

ESTUDIO DEL MOVIMIENTO DE 3 OSCILADORES ACOPLADOS MEDIANTE DESLIZADORES DE RIEL

Alan Stiven Camacho Restrepo, Carolina Rojas Duque
alans.camacho@udea.edu.co , carolina.rojasd@udea.edu.co
Pregrado de Astronomía, Universidad de Antioquia

RESUMEN

Este trabajo consistió en hallar un sistema apropiado, en el cual se pudieran hallar y observar fácilmente los modos normales de oscilación, por medio de la experimentación, para 3 osciladores acoplados, con el propósito de analizar y comparar los resultados teóricos con las condiciones dadas para el sistema y los resultados obtenidos experimentalmente para estas mismas. Para el montaje de este sistema, se utilizó un riel de aire, donde tres deslizadores acoplados a resortes se pusieron sobre este, y se empezaron a generar las condiciones necesarias para que cada modo se apreciara en el sistema. A través del programa Tracker, se analizaron los videos hechos para cada modo y se sacaron las gráficas de posición de cada una de las masas en los tres modos, pudiendo finalmente observar que, en efecto, se lograron cada uno de los 3 modos normales buscados, notando que, respecto a las gráficas hechas teóricamente por medio de un código en Python, hay principalmente para el modo 3, una diferencia notable en la amplitud; pudiendo concluir entonces, que a pesar de que se logran las fases necesarias para este modo, no se alcanza este último totalmente, pues la amplitud del movimiento de los deslizadores no es constante respecto al tiempo.

Palabras claves: Modos normales de oscilación, riel de aire, deslizadores, análisis en Tracker.

1. INTRODUCCIÓN

Las oscilaciones son un tipo de movimiento particular, que se adquiere cuando, este último, se repite periódicamente, respecto a una posición de equilibrio o central; se producen, por ejemplo, en algunos hechos cotidianos como la caída de una gota en el agua, la vibración de una cuerda de guitarra, el movimiento de un columpio, el péndulo de un reloj colgante, etc. [1] Estos fenómenos, descritos por leyes físicas, forman parte de la vida diaria de toda persona y son de gran interés, pues son, a menudo, observables en varios fenómenos que ocurren en la naturaleza y tienen, además, gran importancia en áreas de estudio como lo son la sismología y la acústica. Para tener un mejor entendimiento de este tipo de fenómenos relacionados con las oscilaciones y familiarizarse con los mismos, se decidió estudiar el movimiento de 3 osciladores acoplados mediante resortes y se buscaron los modos normales de oscilación; el montaje que se realizó para poder llevar a cabo este experimento, estaba constituido principalmente, por un riel de aire y un sistema de tres deslizadores acoplados a resortes, las cuales se hacían mover sobre el riel para recrear los modos normales, estos, fueron grabados con un celular y analizados a través del programa Tracker [2], de donde se obtuvieron gráficas del movimiento de cada uno de los deslizadores en cada modo normal y mediante las leyes físicas y los resultados teóricos

arrojados por estas últimas, se pudieron obtener también gráficas mediante un código de Python, de cada uno de los modos, para finalmente, poder comparar lo obtenido en el experimento con lo teórico.

Las ecuaciones que se utilizaron como base para describir el fenómeno en estudio son [3]:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k}{m} \cdot x_1 + \frac{k}{m} (x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{k}{m} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{k}{m} \cdot (x_3 - x_2) \quad (2)$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{k}{m} \cdot x_3 - \frac{k}{m} \cdot (x_3 - x_2) \quad (3)$$

Donde k es la constante elástica de los resortes, m es la masa de los deslizadores, x_i es el desplazamiento de cada deslizador y \ddot{x}_i la aceleración de cada deslizador.

Para facilitar el tratamiento del modelo matemático, se optó por utilizar una sola constante elástica, dada por el promedio de las constantes elásticas de los resortes usados, y una masa igual para todos los deslizadores; es por esto que en las ecuaciones (1), (2) y (3) se muestran con una misma k y m para el movimiento de cada masa.

Con el fin de encontrar las ecuaciones desacopladas de movimiento, a partir de las ecuaciones mostradas como base, las cuales permiten saber las condiciones que hay que imponerle al sistema, para que este entre en cada uno de los modos normales, se utilizaron métodos del álgebra lineal.

Para el cálculo de la constante elástica de los resortes (k) se hizo uso de la siguiente ecuación [4]:

$$F = -k \cdot \Delta x \quad (4)$$

Donde F es la fuerza elástica, k es la constante elástica y Δx es el desplazamiento que tiene el resorte al aplicarle una fuerza.

Como propósitos para el experimento, se tuvieron el de encontrar resortes que tuvieran una constante elástica parecida, para poder asumir una constante promedio para todos los resortes, no muy alejada de las encontradas y así simplificar el modelo matemático, como también, que tuvieran una constante menor a 10 N/m para que el movimiento pudiera ser notorio a simple vista con facilidad; adicionalmente, se buscó tener tres masas iguales, para no complicar el modelo usado, como ya se dijo anteriormente.

Los objetivos planteados para el desarrollo del experimento son:

- Hallar los modos normales de oscilación para el caso de tres masas acopladas.
- Encontrar un montaje que facilite el hallazgo y la visualización de los modos normales y la toma de datos a través del programa Tracker.
- Comparar los resultados experimentales de los modos normales con los resultados teóricos de las ecuaciones que describen el fenómeno.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

El montaje del experimento pensado en un principio, el cual se trataba de tres péndulos acoplados por medio de resortes, tuvo que ser cambiado debido a que tenía muchas variables de las que dependía su correcto movimiento, es decir, que se veía afectado por varios factores, tales como, la longitud de la cuerdas que no eran las mismas siempre, debido a que estas se lisaban de la varilla a la cual estaban amarradas, los ganchos que sostenían las masas, que

no estaban completamente rectos, lo que hacía que las masas no estuvieran completamente perpendiculares, el movimiento del sistema se producía en dos dimensiones y no solo en una como se necesitaba, la precesión que tenían las masas al soltarse, lo cual hacía que el sistema perdiera energía y no pudiera moverse correctamente, por lo que no se alcanzaba ningún modo normal, la falta de los resortes correctos para poder obtener un movimiento más estable y en un solo eje, etc.

Por lo que se decidió seguir con el problema pensado en un principio, que se trataba de estudiar el movimiento de 3 osciladores acoplados y encontrar sus modos normales, pero con un montaje que restringiera el sistema a su movimiento en una única dimensión, para así, facilitar el experimento y poder encontrar los modos normales de oscilación que no pudieron ser encontrados en el sistema de péndulos; para esto, se escogió realizar el montaje con 3 deslizadores acoplados por medio de resortes sobre un riel del aire.

Para la realización del experimento finalmente escogido, se utilizaron los siguientes equipos y materiales: riel de aire, un motor de arranque para el riel, tres deslizadores, cuatro resortes, cinco soportes universales, cinco nueces, una regla, un trozo de madera, cinta de enmascarar, cinta aislante, tres tableros de trayectoria, flexómetro, calibrador, dinamómetro y cámara de celular.

El método utilizado para el montaje (*ver ilustraciones 1 y 2*), fue el de poner el riel de aire sobre una superficie de tal manera que quedara nivelada (para que los deslizadores no tendieran a irse hacia alguno de los lados del riel), también, los resortes fueron unidos desde los extremos de los deslizadores con cinta de enmascarar, de tal manera que un deslizador quedara entre los otros dos mediante dos resortes (resortes acoplados) mientras que los otros dos resortes (resortes base) quedaban unidos entre las paredes (regla y trozo de madera) y los dos deslizadores situados en los extremos; las paredes fueron montadas mediante los soportes universales y las nueces. Para recrear los modos normales de oscilación, se comenzó con dejar en estado de reposo el sistema de los tres deslizadores acoplados con los resortes situados entre las paredes sobre el riel de aire, y posteriormente se desplazaron los deslizadores o se separaron a distancias que fueron calculadas a través de la cinta métrica que tenía el riel de aire, y así se analizaron qué

condiciones iniciales necesitaba cada deslizador para encontrar cada uno de los modos normales, es decir, que cada uno de estos, pudiera ser apreciado; este procedimiento se realizó hasta que se hallaron las condiciones iniciales que mejor causaban los modos normales.

Para el análisis de los movimientos, se hizo uso de una cámara de celular colocada frontalmente al sistema, tomando cinco videos de cada modo normal hallado, que luego fueron pasados al programa Tracker [2] donde se obtuvieron gráficas de la posición vs tiempo de cada deslizador en cada modo.

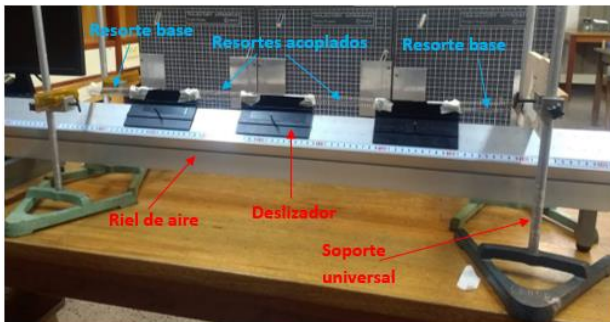


Ilustración 1. Esquema del montaje visto frontalmente para la realización del experimento. Se señalan algunos de los componentes

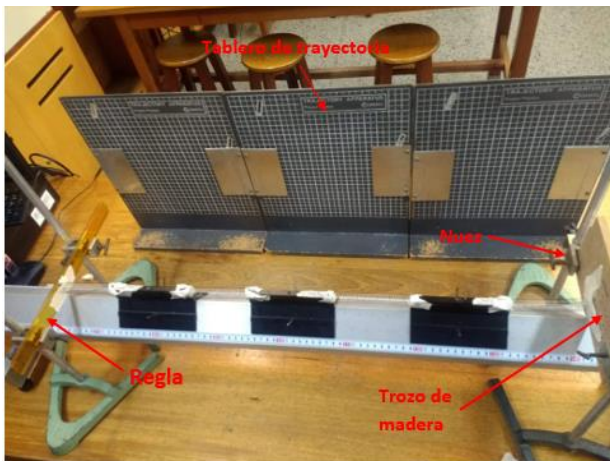


Ilustración 2. Esquema visto desde la parte superior. Se señalan algunos de los componentes.

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para la realización del experimento, se hizo un estado del arte del problema a tratar, donde se obtiene solo información teórica y simulada del problema [5], por lo que, para tener una guía experimental, se usó un trabajo previo, hecho para este mismo curso, el cual consistía en encontrar los modos normales de oscilación de dos deslizadores de riel acoplados,

mediante la oscilación forzada de estos, la cual se logró, imponiendo las frecuencias necesarias para cada modo, por medio de un generador de onda. Estos trabajos previos del problema, se encuentran anexos al link proporcionado al final del artículo.

Respecto al montaje ya hecho para este proyecto, se pudo notar que, el montaje utilizado, fue suficiente para que los deslizadores se movieran a través del riel de aire con una fricción despreciable, pues el aire suministrado a el riel por medio del motor, tiene este fin; además, hizo que el sistema montado, se moviera en solo una dirección, ya que el riel impedía el movimiento en otra dirección diferente. Debido a la corrección de las dificultades dadas en el sistema del péndulo, por medio del riel, se pudieron observar los movimientos del sistema sin dificultad, teniendo como resultado, un montaje correcto para la recreación de los modos normales, la facilidad de visualización a través de los videos tomados con la cámara celular y un análisis exitoso a través del programa Tracker.

Para el montaje se buscaron resortes que tuvieran similitud en sus constantes elásticas, ya que en las ecuaciones que describen el sistema (1), (2) y (3) no involucran las longitudes de los resortes. Para obtener 4 resortes que tuvieran una semejanza en su constante elástica se hizo uso de la ecuación (4) y se realizó la toma de estos valores a través de un calibrador para la medida de la longitud inicial de los resortes, luego con un dinamómetro se pasó a colgarlos y producirles una fuerza que era marcada por este y después se hizo uso del flexómetro para hallar la nueva longitud que tenía el resorte. Como resultado, se encontraron 4 resortes que tenían características similares y que fueron apropiados para el montaje (ya que se encontraron resortes con características más parecidas, pero que no eran aptas para el montaje, pues tenían constantes elásticas muy altas y al momento de probarlas en el sistema, no se encontraron los modos normales con facilidad). Las constantes de los resortes usados en el montaje se presentan en la tabla 1.

Tabla 1. Constantes de los resortes usados en el montaje

Resortes usados en el montaje	
Número de resorte	Valor de la constante K del resorte [N/m]
1	3.51 ± 0.76
2	3.45 ± 0.75
4	3.74 ± 0.82
6	3.70 ± 0.80
Promedio constante	3.60 ± 0.78

Para simplificar el modelo matemático, se utiliza la misma k para todos los resortes como el valor de la constante promedio. Los errores fueron calculados a partir de la propagación de error [6].

Las constantes halladas en los resortes fueron muy precisas entre ellas, así, su valor promedio proporcionó la seguridad de una buena medida, ya que el intervalo de error que había entre las constantes de los resortes y su promedio variaba entre el 3,9% y 4,2% [6]. En este caso, se tomó el valor promedio como el teórico, para así compararlos con los demás.

Inicialmente, las masas de los tres deslizadores variaban entre 0.1 y 0.2 gramos y con el fin de obtener una misma masa entre estos, se hizo uso de cinta aislante, pegando trozos en dos de los deslizadores hasta que tuvieran la misma medida que la restante (esto fue comprobado a través del uso de la balanza electrónica), teniendo como resultado, una misma masa en los tres deslizadores, que fue de $181,1 \pm 0,1$ gramos. Lograr la misma masa en los 3 deslizadores, ayudó a que el sistema que se describe a partir de la teoría, describa con más precisión el problema experimental, cuando estos son comparados, ya que, desde un principio, en las ecuaciones se supone los tres objetos con la misma masa.

Para la obtención de las condiciones ideales que permitían conseguir el modo normal 1 (donde los tres deslizadores están en fase, es decir, que se estén moviendo en una misma dirección), se realizaron varios intentos, donde se variaba la distancia encontrada con el modelo matemático, debido a que, con las condiciones encontradas, no se lograba apreciar bien el modo normal, pues los deslizadores se veían un poco desfasados respecto a lo que debía lograrse con estas condiciones; estas distancias se

variaron hasta observar un movimiento, correspondiente con el modo normal. Debido a que el deslizador del medio, tendía a irse sobre un deslizador cuando este se comprimía con su respectivo resorte, no se lograba visualizar un movimiento exacto del modo normal, pero al analizar los videos hechos, a través del programa Tracker [2], de cada uno de los deslizadores y ver las gráficas arrojadas del movimiento de estos en el tiempo, pudo comprobarse que la obtención del modo fue satisfactoria.

La gráfica obtenida para la posición vs el tiempo para el modo normal 1, se muestra a continuación en la ilustración 3.

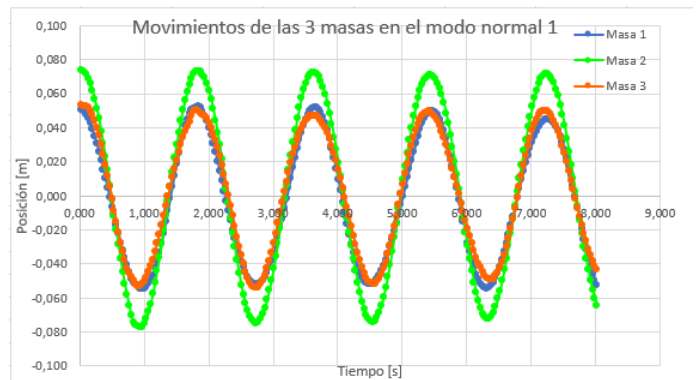


Ilustración 3. Gráfica posición vs tiempo de cada deslizador en el modo normal 1, la masa 1(azul) corresponde al primer deslizador, masa 2(verde) al deslizador del medio y masa 3(naranja) al deslizador de la parte derecha.

En esta gráfica, puede observarse que los tres deslizadores están en fase, puesto que las curvas mostradas, alcanzan su posición máxima y mínima en el mismo instante de tiempo, por lo que se concluye, que se logra hallar en el sistema, el modo normal 1.

Posteriormente, para el modo normal 2 (donde los dos deslizadores acoplados a las paredes se mueven en contrafase, mientras el del medio se mantiene en reposo) se encontraron, después de varios intentos con diferentes separaciones entre los deslizadores, las condiciones del sistema que generaron el comportamiento de este modo normal; este fue obtenido, comprimiendo los deslizadores externos a una separación de $3,0 \pm 0,5$ para la masa 1 y $4,0 \pm 0,5$ cm para la masa 3, respecto al deslizador del medio; estas condiciones permitieron un comportamiento con las características de este modo

cuando fueron soltados, por lo que se tomaron los videos correspondientes para el análisis de su movimiento en el programa Tracker. Se pasó a graficar la posición de cada deslizador respecto al tiempo, la cual es mostrada en la ilustración 4.

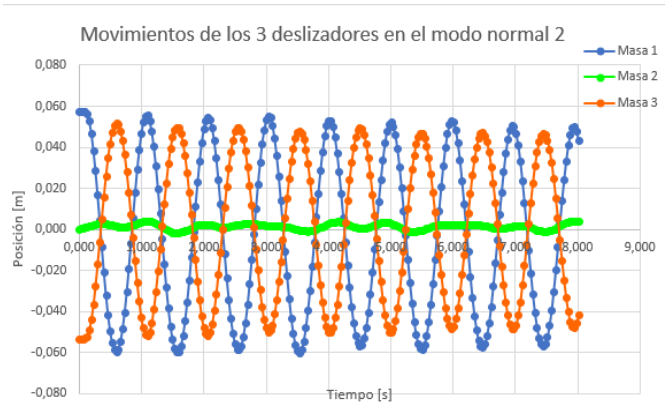


Ilustración 4. Gráfica posición vs tiempo de los deslizadores en el modo normal 2. Se usan los mismos colores de la ilustración 3 para los deslizadores.

Co la ayuda de la gráfica (*Ilustración 4*), se observó que los deslizadores externos se movían en dirección opuesta (contrafase) respecto al tiempo, mientras que el deslizador del medio presentaba pequeñas variaciones y no permanecía exactamente en reposo, como lo dice la teoría.

En el modo normal 3 de oscilación (donde los dos deslizadores acoplados a las paredes se mueven en fase, mientras el deslizador del medio se mueve en contrafase respecto a los otros dos), se encontraron las condiciones iniciales que generaron el movimiento deseado; el resultado fue el de comprimir totalmente el deslizador del medio con uno acoplado a la pared, mientras el otro deslizador era estirado $20,0 \pm 0,5$ cm; al ser soltados con estas características, se obtuvo dicho movimiento que luego fue analizado en Tracker, para obtener la gráfica de las posiciones con respecto al tiempo (*Ilustración 5*).

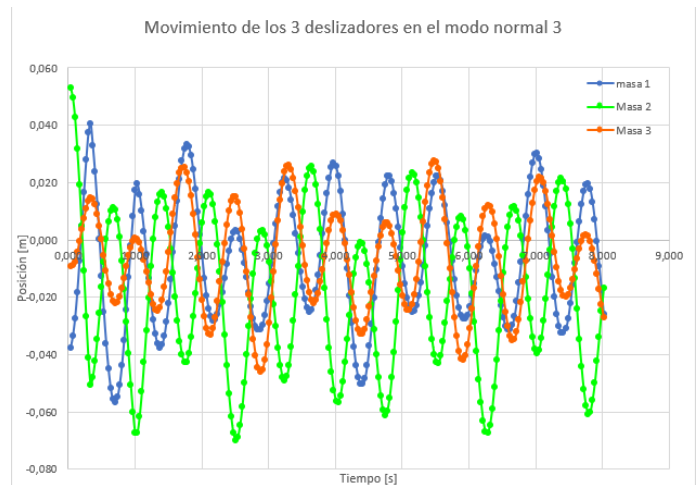


Ilustración 5. Gráfica posición vs tiempo de los deslizadores en el modo normal 3.

Gracias a la gráfica de la *ilustración 5*, se observó que las fases entre los dos deslizadores acoplados a las paredes (curva azul y naranja) se encontraban en fase con respecto al tiempo, contrario al deslizador del medio (curva verde) que está en contrafase respecto a los otros dos; lo que permitió corroborar el comportamiento que debe tenerse para el modo normal 3, aunque este modo, no fue totalmente alcanzado, pues, como puede observarse, la amplitud del movimiento de cada deslizador, no es constante, pero sí se logró alcanzar una frecuencia cercana a la necesaria para obtener este modo, puesto que se logran los comportamientos que se dan en este mismo.

Las condiciones iniciales experimentales para cada modo, fueron encontradas al realizar varios intentos que permitieran la visualización de estos, las dificultades al no encontrar fácilmente estas condiciones son debidas a que los resortes no tenían la misma constante elástica, y a su vez también, por las diferencias de longitud entre estos. Esto causó la no similitud de las distancias separadas entre los deslizadores para generar el modo normal 2, pues debido a que los resortes no tenían la misma longitud, estas no podían ser comprimidas una misma distancia, ya que causaba un movimiento que no pertenecía a este modo.

En las gráficas de las ilustraciones 3,4 y 5 no se mostraron las barras de error, debido a que saturaba las imágenes, por lo tanto, para el interés de la visualización de los errores, ingresar al link proporcionado al final del artículo.

De las gráficas obtenidas para cada modo normal, se realizó el cálculo de las frecuencias, que son mostradas en la siguiente tabla.

Tabla 2. Frecuencias encontradas experimentalmente para cada modo normal de oscilación

Frecuencias halladas para cada modo normal		
Modo normal	Frecuencia [Hz]	Frecuencia angular [Hz]
1	0.55 ± 0.01	3.47 ± 0.07
2	1.03 ± 0.03	6.48 ± 0.22
3	1.33 ± 0.06	8.38 ± 0.38

Se muestran las frecuencias y las frecuencias angulares para cada modo normal. Para el tercer modo, los datos mostrados son promedio, pues se encontró una variación en el período, que hacían que los valores para las frecuencias variaran. Los errores fueron calculados por medio de la propagación de error [6].

Para la comparación de lo obtenido en el experimento con la teoría, se hizo uso de un código en Python que simulaba los modos normales de oscilación para tres masas acopladas y arrojaba las gráficas de posición vs tiempo que se obtenían para cada modo; al código debía introducirse el número de osciladores, la longitud de los resortes (que en este caso, debía ponerse como única para los 3), la constante elástica y masa de los deslizadores (igual para todos en la simulación) y las condiciones iniciales de cada modo, para graficar y simular este último.

El código que se usó en Python y a su vez los videos de los modos normales que se obtuvieron experimentalmente, se encuentra en el link puesto en la parte de anexos.

En la siguiente ilustración se muestran las gráficas que fueron obtenidas a partir del código y que son usadas para la comparación con lo obtenido en el experimento.

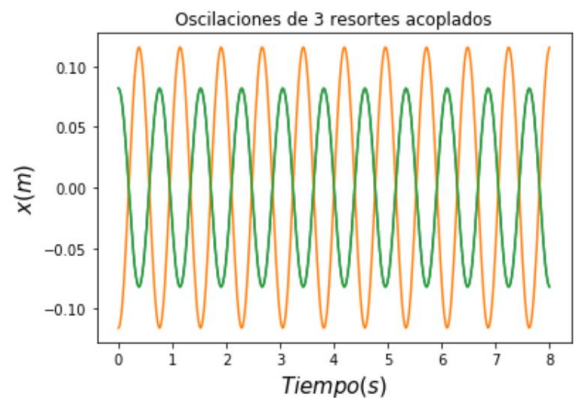
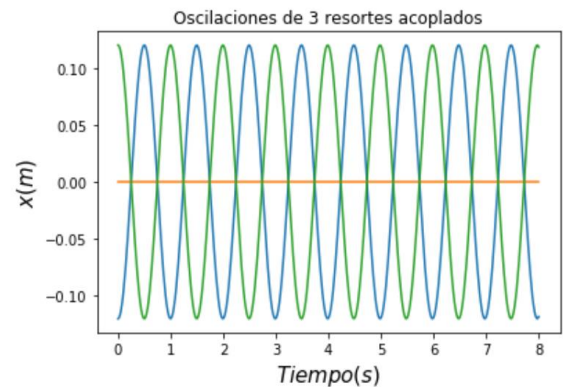
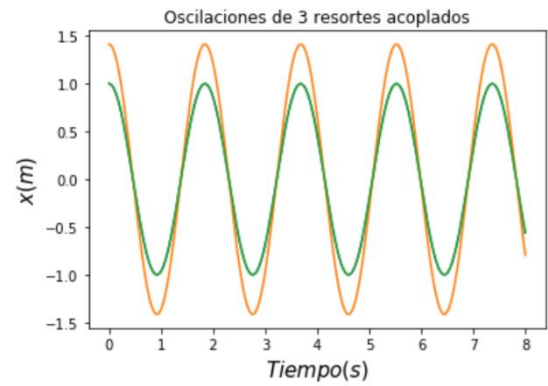


Ilustración 6. Gráficos obtenidos a partir del Código en Python, el primer recuadro corresponde al modo normal 1, el del medio al modo normal 2 y el último al modo normal 3. En las tres gráficas, la curva de color naranja describe el comportamiento del deslizador del medio, mientras las otras curvas corresponden a los deslizadores acoplados en las paredes.

Con los resultados obtenidos en las gráficas teóricas, se puede comprobar el logro de cada uno de los modos, aunque con algunos errores dados por la experimentación; la gráfica con mayor similitud, se da para el modo normal 1 en el que todos los deslizadores se encuentran en fase y el deslizador de mayor amplitud es el correspondiente al del medio, o, en otras palabras, la masa 2; la segunda gráfica

correspondiente al modo 2, al ser comparada con el resultado experimental, puede notarse una pequeña variación en la amplitud de los deslizadores en contrafase y que el deslizador del medio, que debería permanecer en reposo como se muestra en la gráfica de la simulación, tiene una pequeña variación respecto a su equilibrio, por lo que puede decirse, que está entrando al fenómeno de resonancia [7].

En la comparación de la gráfica teórica y experimental para el modo normal 3, puede notarse, que estas son las que presentan más diferencia entre sí, pues mientras en la gráfica teórica, puede verse, que dos se encuentran en fase con una amplitud constante e igual y el del medio en contrafase con una amplitud mayor a la de los otros dos e igualmente constante, en la gráfica experimental se ve que, aunque se logran las condiciones para lograr el modo, los dos que se encuentran en fase, presentan un comportamiento parecido en su amplitud y el del medio, que se encuentra en contrafase, presenta mayor amplitud respecto a los otros dos, comparados en cierto instante de tiempo, puede notarse que ninguna de estas amplitudes es constante, como debería realmente ser.

4. ANEXOS

En el link dado a continuación, se encuentra el código de Python usado para la simulación y graficación de los modos normales teóricos, el trabajo principal usado como guía del problema y el cual fue mencionado en el estado del arte, los videos cortos que muestran el logro de cada modo e ilustran de una mejor manera estos mismos y las gráficas obtenidas experimentalmente para cada deslizador en cada modo normal con su respectivo error.

<https://drive.google.com/drive/folders/1xOb2Di29pbybWB-87elE5uiMYAYs-TP1>

5. CONCLUSIONES

-Se obtuvieron 4 resortes con constantes elásticas parecidas entre sí, menores a 10 N/m con una discrepancia máxima respecto al valor promedio de 4,2% y 3 objetos con una misma masa que permitieron una fácil visualización de los movimientos en el montaje.

-Se pudo hallar experimentalmente los tres modos normales de oscilación para tres masas acopladas mediante resortes.

-Se encontró un montaje apropiado que permitió la facilidad de hallar y recrear los modos normales de oscilación, como también facilitar la visualización de los movimientos de los deslizadores y resortes, permitiendo un análisis satisfactorio a través del programa Tracker.

-Se comparó los resultados obtenidos experimentalmente con los dados en la teoría, donde se comprueba la semejanza entre las fases y contrafases entre las curvas de los deslizadores, resultando una buena obtención de los modos normales, pero con algunas diferencias.

-Para mejorar el experimento, se sugiere minimizar las dificultades obtenidas de la siguiente forma: hallar 4 resortes que tengan una misma longitud y una misma constante elástica, menor a 10 N/m, encontrar un montaje que permita una menor fricción con las masas, y una manera más efectiva de acoplar los resortes entre las masas y paredes, para así, tener mejores resultados que los obtenidos en este artículo.

6. REFERENCIAS

- [1] (31 de Octubre de 2019). Obtenido de <https://es.wikipedia.org/wiki/Oscilaci%C3%B3n>
- [2] *Tracker. Video Analysis and Modeling Tool.* (s.f.). Obtenido de <https://physlets.org/tracker/>
- [3] Notas del curso de Física Básica III: Oscilaciones y Ondas
- [4] Marcelo Alonso, E. J. (1970). *Física. Volumen I: Mecánica.* Fondo educativo interamericano, S.A.
- [5] *Oscilaciones de tres partículas unidas por muelles elásticos.* (s.f.). Obtenido de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/tresAcoplados/tresAcoplados.htm>

- [6] Baird, D. C. (1995). *Experimentación Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.
- [7] Mesa, A. G. (2005). *Oscilaciones y Ondas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.