КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЛЕКЦИИ И ПРАКТИКУМ

Под общей редакцией
И. М. ПЕТРУШКО

Издание третье, стереотипное

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2008

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ДОПУЩЕНО Министерством образования РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям: «Технические науки», «Техника и технологии»

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ • МОСКВА • КРАСНОДАР
2008

КУРС ЛЕКЦИЙ

Лекция 1

АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1.1. ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей — математическая дисциплина, изучающая *случайные явления* или *эксперименты*. Случайные эксперименты отличаются от детерминированных тем, что при выполнении всех условий проведения эксперимента невозможно добиться заранее определенного результата.

Так, если эксперимент состоит в выборе наудачу трех карт из тщательно перетасованной новой колоды, то результат может быть совсем иным, чем мы предполагали. При стрельбе по мишени даже у первоклассного стрелка, находящегося в хорошей форме, возможны промахи. При покупке того или иного товара в магазине, которому мы вполне доверяем, возможно приобретение некачественной или поддельной продукции.

С каждым случайным экспериментом можно связать различные *случайные события,* которые могут осуществляться или нет в этом эксперименте. Случайное событие, по сути, представляет собой некое описание результата эксперимента. Случайные события принято обозначать большими латинскими буквами.

Приведем примеры случайных событий при выборе наудачу трех карт из колоды:

$A = \{$все три карты принадлежат одной масти$\}$,

$B = \{$среди трех карт есть по крайней мере один туз$\}$,

$C = \{$все три карты одного цвета$\}$.

Главный для теории вероятностей вопрос состоит в том, насколько часто осуществляется то или иное случайное событие при воспроизведении опыта. При этом предполагается, что опыты в неизменных условиях можно воспроизводить какое угодно число раз. Пусть опыт был воспроизведен n раз и при этом случайное событие A осуществилось $n(A)$ раз. *Частотой* события A называется число

$$\nu_n(A) = n(A)/n.$$

Подмечено, что с ростом n проявляется свойство *устойчивости частоты.* Более строго, это означает существование $\lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(A)$. Значение этого предела называется *вероятностью* события A и обозначается $P(A)$ (от английского слова probability). Такое определение вероятности случайного события называется *статистическим.* Устойчивость частот является важнейшей предпосылкой для создания содержательной математической теории о случайных явлениях. Тем не менее, построение математической теории на основе статистического определения вероятности весьма затруднительно.

Приступим к изложению аксиоматики теории вероятностей, созданной нашим соотечественником, выдающимся математиком А. Н. Колмогоровым в тридцатые годы двадцатого столетия.

§ 1.2. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ

Среди всевозможных случайных событий, связанных с данным случайным экспериментом, можно выделить так называемые *элементарные события* или *исходы,* которые характеризуются тем, что

а) любая реализация случайного эксперимента завершается одним и только одним элементарным исходом;

б) любое случайное событие можно представить как совокупность некоторых элементарных исходов.

ПРИМЕР 1.1. Пусть бросается симметричный игральный кубик. Нас интересует число выпавших очков на верхней грани кубика. Элементарными исходами будут следующие случайные события:

$$\omega_i = \{\text{выпало } i \text{ очков}\}, \quad i = 1, \ldots, 6.$$

Тогда, например, случайное событие

$$A = \{\text{выпало четное число очков}\}$$

представляет собою совокупность $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

ПРИМЕР 1.2. Пусть бросаются два игральных кубика. Нас интересует число выпавших очков на верхних гранях кубиков. Если даже кубики неразличимы, то разумно их пронумеровать. Пусть n_1 — число выпавших очков на первом кубике, n_2 — на втором. Элементарными исходами будут векторы (n_1, n_2), где $n_1, n_2 = 1, ..., 6$. Удобно представить все элементарные исходы в виде таблицы:

(1,1)	(1,2)	...	(1,6)
(2,1)	(2,2)	...	(2,6)
...	...	...	...
(6,1)	(6,2)	...	(6,6)

Хорошо видно, что общее число элементарных исходов равно 36. Рассмотрим, например, случайное событие

$$A = \{\text{сумма выпавших очков не меньше 10}\}.$$

Перебирая все элементарные исходы из представленной таблицы, видим, что

$$A = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

Замечание 1.1. Если кубики неразличимы, то в качестве элементарных исходов можно рассматривать векторы (n_1, n_2), где n_1 — наименьшее из выпавших очков, а n_2 — наибольшее. Тогда общее число элементарных исходов равно 21.

Совокупность всех элементарных исходов образует *пространство элементарных исходов,* которое обозначается Ω. Мы пришли к понятию пространства элементарных исходов, рассмотрев последовательно понятия случайного эксперимента, случайного события, элементарного исхода.

В аксиоматике Колмогорова понятие пространства элементарных исходов является первичным. Предполагается, что изначально задано некоторое множество произвольной природы

Ω, которое называется *пространством элементарных исходов,* а элементы этого множества называются *элементарными исходами* и обозначаются ω. При этом *случайными событиями* объявляются некоторые подмножества Ω, но не все. Разберемся с этим подробнее.

§ 1.3. АЛГЕБРА СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

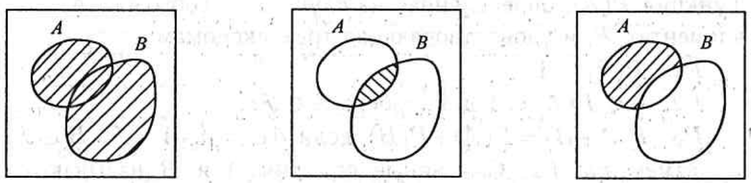
Пусть проводится некоторый случайный эксперимент. Над случайными событиями, связанными с этим экспериментом, можно производить определенные действия.

1) *Объединением* случайных событий A и B называется такое событие, которое происходит, если происходит хотя бы одно из событий A, B. Объединение обозначается $A + B$ и состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат или A, или B.

2) *Пересечением* случайных событий A и B называется такое событие, которое происходит, когда происходят оба события A и B. Пересечение обозначается AB и состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат и A, и B.

3) *Разностью* случайных событий A и B называется такое событие, которое происходит, если событие A происходит, а B нет. Разность обозначается $A \backslash B$ и состоит из тех элементарных исходов, которые принадлежат A, но не принадлежат B.

ПРИМЕР 1.3. Пусть в квадрате K наудачу выбирается точка. Элементарные исходы — всевозможные точки, составляющие K. Случайные события — подмножества K. Тогда указанные действия над случайными событиями легко продемонстрировать графически (рис. 1.1).



а) $A + B$ *б)* AB *в)* $A \backslash B$

Рис. 1.1.

Среди случайных событий выделяют достоверное и невозможное события. *Достоверное* событие осуществляется в каждой реализации случайного эксперимента. Оно состоит из всех элементарных исходов, т. е. равно Ω. *Невозможное* событие не осуществляется ни в одной реализации случайного эксперимента. Оно не содержит ни одного элементарного исхода и обозначается ϕ.

В аксиоматике Колмогорова, как мы помним, сначала задается пространство элементарных исходов Ω. *Случайными событиями* называются некоторые подмножества Ω (не обязательно все), образующие класс, замкнутый относительно операций объединения, пересечения и разности и включающий в себя Ω. Этот класс подмножеств называется *алгеброй случайных событий,* которая обычно обозначается $\mathcal{F}$. Таким образом, по определению, алгебра случайных событий $\mathcal{F}$ — это совокупность некоторых подмножеств Ω, включающая Ω и обладающая свойством: если A и B принадлежат $\mathcal{F}$, то $A + B$, AB, $A \backslash B$ также принадлежат $\mathcal{F}$. Заметим, что одному и тому же пространству элементарных исходов могут соответствовать различные алгебры случайных событий. Поэтому в аксиоматике Колмогорова наряду с пространством элементарных исходов Ω задается алгебра случайных событий $\mathcal{F}$. Именно элементы $\mathcal{F}$ называются случайными событиями, а остальные подмножества Ω нет.

§ 1.4. ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть заданы $(\Omega, \mathcal{F})$ — пространство элементарных исходов и алгебра случайных событий.

Определение 1.1. Вероятностью называется числовая функция $P(A)$, определенная на случайных событиях A, т. е. элементах $\mathcal{F}$, и удовлетворяющая трем аксиомам:

$P1$. $P(\Omega) = 1$;

$P2$. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ для любого $A \in \mathcal{F}$;

$P3$. $P(A+B) = P(A)+P(B)$, если $AB = \phi$, $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$.

Замечание 1.2. Случайные события A и B называются *несовместными*, если они не могут осуществляться одновременно (в одной реализации случайного эксперимента). Иными словами, не существует ни одного общего элементарного исхода у A и B. Это означает, что $AB = \phi$. Таким образом, в аксиоме $P3$ речь идет о несовместных случайных событиях.

Поясним указанные аксиомы, исходя из частотного представления о вероятности. Вспомним, что частота $\nu_n(A)$ случайного события A в n реализациях случайного эксперимента равна $n(A)/n$, где n — общее число реализаций, а $n(A)$ — число тех из них, в которых произошло событие A. Поэтому $0 \leqslant n(A) \leqslant n$. После деления на n получаем, что

$$0 \leqslant \nu_n(A) \leqslant 1.$$

Это объясняет появление аксиомы 2. Если случайные события A и B несовместны, то

$$n(A+B) = n(A) + n(B).$$

Поэтому

$$\nu_n(A+B) = \nu_n(A) + \nu_n(B).$$

Это объясняет появление аксиомы 3. Самостоятельно поясните аксиому 1.

Определение 1.2. Вероятностным пространством называется тройка объектов $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω — пространство элементарных исходов, $\mathcal{F}$ — алгебра случайных событий, P — вероятность, заданная на элементах $\mathcal{F}$.

Вероятностное пространство служит математической моделью случайного явления. Именно оно является основным объектом исследования теории вероятностей.

§ 1.5. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ ВЕРОЯТНОСТИ

Определение 1.3. Случайное событие $\bar{A}$ называется *противоположным* случайному событию A, если оно происходит тогда, когда не происходит A, т. е. $\bar{A}$ состоит их всех тех элементарных исходов, которые не принадлежат A.

Легко видеть, что $A + \bar{A} = \Omega$, $A\bar{A} = \phi$.

Следствие 1.1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ *для любого случайного события* A, в частности $P(\phi) = 0$.

Доказательство. Поскольку $A + \bar{A} = \Omega$ и A и $\bar{A}$ — несовместные события, то по аксиомам $P1$ и $P3$:

$$1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Сравнивая крайние выражения, убеждаемся в справедливости следствия.

Замечание 1.3. Операции объединения и пересечения могут быть определены не только для двух, но и для любого конечного числа случайных событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Так, например, случайное событие $A_1 + A_2 + ... + A_n$ осуществляется, если происходит хотя бы одно из событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Следствие 1.2. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ — попарно несовместные случайные события (т. е. $A_i A_j = \phi$ при $i \neq j$, $i, j = 1, ..., n$), то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = A_1 + (A_2 + ... + A_n),$$

причем события A_1 и $A_2 + ... + A_n$ несовместны, поэтому по аксиоме $P3$

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1 + (A_2 + ... + A_n)) = \\ = P(A_1) + P(A_2 + ... + A_n).$$

Последовательно продолжая эту процедуру, получаем требуемое утверждение.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит отличие понятий случайного эксперимента и случайного события?
2. Почему в теории вероятностей изучаются только массовые случайные явления?
3. Опишите пространство элементарных исходов при выборе наудачу трех карт из колоды, состоящей из 36 карт.
4. Докажите для случайных событий A и B, что $A \backslash B = A\bar{B}$.
5. Сравните статистическое и аксиоматическое определения вероятности. В чем состоит преимущество, а в чем — неудобство статистического определения вероятности?
6. Будем говорить, что случайное событие A влечет случайное событие B ($A \subset B$), если из наступления события A следует наступление события B, т. е. все элементарные исходы, составляющие A, содержатся в B. Докажите, что $P(A) \leqslant P(B)$.

Ответы

3. Пронумеруем все карты из колоды. Пусть n_1 — номер первой взятой карты, n_2 и n_3 — второй и третьей соответственно. Элементарные исходы — векторы (n_1, n_2, n_3), где $n_1, n_2, n_3 = 1, ..., 36$ и n_1, n_2, n_3 различны.

4. Случайное событие $A \backslash B$ осуществляется, если произошло событие A и не произошло событие B. А это означает, что произошли и событие A, и событие $\bar{B}$, т. е. произошло событие $A\bar{B}$.

6. Очевидно, $B = A + (B \backslash A)$, причем A и $B \backslash A$ — несовместные случайные события, поэтому $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geqslant P(A)$.

Лекция 2

ПРИМЕРЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 2.1. КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ

Пусть пространство элементарных исходов Ω состоит из конечного числа элементов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ и алгебра случайных событий $\mathcal{F}$ — это совокупность всех подмножеств Ω. Если при этом вероятность всех элементарных исходов одна и та же (элементарные исходы равновозможны), то получаем так называемую *классическую вероятностную модель*.

Теорема 2.1. *Если случайное событие A (в классической вероятностной модели) состоит из k элементарных исходов, то*

$$P(A) = \frac{k}{n},$$

где n — общее число элементарных исходов.

(Элементарные исходы, составляющие случайное событие, называются *благоприятными*.)

Доказательство. Поскольку

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n$$

и элементарные исходы по определению классической вероятностной модели являются случайными событиями, причем попарно несовместными, то по аксиоме $P1$ и следствию 1.2 (см. лекцию № 1)

$$1 = P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_n).$$

Так как при этом

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n),$$

то получаем, что

$$1 = nP(\omega_1) \Rightarrow P(\omega_1) = \frac{1}{n} \Rightarrow P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = \frac{1}{n}.$$

Пусть случайное событие A состоит из k элементарных исходов $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}$. Тогда

$$A = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + ... + \omega_{i_k},$$

причем случайные события справа попарно несовместны. По следствию 1.2

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + P(\omega_{i_2}) + ... + P(\omega_{i_k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

ПРИМЕР 2.1. Пусть бросаются два игральных кубика. Найти вероятность того, что суммарное число выпавших очков не меньше 10.

Элементарный исход — это пара чисел (n_1, n_2), где n_1 — число очков на первом кубике, а n_2 — на втором. Рассмотрим случайное событие $A = \{$суммарное число очков не меньше 10$\}$. Перебирая все элементарные исходы (см. пример 1.2), получаем, что

$$A = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\},$$

т. е. случайное событие A состоит из шести благоприятных исходов. Из соображений симметрии ясно, что все 36 элементарных исходов в данном примере равновозможны. Поэтому по теореме 2.1

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Замечание 2.1. Если кубики неразличимы, то в качестве элементарных исходов можно рассматривать пары чисел (n_1, n_2), где n_1 — наименьшее из выпавших очков, а n_2 — наибольшее. Тогда

$$A = \{(5,5), (5,6), (4,6), (6,6)\}.$$

Поскольку всего элементарных исходов 21, то для вероятности события A получаем значение 4/21, что не равно 1/6. Этот парадокс объясняется тем, что рассмотренные элементарные исходы не равновозможны и поэтому нельзя пользоваться теоремой 2.1. Нетрудно убедиться на опыте, что элементарный исход (5,6) встречается примерно в два раза чаще, чем (5,5).

Введем некоторые комбинаторные понятия, тесно связанные с классической вероятностной моделью.

Размещение — упорядоченный выбор k элементов из совокупности n различных элементов (первому выбранному элементу присваивается номер один, второму — номер два и т. д.). Число размещений обозначается A_n^k. На первое место выбирается любой из n элементов, на второе — любой из $(n-1)$ оставшихся, на третье — любой из $(n-2)$ оставшихся и т. д. Поэтому

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad (2.1)$$

где $n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$.

Перестановка — частный случай размещения, когда осуществляется упорядоченный выбор n элементов из совокупности n различных элементов. По сути перестановка — способ упорядочить n элементов. Число перестановок равно $n!$

Сочетание — неупорядоченный выбор k элементов из совокупности n различных элементов (нас интересует именно совокупность выбранных элементов, а порядок, в котором они выбирались, — нет). Число сочетаний обозначается C_n^k. Оказывается,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (2.2)$$

Действительно, из каждой неупорядоченной совокупности из k элементов можно $k!$ способами сделать упорядоченную совокупность, поэтому

$$A_n^k = k!C_n^k,$$

откуда с учетом (2.1) получается требуемый результат (2.2).

Замечание 2.2. Напомним, что число сочетаний встречается в известной формуле для бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

где по определению $C_n^0 = 1$.

ПРИМЕР 2.2. Имеется n ящиков и r шаров, причем $r \leqslant n$. Шары наудачу размещаются по ящикам (каждый ящик может вместить сразу все шары). Найти вероятность того, что все шары окажутся в разных ящиках.

Пронумеруем все ящики и все шары. Пусть i_1 — номер ящика, в котором оказался первый шар; i_2 — номер ящика, в котором оказался второй шар, и т. д. Элементарный исход — это вектор $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$. Очевидно, что каждое из чисел $i_1, i_2, \ldots, i_r$ может принимать любое натуральное значение от 1 до n. Поэтому число элементарных исходов равно n^r. Благоприятный исход $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ характеризуется тем, что все числа $i_1, i_2, \ldots, i_r$ различны. В качестве i_1 можно взять любое из n чисел от 1 до n, в качестве i_2 можно взять любое из $(n-1)$ оставшихся чисел и т. д. Поэтому число благоприятных исходов равно $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$. Ясно, что число благоприятных исходов совпадает с числом размещений A_n^r (для благоприятного исхода необходимо осуществить упорядоченный выбор r ящиков из совокупности n ящиков и в первый из выбранных ящиков положить первый шар, во второй из выбранных ящиков положить второй шар и т. д.). Из соображений симметрии все элементарные исходы равновозможны, поэтому вероятность того, что все шары окажутся в разных ящиках, равна $\dfrac{A_n^r}{n^r}$.

ПРИМЕР 2.3. Из студенческой группы, в которой 10 студентов и 12 студенток, для анкетирования произвольным образом отбирают пять человек. Найти вероятность того, что среди них будет три студентки.

Очевидно, нас не интересует порядок, в котором выбираются студенты (все было бы иначе, если бы первого выбранного назначали старостой, второго — профоргом и т. д.). Поэтому элементарный исход — это сочетание пяти элементов из совокупности 22 элементов. Очевидно, что все элементарные исходы равновозможны. Их общее число равно C_{22}^5. Благоприятные исходы — это сочетания, в которых будет три студентки и два студента. Чтобы получить такое сочетание, надо выбрать трех студенток из общего числа 12 (число способов равно C_{12}^3) и двух студентов из общего числа 10 (число способов равно C_{10}^2).

Таким образом, число благоприятных исходов равно $C_{12}^3 \times C_{10}^2$. Поэтому искомая вероятность равна $\dfrac{C_{12}^3\cdot C_{10}^2}{C_{22}^5}$.

§ 2.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим квадрат K. Выберем наудачу точку в этом квадрате. Опишем вероятностную модель, соответствующую такому выбору. Элементарные исходы — это точки квадрата K. Случайные события — это любые квадрируемые подмножества K (т. е. такие, для которых определено понятие площади). Будем предполагать, что все элементарные исходы равновозможны в следующем смысле. Вероятность того, что наудачу выбранная точка принадлежит произвольному маленькому прямоугольнику из K будет одна и та же независимо от того, где этот прямоугольник находится. Пусть $S(A)$ означает площадь области A.

Теорема 2.2. *Вероятность того, что наудачу выбранная в квадрате K точка принадлежит подобласти A этого квадрата, равна отношению $S(A)/S(K)$.*

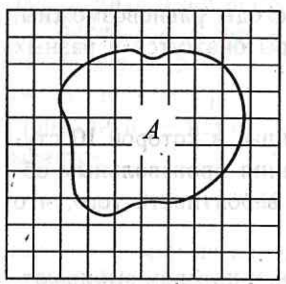


Рис. 2.1

Доказательство. Разобьем квадрат K на маленькие одинаковые прямоугольники (рис. 2.1).

Поскольку вероятность того, что наудачу выбранная точка M окажется в определенном прямоугольнике, одна и та же для всех прямоугольников, то вероятность того, что эта точка окажется в области A практически пропорциональна числу прямоугольников, находящихся внутри области A, а значит, пропорциональна площади области A (и это будет тем точнее, чем меньше выбраны прямоугольники). Итак, можно считать, что

$$P(M \in A) = cS(A), \tag{2.3}$$

где c — коэффициент пропорциональности. Рассматривая в качестве A сам квадрат K, получаем, что

$$1 = P(M \in K) = cS(K) \Rightarrow c = \frac{1}{S(K)}.$$

Подставляя найденное значение c в (2.3), получаем утверждение теоремы 2.2.

Замечание 2.3. Вместо квадрата K можно использовать любую квадрируемую область D на плоскости и считать, что наудачу выбранная в D точка окажется в подобласти A области D с вероятностью $S(A)/S(D)$. Вместо плоскости можно рассматривать пространство любой конечной размерности и выбирать наудачу точку в некоторой области этого пространства. Тогда в трехмерном пространстве при расчете вероятностей вместо понятия площади надо использовать понятие объема.

Замечание 2.4. Известно, что не все подобласти квадрата квадрируемы. Это объясняет, почему не все подмножества пространства элементарных исходов можно считать случайными событиями.

ПРИМЕР 2.4 (задача о встрече). Двое сотрудников А и Б решили встретиться в определенном месте во время обеденного перерыва, продолжающегося один час. Они договорились, что каждый приходит на место встречи, когда ему удобно, и ждет другого не более десяти минут. Найти вероятность того, что встреча произойдет.

Рассмотрим декартову систему координат (рис. 2.2). На оси Ox будем отмечать время прихода сотрудника А, а оси Oy — время прихода сотрудника Б.

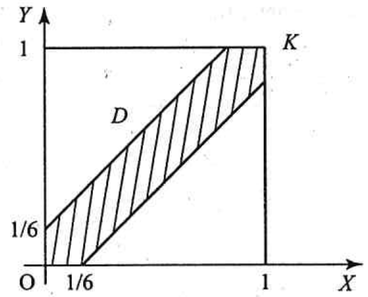


Рис. 2.2

Точка с указанными координатами представляет собой элементарный исход. Все элементарные исходы заполняют указанный на рис. 2.2 квадрат K. Очевидно, что все элементарные исходы равновозможны в указанном ранее смысле. Благоприятные исходы (x, y) составляют область $D = \{(x, y) : |x - y| \leqslant 1/6\}$ (десять минут — это 1/6 часа). На рис. 2.2 эта область заштрихована. Площадь области D легко найти, вычитая из площади квадрата K площади двух равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами длины 5/6. Итак, $S(D) = 1 - (5/6)^2 = 11/36$.

Поэтому вероятность того, что встреча произойдет равна

$$\frac{S(D)}{S(K)} = \frac{11}{36} : 1 = \frac{11}{36}.$$

Контрольные вопросы

1. Что общего у двух рассмотренных вероятностных моделей, а в чем состоит их различие?

2. Все ли вероятностные пространства с конечным числом элементарных исходов являются классическими?

3. Подойдет ли рассмотренная модель геометрических вероятностей при распределении земельных участков в строящемся городе?

4. Какое понятие вместо понятия площади надо использовать при расчете геометрических вероятностей в случае одномерного пространства?

5. Найти вероятность того, что наудачу выбранная в квадрате точка окажется на одной из диагоналей этого квадрата.

Ответы

3. Не подойдет, поскольку в городе есть как более благоприятные для жизни районы, так и менее благоприятные.

4. Понятие длины.

5. 0, поскольку площадь области, состоящей из диагоналей квадрата, равна 0.

Лекция 3

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 3.1. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Известно из аксиомы $P3$, что если A и B — несовместные случайные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$. Что будет в случае, когда A и B — совместные события?

Теорема 3.1 (сложения вероятностей). *Если A и B — произвольные случайные события, то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство. Событие $A+B$ можно представить как объединение попарно несовместных событий $A \backslash B$, AB, $B \backslash A$ (в случае выбора наудачу точки в квадрате K это разбиение $A+B$ на части показано на рис. 3.1).

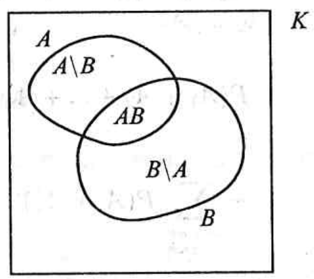


Рис. 3.1

Тогда по аксиоме $P3$

$$P(A+B) = P(A \backslash B) + P(AB) + P(B \backslash A). \quad (3.1)$$

Точно также $A = (A \backslash B) + AB$, $B = (B \backslash A) + AB$ и, следовательно,

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(AB), \quad (3.2)$$

$$P(B) = P(B \backslash A) + P(AB). \quad (3.3)$$

Складывая формулы (3.2) и (3.3), получаем, что

$$P(A) + P(B) = P(A \backslash B) + 2P(AB) + P(B \backslash A). \quad (3.4)$$

Сравнивая формулы (3.1) и (3.4), видим, что

$$P(A) + P(B) = P(A + B) + P(AB),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Замечание 3.1. Доказанная теорема не противоречит аксиоме $P3$, поскольку если A и B — несовместные события, то $P(AB) = 0$.

Замечание 3.2. Если точка наудачу выбирается в квадрате со стороной длины 1, то для любого случайного события A

$$P(A) = S(A),$$

где $S(A)$ — площадь области A. Для пересекающихся областей A и B легко видеть, что

$$S(A + B) = S(A) + S(B) - S(AB),$$

что согласуется с теоремой 3.1.

Для большего, чем два, числа событий справедливо следующее обобщение теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Для произвольных случайных событий* $A_1, A_2, ..., A_n$

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{(i,j):\\ j<y}} P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{(i,j,k):\\ i<j<k}} P(A_iA_jA_k) - ... + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \cdot ... \cdot A_n)$$

(во всех суммах индексы $i, j, k, ...$ принимают натуральные значения от 1 до n).

§ 3.2. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Введем условную вероятность $P(A|B)$. Это вероятность случайного события A при условии, что случайное событие B произошло. Как находить такую вероятность? Пусть случайный эксперимент реализован n раз. Нас интересуют только те реализации, при которых произошло событие B. Пусть их

число $n(B)$. Из этих реализаций необходимо отобрать те, которые привели к событию A. Нетрудно понять, что их число совпадает с числом реализаций, приведших к событию AB, т. е. с $n(AB)$. Разумно считать, исходя из свойства устойчивости частот, что при больших n

$$P(A|B) \approx \frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{n(AB)/n}{n(B)/n}.$$

Но числитель последней дроби близок к $P(AB)$, а знаменатель — к $P(B)$.

Итак,

$$P(A|B) \approx P(AB)/P(B), \tag{3.5}$$

и это равенство тем точнее, чем больше n. Может показаться, что условная вероятность вычислена. Но надо заметить, что пока еще не доказано свойство устойчивости частот исходя из аксиом теории вероятностей. А вот в качестве определения соотношение (3.5) можно использовать.

Определение 3.1. Пусть $P(B) \neq 0$. *Условной вероятностью* случайного события A при условии, что случайное событие B произошло, называется следующее число:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

ПРИМЕР 3.1. Из колоды карт выбирается наудачу одна карта. Рассмотрим случайные события

$$A = \{\text{выбран туз}\}, \quad B = \{\text{выбрана фигура}\}.$$

Найти $P(A|B)$.

Всего имеется 36 элементарных исходов. Событию B благоприятны 16 элементарных исходов. Событие AB совпадает с событием A, которому благоприятны четыре элементарных исхода.

Следовательно, $P(B) = 16/36, P(AB) = 4/36$ и

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Замечание 3.3. В случае классической вероятной модели при расчете условной вероятности $P(A|B)$ можно рассматривать только те элементарные исходы, которые приводят к событию B, и считать их равновозможными. Из этих исходов надо отобрать те, которые приводят к событию A, и их число разделить на число элементарных исходов, благоприятных событию B. Это и будет $P(A|B)$. В рассмотренном примере 3.1 из 16 элементарных исходов, благоприятных событию B, четыре элементарных исхода благоприятны событию A. Следовательно,

$$P(A|B) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

Теорема 3.3 (умножения вероятностей). *Пусть A_1, $A_2, ..., A_n$ — произвольные случайные события, тогда*

$$P(A_1A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\times$$
$$\times P(A_3|A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}).$$

Доказательство (при $n = 3$). По определению условной вероятности

$$P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) =$$
$$= P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)} = P(A_1A_2A_3),$$

что требовалось доказать.

ПРИМЕР 3.2 (задача о совпадениях). Пусть имеется n различных писем, и они наудачу раскладываются по подписанным конвертам. Какова вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в нужный конверт?

Пронумеруем письма и введем случайные события

$$A = \{\text{хотя бы одно письмо попало в нужный конверт}\},$$

$$A_i = \{i - \text{е письмо попало в свой конверт}\}, i = 1, 2, ..., n.$$

Ясно, что

$$A = A_1 + A_2 + ... + A_n. \tag{3.6}$$

Вероятность того, что первое письмо попадет в свой конверт, равна $1/n$ (один благоприятный исход из n равновозможных). Поэтому

$$P(A_1) = \frac{1}{n}.$$

Точно также для любого i:

$$P(A_i) = \frac{1}{n}. \tag{3.7}$$

Вероятность того, что второе письмо попадет в свой конверт при условии, что первое попало в свой конверт, равна $1/(n - 1)$ (один благоприятный исход из $(n-1)$ равновозможных). Итак,

$$P(A_2|A_1) = \frac{1}{n-1}.$$

По теореме умножения вероятностей

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Точно так же при любых различных i, j

$$P(A_iA_j) = \frac{1}{n(n-1)}. \tag{3.8}$$

Вероятность того, что третье письмо попадет в свой конверт при условии, что и первое, и второе письма попали в свои конверты, равна $1/(n-2)$. Поэтому по теореме умножения вероятностей

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

Точно так же при любых различных i, j, k:

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \tag{3.9}$$

и т. д. Ввиду (3.6) по теореме сложения вероятностей

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) +$$
$$+ \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - ... + (-1)^{n+1}P(A_1A_2 \cdot ... \cdot A_n).$$

В первой сумме n одинаковых слагаемых (3.7), во второй сумме C_n^2 одинаковых слагаемых (3.8), в третьей сумме C_n^3 одинаковых слагаемых (3.9) и т. д. Поэтому

$$P(A) = n\frac{1}{n} - C_n^2\frac{1}{n(n-1)} +$$
$$+ C_n^3\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}.$$

Поскольку $C_n^2 = n(n-1)/2!, C_n^3 = n(n-1)(n-2)/3!$ и т. д., то

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.$$

Вспомним, что при любом x

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Поэтому при больших n

$$P(A) \approx 1 - e^{-1}.$$

§ 3.3. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Определение 3.2. Случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ составляют *полную группу событий*, если

1) объединение событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ совпадает с пространством элементарных исходов Ω;

2) события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны.

В случае выбора наудачу точки в квадрате K полная группа событий $A_1, \ldots, A_6$ показана на рис. 3.2.

Теорема 3.4. *Если случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ составляют полную группу событий, то для любого случайного события A справедлива формула полной вероятности*

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + \ldots + P(A_n)P(A|A_n).$$

Доказательство. Из первого свойства полной группы событий следует, что

$$A = AA_1 + AA_2 + \ldots + AA_n,$$

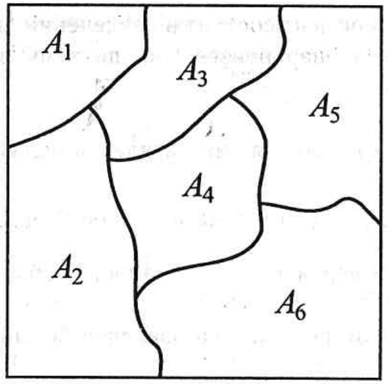


Рис. 3.2

а из второго — следует, что события $AA_1, AA_2, \ldots, AA_n$ попарно несовместны, поэтому по следствию 1.2

$$P(A) = P(AA_1) + P(AA_2) + \ldots + P(AA_n).$$

По теореме умножения вероятностей первая вероятность в правой части равна $P(A_1)P(A|A_1)$, вторая — $P(A_2)P(A|A_2)$,..., последняя — $P(A_n)P(A|A_n)$, откуда следует утверждение теоремы.

Формула полной вероятности находит широкое применение в теории вероятностей. Пусть проводится такой двухступенчатый случайный эксперимент, что для проведения второго эксперимента нужно знать результат первого эксперимента. Если надо рассчитать вероятность случайного события, связанного со вторым экспериментом, то следует ввести полную группу событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, представляющих собою всевозможные различные исходы первого эксперимента, и воспользоваться формулой полной вероятности.

ПРИМЕР 3.3. Пусть в первом ящике имеется n_1 белых и m_1 черных шаров, а во втором — n_2 белых и m_2 черных шаров. Из первого ящика наудачу извлекается один шар и перекладывается во второй, а затем из второго ящика наудачу извлекается один шар. Найти вероятность того, что этот последний шар белый.

Первый эксперимент состоит в извлечении шара из первого ящика. Какой это шар неизвестно, поэтому введем полную группу событий:

$$A_1 = \{\text{из первого ящика извлечен белый шар}\},$$

$$A_2 = \{\text{из первого ящика извлечен черный шар}\}.$$

Требуется найти вероятность случайного события

$$A = \{\text{из второго ящика извлечен белый шар}\},$$

связанного со вторым экспериментом — извлечением шара из второго ящика. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2). \tag{3.10}$$

Очевидно,

$$P(A_1) = \frac{n_1}{n_1+m_1}, P(A_2) = \frac{m_1}{n_1+m_1}. \tag{3.11}$$

Если произошло событие A_1, то во втором ящике имеется (n_2+1) белых и m_2 черных шаров, следовательно,

$$P(A|A_1) = \frac{n_2+1}{n_2+1+m_2}. \tag{3.12}$$

Аналогично

$$P(A|A_2) = \frac{n_2}{n_2+m_2+1}. \tag{3.13}$$

Подставляя найденные выражения для вероятностей (3.11)–(3.13) в формулу (3.10), получаем, что

$$P(A) = \frac{n_1}{n_1+m_1}\cdot\frac{n_2+1}{n_2+m_2+1} + \frac{m_1}{n_1+m_1}\cdot\frac{n_2}{n_2+m_2+1} =$$

$$= \frac{n_1(n_2+1)+m_1n_2}{(n_1+m_1)(n_2+m_2+1)}.$$

§ 3.4. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ — полная группа событий. Если наступило некоторое случайное событие A, то вместо первоначальных вероятностей $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$, которые называются априорными, разумнее рассматривать вероятности $P(A_1|A), P(A_2|A), ..., P(A_n|A)$, которые называются апостериорными.

Пусть, например, $A_1, A_2, ..., A_n$ — возможные виды заболеваний в данном регионе в данное время, тогда вероятности $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$ дают представление о частоте этих заболеваний. Но если к врачу приходит пациент с симптомами A, то, очевидно, при диагностике заболевания важнее рассматривать вероятности $P(A_1|A), P(A_2|A), ..., P(A_n|A)$, дающие представление о частоте заболеваний при данных симптомах. Как вычислять апостериорные вероятности?

Теорема 3.5. *Если $A_1, A_2, ..., A_n$ — полная группа событий, то справедлива формула Байеса*

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k)P(A|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Доказательство. По определению условной вероятности

$$P(A_k|A) = \frac{P(AA_k)}{P(A)}.$$

Заменив числитель на $P(A_k)P(A|A_k)$ по теореме умножения вероятностей, а знаменатель на $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i)$ по формуле полной вероятности, получим утверждение теоремы.

ПРИМЕР 3.4. Рассмотрим случайный эксперимент, описанный в примере 3.3. Пусть известно, что из второго ящика извлекается белый шар, найти вероятность того, что из первого ящика был извлечен белый шар.

Воспользуемся обозначениями, введенными в примере 3.3. Нас интересует вероятность $P(A_1|A)$, которая может быть вычислена по формуле Байеса:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2)}.$$

Подставляя найденные в соотношениях (3.11)–(3.13) выражения для всех вероятностей в правой части, получаем, что

$$P(A_1|A) = \frac{n_1(n_2+1)}{n_1(n_2+1)+m_1n_2}.$$

Контрольные вопросы

1. Выпишите полностью формулу для вероятности $P(A_1 + A_2 + A_3)$ (см. теорему 3.2).
2. Обоснуйте замечание 3.3.
3. Обоснуйте определение 3.1 условной вероятности на примере модели выбора наудачу точки в квадрате.
4. Среди случайных событий, связанных со случайным экспериментом, выделяют, с одной стороны, элементарные исходы. С другой стороны, среди случайных событий можно выделить полную группу событий. Что общего между этими двумя процедурами, а в чем их отличие?
5. Поясните, какие вероятности в случае двухступенчатого эксперимента рассчитываются с помощью формулы полной вероятности, а какие с помощью формулы Байеса.

Ответы

1. $P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$.

Лекция 4

НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

§ 4.1. НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Какие случайные события A и B следует считать независимыми в вероятностном смысле? Осуществилось или нет событие B — это никак не должно сказываться на вероятности события A, и наоборот, т. е.

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B).$$

По определению условной вероятности это означает, что

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A), \quad \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B) \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B).$$

Определение 4.1. Случайные события A и B называются *независимыми*, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

Определение 4.2. Случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми*, если $P(A_1A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$ и аналогичное равенство выполняется для любой части этой совокупности событий. В частности, три события A, B, C называются независимыми, если

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C),$$

$$P(BC) = P(B)P(C).$$

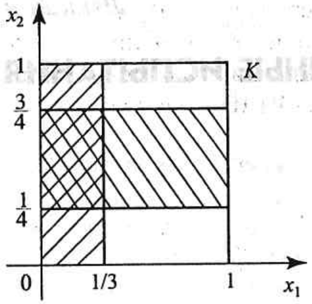


Рис. 4.1

ПРИМЕР 4.1. Пусть точка наудачу выбирается в квадрате K (рис. 4.1).

Тогда случайные события A_1 и A_2, связанные соответственно с первой и второй координатами этой точки, являются независимыми. Пусть, например,

$$A_1 = \{\text{первая координата меньше } 1/3\},$$

$$A_2 = \{\text{вторая координата принадлежит } [1/4, 3/4]\},$$

т. е.

$$A_1 = \{(x_1, x_2) : \ 0 \leqslant x_1 < 1/3, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\},$$
$$A_2 = \{(x_1, x_2) : \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 1/4 \leqslant x_2 \leqslant 3/4\}.$$

Тогда $S(A_1) = 1/3$, $S(A_2) = 1/2$. Очевидно,

$$A_1A_2 = \{(x_1, x_2) : \ 0 \leqslant x_1 \leqslant 1/3, \ 1/4 \leqslant x_2 \leqslant 3/4\}$$

и $S(A_1A_2) = (1/3) \cdot (1/2)$. Вспоминая, как вычисляются геометрические вероятности, получаем, что

$$P(A_1) = 1/3, \ P(A_2) = 1/2, \ P(A_1A_2) = 1/6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2),$$

таким образом, случайные события A_1 и A_2 являются независимыми.

Тот факт, что случайные события $A_1, A_2, ..., A_n$ являются независимыми, позволяет вычислять вероятность любого случайного события, полученного из $A_1, A_2, ..., A_n$ в результате применения операций объединения, пересечения, нахождения разности, зная лишь вероятности событий $A_1, A_2, ..., A_n$. В частности, справедлив следующий результат.

Теорема 4.1. *Если $A_1, A_2, ..., A_n$ — независимые случайные события, то*

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)).$$

Доказательство. Событие, противоположное к событию $A_1 + A_2 + ... + A_n$, означает, что не произошло ни одно из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, т. е. произошли сразу все события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$. Поэтому по следствию 1.1 (см. лекцию № 1)

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \cdot ... \cdot \bar{A}_n). \tag{4.1}$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимые, то и противоположные события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$ независимые, поэтому

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2 \cdot ... \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdot ... \cdot P(\bar{A}_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i)). \tag{4.2}$$

Из соотношений (4.1) и (4.2) следует утверждение теоремы.

ПРИМЕР 4.2. Вероятность невыхода из строя в течение времени T i-го элемента цепи, указанной на рис. 4.2, равна p_i. Все элементы цепи функционируют независимо друг от друга. Найти вероятность того, что вся цепь не выйдет из строя в течение времени T.

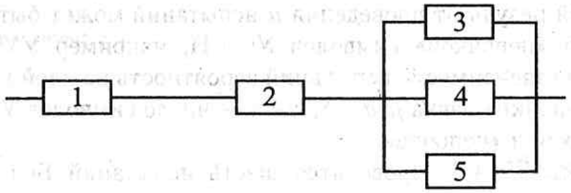


Рис. 4.2

Введем случайные события

$$A = \{\text{вся цепь не выйдет из строя в течение времени } T\},$$

$$A_i = \{i\text{-й элемент не выйдет из строя в течение времени } T\},$$
$$i = 1, ..., 5.$$

Тогда

$$A = A_1A_2(A_3 + A_4 + A_5).$$

Поскольку случайные события $A_1, A_2, ..., A_5$ независимые, то независимы события A_1, A_2 и $A_3 + A_4 + A_5$. По определению независимых событий

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3 + A_4 + A_5). \quad (4.3)$$

Ясно, что $P(A_i) = p_i$, $i = 1, ..., 5$. По теореме 4.1

$$P(A_3+A_4+A_5) = 1-(1-P(A_3))(1-P(A_4))(1-P(A_5)). \quad (4.4)$$

Из формул (4.3) и (4.4) находим искомую вероятность:

$$P(A) = p_1p_2[1-(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5)].$$

§ 4.2. ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ

Так называются независимые испытания с двумя исходами: успех (У) и неудача (Н), причем вероятность успеха в каждом испытании одна и та же p (тогда вероятность неудачи в каждом испытании $q = 1 - p$). Испытаниями Бернулли являются последовательные выстрелы по мишени (успех — попадание, неудача — промах), покупка лотерейных билетов (успех — выигрышный билет, неудача — проигрышный) и т. п. Каждый результат проведения n испытаний может быть представлен «цепочкой» символов У и Н, например УУНУ...Н. Ввиду независимости испытаний вероятность каждой конкретной «цепочки» равна p^kq^{n-k}, где k — число символов У, встречающихся в «цепочке».

ПРИМЕР 4.3. Проводятся шесть испытаний Бернулли с вероятностью успеха p. Найти вероятность того, что успех и неудача чередуются.

Подходят только две «цепочки» УНУНУН и НУНУНУ. Вероятность каждой из них равна p^3q^3. Поскольку эти «цепочки» не могут реализоваться одновременно, то искомая вероятность равна $2p^3q^3$.

Теорема 4.2. *Пусть μ_n означает число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p. Справедлива формула Бернулли:*

$$P(\mu_n = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

Доказательство. Рассмотрим «цепочки», в которых символ У встречается k раз, а символ Н соответственно $(n - k)$

раз. Вероятность каждой такой «цепочки» равна p^kq^{n-k}. Число таких «цепочек» равно числу способов выбрать k мест из n возможных (в «цепочке» длины n) для символа У. Это число равно C_n^k. Разные «цепочки» представляют собой попарно несовместимые события, поэтому интересующая нас вероятность равна $C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$, что и требовалось доказать.

Если n велико, то вычисления по формуле Бернулли слишком трудоемки, поэтому для нахождения $P(\mu_n = k)$ применяются различные приближенные формулы в зависимости от соотношения между n, p и k.

Теорема 4.3 (Пуассон). *Пусть $n \to \infty$, $p \to 0$ так, что $np \to a$, причем $a \in (0, +\infty)$. Тогда*

$$P(\mu_n = k) \to \frac{a^k}{k!}e^{-a}$$

при любом фиксированном k, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Положим $a_n = np$. Тогда по условию теоремы

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \quad (4.5)$$

По теореме 4.2

$$P(\mu_n = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k}.$$

Заменим p на a_n/n, q на $(1 - a_n/n)$ и вспомним, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$

Тогда

$$P(\mu_n = k) = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{1(1-1/n)\cdot\ldots\cdot(1-(k-1)/n)}{k!}a_n^k\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{n-k}. \quad (4.6)$$

При фиксированном k

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1(1-1/n)\cdot\ldots\cdot(1-(k-1)/n)}{k!} = \frac{1}{k!}.$$

Ввиду (4.5)

$$\lim_{n\to\infty} a_n^k = a^k.$$

Вспоминая, как находятся пределы «типа e», получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}(n-k)a_n/n} = e^{-a}.$$

Следовательно, предел правой части соотношения (4.6) равен $a^k e^{-a}/k!$, что и требовалось доказать.

Замечание 4.1. Приближенную формулу

$$P(\mu_n = k) \approx \frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

где $a = np$, целесообразно использовать, когда

$$n \gg k^2, \quad np^2 \ll 1, \quad kp \ll 1. \tag{4.7}$$

ПРИМЕР 4.4. Предполагая рождение ребенка в любой день года равновозможным, найти вероятность того, что в группе из 200 человек ровно трое родились 1 января.

Если ребенок родился 1 января, то будем считать это успехом, а в противоположном случае — неудачей. Вероятность успеха равна $p = 1/365$. Число испытаний равно $n = 200$. Нас интересует вероятность того, что число успехов равно $k = 3$. Условия (4.7) выполнены, поэтому

$$P(\mu_{200} = 3) \approx \frac{a^3}{3!}e^{-a}, \tag{4.8}$$

где $a = 200/365$. Вычисляя правую часть (4.8) с помощью калькулятора, получаем, что

$$P(\mu_{200} = 3) \approx 0{,}0159.$$

§ 4.3. ПРОСТЕЙШИЙ ПОТОК СОБЫТИЙ

Пусть мы наблюдаем за временем наступления некоторых однородных событий (телефонные звонки в какое-нибудь учреждение, дорожно-транспортные происшествия в каком-нибудь городе и т. п.). Поток событий называется *простейшим,* если он обладает тремя свойствами:

1) вероятностные характеристики потока событий на произвольном временном промежутке $[t_1, t_2]$ зависят от длины промежутка, но не зависят от его начала;

2) вероятность наступления более одного события за время $\triangle t$ есть $o(\triangle t)$ при $\triangle t \to 0$;

3) поведение потока событий на произвольном временном промежутке $[t_1, t_2]$ не зависит (в вероятностном смысле) от его поведения до момента времени t_1.

Обозначим $P_k(t)$ вероятность наступления ровно k событий на временном промежутке длины t. Можно показать, что

$$P_1(\triangle t) = \lambda\triangle t + o(\triangle t), \tag{4.9}$$

где λ — положительная постоянная, называемая *интенсивностью* простейшего потока.

Теорема 4.4. *Если поток является простейшим с интенсивностью λ, то*

$$P_k(t) = \frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

где $a = \lambda t$.

Доказательство. Разобьем промежуток длины t на n равных частей длины $\Delta t = t/n$. В силу свойства 2 простейшего потока можно считать, что на каждом из получившихся маленьких промежутков может произойти либо одно событие (будем считать это успехом), либо ни одного события (неудача). Таким образом, имеем n испытаний, причем в силу свойства 3 простейшего потока эти испытания независимые. Вероятность успеха ввиду (4.9) равна $p = (\lambda t)/n + o(1/n)$. Если устремить n в бесконечность, то $p \to 0$, $np \to \lambda t$ и, значит, в силу теоремы 4.3 вероятность того, что будет ровно k успехов в n испытаниях, стремится к $a^k e^{-a}/k!$, где $a = \lambda t$. Теорема доказана.

Замечание 4.2. Позже покажем, что интенсивность простейшего потока λ совпадает со средним числом событий за единицу времени.

ПРИМЕР 4.5. В некотором городе среднее число дорожно-транспортных происшествий за сутки равно 5. Найти вероятность того, что за двое суток будет 10 дорожно-транспортных происшествий.

Единица времени — сутки. Интенсивность простейшего потока равна $\lambda = 5$. Нас интересует $P_{10}(2)$. По теореме 4.4

$$P_{10}(2) = \frac{10^{10}}{10!}e^{-10} \approx 0,1251.$$

Контрольные вопросы

1. Вспомните определение несовместных событий и сравните его с определением независимых событий.
2. Покажите, что если A и B — независимые события, причем $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, то A и B — совместные события.
3. Пусть A и B — независимые события. Найдите $P(A \backslash B)$.
4. Можно ли найти $P(A \backslash B)$, зная лишь вероятности случайных событий A и B, и без предположения о независимости A и B?
5. Покажите, что если A, B, C — независимые события, то $A+B$ и C — независимые события.
6. Приведите пример потока событий, не являющегося простейшим.

Ответы

2. $P(AB) = P(A)P(B) \neq 0 \Rightarrow AB \neq \phi$.
3. $P(A \backslash B) = P(A)(1 - P(B))$.
4. Нельзя.
5. $P((A+B)C) = P(AC+BC) = P(AC)+P(BC)-P(ABC) = P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) = \Big(P(A) + P(B) - P(AB)\Big)P(C) = P(A+B)P(C)$.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ЕЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Каждый случайный эксперимент завершается элементарным исходом ω. Лучше всего итог эксперимента подводить в виде числа, т. е. вместо ω рассматривать число $\xi(\omega)$.

Определение 5.1. Случайной величиной называется числовая функция от элементарного исхода ω, заданная на пространстве элементарных исходов Ω :

$$\xi = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

В математическом анализе в первую очередь исследуется зависимость значения функции от значения аргумента. В теории вероятностей эта зависимость играет не первую роль, важно знать вероятностные характеристики случайной величины, например вероятности следующих случайных событий: $\{\omega : \xi(\omega) \in [a, b]\}$, $\{\omega : \xi(\omega) > a\}$ и т. п. (здесь a, b — постоянные).

Определение 5.2. Функцией распределения случайной величины ξ называется числовая функция $F(x)$, определяемая равенством

$$F(x) = P(\xi \leqslant x), \quad x \in R.$$

Здесь для краткости написано $P(\xi \leqslant x)$ вместо $P(\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\})$. Множество $\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\}$ может и не принадлежать алгебре случайных событий $\mathcal{F}$, значит, вероятность этого множества может быть не определена. Поэтому будем предполагать, что если ξ — случайная величина, то для любого $x \in R$ случайное событие $\{\omega : \xi(\omega) \leqslant x\}$ принадлежит алгебре случайных событий $\mathcal{F}$.

ПРИМЕР 5.1. Пусть точка наудачу выбирается в треугольнике D (рис. 5.1) и ξ — первая координата этой точки. Найти функцию распределения случайной величины ξ.

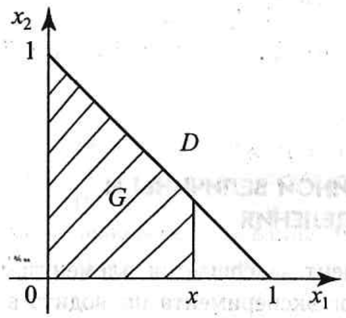


Рис. 5.1

Элементарные исходы — это точки (x_1, x_2), принадлежащие D. По определению $\xi(x_1, x_2) = x_1$. Рассмотрим $x \in [0,1]$. Случайному событию $\{\xi \leqslant x\}$ благоприятствуют элементарные исходы $\{(x_1, x_2) : x_1 \leqslant x\}$ (заштрихованная область G на рис. 5.1).

По определению геометрических вероятностей

$$P(\xi \leqslant x) = \frac{S(G)}{S(D)} = \frac{1/2 - (1-x)^2/2}{1/2} = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2.$$

Итак, при $x \in [0,1]$ $F(x) = 2x - x^2$. При $x \in (-\infty, 0)$, очевидно, событие $\{\xi \leqslant x\}$ является невозможным и его вероятность равна 0, следовательно, $F(x) = 0$. При $x \in (1, +\infty)$ событие $\{\xi \leqslant x\}$ является достоверным и его вероятность равна 1, следовательно, $F(x) = 1$. Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0); \\ 2x - x^2, & x \in [0,1]; \\ 1, & x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

§ 5.2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для изучения свойств функций распределения потребуется еще одна аксиома вероятностного пространства.

Аксиома непрерывности. 1) Если случайные события $A_1, A_2, A_3, \ldots$ таковы, что $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, то множество

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ (состоит из элементарных исходов, принадлежащих сразу всем A_i) является случайным событием и

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i).$$

2) Если случайные события $A_1, A_2, A_3, \ldots$ таковы, что $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, то множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (состоит из элементарных исходов, принадлежащих хотя бы одному A_i) является случайным событием и

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i).$$

Свойство 1. *Функция распределения $F(x)$ не убывает на всей числовой прямой.*

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Ясно, что

$$\{\xi \leqslant x_2\} = \{\xi \leqslant x_1\} + \{\xi \in (x_1, x_2]\},$$

причем последние два случайных события являются несовместными, поэтому по аксиоме $P3$

$$P(\xi \leqslant x_2) = P(\xi \leqslant x_1) + P(\xi \in (x_1, x_2]). \tag{5.1}$$

Поскольку $P(\xi \in (x_1, x_2]) \geqslant 0$, отсюда следует, что

$$P(\xi \leqslant x_2) \geqslant P(\xi \leqslant x_1) \ \Rightarrow\ F(x_2) \geqslant F(x_1).$$

Свойство 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Доказательство. Введем случайные события $A_i = \{\xi \leqslant -i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$, поэтому по аксиоме непрерывности

$$0 = P(\phi) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} P(\xi \leqslant -i) = \lim_{i\to\infty} F(-i).$$

Откуда, учитывая свойство 1, получаем требуемое утверждение.

Свойство 3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Устанавливается аналогично свойству 2.

Свойство 4. Функция распределения $F(x)$ непрерывна справа на всей числовой оси. Если в точке x_0 функция $F(x)$ имеет разрыв, то он является разрывом первого рода и

$$P(\xi = x_0) = F(x_0) - F(x_0 - 0). \tag{5.2}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим произвольное x и случайные события $A_i = \{\xi \leqslant x + 1/i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\xi \leqslant x\}$. Поэтому по аксиоме непрерывности

$$F(x) = P(\xi \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} P(\xi \leqslant x + 1/i) = \lim_{i\to\infty} F(x + 1/i).$$

Откуда, опять учитывая свойство 1, получаем, что $F(x)$ непрерывна справа.

Для доказательства (5.2) рассмотрим случайные события $A_i = \{\xi \in (x_0 - 1/i, x_0]\}$, $i = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\xi = x_0\}$, и в силу аксиомы непрерывности и соотношения (5.1):

$$P(\xi = x_0) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} P(A_i) = \lim_{i\to\infty} P(\xi \in (x_0 - 1/i, x_0]) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} [P(\xi \leqslant x_0) - P(\xi \leqslant x_0 - 1/i)] =$$
$$= F(x_0) - \lim_{i\to\infty} F(x_0 - 1/i) = F(x_0) - F(x_0 - 0).$$

Замечание 5.1. Зная функцию распределения, можно найти вероятности $P(\xi \in B)$ для различных множеств B на числовой оси. В частности,

$$P(\xi > x) = 1 - F(x),$$
$$P(\xi \in (a, b]) = F(b) - F(a),$$
$$P(\xi \in [a, b]) = F(b) - F(a - 0),$$
$$P(\xi \in (a, b)) = F(b - 0) - F(a).$$

Из свойств функции распределения следует, что типичный график $F(x)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.2.

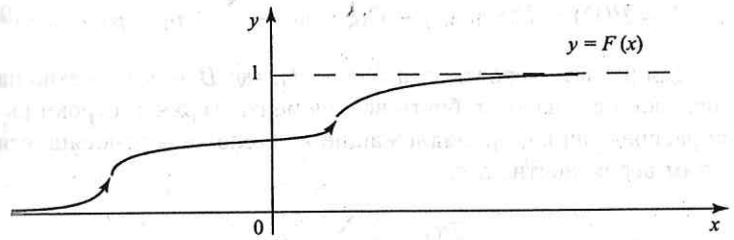


Рис. 5.2

§ 5.3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 5.3. Случайная величина ξ называется *дискретной,* если она принимает конечное или счетное число значений.

Определение 5.4. Рядом распределения дискретной случайной величины ξ называется таблица, в верхней строке которой указываются возможные значения $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ случайной величины ξ, а в нижней — вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, с которыми эти значения принимает случайная величина ($p_n = P(\xi = a_n)$) :

ξ	a_1	a_2	...	a_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Очевидно, $p_n \geqslant 0$ для любого n. Кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Действительно (ограничимся случаем конечного числа возможных значений),

$$\Omega = \{\xi = a_1\} \cup \{\xi = a_2\} \cup \ldots,$$

причем все случайные события справа попарно несовместны, поэтому по следствию 1.2 (см. лекцию № 1)

$$1 = P(\Omega) = P(\xi = a_1) + P(\xi = a_2) + \ldots = p_1 + p_2 + \ldots$$

Для расчета вероятности $P(\xi \in B)$, где B — множество на числовой оси, надо отобрать все элементы верхней строки ряда распределения, принадлежащие B, и сложить относящиеся к ним вероятности, т. е.

$$P(B) = \sum_{\substack{n:\\ a_n \in B}} p_n.$$

ПРИМЕР 5.2. Пусть бросаются два игральных кубика и ξ — суммарное число выпавших очков. Найти ряд распределения ξ и по нему найти $P(\xi \leqslant 4)$.

Возможные значения ξ есть $2, 3, \ldots, 12$. Элементарные исходы — это пары чисел (n_1, n_2), где n_1 — число выпавших очков на первом кубике, а n_2 — на втором. Тогда

$$\xi(n_1, n_2) = n_1 + n_2.$$

Очевидно, $\{\xi = 2\} = \{(n_1, n_2) : n_1 + n_2 = 2\} = \{(1, 1)\}$. Поэтому

$$P(\xi = 2) = \frac{1}{36}.$$

Аналогично, $\{\xi = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow P(\xi = 3) = 2/36 = 1/18$ и т. д. В итоге получаем ряд распределения

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Событие $\{\xi \leqslant 4\}$ осуществляется, если ξ принимает значения $2, 3, 4$. Складывая соответствующие вероятности, получаем, что

$$P(\xi \leqslant 4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

В схеме испытаний Бернулли и в простейшем потоке используются следующие важные дискретные распределения.

Определение 5.5. Говорят, что случайная величина ξ имеет *биномиальное распределение* с параметрами p, n, где $p \in (0, 1)$, n — натуральное число, если ξ принимает значения $0, 1, \ldots, n$ и

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{5.3}$$

(здесь $q = 1 - p$).

Случайная величина μ_n, равная числу успехов в n испытаниях Бернулли, имеет биномиальное распределение.

Определение 5.6. Говорят, что случайная величина ξ имеет *распределение Пуассона* с параметром a, если ξ принимает значения $0, 1, 2, \ldots$ и

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

Случайная величина, равная числу событий в простейшем потоке за время t, имеет распределение Пуассона с параметром λt, где λ — интенсивность простейшего потока.

§ 5.4. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 5.7. Случайная величина ξ называется *непрерывной,* если она принимает все значения из некоторого промежутка числовой оси и при этом существует такая неотрицательная числовая интегрируемая функция $p(x)$, что для любого отрезка $[a, b]$ (конечного или бесконечного):

$$P(\xi \in [a, b]) = \int_a^b p(x)dx. \tag{5.5}$$

Эта функция $p(x)$ называется *плотностью вероятностей.*

Итак, $p(x) \geqslant 0$ при любом x и $(a = -\infty, b = +\infty)$ выполняется равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Имеется простая связь между плотностью вероятностей и функцией распределения:

а) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$;

б) $p(x) = F'(x)$ в точках непрерывности $p(x)$.

Свойство а) следует из соотношения (5.5) ($a = -\infty$, $b = x$). Свойство б) вытекает из теоремы о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу.

ПРИМЕР 5.3. Найти плотность вероятностей случайной величины ξ из примера 5.1.

Поскольку $p(x) = F'(x)$ в точках непрерывности $p(x)$, то при $x \in (0,1)$:

$$p(x) = F'(x) = (2x - x^2)' = 2 - 2x.$$

При $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ $p(x) = F'(x) = 0$. Значения $p(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$ не играют никакой роли, поскольку они не отразятся на вероятностях $P(\xi \in [a, b])$ из соотношения (5.5).

Очевидно, что если ξ — непрерывная случайная величина и $\triangle x$ мало, то

$$P(\xi \in [x, x + \triangle x]) \approx p(x)\triangle x. \qquad (5.6)$$

Отсюда понятен смысл названия $p(x)$ (вспомните, для того чтобы найти массу маленького отрезка $[x, x + \triangle x]$ прямой с плотностью массы $\rho(x)$, надо $\rho(x)$ умножить на $\triangle x$). Соотношение (5.6) удобно использовать для приближения непрерывной случайной величины ξ дискретной случайной величиной. Пусть ξ измеряется некоторым прибором с ценой деления $\triangle x$. В результате измерения вместо ξ получаем новую дискретную случайную величину $\hat{\xi}$, принимающую значения $x_1, x_2, ...$, причем $\triangle x_i = x_{i+1} - x_i = \triangle x$. Будем считать, что $\hat{\xi} = x_i$, если $\xi \in [x_i, x_{i+1})$. Тогда

$$P(\hat{\xi} = x_i) = P(\xi \in [x_i, x_{i+1})) \approx p(x_i)\triangle x.$$

Итак, непрерывная случайная величина ξ близка к дискретной случайной величине $\hat{\xi}$ с рядом распределения

$\hat{\xi}$	x_1	x_2	...
P	$p(x_1)\triangle x$	$p(x_2)\triangle x$	...

Дадим определение некоторых важных непрерывных распределений.

Определение 5.8. Говорят, что случайная величина ξ имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$ (краткая запись: $\xi \sim U[a, b]$), если ξ непрерывна и

$$p(x) = \begin{cases} 1/(b-a), x \in [a, b]; \\ 0, \quad x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Определение 5.9. Говорят, что случайная величина ξ имеет *показательное распределение* с параметром $\lambda \in (0, +\infty)$ (краткая запись: $\xi \sim \exp(\lambda)$), если ξ непрерывна и

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geqslant 0; \\ 0, \quad x < 0. \end{cases}$$

Определение 5.10. Говорят, что случайная величина ξ имеет *нормальное распределение* с параметрами $a, \sigma^2 \neq 0$ (краткая запись: $\xi \sim N(a; \sigma^2)$), если ξ непрерывна и

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Графики указанных плотностей распределения изображены на рис. 5.3.

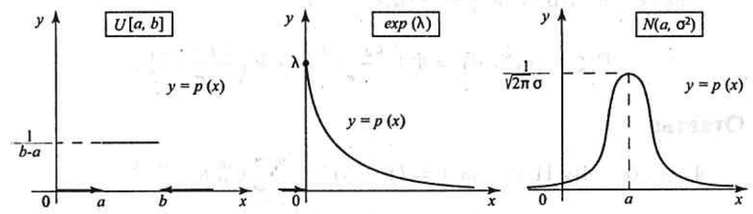


Рис. 5.3

Равномерное распределение используется в методе приближенных вычислений, известном под названием метод Монте-Карло. Показательному распределению подчинено время службы электротехнических приборов. Нормальному распределению подчинены такие случайные величины, как ошибка результата измерения какой-нибудь физической величины, отклонение снаряда от цели, рост и вес человека и т. п.

Контрольные вопросы

1. Докажите соотношения из замечания 5.1.

2. Почему на ваш взгляд понятие ряда распределения для дискретной случайной величины удобнее понятия функции распределения?

3. Как выглядит график функции распределения дискретной случайной величины?

4. Докажите непосредственно, что сумма всех вероятностей из формулы (5.3) действительно равна 1.

5. Докажите непосредственно, что сумма всех вероятностей из формулы (5.4) действительно равна 1.

6. Пусть $p(x)$ — плотность вероятностей некоторой случайной величины. О чем говорит неравенство $p(x_2) > p(x_1)$?

7. Пусть точка наудачу выбирается на отрезке $[a, b]$ и ξ — координата этой точки. Докажите, что $\xi \sim U[a, b]$.

8. Пусть τ — время ожидания первого события в простейшем потоке с интенсивностью λ. Докажите, что $\tau \sim \exp(\lambda)$.

9. Введем функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

Докажите, что если $\xi \sim N(a; \sigma^2)$, то

$$P(\xi \in [x_1, x_2]) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right).$$

Ответы

4. По биному Ньютона $1 = (p+q)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$.

5. Поскольку $e^a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = 1$.

8. Случайное событие $\{\tau > t\}$ означает, что за время t не произошло ни одного события в простейшем потоке. Поэтому при $t \in [0, +\infty)$ $P(\tau > t) = P_0(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow P(\tau \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Чтобы найти плотность вероятностей $p(t)$, надо продифференцировать функцию распределения: $p(t) = (1 - e^{-\lambda t})' = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \in [0, +\infty)$.

9. По определению плотности вероятностей

$$P(\xi \in [x_1, x_2]) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx.$$

Делая замену $\frac{x-a}{\sigma} = u$, получаем

$$P(\xi \in [x_1, x_2]) = \int\limits_{(x_1-a)/\sigma}^{(x_2-a)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = \Phi\left(\frac{x_2 - u}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - u}{\sigma}\right).$$

является квантиль $u_{1-\varepsilon}$ уровня $(1-\varepsilon)$ t-распределения с $(n+m-2)$ степенями свободы. Итак,

$$\sqrt{\frac{n+m-2}{(1/n)+(1/m)}}\cdot r = u_{1-\varepsilon} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{(1/n)+(1/m)}{n+m-2}}\cdot u_{1-\varepsilon}.$$

Если $t \in A_0$, то принимается гипотеза H_0; если же $t \in A_1$, то принимается альтернатива H_1.

Замечание 15.1. Во всех разобранных в этой лекции примерах рассмотренные альтернативы можно заменить на альтернативы другого вида, как это было сделано в конце предыдущей лекции. Соответствующие изменения в построении критериев очевидны.

Контрольные вопросы

1. Опишите критерий проверки гипотезы о значении математического ожидания при известной дисперсии для произвольной выборки большого объема (не обязательно нормальной).
2. Опишите критерий проверки гипотезы о значении математического ожидания при неизвестной дисперсии в случае нормальной выборки. Можно ли этот критерий использовать в случае, когда дисперсия известна?
3. Пусть в случае нормальной выборки проверяется гипотеза H_0: $DX = \sigma_0^2$ против альтернативы H_1: $DX < \sigma_0^2$. Как будет выглядеть область принятия гипотезы H_0, если статистика критерия есть s^2?
4. Почему при проверке гипотезы о совпадении дисперсий двух нормальных выборок важно предположение о независимости этих выборок?
5. Объясните, почему статистики ξ и η, используемые при проверке гипотезы о совпадении математических ожиданий двух нормальных выборок, являются независимыми?

Ответы

3. Правая полуось, включающая точку σ_0^2.

5. Пары статистик $(\bar{x}, s_1^2)$ и $(\bar{y}, s_2^2)$ являются независимыми, причем элементы этих пар сами не зависят друг от друга, поэтому статистики $\bar{x}$, s_1^2, $\bar{y}$, s_2^2 являются независимыми. Следовательно, статистика ξ, образованная из $\bar{x}$ и $\bar{y}$, и статистика η, образованная из s_1^2 и s_2^2, являются независимыми.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Занятие 1

КОМБИНАТОРИКА

Пусть имеется несколько множеств элементов:

$$\{a_1, a_2, ..., a_t\}, \quad \{b_1, b_2, ..., b_s\}, \quad ..., \quad \{c_1, c_2, ..., c_k\}, \quad ... .$$

Сколькими способами можно составить новое множество $\{a, b, c, ...\}$, взяв из каждого исходного множества по одному элементу? Ответ на этот вопрос дает *основной комбинаторный принцип*:

Если некоторый первый выбор можно сделать t способами, для каждого первого выбора некоторый второй можно сделать s способами, для каждой пары первых двух — третий выбор можно сделать k способами и так далее, то число способов для последовательности таких выборов равно $t \cdot s \cdot k \cdot ...$.

Комбинаторные формулы в прикладных задачах теории вероятностей обычно связывают с выбором r элементов (*«выборкой объема r»*) из совокупности, состоящей из n элементов (элементов *«генеральной совокупности»*). Различают два способа выбора:

а) *повторный*, при котором выбранный элемент возвращается в генеральную совокупность и может быть выбран вновь;

б) *бесповторный*, при котором выбранный элемент в совокупность не возвращается и выборка не содержит повторяющихся элементов.

При повторном выборе выборку объема r можно сделать n^r способами. Например, повторную выборку объемом два из трех элементов $\{a,в,c\}$ можно сделать $3^2 = 9$ способами: *аа, ав, ва, вв, вс, св, ас, са, сс*.

При бесповторном выборе выборку объема r можно сделать $A_n^r = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$ способами. Число A_n^r называют *числом размещений* из n элементов по r. Размещения отличаются либо *составом* элементов, либо *порядком* их расположения. Например, размещений из трех элементов $\{a,в,c\}$ по два можно составить $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$: *ав, ва, ас, са, вс, св*.

Выборки объема r, которые отличаются друг от друга только составом, можно сделать $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ способами. Число C_n^r называют *числом сочетаний* из n элементов по r. Например, сочетаний из трех элементов $\{a,в,c\}$ по два существует $C_3^2 = 3$: *ав, ас, вс*.

При повторном выборе из n элементов число выборок объема r, которые отличаются только составом равно C_{n+r-1}^r.

Число перестановок из n элементов равно $n! = n\times$ $\times(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Совокупность из n элементов разделить на m групп по $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов соответственно $(k_1+k_2+\ldots+k_m = n)$ можно $\dfrac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$ способами.

Порядок элементов внутри каждой из этих m групп не имеет значения.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — множества, число элементов в каждом из которых равно соответственно $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$. Составить множество B из m_1 элементов множества A_1, m_2 элементов множества A_2, ... , m_k элементов множества A_k, можно, согласно основному комбинаторному принципу,

$$C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot\ldots\cdot C_{n_k}^{m_k}$$

способами.

Для безошибочного выбора комбинаторной формулы достаточно последовательно ответить на вопросы в следующей схеме:

	Что нас интересует при выборе?	Какой выбор?	Формула
Откуда выбор? $(n-?)$	Состав	Бесповторный	C_n^r
		Повторный	C_{n+r-1}^r
Сколько выбираем? $(r-?)$	Состав и порядок	Бесповторный	A_n^r
		Повторный	n^r
	Порядок	Бесповторный	$n!$
		Повторный	$\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

ПРИМЕР 1.1. Сколько сообщений можно послать посредством семи знаков точек или тире?

◁ Выбор знака производится из множества двух элементов: точка или тире ($n = 2$). Повторным способом выбирается семь элементов ($r = 7$). Поэтому число различных сообщений равно $2^7 = 128$. ▷

ПРИМЕР 1.2. Сколько комбинаций из четырех букв можно составить? Сколько из них содержат только разные буквы?

◁ Из совокупности 33 букв ($n = 33$) необходимо выбрать четыре буквы ($r = 4$). Если запрета на повторение букв нет, то выбор повторный и общее число комбинаций равно $(33)^4 =$ $= 1\,185\,921$. Если необходимо иметь только разные буквы, то выбор бесповторный и общее число комбинаций равно

$$A_{33}^4 = 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30 = 982\,080. \quad ▷$$

ПРИМЕР 1.3. Сколькими способами можно разложить восемь книг на две пачки по четыре книги в каждой? Сколькими способами можно разложить эти книги на четыре пачки по две книги в каждой? Сколькими способами можно разослать эти книги восьми различным адресатам?

$\lhd$ 1. Для разделения книг на две равные пачки достаточно из восьми книг ($n = 8$) выбрать бесповторным способом любые четыре ($r = 4$) для первой пачки, причем нас интересует только состав выбора, а остальные книги оставить для второй пачки. Поэтому общее число способов равно числу сочетаний из восьми элементов по четыре, т. е. $C_8^4 = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.
2. Для комплектации четырех пачек по две книги в каждой необходимо сначала бесповторным способом выбрать состав первой пачки ($C_8^2 = 28$ способов), затем из оставшихся шести книг выбрать две книги для второй пачки ($C_6^2 = 15$ способов), после этого из оставшихся четырех книг выбрать две книги для третьей пачки ($C_4^2 = 6$ способов), а оставшиеся две книги составят четвертую пачку (формально, $C_2^2 = 1$ способ). Заметим, что при каждом выборе мы интересовались только составом. По комбинаторному принципу для описанной последовательности выборов существует $28 \cdot 15 \cdot 6 = 2520$ способов.
3. Рассылка восьми адресатам по одной книге каждому означает перестановку из восьми элементов, т. е. имеется $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$ способов. $\rhd$

Замечание. Для числа способов разделить n элементов на m групп по $k_1, k_2, k_3, ..., k_k$ соответственно в каждой $(k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_m = n)$ известна формула

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!}.$$

По этой формуле решение примера 1.2(2) можно получить сразу: $\dfrac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 2520$.

ПРИМЕР 1.4. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеется материал пяти цветов?
$\lhd$ Для составления трехцветного флага нужно из пяти цветов ($n = 5$) выбрать три различных цвета ($r = 3$), иначе флаг не будет трехцветным. При выборе нас интересует состав выбора и порядок следования цветов. Поэтому число трехцветных флагов в нашем случае равно числу размещений из пяти по три, т. е. равно $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. $\rhd$

ПРИМЕР 1.5. Каких чисел от 1 до 10 000 000 больше — тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых нет ни одной единицы?
$\lhd$ Для того чтобы записать семизначное число, в записи которого нет ни одной единицы, необходимо повторным способом из девяти цифр $(0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ выбрать семь цифр. Это можно сделать $9^7 = 4\,769\,847 < 5 \cdot 10^6$ способами. Следовательно, среди первых 10 миллионов чисел больше тех, в записи которых единица есть. $\rhd$

ПРИМЕР 1.6. Каждый из 10 студентов может явиться на зачет в любой из двух назначенных дней. Сколькими способами могут студенты распределиться по дням явки на зачет? Сколькими способами могут распределиться студенты по дням явки на зачет, если каждый день должны сдавать зачет по пять студентов?
$\lhd$ При распределении по дням явки каждый из 10 студентов производит выбор между двумя возможностями. По комбинаторному принципу всего способов выбора имеется $2^{10} = 1\,024$. Если же в каждый из дней должно явиться на зачет по пять студентов, то достаточно выбрать студентов для первого дня зачета, а остальные будут сдавать зачет во второй день. Из 10 студентов ($n = 10$) следует выбрать бесповторным способом пять студентов ($r = 5$), причем нас интересует только состав выбора. Поэтому возможных комбинаций будет $C_{10}^5 = 252$. $\rhd$

ПРИМЕР 1.7. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какой может быть наибольшая численность населения в этом государстве?
$\lhd$ В отношении каждого из 32 зубов может быть две возможности: есть этот зуб или его нет. Выбор из этих двух возможностей нужно произвести 32 раза. Поэтому число всех мыслимых комбинаций равно $2^{32} = 4\,294\,967\,296$. $\rhd$

ПРИМЕР 1.8. Сколькими различимыми способами можно переставить между собой буквы:
а) A_1, A_2, B_1, B_2, B_3; б) A, A, B_1, B_2, B_3; в) A, A, B, B, B?
$\lhd$ а) Так как все буквы различны, то число перестановок из них равно $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
б) В этом случае каждая пара перестановок отличающаяся только порядком расположения букв, например, A_1, B_1, A_2, B_2, B_3 и A_2, B_1, A_1, B_2, B_3, сливается в одну

перестановку A, B_1, A, B_2, B_3. Поэтому различимых перестановок будет $120/2 = 60$.
в) Итак, имеется 60 перестановок, которые отличаются друг от друга либо местами расположения букв B_1, B_2, B_3, либо порядком расположения этих букв на данных местах. Всего перестановок букв B_1, B_2, B_3 на заданных трех местах существует $3! = 6$. Поэтому при потере индексов у букв B_1, B_2, B_3 различимых комбинаций будет $60/6 = 10$.
Заметим, что число различимых перестановок равно числу способов выбора из пяти мест любых двух и постановки на них буквы A. На остальные места ставим буквы B. Это число равно $C_5^2 = 10$. ▷

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Перечислите все перестановки из элементов *А, В, С, Д*. Перечислите все размещения по два элемента и все сочетания по два элемента из элементов *А, В, С, Д*.

2. Сколькими способами можно из колоды карт (36 штук) выбрать пять карт так, чтобы среди них было два туза?

3. Сколькими способами можно из колоды карт выбрать четыре карты разных мастей?

4. Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова:
а) наука;
б) математика?

5. Сколько автомобильных номеров можно составить из трех букв и трех цифр? Сколько таких номеров можно составить из различных букв и различных цифр?

6. Сколькими способами можно переставить между собой цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы на четных по порядку местах стояли четные цифры, а на нечетных — нечетные?

7. Сколькими способами можно расставить шесть книг по трем полкам? Сколько способов расставить книги так, чтобы ни одна полка не пустовала?

8. Сколько четырехзначных чисел состоят только из разных цифр?

9. Сколькими способами можно поставить на полку шесть книг так, чтобы три заданные книги оказались рядом (в произвольном порядке)?

10. Сколькими способами можно разделить 15 команд на три подгруппы в каждой по пять команд?

11. Сколько различных частных производных третьего порядка имеет функция трех переменных?

12. Сколькими способами можно расселить девять студентов в трех комнатах, рассчитанных на трех человек каждая? Сколькими способами это можно сделать, если какие-либо два из этих студентов отказываются поселиться в одной комнате?

13. Студенту нужно выбрать два факультативных курса из шести возможных. Сколькими способами он может это сделать?

14. Два города A и B соединены четырьмя различными дорогами. Сколькими способами можно проехать из A в B и обратно? Сколько существует таких способов, если на обратном пути непременно выбирать новую дорогу?

15. В соревнованиях принимают участие 16 равносильных команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

16. Сколькими способами можно выбрать путь из начала координат в точку с координатами (6,4), если каждый шаг равен 1, и его можно совершать только вправо или вверх?

Ответы:

2. 29 760;	10. 756 756;
3. 6 561;	11. 10;
4. а) 60, б) 151 200;	12. 1 680, 1 260;
5. 35 937 000, 23 569 920;	13. 15;
6. 36;	14. 16, 12;
7. 729, 540;	15. 240;
8. 4 536;	16. 210.
9. 144;	

Занятие 2

НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть опыт имеет n возможных исходов. Исходы опыта, при которых появляется событие A, называют исходами, благоприятствующими этому событию.

Классическое определение вероятности. Если исходы опыта *равновозможны*, то вероятностью события A называется отношение числа исходов, *благоприятствующих* данному событию, к числу всех возможных исходов опыта, т. е. $P(A) = \dfrac{m}{n}$, где m — число исходов опыта, благоприятствующих событию, а n — число всех возможных исходов.

Свойства вероятностей:

1. Вероятность любого события — есть число, заключенное между нулем и единицей, т. е. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Вероятность невозможного события равна 0, а вероятность достоверного события равна 1.

2. Если события A и B *несовместны*, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

3. Вероятность любого события A в сумме с вероятностью противоположного события равна единице: $P(\bar{A}) + P(A) = 1$.

Если вероятность интересующего нас события A по каким-либо причинам вычислить трудно, то можно попытаться вычислить вероятность противоположного события, а затем с помощью свойства 3 вычислить искомую вероятность события A.

ПРИМЕР 2.1. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

A — на обеих костях выпало одинаковое число очков;

B — число очков на первой кости больше, чем на второй;

C — сумма очков четная;

D — сумма числа очков больше двух.

$\triangleleft$ Число очков, благоприятствующих каждому из названных событий, легко подсчитать, если все возможные исходы опыта перечислить в виде таблицы. В каждой клетке таблицы первая цифра указывает число очков на первой кости, вторая — на второй кости.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Если кости симметричны и однородны, то все перечисленные исходы опыта равновозможны. Непосредственный подсчет числа благоприятствующих исходов дает $P(A) = 6/36 = 1/6$, $P(B) = 15/36 = 5/12$, $P(C) = 18/36 = 1/2$, $P(D) = 35/36$. $\triangleright$

ПРИМЕР 2.2. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых три бракованных, наугад извлекаются три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:

A — среди выбранных изделий ровно два бракованных;

B — выбраны только бракованные изделия;

C — среди выбранных изделий содержится хотя бы одно бракованное.

$\triangleleft$ Выбрать любых три изделия из десяти можно C_{10}^3 способами. Поэтому имеем $n = C_{10}^3 = 120$ равновозможных исходов.

Событию A благоприятствуют те исходы, при которых из семи годных изделий выбирается одно (это можно сделать $C_7^1 = 7$ способами) и из трех бракованных — два (это можно сделать $C_3^2 = 3$ способами). По комбинаторному принципу число благоприятствующих событию A исходов равно $C_7^1 \cdot C_3^2 = 7 \cdot 3 = 21$. Поэтому $P(A) = 21/120 = 7/40 \approx 1/6$, т. е. примерно один шанс из шести.

Событию B благоприятствует всего один исход и его вероятность $P(B) = 1/120$.

Вероятность события C проще вычислить, определив сначала вероятность события $\bar{C}$, которое состоит в том, что выбраны все годные изделия. Выбрать три годных изделия из семи можно $C_7^3 = 35$ способами. Поэтому $P(\bar{C}) = 35/120$ и $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 35/120 = 17/24 \approx 2/3$. ▷

ПРИМЕР 2.3. Каждый из пяти студентов может сдавать зачет в один из пяти назначенных дней. Выбор каждым студентом любого дня равновозможен. Какова вероятность того, что каждый день на зачет будет приходить только один из этих студентов? Если студентов трое, а дней пять, то какова вероятность того, что эти студенты явятся на зачет в разные дни?

◁ Каждый из пяти студентов может выбрать любой из пяти дней, поэтому по дням явки на зачет студенты могут распределиться 5^5 способами.

Благоприятствующие способы можно перебрать, если распределить студентов по одному на каждый день и рассмотреть всевозможные их перестановки. Таких перестановок существует $A_5^5 = 5! = 120$. Поэтому вероятность явки каждый день по одному студенту равна $P = 5!/5^5 = 24/625$.

Если студентов трое, то возможных способов явки 5^3, а благоприятствующих из них $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (первый может явиться в любой из пяти дней, второй — в любой из четырех дней, третий — в любой из оставшихся трех дней). Вероятность интересующего нас события равна $p = 60/125 \approx 1/2$. ▷

ПРИМЕР 2.4. За семь дней недели независимо друг от друга происходит семь событий (скажем, семь аварий). Какова вероятность того, что каждый день будет происходить по одному событию?

◁ Для наглядности представим себе семь ящиков и семь шариков. Тогда распределение событий по дням недели равносильно раскладке шариков по ящикам. Первый шар можно положить в любой из семи ящиков, второй — также в любой из семи и т. д., поэтому, согласно комбинаторному принципу, всех возможных способов раскладки имеется 7^7. Для получения числа способов, благоприятствующих интересующему нас событию (событие A), разложим по одному шарику

в каждый ящик, а затем станем менять местами шарики. Тогда число благоприятствующих способов равно числу перестановок из семи элементов, т. е. равно 7!. В итоге имеем $P(A) = 7!/7^7 \approx 1/165$. ▷

ПРИМЕР 2.5. При раздаче тщательно перемешанных карт (в колоде 36 карт) игрок получает шесть карт. Какова вероятность того, что игрок получит два туза, два короля и две дамы любой масти?

◁ Шесть карт данному игроку можно сдать C_{36}^6 способами, так как выбор бесповторный и нас интересует только состав выбора. Выбрать два туза, два короля и две дамы можно $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot C_4^2 = 6^3 = 216$ способами. Поэтому искомая вероятность равна $P = 216/C_{36}^6 = 9/2618 \approx 0,003$. ▷

ПРИМЕР 2.6. Вы являетесь одним из восьми человек, среди которых по жребию распределяется три выигрыша. В розыгрыше каждого выигрыша участвуют все восемь человек. Найдите вероятности следующих событий: A = {Вам достанутся все выигрыши}; B = {Вы не получите ни одного выигрыша}; C = {Вам достанется хотя бы один выигрыш}.

◁ Три выигрыша среди 8 человек могут быть распределены $8^3 = 512$ способами. Событию A благоприятствует только один из этих способов распределения выигрышей. Поэтому $P(A) = 1/512$. Если каждый раз выбор будет производиться среди остальных семи человек (это можно сделать $7^3 = 343$ способами), то Вам не достанется ни одного выигрыша. Поэтому вероятность события B равна $P(B) = 343/512$. Событие C противоположно событию B. Поэтому

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - 343/512 = 169/512. \triangleright$$

Область применения классического определения вероятности — испытания с конечным числом равновозможных исходов. Существенным является условие равновозможности. От конечности числа исходов опыта можно отказаться и определять вероятности не с помощью числа исходов, а с помощью отношения длин, площадей и т. д.

Геометрическое определение вероятности. Пусть область g принадлежит области G. Если равновозможно попадание точки в любую точку области G, то вероятность попасть в область g равна отношению меры области g к мере области G:

$$P(\text{попасть в область } g) = \frac{\text{Мера области } g}{\text{Мера области } G},$$

где «мера» — означает:

1) длину, если область G часть прямой или кривой линии;
2) площадь, если G часть плоскости;
3) объем, если G часть пространства,

и так далее в зависимости от характера области G.

ПРИМЕР 2.7. Отрезок $[0,1]$ наугад делят на три части. Какова вероятность того, что из этих трех частей можно сложить треугольник?

$\triangleleft$ Обозначим первую из полученных частей отрезка через x, а вторую — через y. Тогда оставшаяся третья часть равна $1-x-y$. В треугольнике сумма двух любых сторон больше третьей стороны. Поэтому из частей отрезка получится треугольник, если выполнятся неравенства:

$$\begin{cases} x+y>1-x-y; \\ x+(1-x-y)>y; \\ y+(1-x-y)>x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>1/2-x; \\ y<1/2; \\ x<1/2. \end{cases}$$

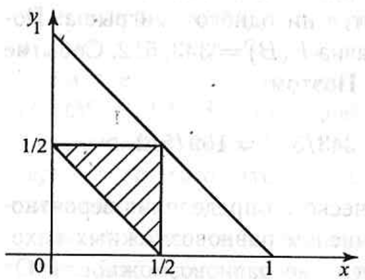


Рис. 2.1

Возможные значения для пары (x,y) составляют треугольник с вершинами $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$. Системе неравенств соответствует заштрихованная треугольная область на рис. 2.1, площадь которой равна $1/4$ площади исходного треугольника. Поэтому искомая вероятность, как отношение площадей, равна $1/4$. $\triangleright$

ПРИМЕР 2.8. Две радиостанции в течение часа независимо друг от друга должны передать сообщения длительностью 10 мин и 20 мин соответственно. Какова вероятность того, что сообщения не перекроются по времени.

$\triangleleft$ Пусть x — момент начала сообщения первой радиостанции, а y — момент начала второго сообщения. Для того, чтобы сообщения уложились в отведенный час, должны выполняться условия: $0 \leqslant x \leqslant 50$ мин; $0 \leqslant y \leqslant 40$ мин. Сообщения не перекроются во времени, если выполнятся условия $y-x>10$ и $x-y>20$. Этим условиям удовлетворяют точки заштрихованных областей на рис. 2.2.

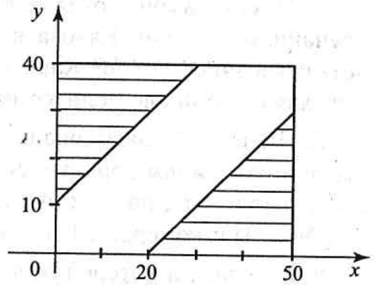


Рис. 2.2

Так как все положения точки (x,y) в прямоугольнике 50×40 равновозможны, то искомая вероятность равна отношению заштрихованной площади, которая равна 30×30, к площади прямоугольника. Поэтому $P=(30\times30)/(50\times40)=9/20$. $\triangleright$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Десять команд случайным образом (по жребию) разбиваются на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что две сильнейшие команды попадут в разные подгруппы? ... в одну подгруппу? ... в первую подгруппу?

2. Из полной колоды карт (52 штуки) наугад выбраны три карты. Какова вероятность того, что это «тройка», «семерка», «туз»? Какова вероятность того, что эти карты выбраны в указанной последовательности?

3. На отрезок OA длины L брошены «наугад» две точки B и C, причем точка C расположена правее точки B. Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB.

4. Десять билетов с номерами от 1 до 10 перемешаны на столе экзаменатора. Какова вероятность того, что эти билеты будут вытянуты студентами в порядке их номеров?

5. Четыре человека вошли в лифт на первом этаже девятиэтажного дома. Считая, что равновозможен выход каждого пассажира на любом из этажей со второго по девятый, найти вероятность того, что: а) все пассажиры выйдут на разных этажах; б) все пассажиры выйдут выше пятого этажа; в) на третьем этаже не выйдет ни одного пассажира.

6. Наугад выбираются четыре цифры и расставляются в случайном порядке. Какова вероятность того, что получится четырехзначное число? Какова вероятность того, что это четырехзначное число делится на 5?

7. Имеется 20 экзаменационных билетов, разложенных на столе в случайном порядке. Десять студентов один за другим выбирают наугад по одному билету. Какова вероятность того, что билеты с номерами 1 и 2 не будут выбраны?

8. Из урны, в которой лежат, шесть белых, четыре черных и два красных шара, наугад выбирают четыре шара. Какова вероятность того, что среди них только черные и красные шары?

9. Десять книг, из них три красные, в случайном порядке поставлены на полку. Какова вероятность того, что три красные книги в любом порядке стоят рядом?

10. Бросаются три игральные кости. Найдите вероятности следующих событий: $A = \{$кости выпадут разными гранями$\}$; $B = \{$на всех костях выпадет одинаковое число очков$\}$.

11. В шкафу лежат вперемежку пять пар ботинок. Наугад выбирается два ботинка. Какова вероятность того, что они образуют пару?

12. Каждый из шести призов в результате жеребьевки разыгрывается между десятью участниками. Какова вероятность того, что данные шесть участников получат по одному призу каждый?

13. Группа из четырех юношей и четырех девушек по жребию делится на две подгруппы по четыре человека. Какова вероятность того, что в каждую подгруппу попадет поровну юношей и девушек?

14. Внутрь круга радиусом R наугад брошена точка. Какова вероятность того, что она попадет внутрь вписанного в круг: а) квадрата, б) правильного треугольника?

15. В течение суток к причалу независимо друг от друга должны подойти и разгрузиться два сухогруза. Одному из них требуется для разгрузки шесть часов, другому — восемь часов. Какова вероятность того, что ни одному из сухогрузов не придется ждать очерёди для разгрузки?

Ответы:

1. $5/9$, $4/9$, $2/9$;
2. $16/5525 \approx 0,003$, $8/16\,575 \approx 0,0005$;
3. $1/2$;
4. $1/10!$;
5. а) $105/256$, б) $1/16$, в) $2401/4096 \approx 0,59$;
6. $0,9$, $0,18$;
7. $9/38$;
8. $1/33$;
9. $1/15$;
10. $P(A)=5/9$, $P(B)=1/36$;
11. $1/9$;
12. $0,00072$;
13. $18/35$;
14. а) $2/\pi \approx 2/3$, б) $(3\sqrt{3})/(4\pi) \approx 0,41$;
15. $25/72 \approx 1/3$.

Занятие 3

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В теории вероятностей события рассматривают на фоне комплекса условий, которые его порождают. Проще говоря, событие — это результат опыта, который проистекает в природе по воле человека, независимо от нее или ей вопреки. Рассмотрим множество событий, которые можно наблюдать в эксперименте при фиксированном комплексе условий. На множестве таких событий определим следующие понятия.

Суммой событий A и B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B. Сумму событий A и B обозначают через $A+B$.

Произведением событий A и B называют событие, состоящее в появлении событий A и B в одном и том же опыте. Обозначают произведение событий A и B через $A \cdot B$.

Событие, состоящее в не появлении события A, называется противоположным событием и обозначается через $\bar{A}$.

Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло, называется условной вероятностью события A и обозначается $P(A/B)$.

Теорема 3.1 (умножения вероятностей). *Вероятность произведения событий равна вероятности одного события, умноженной на вероятность другого события, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т. е.*

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \tag{3.1}$$

События называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

Если события независимы, то $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$ и

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Для любого конечного числа событий вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что предыдущие события произошли, т. е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}).$$

Если события независимы, то

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Итак, прежде чем вычислять вероятность произведения событий, необходимо установить, зависимы ли события или нет.

Теорема 3.2 (сложения вероятностей). *Вероятность суммы событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

События называются *несовместными*, если их появление в одном и том же опыте невозможно.

Если события A и B несовместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Для трех совместных событий теорема сложения вероятностей имеет вид:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Если события несовместны, то

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Теорему сложения можно обобщить на любое конечное число слагаемых:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cdot A_j) + \\ + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) + \ldots + \\ + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

Если события несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Итак, *прежде чем вычислять вероятность суммы событий следует выяснить, совместны они или нет.*

ПРИМЕР 3.1. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для первого, второго и третьего стрелков равны соответственно 0,3; 0,6; 0,8. Все три стрелка выстрелили в цель. Какова вероятность того, что: а) цель поражена; б) произошло только одно попадание; в) произошло ровно два попадания; г) попадут все три стрелка; д) будет хотя бы один промах?

$\lhd$ Обозначим через A_i — событие, состоящее в попадании в цель i-го стрелка.

а) Поражение цели (событие A) равносильно появлению хотя бы одного из событий A_1 или A_2, или A_3. Поэтому $A = A_1 + A_2 + A_3$. Учитывая совместность событий, имеем $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cdot A_2) - P(A_1 \cdot A_3) - P(A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$, а так как события независимы, то $P(A) = 0,3 + 0,6 + 0,8 - 0,3 \cdot 0,6 - 0,3 \cdot 0,8 - 0,6 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,944$.

б) Рассмотрим три случая:

1) $B_1 = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ — первый стрелок попал в цель и при этом второй не попал и третий не попал.

2) $B_2 = \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$ — первый стрелок не попал и при этом второй попал и третий не попал.

3) $B_3 = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$ — первый и второй не попали и при этом третий попал.

Только одно попадание в цель (событие B) равносильно реализации хотя бы одного из несовместных событий B_1 или B_2, или B_3. Поэтому

$$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3.$$

В силу независимости событий A_i имеем

$$P(B) = 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,8 = 0,332.$$

в) Два попадания в цель (событие C) равносильны реализации хотя бы одного из несовместных случаев: $A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$ или $A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$, или $\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. В силу независимости событий A_i получаем

$$P(C) = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,468.$$

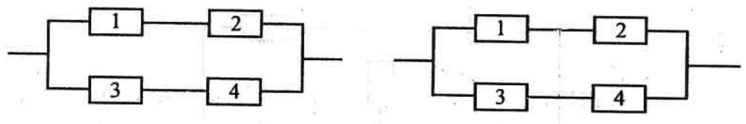
г) Все три стрелка попадут в цель (событие D), если произойдут события A_1 и A_2, и A_3, т. е. $D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. В силу независимости событий A_i имеем

$$P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,144.$$

д) Хотя бы один промах (событие E) равносилен появлению хотя бы одного из событий $\bar{A}_1$ или $\bar{A}_2$, или $\bar{A}_3$, т. е. $E = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3$. Вместо вычисления вероятности суммы трех совместных событий, заметим, что событие E равносильно непоявлению события D. Поэтому

$$P(E) = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,144 = 0,856. \rhd$$

ПРИМЕР 3.2. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени (надежность) каждого элемента равна 0,8. Из этих элементов составлены две системы (рис. 3.1).



а) *б)*

Рис. 3.1

Какая система надежнее? Иначе говоря, что выгоднее в системе дублировать, каждый элемент отдельно или всю систему в целом?

$\lhd$ Пусть событие A_i состоит в том, что i-й элемент работает безотказно. Безотказная работа первой системы (событие B_1) равносильна безотказной работе первого элемента и второго или третьего элемента и четвертого. Символически это можно записать в виде $B_1 = A_1 \cdot A_2 + A_3 \cdot A_4$. События $A_1 \cdot A_2$ и $A_3 \cdot A_4$ совместны, а события A_i независимы. Поэтому

$$P(B_1) = P(A_1 \cdot A_2) + P(A_3 \cdot A_4) - P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(A_2) + P(A_3)\cdot P(A_4) - P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(A_4) =$$
$$= (0,8)^2 + (0,8)^2 - (0,8)^4 = 0,8704.$$

Безотказная работа второй системы (событие B_2) равносильна безотказной работе первого элемента или третьего и второго или четвертого, т. е. $B_2 = (A_1 + A_3) \cdot (A_2 + A_4)$. Тогда

$$P(B_2) = P(A_1 + A_3) \cdot P(A_2 + A_4) =$$
$$= [P(A_1) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_3)] \times$$
$$\times [P(A_2) + P(A_4) - P(A_2) \cdot P(A_4)] =$$
$$= (0,8 + 0,8 - 0,64)^2 = 0,9216.$$

Результаты вычислений свидетельствуют о том, что выгоднее дублировать каждый элемент отдельно. Система б) надежнее. $\rhd$

ПРИМЕР 3.3. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени (надежность) каждого элемента равна 0,8. Из этих элементов составлена система (рис. 3.2).

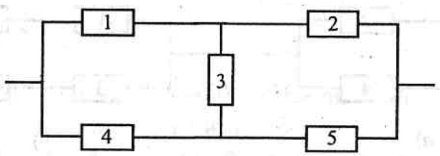


Рис. 3.2

Какова надежность системы?

$\lhd$ Сохраним обозначения примера 3.3. Если элемент № 3 не работает, то система совпадает с системой а) из этого примера.

Если же элемент № 3 работает, то система совпадает с системой б) из предыдущего примера. Поэтому безотказная работа системы (событие D) равносильна событию $D = \bar{A}_3 \cdot B_1 + A_3 \cdot B_2$. События независимы, а события $\bar{A}_3 \cdot B_1$ и $A_3 \cdot B_2$ несовместны. Поэтому с учетом результатов предыдущей задачи имеем

$$P(D) = P(\bar{A}_3) \cdot P(B_1) + P(A_3) \cdot P(B_2) =$$
$$= 0,2 \cdot 0,8704 + 0,8 \cdot 0,9216 = 0,91136. \rhd$$

ПРИМЕР 3.4. В одной урне пять белых, семь черных и три красных шара, а во второй соответственно четыре белых, два черных и четыре красных шара. Из каждой урны вынимают наугад по одному шару. Какова вероятность того, что будут выбраны шары одного цвета?

$\lhd$ Обозначим извлечение из i-й урны белого, черного и красного шара соответственно через B_i, C_i, K_i. Тогда извлечение шаров одного цвета (событие A) можно записать следующим образом:

$$A = B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 + K_1 \cdot K_2.$$

Так как события, образующие сумму, несовместны, то

$$P(A) = P(B_1 \cdot B_2) + P(C_1 \cdot C_2) + P(K_1 \cdot K_2).$$

В силу независимости событий

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2) + P(C_1) \cdot P(C_2) + P(K_1) \cdot P(K_2) =$$
$$= \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{10} + \frac{7}{15} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{15} \cdot \frac{4}{10} = \frac{23}{75} \cong \frac{1}{3}. \rhd$$

ПРИМЕР 3.5. В партии из 25 деталей четыре бракованных. Детали выбирают для проверки наугад по одной пока не попадется бракованная. Какова вероятность того, что будет проверено ровно три детали?

$\lhd$ Обозначим через A интересующее нас событие, а через A_i — событие, состоящее в выборе годной детали при i-м выборе. Событие A произойдет, если первая и вторая детали окажутся годными и лишь третья по счету окажется бракованной. Это означает, что $A = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$, причем события зависимы. Поэтому

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(\bar{A}_3/A_1, A_2) = \\ = \frac{21}{25} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{4}{23} = \frac{42}{345} \cong 0,12. \triangleright$$

ПРИМЕР 3.6. Урна содержит шесть занумерованных шаров с номерами от 1 до 6. Шары извлекаются по одному без возвращения. Пусть событие A состоит в том, что шары будут извлечены в порядке их номеров, а событие B — в том, что хотя бы один раз номер шара совпадет с порядковым номером его извлечения. Найти вероятности событий A и B и определить предельные вероятности этих событий при неограниченном увеличении числа шаров в урне.

$\triangleleft$ Обозначим через A_i — событие, состоящее в том, что порядок извлечения i-го шара совпадает с его номером. Тогда событие $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_6$. Вместо рассмотрения произведения зависимых событий заметим, что шары в указанном порядке можно извлечь только одним способом, а всего равновозможных способов извлечения существует 6!. Поэтому $P(A) = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$. При увеличении числа шаров $P(A) \to 0$. Событие B произойдет, если появится хотя бы одно из событий A_1 или A_2, или ... или A_6. Поэтому $B = A_1 + A_2 + A_3 + + A_4 + A_5 + A_6$, причем события совместны. При переходе к противоположному событию придется рассматривать произведение шести зависимых событий $\bar{A}_i$, что в данном случае сделать сложно. Поэтому вычислим вероятность суммы непосредственно:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant 6} P(A_i) \cdot P(A_j) + \\ + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant 6} P(A_i) \cdot P(A_j) \cdot P(A_k) - \ldots - P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6) = \\ = 6 \cdot \frac{1}{6} - C_6^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + C_6^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} - C_6^4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + C_6^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \\ - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{454}{720} \approx 0,63.$$

Заметим, что искомая вероятность является частичной суммой ряда Тейлора функции $1 - e^{-x}$ при $x = -1$. Поэтому при больших n имеем

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) \approx 1 - e^{-1} \approx 0,63. \triangleright$$

ПРИМЕР 3.7. В колоде 36 карт. Каждому из четырех игроков раздается по шесть карт. Какова вероятность того, что каждый игрок получит по одному тузу?

$\triangleleft$ Обозначим интересующее нас событие через A. Пусть A_i означает, что i-й игрок получил при раздаче одного туза. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4$. События A_i зависимы. Поэтому $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot P(A_4/A_1A_2A_3)$. Карты для первого игрока могут быть выбраны C_{36}^6 возможными способами, событию A_1 благоприятствует $C_4^1 \cdot C_{32}^5 = 4 \cdot C_{32}^5$ способов. Для второго игрока карты, из числа оставшихся, могут быть выбраны C_{30}^6 способами, событию A_2, с учетом появления события A_1, благоприятствует $C_3^1 \cdot C_{27}^5 = 3 \cdot C_{27}^5$ способов. Для третьего игрока, с учетом появления событий A_1 и A_2, карты могут быть выбраны C_{24}^6 способами, из них событию A_3 благоприятствует $C_2^1 \cdot C_{22}^5$ способов. Наконец событию A_4, с учетом появления событий A_1, A_2 и A_3, благоприятствует $C_1^1 \cdot C_{17}^5$ способов из числа C_{18}^6 возможных. Поэтому искомую вероятность запишем в виде

$$P(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^5}{C_{36}^6} \cdot \frac{C_3^1 \cdot C_{27}^5}{C_{30}^6} \cdot \frac{C_2^1 \cdot C_{22}^5}{C_{24}^6} \cdot \frac{C_1^1 \cdot C_{17}^5}{C_{18}^6} = \frac{144}{6545} \approx 0,02. \triangleright$$

ПРИМЕРЫ (для самостоятельного решения).

1. Вероятность безотказной работы в течение заданного времени (надежность) каждого элемента равна 0,8. Из этих элементов составлены три системы (см. рис. 3.3). Какова надежность каждой из систем?

2. Из урны, содержащей семь белых и три черных шара, наугад последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется извлечь четыре шара в предположении, что выбор производится:

а) с возвращением;

б) без возвращения.

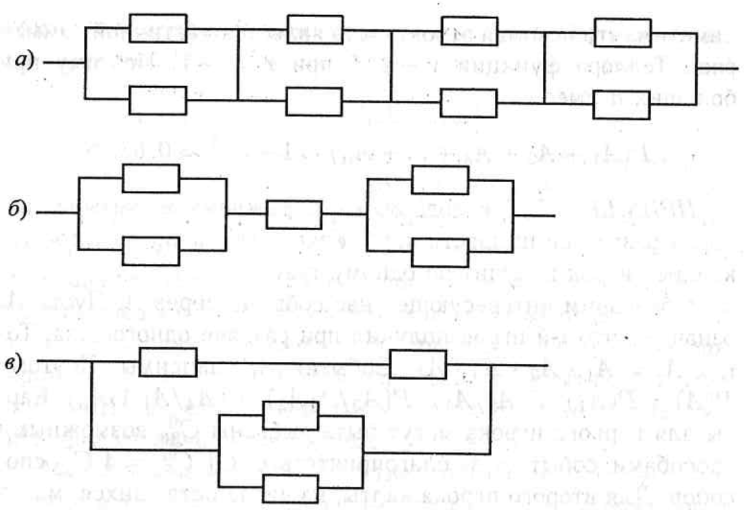


Рис. 3.3

3. Из полного набора костей домино (28 штук) наугад выбирают семь костей. Какова вероятность того, что среди них окажется по меньшей мере одна кость с шестью очками?

4. Подбрасываются четыре игральные кости. Какова вероятность того, что на них выпадут разные грани?

5. В урне пять белых, семь красных и восемь синих шаров. Наугад выбрано два шара. Какова вероятность того, что шары одного цвета?

6. Два дуэлянта одновременно стреляют друг в друга. Для каждого вероятность убить противника равна 0,2. Какова вероятность того, что дуэль закончится гибелью одного из дуэлянтов?

7. Двадцать футбольных команд, среди которых четыре призера предыдущего первенства, по жеребьевке разбиваются на четыре занумерованных подгруппы по пять команд в каждой. Какова вероятность того, что в каждую подгруппу попадет по одному призеру? Какова вероятность того, что в первую подгруппу не попадет ни одного призера?

8. В первой урне два белых и три черных шара, во второй один белый и два синих шара, в третьей три белых и один

красный шар. Из каждой урны наугад вынули по одному шару. Найдите вероятности следующих событий: $A = \{$вынут только один белый шар$\}$; $B = \{$вынут хотя бы один белый шар$\}$; $C = \{$вынуты шары разных цветов$\}$.

9. Из колоды в 36 карт выбрали наугад две. Какова вероятность того, что обе карты красной масти?

10. В ящике находятся три неисправные лампочки и семь исправных. Лампочки извлекают наугад по одной и проверяют, пока не будут выбраны две исправные. Какова вероятность того, что придется проверить половину лампочек из ящика?

Ответы:

1. а) $\approx 0,85$, б) $\approx 0,74$, в) $\approx 0,98$;
2. а) $\frac{1029}{10\,000} \approx 0,1$, б) $\frac{1}{8}$;
3. $\frac{2966}{3289} \approx 0,9$;
4. $\frac{5}{18}$;
5. $\frac{59}{190} \approx \frac{1}{3}$;
6. 0,32;
7. $\frac{125}{969}$, $\frac{91}{323}$;
8. $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = 0,9$, $P(C) = \frac{31}{60}$;
9. $\frac{17}{70}$;
10. $\frac{1}{30}$.