou pas. C'est la base de la construction des entiers relatifs évoquée plus haut : les couples (6,5) et (1,0) désignent le même entier +1 ou, selon le point de vue, les couples (5,6) et (0,1) désignent le même entier -1. On voit là l'illustration de ce que Gérard Vergnaud appelait « comparaison » : l'avantage de L sur AN reste de +1, quel que soit le score de référence.

Mais Gérard Vergnaud aurait probablement vu les scores des joueurs plus comme des états, et les parties d'alquerkonane comme des transformations d'état.

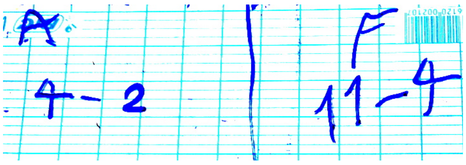
Score pour deux parties

Lorsque les joueurs ont joué deux fois, il peut arriver que le même joueur ait gagné deux fois :



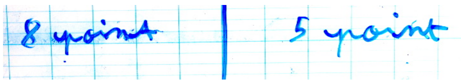
Dans ce cas, il semble naturel que le score du vainqueur soit la somme des points gagnés lors des deux parties (ci-dessus, 4 mouvements d'avance donc 5 points, puis 3 mouvements d'avance donc 4 points, représentent au total 5+4=9 points, ce qui est équivalent à une seule partie gagnée avec 8 mouvements d'avance).

Ici également, il y a des additions à faire (sur 4 parties, pas 2) :



A a gagné 2 fois, F a gagné 2 fois aussi, comment les départager ? En fait A a récolté en tout 4+2=6 points alors que F en a récolté 11+4=15 ce qui est plus que 6 : F dépasse A de 15-6=9 points et de ce fait peut être considéré comme plus méritant que A, même si les nombres de victoires sont les mêmes pour les deux joueurs.

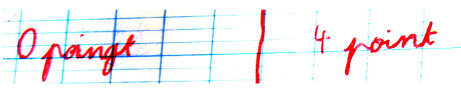
Mais que faire lorsqu'après deux parties, chaque joueur a vaincu l'autre exatement une fois ?

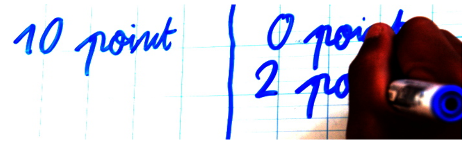


Dans ce cas, il semble naturel de

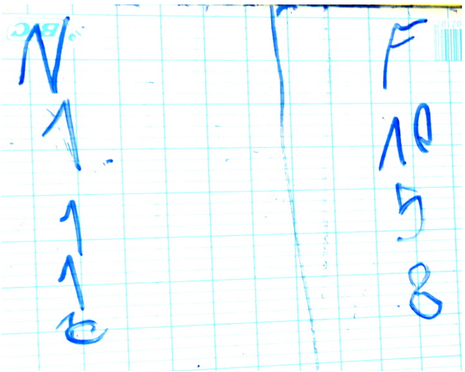
- comparer les deux nombres (8 points, c'est plus que 5 points, donc le joueur de gauche a l'avantage)
- soustraire les nombres pour estimer l'avantage du gagnant sur le perdant : 8-5=3 donc c'est l'équivalent d'une seule partie, où le gagnant aurait eu 2 mouvements d'avance sur son adversaire.

En résumé, si le même joueur a gagné deux fois, son score s'obtient en additionnant les points obtenus lors des deux victoires, et sinon, le gagnant des deux parties est celui qui a obtenu le score le plus élevé parmi les deux parties, et son avantage est la différence entre les points qu'il a acquis et les points qu'il a perdu. Les points gagnés aux cours des parties s'accumulent, mais qu'advient-il du perdant ? Un choix naturel est de considérer qu'il gagne zéro point :



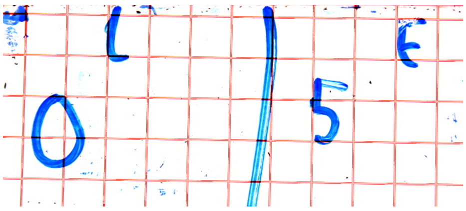


Ci-dessus chaque ligne représente une partie et on voit qu'il y a toujours un score nul pour un des joueurs : le perdant. D'autres élèves, pressés de jouer un grand nombre de parties, n'ont même pas pris la peine d'écrire ce score nul :



Le programme de cycle 2 demande de « Présenter et organiser des mesures sous forme de tableaux ou de graphiques ». On a ci-dessus des tableaux, et ceux avec les 0 point des perdants se prêtent bien à une représentation graphique : après chaque partie, les joueurs indiquent sur le graphique leur nouveau (ou pas) score, une courbe passant par ces points pouvant ensuite résumer leur parcours. Cette courbe peut être assimilée à une courbe d'apprentissage. Mais le jeu alquerkonane est dit « à somme nulle ». La somme en question est celle des scores des joueurs.

Il faudrait donc qu'après chaque partie d'alquerkonane, et une fois qu'on a calculé le score, celui-ci soit à la fois ajouté au total du gagnant, et soustrait au total du perdant. Les cartes du jeu TiPont974 peuvent aider à mémoriser les parties jouées. L'attribution d'un score de départ élevé (par exemple 100) à chaque joueur avant la compétition, permettrait d'éviter l'apparition de nombres négatifs lors des soustractions. Par exemple :



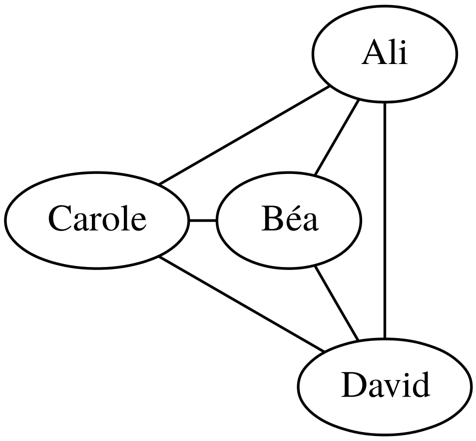
Ici une seule partie s'est déroulée, et a été gagnée par E qui avait 4 mouvements d'avance sur L. Le score de L est donc toujours de 0 alors que celui de E est 5. Alors que si au départ chacun avait eu 100 points, comme E a gagné de 4+1=5 points, son score serait passé à 105 et celui de L, à 95 (on peut donner à L une carte TiPont 974 représentant -5, et à E une carte représentant +5). Dans ces conditions, et indépendamment de savoir qui a joué contre qui, chaque joueur peut représenter graphiquement la chronologie de son score total. L'usage d'un abaque romain (un abaque par élève) ou d'un boulier permet également de mémoriser le total, tout en effectuant les opérations sur le même matériel.

Proposition pour l'organisation d'un tournoi

Sélection (ou quart de finale)

Les joueurs sont disposés par tables de 4. Par exemple pour une classe de 24 élèves il y a 6 tables. S'il y a plus de 24 élèves il y a plus de tables, et l'une peut comporter moins de 4 joueurs. Voir la partie sur la demi-finale pour la gestion d'une table de 3 joueurs.

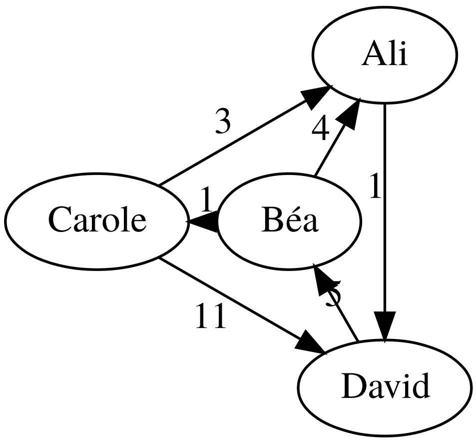
Chaque table est munie d'un damier avec ses 8 pions (un seul damier pour 4 joueurs) ainsi qu'un graphe en forme de tétraèdre, sur lequel les joueurs inscrivent leurs noms. Par exemple si Ali, Béa, Carole et David sont à une table, ils ont un graphe comme ceci :



Chaque arête du graphe représente une partie à jouer. Comme il y a 6 arêtes, il y aura 6 parties à jouer sur cette table de 4, chaque joueur aura l'occasion de jouer contre chacun des autres (soit 3 fois). Chaque fois qu'une partie est terminée, on compte les points marqués par le gagnant, puis on ajoute sur le graphe

- une flèche allant du perdant vers le gagnant
- le score obtenu par le gagnant (et cédé par le perdant)

Une fois que les 6 parties ont été jouées, le graphe sera orienté, comme ceci par exemple :



Chaque joueur avait au départ un capital de 100 points. Mais à l'issue des 6 parties, il ajoute à ce capital les points marqués sur les flèches allant vers son sommet, et soustrait les points marqués sur les flèches partant de son sommet. Ainsi

- Ali a maintenant 100+3+4-1=106 points
- Béa a 100-4-1+5 = 100 points
- Carole a 100-3+1-11 = 87 points
- David a 100+1-5+11 = 107 points.

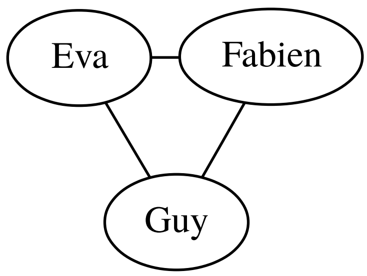
C'est donc Carole qui est la meilleure de cette table de 4. On peut vérifier les calculs à l'aide d'un invariant : la somme des 4 scores doit être égale à 400. Ici 106+100+87+107 = 400.

Ensuite, on sélectionne les 6 meilleurs joueurs de la classe, c'est-à-dire ceux qui ont eu les scores les plus élevés après cette phase de sélection. En cas d'ex æquo, on gardera pour l'une des tables un graphe en forme de tétraèdre, puisque cette table aura à nouveau 4 joueurs.

Demi-finale

Les 6 élèves sélectionnés sont maintenant regroupés en 2 tables de 3, avec encore une fois un seul damier par table, et un graphe par table. Mais comme il n'y a plus que 3 joueurs, le graphe n'a plus la forme d'un tétraèdre, mais celle d'un triangle.

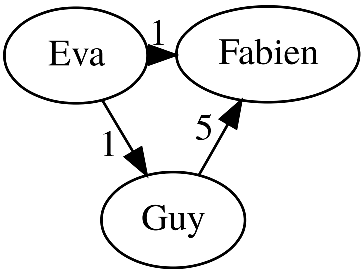
Par exemple si Eva, Fabien et Guy sont à une table, ils joueront en tout 3 parties (représentées par les arêtes du triangle), chacun jouant contre les deux autres. Ils inscrivent préalablement leurs noms sur le graphe :



Supposons alors que :

- Fabien gagne contre Eva, de justesse
- Fabien gagne contre Guy, de 4 mouvements de pion (donc avec 5 points en plus)
- Guy gagne contre Eva, de justesse (donc un seul point en plus)

Alors le graphe sera orienté et pondéré de la manière suivante :

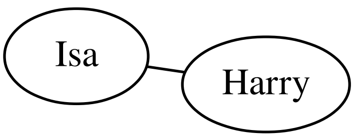


Eva va donc soustraire 2 points à son score (1+1), Fabien va ajouter 6 points à son score (5+1) et Guy va soustraire 5-1=4 points à son score. C'est donc Fabien qui est le gagnant de cette table, mais on n'est pas obligé de remettre les scores à 100, et si Eva avait 110 points alors que Fabien en avait 102, les nouveaux scores deviennent 109 points pour Eva et 108 points pour Fabien.

Quelle que soit la convention adoptée, on sélectionnera pour la finale les 2 meilleurs (c'est-à-dire ceux au score le plus élevé) des 6 joueurs. En cas d'ex æquo, la table de jeu de la finale comprendra 3 joueurs au lieu de 2, et dans ce cas on fait comme en demi-finale : un graphe en forme de triangle et le vainqueur sera celui au score le plus élevé des 3 joueurs.

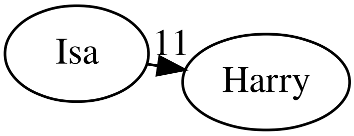
Finale

Typiquement il y aura 2 finalistes, que l'on met à une table munie d'un damier pour le jeu, et un graphe en forme de segment (deux sommets). Par exemple si les finalistes sont Isa et Harry :



Pendant la finale, les autres élèves peuvent regarder et tenter de noter la partie, avec la notation algébrique, afin de l'étudier par la suite. Ils peuvent également vérifier les calculs effectués sur les graphes précédemment constitués.

Si Harry bat Isa de 10 mouvements (c'est une belle finale), le graphe est complété ainsi :



Comme précédemment, cela signifie qu'Isa va soustraire 11 points à son score alors qu'Harry va ajouter 11 points au sien (Isa donne 11 points à Harry). Si par exemple Isa avait 108 points et Harry 102 points, leurs scores deviennent respectivement 108-11 = 97 points pour Isa, et 102+11 = 113 points pour Harry.

Version REP+

Avec une classe de 12 élèves, on fait une demi-finale avec 3 tables de 4 élèves (chacun joue 3 fois) puis on sélectionne les meilleurs scores de chaque table ce qui fait une finale sur une table de 3. L'expérience sera tentée lundi 13 février à l'école du Grand-Tampon (classe de CE2 à CM2).

Serge Bayle

Lætitia Bègue

Alain Busser

Patrick Schilli

Dominique Tournès

IREM de La Réunion