UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
Revista Científica
http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/index
CIDC

Didáctica de la Física

Introducción del concepto de probabilidad en Física desde la Mecánica Estadística

Introduction of the concept of probability in physics from statistical mechanics
Introdução do conceito de probabilidade na física a partir da mecânica estatística

Néstor Fernando Méndez Hincapié[1]

Resumen

Este trabajo presenta avances de la propuesta metodológica para introducir el concepto de probabilidad en Física para un sistema de muchas partículas, en este caso el gas ideal clásico. Se enfatiza los cambios en los patrones de explicación de sistemas físicos, apoyados en una hoja de cálculo para realizar el conteo de los diferentes modos de distribución de las partículas en tres estados. Esta propuesta se presenta bajo la metodología de Enseñanza por Investigación Orientada y busca promover en los estudiantes el razonamiento probabilista que les permita asociar los modos de distribución de las partículas con el equilibrio termodinámico. Se encuentra de este modo la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann sin el uso del cálculo diferencial lo que permite sea utilizado como recurso didáctico en la Educación Media.

Palabras clave: Distribución de Maxwell-Boltzmann, enseñanza de la física estadística, investigación orientada, probabilidad clásica, razonamiento probabilístico.

Abstract

This work presents advances of the methodological proposal to introduce the concept of probability in Physics for a system of many particles, in this case the classical ideal gas. It emphasizes the changes in the patterns of explanation of physical systems, supported by a spreadsheet to count the different modes of distribution of particles in three states. This proposal is presented under the Teaching by Oriented Research methodology and seeks to promote in the students the probabilistic reasoning that allows them to associate the

[1] Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Contacto: nfmendezh@upn.edu.co

distribution modes of the particles with the thermodynamic equilibrium. The Maxwell-Boltzmann distribution law is found in this way without the use of differential calculation, which allows it to be used as a didactic resource in Secondary Education.
Keywords: Classical probability, Maxwell-Boltzmann distribution, oriented research, probabilistic reasoning, teaching of statistical physics.

Resumo
Este trabalho apresenta avanços da proposta metodológica para introduzir o conceito de probabilidade em Física para um sistema de muitas partículas, neste caso o clássico gás ideal. Ele enfatiza as mudanças nos padrões de explicação dos sistemas físicos, apoiados por uma planilha para contar os diferentes modos de distribuição de partículas em três estados. Esta proposta é apresentada sob a metodologia do Ensino por Pesquisa Orientada e visa promover nos estudantes o raciocínio probabilístico que lhes permite associar os modos de distribuição das partículas com o equilíbrio termodinâmico. Desta forma, a lei de distribuição de Maxwell-Boltzmann é encontrada sem o uso de cálculo diferencial, o que permite que ela seja usada como um recurso de ensino no ensino secundário.
Palavras-chave: Distribuição de Maxwell-Boltzmann, ensino de física estatística, Pesquisa orientada, probabilidade clássica, raciocínio probabilístico.

INTRODUCCIÓN

En el marco del proyecto de Tesis del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Pedagógica Nacional, se presenta una propuesta para la enseñanza de la Mecánica Cuántica a nivel introductorio dentro de la formación de licenciados en Física. Este trabajo muestra parte de la propuesta, al analizar con fines didácticos, un sistema de muchas partículas distinguibles que sólo pueden estar en tres niveles de energía; esto es, que las partículas sólo pueden tomar tres valores de energía definidos, en este caso se encuentran igualmente espaciados con unidades arbitrarias propias desde la Mecánica Cuántica de sistemas dentro de pozos de potenciales. Este esquema tiene como finalidad exponer los patrones de explicación, basados en la probabilidad aplicados a los gases ideales clásicos.

El creciente interés en las últimas décadas por la enseñanza de la Física Cuántica en cursos introductorios a nivel universitario y de secundaria, ha representado un gran papel, no solo por los aportes tecnológicos a nuestra sociedad, o la mejor manera que tenemos actualmente de comprender el mundo microscópico, sino también por el papel que esta teoría ha tomado en el desarrollo de nuestra cultura y de la forma como se desarrolla la ciencia al poner de relieve la crisis de la física clásica (Sinarcas y Solbes, 2013).

Sin embargo, las dificultades de la enseñanza de la Física Cuántica abundan debido a la falta de una única interpretación de su formalismo matemático, eludido en la enseñanza habitual, que enfatiza más en una visión instrumentalista dejando de lado tanto los aspectos conceptuales básicos, como las diferentes interpretaciones que han surgido, obstaculizando así la comprensión por parte de los estudiantes (Greca y Freire, 2014).

Sinarcas y Solbes (2013) describen dentro de las dificultades en la enseñanza de la Física Cuántica que los estudiantes no están percibiendo un cambio conceptual respecto a la Física Clásica y siguen manteniendo las ideas de la teoría clásica determinista, pero, además, en su trabajo presentan, que tanto los libros de texto como los profesores a nivel secundaria poseen limitados conocimientos frente a las bases conceptuales de la mecánica cuántica y son replicadas a sus alumnos.

Es por tanto necesario describir los modos de explicación para la enseñanza de la física, es allí donde se articulan las formas de entender la naturaleza. Para ello se requiere reconocer que estos modos siguen un proceso histórico que está asociado a los tipos de preguntas y la elaboración de sus respuestas (Martínez, 1997); entonces, las explicaciones que empiezan a surgir para estudiar los fenómenos naturales a pequeña escala se fundamentan en la aleatoriedad y la probabilidad en contraposición al determinismo.

En el siglo XVII se desarrolló el patrón de explicación de los fenómenos naturales a partir de leyes, como es el caso de la Mecánica Newtoniana. Era posible derivarse de leyes universales deterministas, el futuro del mundo y sus elementos estaría inexorablemente determinado por las condiciones iniciales. Este patrón de explicación se impuso en todas las ramas de la física hasta el siglo XIX cuando Boltzmann incorpora los conceptos de la probabilidad para analizar el comportamiento de sistemas de muchas partículas. Es así como, la idea de azar incursionó en la física, inicialmente como producto de nuestra incapacidad de calcular las trayectorias de todas y cada una de las partículas que componen un gas, modificando las preguntas para referirnos a comportamientos estadísticos de conglomerados de estos sistemas.

La motivación de estas investigaciones se ha centrado en determinar las dificultades específicas que encuentran los estudiantes al abordar temas diversos. Desde este enfoque centrado en el aprendizaje significativo se plantea que es necesario un compromiso mental activo, y participación intelectual por parte de los estudiantes, que se consigue a partir del diseño de actividades enfocadas permanentemente en ellos, mediante preguntas orientadoras que ponen en juego sus capacidades y reconstruyen las diferentes explicaciones sobre los fenómenos abordados (McDermott, 2013).

En este orden de ideas, la propuesta que se presenta busca hacer explícito el papel de la probabilidad en la física estadística al abordar un sistema de N partículas en que sólo hay tres posibles niveles de energía en los que pueden estar estas partículas, y se requiere contar el número de maneras en que se pueden distribuir, sujetas a las condiciones de conservación del número de partículas y la energía total; por lo que se propone una secuencia de enseñanza de la Física Estadística a partir de la Enseñanza por Investigación Orientada (McDermott, 2013) basada en investigaciones sobre aprendizaje y enseñanza de la física Adicionalmente, se aborda el tema de la distribución de Maxwell-Boltzmann para gases ideales enfatizando en el problema de la probabilidad y los modos diferentes de distribuir las partículas en tres niveles de energía.

METODOLOGÍA

Teniendo en cuenta la idea de explicitar los cambios en los modos de explicación (Martínez, 1997; Sinarcas y Solbes, 2013), se propone una secuencia de enseñanza de la Física Estadística a partir de la Enseñanza por Investigación Orientada (McDermott, 2013) que se basa en investigaciones sobre aprendizaje y enseñanza de las ciencias basada en la disciplina, que en este caso es la física. La motivación de estas investigaciones se ha centrado en determinar las dificultades específicas que encuentran los estudiantes al abordar temas diversos.

El diseño del planteamiento se desarrolla 3 etapas: La Primera que consiste en la contextualización del sistema físico, gases ideales, con sus propiedades y características, la Segunda, el problema de distribuir pocas partículas en diferentes estados y una Tercera, que consiste en distribución de muchas partículas en tres estados.

Etapa 1. Se propone iniciar con algún experimento sencillo que permita dialogar con los estudiantes acerca de las propiedades físicas de los gases, que los dirija hacia la idea de modelarlos a partir de partículas puntuales que sólo interaccionan entre sí por medio de choques elásticos y cuya característica estará centrada en la velocidad o energía que estas partículas tengan en un estado determinado. En este punto se planearán preguntas como: si nos concentramos en un solo tipo de partículas dentro de un recipiente de paredes rígidas ¿qué variables me permiten diferenciar las maneras de estar del gas? ¿Estas variables toman valores iguales para cada partícula o son diferentes? Si son diferentes ¿cómo se distribuyen? Diferentes simulaciones consultadas en internet pueden apoyar en su comprensión como https://phet.colorado.edu/es/simulations/category/physics/heat-and-thermodynamics

Etapa 2. La propuesta de enseñanza consiste primero en determinar cómo repartir cinco partículas en tres compartimentos o cajas diferentes, identificando los modos en que estas se pueden distribuir, como lo muestra las cuatro primeras columnas de la tabla 1. La primera columna etiqueta la opción y las siguientes tres el número de partículas en cada caja. Posteriormente a cada opción le corresponde un número determinado de modos diferentes Ω en que se pueden llenar las cajas (columna 5 de la tabla 1). Para llenarlas, a los estudiantes se les otorga los resultados de las dos primeras opciones de la tabla 1, en la que se le especifica que debe diferenciar solamente entre cajas.

En estas opciones muestra que solo hay una manera de distribuir las cinco partículas en la primera caja. En la segunda opción hay cinco maneras diferentes de distribuir 4 partículas en la primera caja y una en la segunda, que corresponde a las cinco partículas que se pueden seleccionar para ocupar la segunda caja. Los estudiantes deben completar la columna 5.

Tabla 1. *Diferentes maneras de distribuir cinco (5) partículas en tres (3) cajas.*

Opción	**Caja1**	**Caja2**	**Caja3**	**Ω**	**U(ε)**
1	5	0	0	1	5
2	4	1	0	5	6
3	4	0	1	5	7
4	3	2	0	10	7
5	2	3	0	10	8

6	3	1	1	20	8
7	1	4	0	5	9
8	3	0	2	10	9
9	2	2	1	30	9
10	0	5	0	1	10
11	1	3	1	20	10
12	2	1	2	30	10
13	0	4	1	5	11
14	2	0	3	10	11
15	1	2	2	30	11
16	0	3	2	10	12
17	1	1	3	20	12
18	1	0	4	5	13
19	0	2	3	10	13
20	0	1	4	5	14
21	0	0	5	1	15

Fuente: Elaboración propia de los autores.

A cada caja se debe asociar un número que corresponde a una energía determinada que define el estado de las partículas que allí se encuentran. En este punto se debe tener cuidado. Se cuenta con diferentes partículas que a su vez tienen una energía determinada y que esta energía no puede ser cualquier valor, sino que toma algunos valores precisos, que para este caso son sólo tres valores o tres niveles de energía correspondiente a cada caja. La tabla 1 muestra los resultados de este ejercicio con los niveles de energía $E_1 = \varepsilon$, $E_2 = 2\varepsilon$ y $E_3 = 3\varepsilon$, donde ε es una unidad arbitraria de energía.

Las opciones 7, 8 y 9 se han resaltado para analizar el caso en que este sistema tenga energía total $U = 9\varepsilon$. ¿Cuál de estas tres opciones o distribuciones tomará el sistema? Hay 5 modos distintos de distribuir las partículas en la opción 7, 10 en la opción 8 y 30 en la opción 9. El sistema tiende al equilibrio, que corresponde a la configuración más probable que coincide con la que más modos diferentes de obtener dicha partición puede tener. Para este caso sería la opción 9 con $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ y $n_3 = 1$. Las otras dos opciones son menos probables y no son estados de equilibrio.

Con el propósito de que los estudiantes cuenten rápidamente diferentes formas de distribuir las partículas es necesario desarrollar una ecuación ya que en este punto identifican la complejidad de hacerlo aun cuando se trata de un número relativamente pequeño de partículas. A continuación, se muestra este desarrollo con un ejemplo corto.

Suponga entonces que se tienen N partículas, y que en el primer nivel habrá n_1 partículas, en el segundo nivel habrá n_2 y en el tercer nivel habrá n_3. Se debe cumplir que $N = n_1 + n_2 + n_3$.

Para llenar el primer nivel, se va escogiendo partícula por partícula. ¿De cuántas maneras podemos escoger la primera partícula? Como hay N partículas entonces podemos escoger la primera partícula de N formas diferentes. Para la segunda partícula ahora tenemos sólo $N-1$ partículas disponibles porque ya se escogió la primera, para la tercera partícula tendremos $N-2$ maneras diferentes, y así sucesivamente hasta llegar a $N - n_1 + 1$.

Por lo tanto, el número total de veces en que se pueden escoger las n_1 partículas será:

$$N(N-1)(N-2)\cdots(N-n_1+1) = \frac{N!}{(N-n_1)!}$$ [2]

Se pueden distinguir las partículas, pero en el mismo nivel no hay diferencia entre escoger primero la partícula "A" y luego la "B" con escoger primero la "B" y después la "A". Es decir, se pueden permutar dentro de este nivel. ¿Cuántas permutaciones hay en n_1 partículas?

Entonces el número de maneras de escoger las primeras n_1 partículas será:

$$\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!}$$

Por ejemplo, si $N = 5$ y $n_1 = 2$ entonces el número de maneras diferentes de escoger 2 partículas de entre un total de 5 será:

$$\frac{N!}{n_1!\,(N-n_1)!} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{120}{2\times 6} = \frac{120}{12} = 10$$

[2] El factorial de un número a está definido como $a! = a(a-1)(a-2)\cdots 2\cdot 1$, con $a \in \mathbb{Z}^{+}$. Y $0! = 1$

Si se etiquetan las partículas como A, B, C, D y E, entonces las maneras de escoger 2 de ellas serán: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

Ahora vamos a llenar el segundo nivel, pero no disponemos de todas las partículas, sino de $N - n_1$, porque ya se escogieron n_1 para el primer nivel. De este total se quieren escoger n_2 partículas. Teniendo en cuenta que se permutan entonces el número de maneras diferentes será:

$$(N - n_1)(N - n_1 - 1)(N - n_1 - 2) \cdots (N - n_1 - n_2 + 1) = \frac{(N - n_1)!}{n_2!\,(N - n_1 - n_2)!}$$

Finalmente, para el tercer nivel se tiene:

$$\frac{(N - n_1 - n_2)!}{n_3!\,(N - n_1 - n_2 - n_3)!}$$

Entonces, dadas N partículas, el número de formas Ω en que podemos distribuir n_1 partículas del primer nivel, n_2 partículas para el segundo nivel y n_3 partículas para el tercer nivel será el producto de cada uno de los resultados anteriores:

$$\Omega = \frac{N!}{n_1!\,(N - n_1)!}\frac{(N - n_1)!}{n_2!\,(N - n_1 - n_2)!}\frac{(N - n_1 - n_2)!}{n_3!\,(N - n_1 - n_2 - n_3)!} = \frac{N!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$$

Etapa 3. Se requiere hacer un conteo con más partículas y por lo tanto se necesita simplificar la manera de contar. El estudiante se enfrenta con la necesidad de introducir los conceptos de combinatoria y permutaciones para resolver el problema y puede incluso usar la hoja de cálculo para realizar el conteo. Textos tradicionales como el de Alonso y Finn (1986) indica cómo se va realizando el conteo hasta llegar a la siguiente relación:

$$\Omega = \frac{N!}{n_1!\,n_2!\,n_3! \cdots} \tag{1}$$

Se propone entonces un nuevo problema que el estudiante debe resolver: dadas 4000 partículas, ¿cuál es la distribución de equilibrio si la energía total es de 6300 ε? Cuando el número de partículas es muy grande se utilizan las técnicas del cálculo diferencial para hallar el máximo de Ω como función de $n_1, n_2, n_3, \cdots$, restringido al número total de partículas N y a la energía total U. Maximizar la función implica $\frac{\partial \Omega}{\partial n_i} = 0$ para toda $i = 1,2,3 \cdots$ bajo las restricciones de conservación de la energía y del número de partículas (Alonso y Finn, 1986). Cuando se logra alcanzar este máximo significa que un pequeño cambio en la distribución de las partículas (valores de n_i y por lo tanto en Ω) es prácticamente nulo. Dicho de otro modo, dos distribuciones Ω_a y Ω_b son casi iguales si el cociente entre ellas es muy cercano a 1. Con esta idea se propone introducir una manera de calcular la distribución más probable al problema que se les ha planteado a los estudiantes sin recurrir a las herramientas del cálculo diferencial.

Sea Ω_a el número de modos diferentes en que se puede obtener una partición n_1, n_2 y n_3. Sea Ω_b correspondiente a la partición $n_1{}'$, $n_2{}'$ y $n_3{}'$ que difiere de la anterior en que dos partículas del estado intermedio se transfieren, una al estado 1 y la otra al estado 3. Este proceso no lleva un cambio de la energía total ni del número total de partículas. Al calcular Ω_b/Ω_a con la ecuación (1), se obtiene:

$$\frac{\Omega_b}{\Omega_a} = \frac{n_2(n_2 - 1)}{n_1{}' n_3{}'} \tag{2}$$

Si el valor es mayor que 1 significa que este proceso lleva a un estado más probable. De lo contrario a un estado menos probable.

La idea es primero hacer una selección arbitraria de la distribución inicial que conserve el número de partículas y la energía total dada. Luego realizar el proceso de quitar dos partículas del estado intermedio y llevar una al estado 1 otra al estado 3 y calcular la ecuación (2). Si el valor obtenido es mayor que 1 se repite el proceso hasta alcanzar el valor de 1 entre dos distribuciones consecutivas y esta será la distribución más probable. La tabla 2 muestra la implementación de esta iteración en una hoja de cálculo con $N = 4000$ partículas y $U = 6300\varepsilon$, parte de $n_1 = 2000$, $n_2 = 1700$ y $n_3 = 300$. Después de 277 iteraciones se llega a $n_1{}' = 2277$, $n_2{}' = 1146$ y $n_3{}' = 577$.

Tabla 2. *Hoja de cálculo (Excel) que implementa la iteración para buscar la distribución más probable en tres niveles de energía.*

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	1	2	3	$\boldsymbol{U}(\varepsilon)$	$\boldsymbol{\Omega_b/\Omega_a}$
2	2000	1700	300	6300	
3	2001	1698	301	6300	4,79544281
4	2002	1696	302	6300	4,76593936
5	=A4+1	=B4-2	=C4+1	=A5*A1+B5*B1+C5*C1	=B4*(B4-1)/(A5*C5)
…	…	…	…	…	…
278	2276	1148	576	6300	1,00791319
279	2277	1146	577	6300	1,00222784
280	2278	1144	578	6300	0,99657169

Fuente: Elaboración propia de los autores.

Esta distribución relaciona el número de partículas n_i que hay en el estado i de energía E_i a través de una función exponencial decreciente del tipo $n_i = Ae^{-\beta E_i}$ que corresponde a la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann. La figura 1 muestra el ajuste obtenido en la misma hoja de cálculo donde se encontró que $A = 4391,1$ y $\beta = 0,675\ \varepsilon^{-1}$.

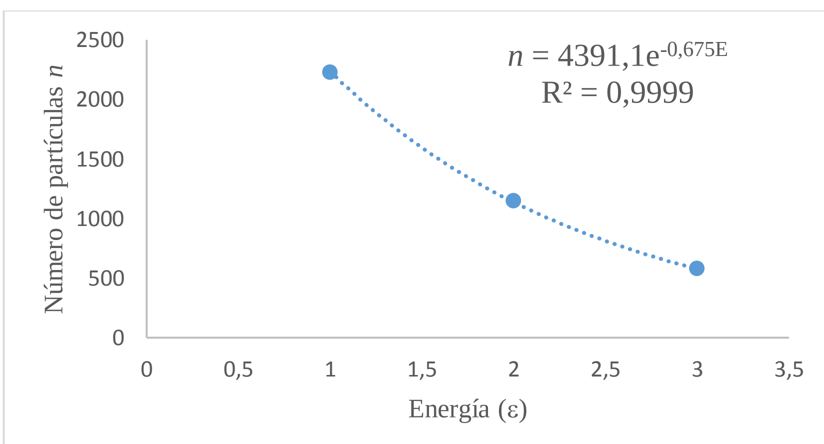

Figura 1. Distribución de las partículas en función de la energía. Fuente: Elaboración propia de los autores.

Posteriormente se plantea la pregunta ¿Qué se debe hacer si el resultado inicial dado por la ecuación (2) fuese menor que 1?

Se puede sugerir, con las mismas 4000 partículas, ver cómo se alcanza el estado más probable con diferentes energías totales, comenzando con $U = 4000\,\varepsilon$, obtener la distribución más probable, ajustar la función exponencial decreciente a n_i y E_i para obtener diferentes valores de β. Finalmente tabular U vs β e identificar el tipo de relación.

LIMITACIONES

Esta propuesta implica dos supuestos fundamentales. Primero, el diseñó de esta hoja de cálculo no tiene en cuenta la *degeneración* de los niveles de energía, esto es, que diferentes estados tengan la misma energía, lo que requeriría cambiar de enfoque en la programación y hacer una contabilidad adicional para la distribución dentro de cada nivel de energía. Al no haber degeneración permite en la *etapa 3* de esta propuesta trabajar con tres estados o niveles de energía, y esto facilita la manera de calcular variaciones en las distribuciones sujeto a las restricciones de conservación del número de partículas y de la energía total. Por el contrario, la degeneración implicaría, para los mismos tres niveles de energía, aumentar el número de estados en los que se pueden distribuir las partículas, lo cual hace más difícil el conteo de cambio de posibilidades.

En segundo lugar, en el esquema de la hoja de cálculo propuesto es posible distinguir las partículas entre sí en el sistema y esto se asume en el conteo que se muestra en la ecuación (1), lo cual no es cierto para las partículas fundamentales, como electrones y fotones que se tratan con las estadísticas cuánticas. Esto permite maneras particulares de distribuir y de distinguir entre distribuciones que puedan tenerse en cuenta en la *etapa 2* de esta propuesta.

En la distribución de Maxwell-Boltzmann las partículas son distinguibles y esto resulta, por ejemplo, en que las simulaciones de los gases ideales como la que se propone al final de la *etapa 1* es posible realizar el seguimiento de una partícula, y este es el caso de los gases ideales clásicos. Sin embargo, no podría existir una simulación equivalente de partículas fundamentales debido precisamente a la indistinguibilidad de las partículas.

Entonces, al introducir la indistinguibilidad de las partículas junto con la degeneración de los niveles de energía, el conteo dado por la ecuación (1) cambiaría, pero requiere un enfoque distinto en la hoja de cálculo para encontrar mínimas variaciones haciendo más complejas las operaciones para estimar los estados de equilibrio.

CONCLUSIONES

Se ha planteado una propuesta que muestra maneras diferentes de proceder para analizar un sistema de muchas partículas, particularmente asociando el equilibrio de un sistema termodinámico y los modos diferentes de distribuir dichas partículas en diferentes niveles de energía. Para ello es necesario conducir a los estudiantes al concepto de probabilidad clásica a través del conteo de posibilidades de distribuir las partículas.

Con este modelo en una hoja de cálculo es posible llegar a la distribución de partículas de Maxwell-Boltzmann sin recurrir al cálculo diferencial para maximizar Ω, haciéndolo óptimo para ser llevado a la Educación Media.

Por otro lado, este sistema no presenta ni indistinguibilidad de las partículas ni *degeneración* en los niveles de energía, que son elementos necesarios para abordar las estadísticas cuánticas, y requiere asumir un modelo diferente para distribuir las partículas en los diferentes estados posibles. Un trabajo futuro con pocas partículas se planea para abordar estos sistemas.

Esta propuesta busca que los estudiantes asuman un compromiso por el aprendizaje, de la física en este caso, que logre una mayor participación intelectual por parte de ellos. De esta manera las actividades se desarrollarán en la clase y no se limitan al discurso tradicional del profesor.

REFERENCIAS

Alonso, M. y Finn, E. (1986). *Fundamentos cuánticos y estadísticos, vol. 3 de Física*. Addison-Wesley Iberoamericana.

Greca, I., y Freire, O. (2014). Meeting the challenge: Quantum physics in introductory physics course. In *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, pages 183-209. Springer.

Martínez, S. (1997). *De los efectos a las causas. Sobre la historia de los patrones de explicación científica*. Paidos.

McDermott, L. (2013). Improving the teaching of science through discipline-based education research: An example from physic. *European Journal of Science and Mathematics Education*, *1*(1):1-12.

Sinarcas, V., y Solbes, J. (2013). Dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de la física cuántica en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *31*(3):9-25.