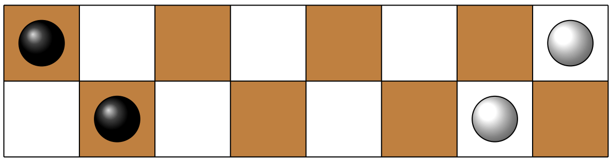
alquerkonane sur un damier $n \times 2$

Alain Busser
Institut de Recherche
pour l'Enseignement des Mathématiques
et de l'Informatique
La Réunion

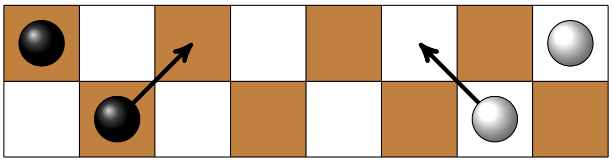
31 mai 2023

Alquerkonane peut se jouer sur un damier 8×2 :



Les noirs jouent vers la droite (l'est) et les blancs jouent vers la gauche (l'ouest).

Ainsi, dans le alquerkonane 8×2, les mouvements possibles pour les noirs et les blancs sont, au début :



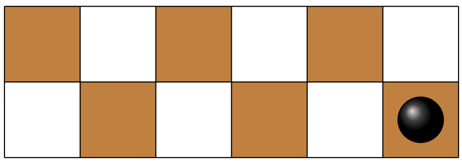
En effet l'autre pion noir et l'autre pion blanc sont bloqués.

Dans la suite, on va considérer des positions sur le damier 6×2 où la construction des surréels par Conway s'illustre bien.

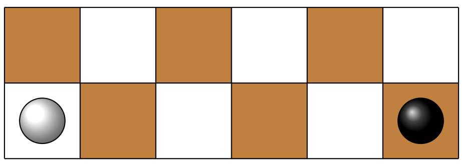
0.1 Notation de Conway

Un jeu est défini par Conway, en listant les options des noirs, puis les options des blancs, les listes étant séparées par un trait vertical et le tout encadré par des accolades. Par exemple on verra plus bas que le jeu $\{-5|4\}$ où la meilleure option (en fait, la seule) des noirs est le nombre -5, et la meilleure (en fait, la seule) option des blancs est 4, est un nombre.

Par exemple, dans ce jeu :



ou dans celui-là :



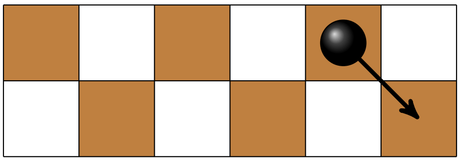
aucun des joueurs n'a d'option de jeu (les pions s'il en reste sont bloqués au bout donc aucun mouvement possible) et donc *le prochain qui joue, perd ce jeu*. C'est la définition que Conway donne du nombre zéro, donc le jeu $\{|\}$ représenté ci-dessus (aucune option pour aucun des joueurs) est le nombre 0. On s'en servira pour définir d'autres jeux plus complexes par la suite.

0.2 Entiers relatifs

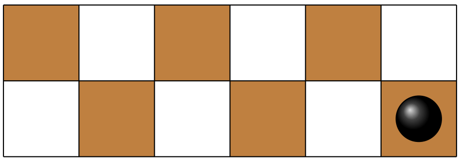
0.2.1 Entiers positifs

Un

Dans ce jeu :

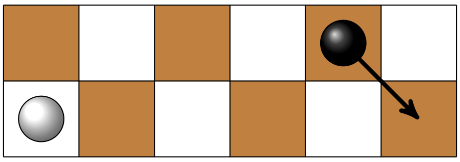


les noirs peuvent arriver au jeu zéro :



alors que les blancs, n'ayant plus de pion à bouger, n'ont aucune option. On constate que les noirs ont un coup d'avance sur les blancs (la flèche ci-dessus) donc le jeu est noté $\{0|\}$ et égal au nombre 1.

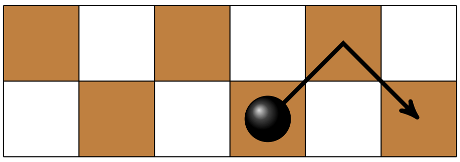
Il en est de même pour le jeu ci-dessous puisque les blancs, déjà à gauche, ne peuvent plus bouger :



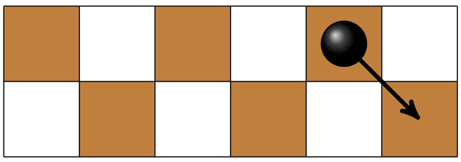
En fait, le jeu $\{0|\}$ est le nombre le plus simple qui soit plus grand que 0, et ce nombre est 1.

Deux

Dans le jeu ci-dessous :



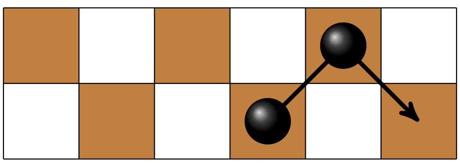
- les noirs ont pour option le nombre 1 :



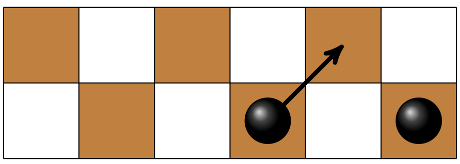
- et les blancs n'ont aucune option.

Donc ce jeu est $\{1|\}$ qui est le nombre le plus simple qui soit supérieur à 1. C'est le nombre 2, d'ailleurs les noirs ont bel et bien 2 coups d'avance sur les blancs à ce jeu.

De même, le jeu ci-dessous est égal à 2 :



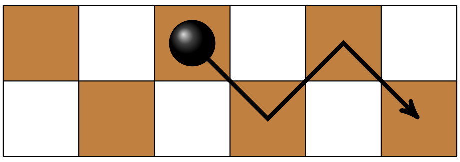
En effet, les noirs ont pour option 1 :



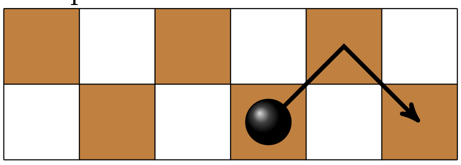
alors que les blancs n'ont aucune option.

Trois

Ce jeu vaut 3 :



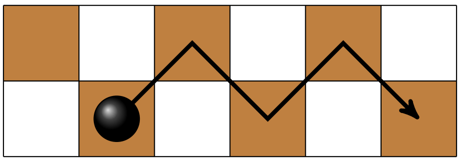
En effet
- les noirs ont 3 coups d'avance sur les blancs,
- autrement dit, les noirs ont pour option le nombre 2 :



alors que les blancs n'ont aucune option. Le jeu est donc $\{2|\}$ qui est le nombre le plus simple qui soit supérieur à 2, soit le nombre 3.

Quatre

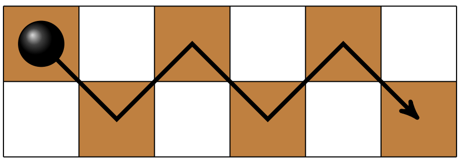
De même, ce jeu est $\{3|\} = 4$:



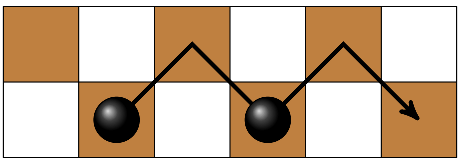
(le nombre le plus simple possible qui dépasse 3).

Cinq

De façon similaire à ce qui précède, ce jeu est le nombre 5 :



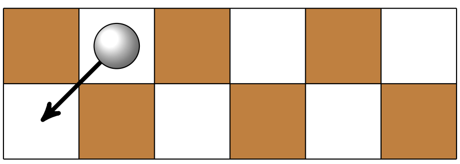
Ce même nombre (5) peut apparaître aussi comme somme (ici 2+3) :



0.2.2 Entiers négatifs

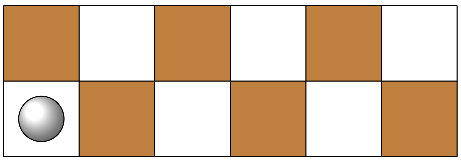
Moins un

Voici le nombre -1 :



En effet,

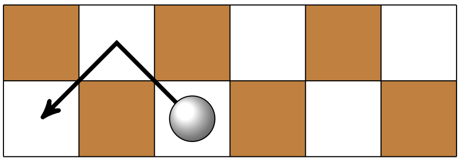
- les noirs n'ont aucune option,
- alors que les blancs peuvent arriver à 0 :



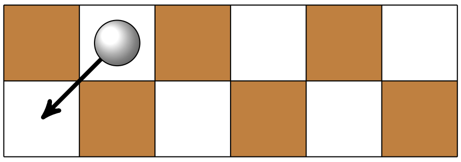
(autrement dit, les blancs ont un coup d'avance sur les noirs). Donc ce jeu se note $\{|0\}$ et c'est le nombre le plus simple possible, qui soit plus petit que 0 : c'est -1.

Moins deux

Dans ce jeu :



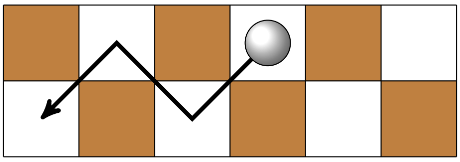
- les noirs n'ont aucune option,
- les blancs ont pour option -1 :



Le jeu se note donc $\{|-1\}$ et c'est le nombre le plus simple possible qui soit plus petit que -1 : c'est le nombre -2.

Moins trois

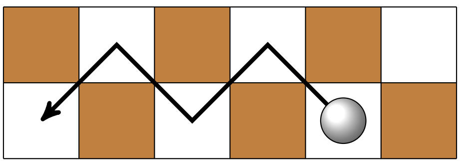
Dans ce jeu, les noirs n'ont aucune option mais les blancs peuvent arriver au jeu précédent (-2) :



Le jeu, noté $\{|-2\}$, est donc le nombre le plus simple qui soit plus petit que -2, à savoir -3.

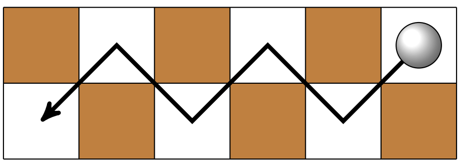
Moins quatre

De façon similaire, ce jeu vaut $\{|-3\} = -4$:



Moins cinq

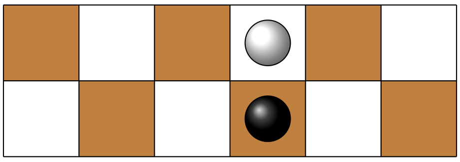
et ce jeu vaut $\{|-4\} = -5$:



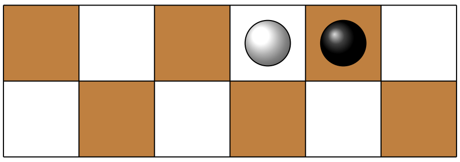
0.2.3 Zéro

Exemple

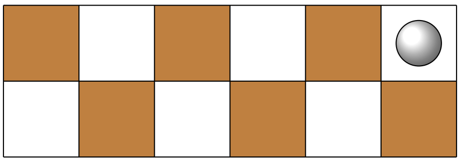
Ce jeu est le nombre 0 :



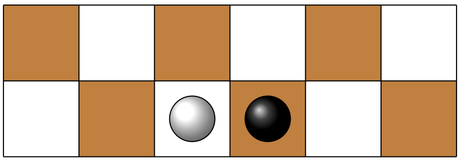
En effet, si c'est aux noirs de jouer, ils ne peuvent faire que ceci :



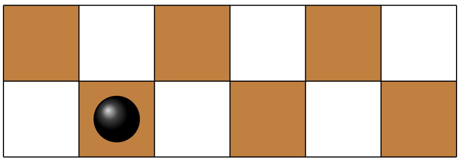
ce qui permet alors aux blancs d'arriver au nombre -5 qui leur est avantageux, en prenant ce pion noir en arrière :



alors que si c'est aux blancs de jouer, ils ne peuvent que faire ceci :

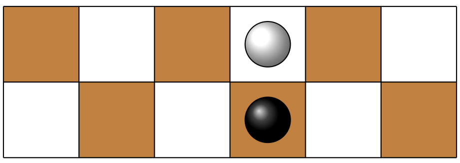


ce qui permet alors aux noirs d'arriver à 4 en prenant ce pion blanc en arrière :

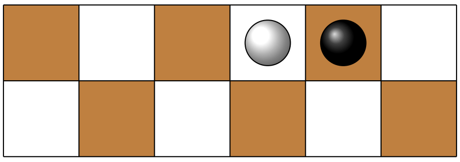


Comme -5 (l'option des noirs) est plus petit que 4 (l'option des blancs), le jeu est un nombre (c'est la définition donnée par Conway, d'un nombre). Et c'est le nombre $\{-5|4\}$ qui est le nombre le plus simple possible, compris entre -5 et 4 : c'est bien le nombre 0, considéré comme le plus simple de tous les nombres (et même de tous les jeux).

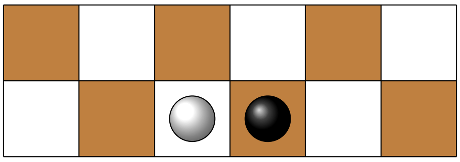
En fait c'est un peu plus compliqué : s'il est vrai que $\{-5|4\}$ est égal à 0, le jeu



n'est pas égal à $\{-5|4\}$, parce que d'une part, le jeu



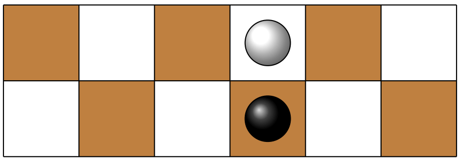
n'est pas égal à -5 mais à $\{3|-5\}$ (qui n'est pas un nombre puisque 3 n'est pas plus petit que -5), et d'autre part, le jeu



n'est pas égal à 4 mais à $\{4|-4\}$ qui n'est pas un nombre non plus puisque 4 n'est pas plus petit que -4. Cependant la théorie de Conway montre que $\{\{3|-5\}\,|\,\{4|-4\}\} = 0$ (le premier qui joue, perd).

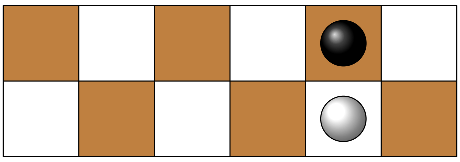
0.2.4 Résumé

En résumé, deux pions l'un à côté de l'autre valent 0 du moment qu'ils sont sur des bords différents (c'est-à-dire à la verticale) :

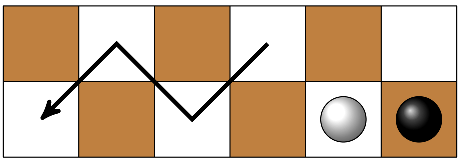


peu importe sur quelle verticale ils se trouvent, y compris près d'un bord.

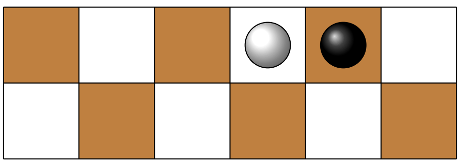
Par exemple



est égal 0, puisque les noirs arrivent à $\{2|-3\}$:

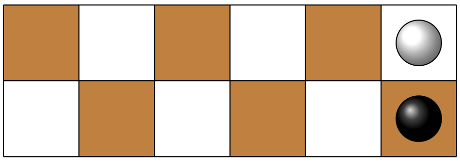


et que les blancs arrivent à $\{3|-5\}$:

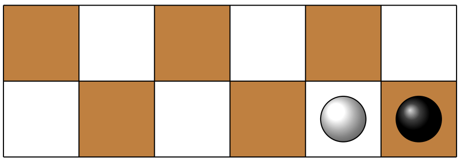


et que $\{\{2|-3\}\,|\,\{3|-5\}\} = 0$ (concrètement comme les noirs viennent de jouer, on ne regarde pas l'option 2 qui ne leur est de fait pas accessible puisqu'ils ne rejouent pas, et idem pour les blancs qui une fois avoir joué ne peuvent pas aller à -2 ce qui fait que le jeu ci-dessus est simplifié en $\{-3|3\}$ qui est un nombre, à savoir le plus simple qui soit entre -3 et 3, et ce nombre est bien 0)

Et même



est égal à 0 puisque les noirs n'ont aucune option, alors que les blancs peuvent aller à $\{2|-3\}$:



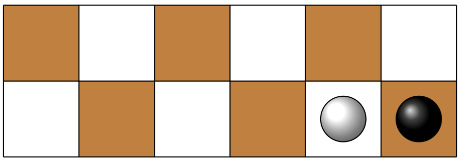
Or $\{|\,\{2|-3\}\}$ est égal à 0 : si c'est aux noirs de jouer, ils ont perdu parce qu'ils sont déjà bloqués, et si c'est aux blancs de jouer, les noirs gagnent. Le prochain qui joue perd ce jeu donc le jeu est 0.

Reste à voir ce que valent des jeux où les deux pions côte à côte sont sur le même bord (alignés à l'horizontale). On va voir que c'est plus compliqué.

0.3 Bascules

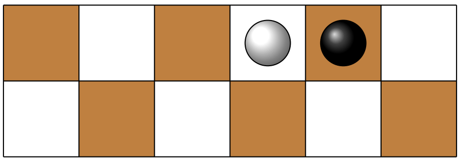
0.3.1 Cas simples

On vient de voir que ce jeu est $\{2|-3\}$:



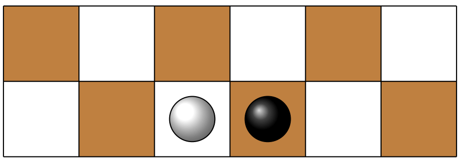
En moyenne, ce jeu vaut -0,5 et sa température est 2,5. Ce qui signifie que l'option des noirs est -0,5+2,5 = 2 et que l'option des blancs est -0,5-2,5 = -3. Le jeu $\{2|-3\}$ se note $-0,5 \pm 2,5$.

De façon similaire, ce jeu vaut $\{3|-5\}$:

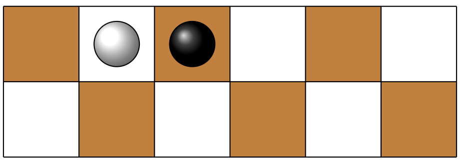


C'est un jeu qui vaut, en moyenne, -1 (il est globalement favorable aux blancs) et dont la température est 4. Il est donc également noté -1 ± 4.

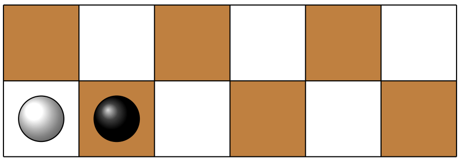
Ce jeu vaut$\{4|-4\} = \pm 4$ (température 4 mais moyenne nulle) :



Celui-ci vaut$\{5|-3\} = 1 \pm 4$ (température 4 aussi mais moyenne 1) :

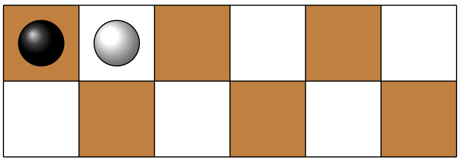


et celui-là vaut$\{3|-2\} = 0,5 \pm 2,5$ (température 2,5 et moyenne 0,5) :

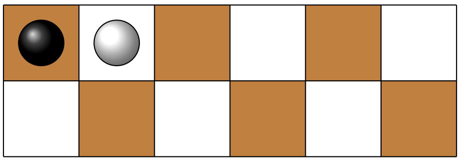


0.3.2 Cas complexes

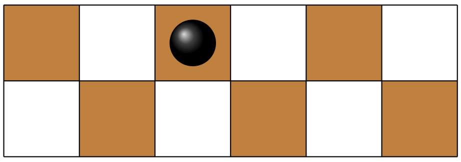
Ce jeu est plus compliqué à examiner :



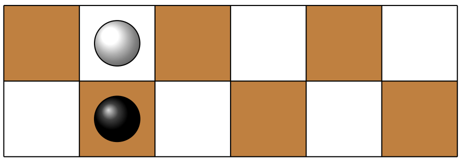
En effet, si les blancs n'ont que 0 comme option :



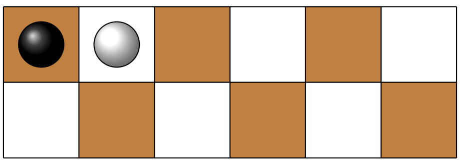
les noirs ont **deux** options maintenant :
- Le nombre 3 :



- et le nombre 0 :

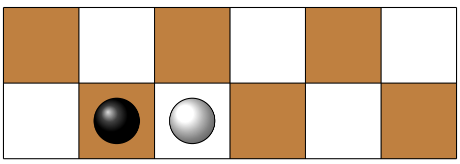


Mais comme ils jouent au mieux de leurs intérêts, ils choisiront l'option 3 et le jeu

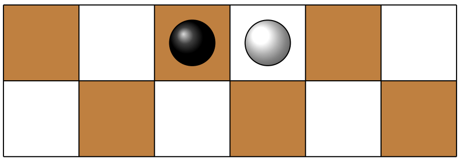


est donc égal à $\{3|0\}$. Sa moyenne est 1,5 et sa température est 1,5 aussi et il se note donc $1,5 \pm 1,5$.

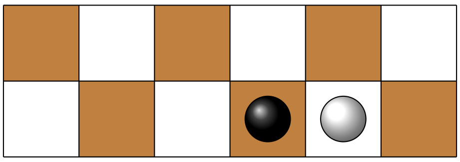
De façon similaire, le jeu



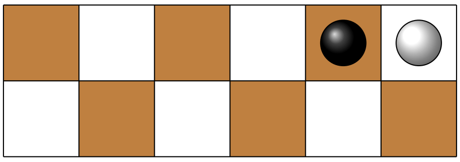
est égal à $\{2|0\} = 1 \pm 1$ (moyenne 1 et température 1),
et le jeu



est égal à $\{1|-1\}$. Sa moyenne est donc nulle et sa température est 1 et on le note ± 1.
De façon similaire, le jeu



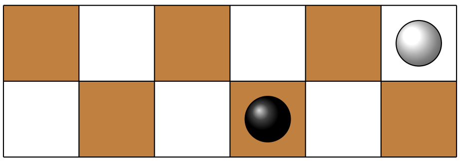
est égal à $\{0|-2\} = -1 \pm 1$ (moyenne -1 et température 1)
et le jeu



est égal à $\{0|-3\} = -1,5 \pm 1,5$ (moyenne -1,5 et température 1,5).

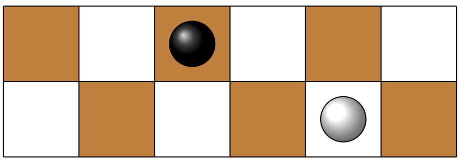
0.4 Zéro

Ce jeu vaut zéro :

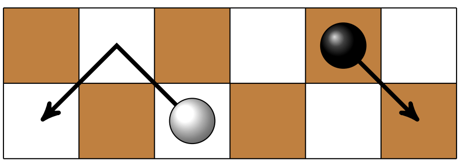


En effet si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à $-1,5 \pm 1,5$ qui les fait perdre (les blancs arrivent à -3 le coup d'après) alors que si c'est aux blancs de jouer, ils arrivent à ± 1 qui fait gagner les noirs le coup d'après.

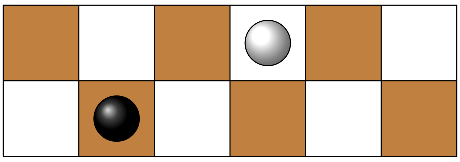
Pour une raison similaire, ce jeu vaut 0 aussi :

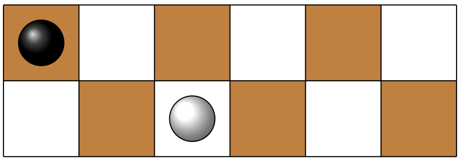


alors que celui-ci qui lui ressemble vaut 1-2 = -1 :



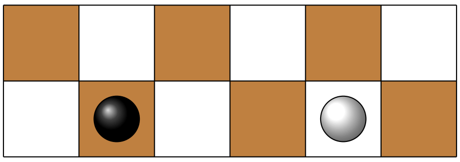
Plus généralement, un pion noir et un pion blanc à distance de cavalier représentent un nombre (0 si le pion noir est à gauche). Voici donc des variantes du jeu 0 :



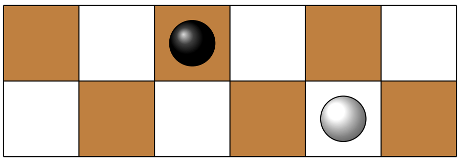


0.4.1 L'étoile

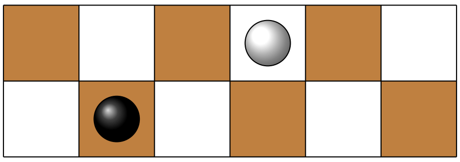
Ce jeu est intéressant :



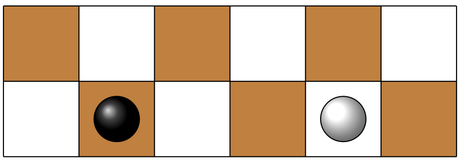
En effet si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à 0 :



mais si c'est aux blancs de jouer, ils arrivent aussi à 0 :



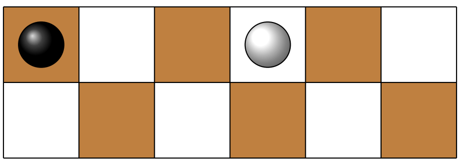
Le jeu

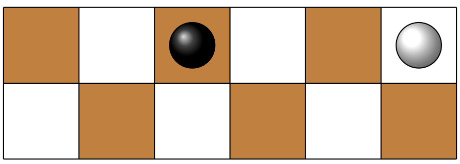


est donc égal à $\{0|0\}$.

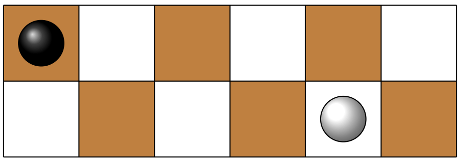
- Ce n'est pas un nombre parce que 0 n'est pas plus petit que 0,
- ce n'est pas non plus une bascule parce que 0 n'est pas plus grand que 0.

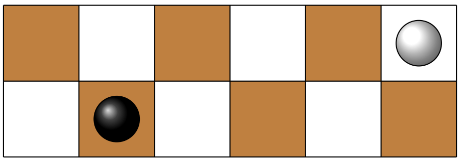
Ce jeu s'appelle l'étoile et se note $*$.
On retrouve l'étoile sous deux autres formes dans le alquerkonane 6×2 :





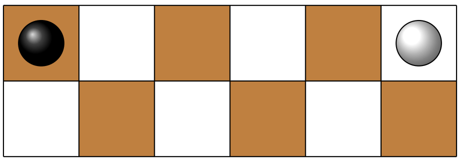
Et du coup on retrouve 0 de deux autres manières :





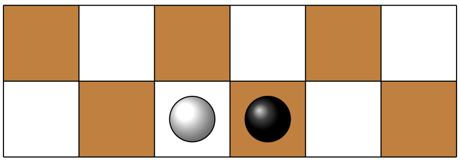
En effet $\{*|*\} = 0$ puisque dans $\{*|*\}$ chaque joueur a pour option $*$ qui fait gagner son adversaire, et donc perd dans $\{*|*\}$ ce qui est la définition de 0.

Mais alors, ce jeu est l'étoile puisqu'il vaut $\{0|0\}$:

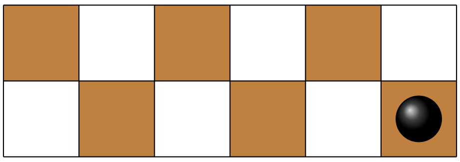


0.5 Avec plus de pions

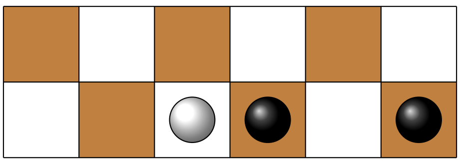
On a vu que ce jeu est ± 4 :



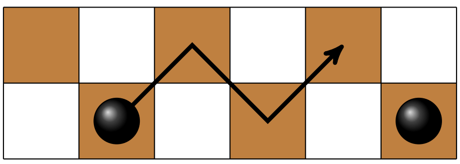
Comme ce pion est déjà au bout, il ne risque pas d'y changer quelque chose :



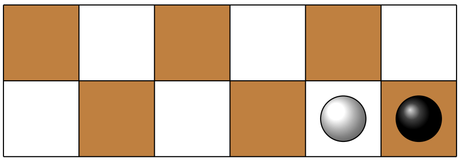
Donc *a priori*, ce jeu est aussi ± 4 :



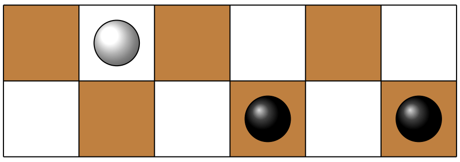
En fait ce serait le cas s'il n'y avait aucun risque d'interférence, mais si c'est aux noirs de jouer, leur meilleur coup les fait arriver à 3 :



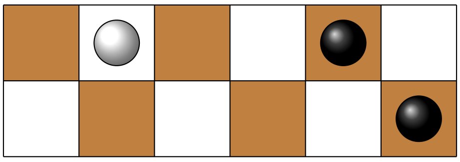
et si c'est aux blancs de jouer, ils peuvent aller à



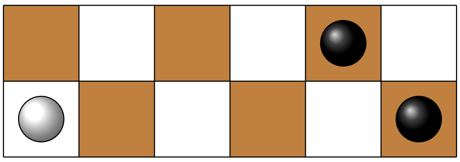
qui les fait perdre (les noirs arrivent à 2), ou leur meilleur coup



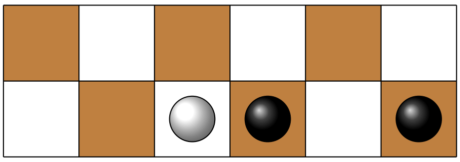
qui les fait gagner : les noirs ne peuvent qu'avancer leur seul pion mobile :



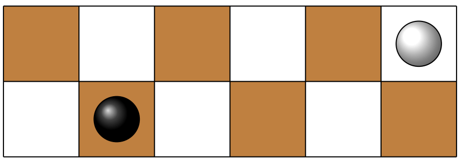
et après les blancs gagnent en arrivant à 0 :



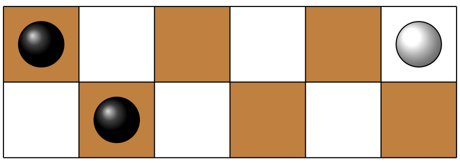
Le jeu



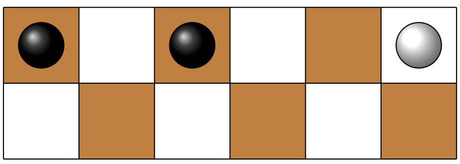
n'est donc pas égal à ± 4 mais à $\{3|0\} = 1,5 \pm 1,5$.
On a vu plus haut que ce jeu est 0 :



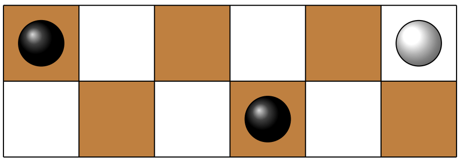
Qu'en est-il de celui-là ?

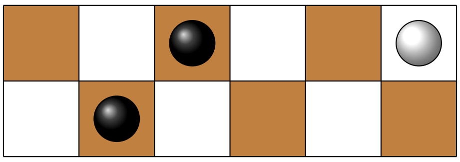


Les noirs ne peuvent aller qu'ici :

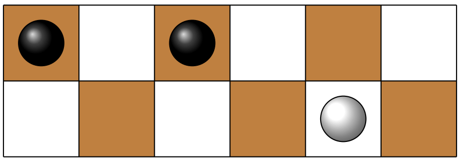


Cette position est-elle toujours l'étoile ? Cela voudrait dire que parmi ces deux positions :

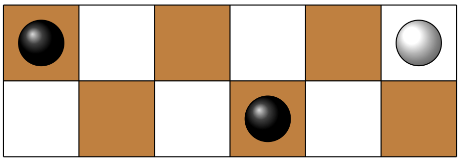




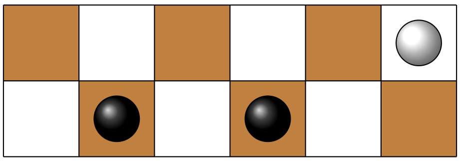
la meilleure (du point de vue des noirs) vaut 0, et que cette position aussi vaut 0 :



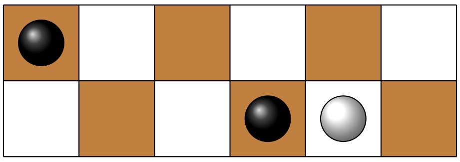
Or la position



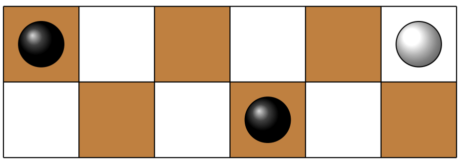
est positive (il y a une stratégie gagnante pour les noirs). Si c'est aux noirs de jouer, le meilleur coup pour eux est



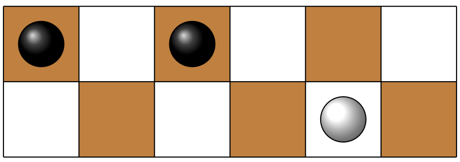
qui leur assure un minimum de 7, et si c'est aux blancs de jouer, ils ne peuvent faire que



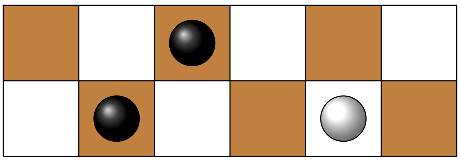
qui vaut 7 aussi. Donc le jeu



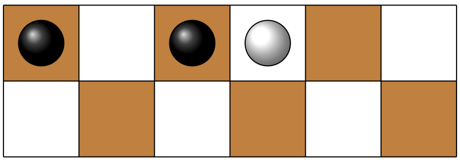
est égal à $\{7|7\} = 7*$ (c'est la somme de 7 et de l'étoile) qui est clairement positif.
Cette position non plus n'est pas 0 :



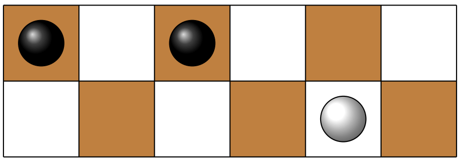
En effet le meilleur coup pour les noirs est



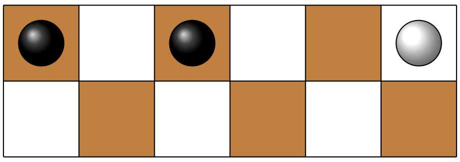
qui vaut 1, et les blancs ne peuvent faire que



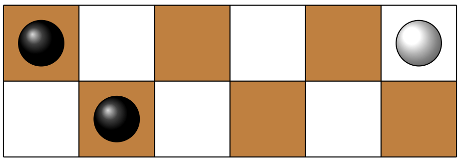
qui vaut $\{8|3\} = 5,5 \pm 2,5$.
Donc



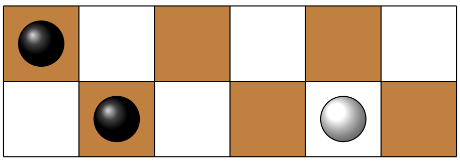
vaut $\{1|5,5 \pm 2,5\} = 2$ qui est un nombre positif. Et donc



est égal à $\{7*|2\}$ qui est positif.
Dans

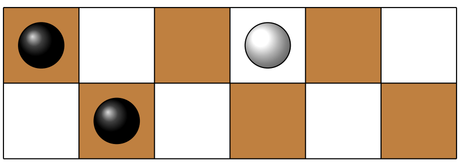


les blancs n'ont eux aussi qu'une possibilité :

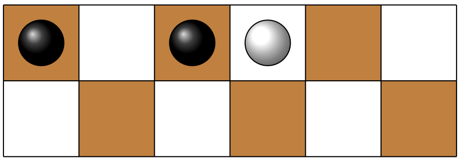


mais celle-ci vaut-elle toujours l'étoile ?

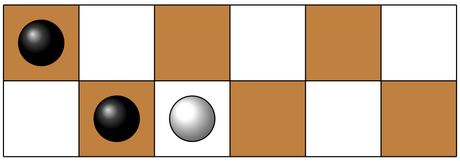
Si c'est aux noirs de jouer, ils arrivent à 2 (vu plus haut) mais si c'était aux blancs de rejouer, ils arriveraient à



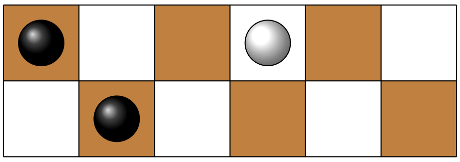
Si les noirs jouent, ils arrivent à



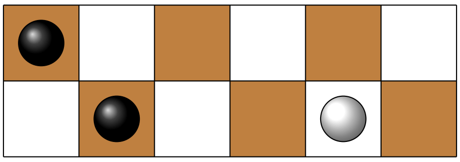
qui vaut $5,5 \pm 2,5$ (positif), alors que si les blancs jouent ils arrivent à $\{6|-2\} = 2 \pm 4$:



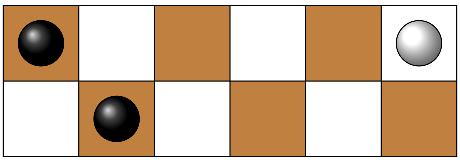
Donc



est égal à $\{5,5 \pm 2,5|2 \pm 4\} = 3$ qui est positif.
Donc



est égal à $\{2|3\} = 2,5$ (nombre le plus simple qui soit à la fois plus grand que 2 et plus petit que 3).
Finalement



n'est pas égal à 0 mais à $\{\{7 * |2\}|2,5\} = 2$: le rajout d'un pion noir (même bloqué) a transformé un jeu nul en jeu positif.